

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
Ордена Ленина Сибирское отделение  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ  
им. Г.И. Будкера СО РАН

В.А. Таюрский

МС ГЕНЕРАТОР  
ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

ИЯФ 2008-35

НОВОСИБИРСК  
2008

# Содержание

1	Введение. Классическое сечение	5
2	Алгоритм моделирования	7
3	Учёт эффекта ограничения прицельных параметров	9
4	Учёт углового разброса частиц в пучке	14
5	Программные компоненты генератора	18
6	Заключение	23
A	Сечения с ограничением прицельных параметров	24
A.1	Точные формулы. Результаты расчёта . . . . .	24
A.2	Приближённые формулы. Сравнение с точными . . . . .	28
B	Формулы для вычисления $K_0(x)$ , $K_1(x)$ , $K_2(x)$	30
	Список литературы	31

# МС генератор тормозного излучения

*В.А. Талорский*

Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера  
630090, Новосибирск, Россия

## Аннотация

В работе описана программа BremGen – генератор событий однократного тормозного излучения ( $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma$ ) для области малых углов. При моделировании предусмотрена возможность учёта эффекта ограничения прицельных параметров в тормозном излучении и углового разброса частиц в пучке. Генератор предназначен для определения сечения регистрации по однократному тормозному излучению в мониторе светимости детектора КЕДР, для расчёта фона в системе регистрации рассеянных электронов детектора, для оценки времени жизни пучков за счёт их тормозного излучения. Для иллюстрации приведён ряд расчётов при энергии эксперимента ВЭПП-4М/КЕДР. Генератор рассчитан на энергию пучков от  $2 \times 0.1$  ГэВ до  $2 \times 7.5$  ГэВ. Минимальная энергия фотонов тормозного излучения – 1.5 МэВ.

## MC generator of bremsstrahlung

*V.A. Tayursky*

Budker Institute of Nuclear Physics  
630090, Novosibirsk, Russia

## Abstract

A program BremGen – the generator of single bremsstrahlung events ( $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma$ ) at small angles is described in this work. In the simulation there is a possibility to account the effect of impact parameters limitation in the bremsstrahlung as well as the angular spread of particles in the beam. The generator is used for calculation of detection cross section for the luminosity monitor of the KEDR detector, for calculation of background in the scattered electrons tagging system, and for estimate of the time of life of beams due to their bremsstrahlung. Some results of the calculation at the energy of VEPP-4M/KEDR experiment are presented as illustration. The energy of beams in the generator is from  $2 \times 0.1$  up to  $2 \times 7.5$  GeV. Minimal energy of bremsstrahlung photons is 1.5 MeV.

© *Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера СО РАН*



# 1 Введение. Классическое сечение

Процесс однократного тормозного излучения (ОТИ) играет важную роль в эксперименте ВЭПП-4М/КЕДР. Он используется для оперативного измерения светимости [1] и является одним из основных фонов для СРРЭ детектора [2].

Процесс однократного тормозного излучения в низшем порядке теории возмущений описывается 8 диаграммами. Однако, когда все конечные частицы излучаются под малыми углами к оси пучков и являются ультрарелятивистскими, то возможно рассматривать отдельно излучение электрона и позитрона и пренебречь аннигиляционными диаграммами и интерференцией [3].

В основе генератора событий  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma$  под малыми углами лежат формулы для излучения в одну сторону из работы [3]. Учитываемые диаграммы (излучающая частица — электрон) показаны на Рис.1.

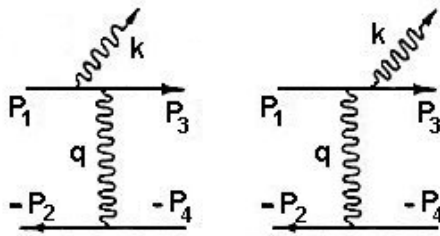


Рис. 1. Диаграммы низшего порядка процесса  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma$ .

Далее считается, что пучки  $e^+$  и  $e^-$  равной энергии сталкиваются под нулевым углом. Дифференциальное распределение по энергии ( $E_\gamma$ ) и перпендикулярному импульсу ( $k_\perp$ ) тормозного фотона имеет вид ([3], формула (3.5)):

$$\frac{d^3\sigma_0}{dx d^2k_\perp} = 2\alpha r_0^2 \frac{x}{\pi b^2 c^2} \left\{ 2 \left[ 1 + (1-x)^2 - \frac{4m^2 x^2 (1-x)}{b} + \frac{4m^4 x^4 (1-x)}{b^2} \right] (L-2) \right. \\ \left. + 2x^2 + (2-x)^2 \right\}. \quad (1)$$

Здесь  $x = E_\gamma/E_b$ ,  $E_b$  – энергия пучка,

$$L = \ln \frac{4E_b^2(1-x)}{m^2 c^4 x}, \quad b = m^2 x^2 + k_\perp^2/c^2,$$

$m$  – масса электрона,  $c$  – скорость света,

$\alpha$  – постоянная тонкой структуры,  $r_0$  – классический радиус электрона.

Формула (1) получена в предположении неограниченных прицельных параметров в процессе тормозного излучения.

После интегрирования по азимутальному углу формула (1) приобретает вид:

$$\frac{d^2\sigma_0}{dx dn} = 4\alpha r_0^2 \frac{n}{x(1+n^2)^2} \left\{ A + BL \right\},$$

где выполнена замена  $n = \gamma\theta$ ,  $\theta$  – угол вылета фотона ОТИ относительно направления излучающей частицы,  $\gamma = E_b/mc^2$  – релятивистский фактор пучка.

$$A = -(2-x)^2 + \frac{16n^2(1-x)}{(1+n^2)^2}, \quad B = 4(1-x) + 2x^2 - \frac{8n^2(1-x)}{(1+n^2)^2}.$$

Максимальная энергия фотона тормозного излучения в процессе равна

$$E_b \cdot (1 - 1/\gamma^2)$$

и отвечает кинематике, когда конечные  $e^+$  и  $e^-$  имеют одинаковые импульсы, направленные противоположно импульсу тормозного фотона. Но формула (1) получена для процесса под малыми углами. Поэтому в программе используется

$$(E_\gamma)_{\max} = E_b \cdot (1 - 1/\gamma). \quad (2)$$

Спектр фотонов ОТИ, полученный интегрированием двойного дифференциального распределения (1), имеет вид (формула (3.6) из [3]):

$$\frac{d\sigma_0}{dx} = 4\alpha r_0^2 \frac{1}{x} \left[ \frac{4}{3}(1-x) + x^2 \right] \left( L - \frac{1}{2} \right). \quad (3)$$

Формулы (1) и (3) далее называются классическими, поскольку также будут рассматриваться формулы, учитывающие ограничение больших прицельных параметров.

Расчитанный по формуле (3) спектр фотонов тормозного излучения при энергии  $E_b = 1.843$  ГэВ ( $\psi'$ ) показан на Рис. 2.

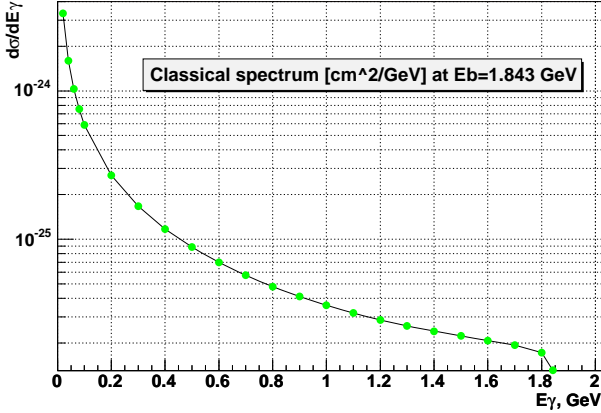


Рис. 2. Спектр тормозных фотонов при энергии пучка  $E_b=1.843$  ГэВ.

## 2 Алгоритм моделирования

В генераторе BremGen в электронном (в направлении оси  $+Z$ ) или позитронном направлении моделируются 3-х импульсы фотона тормозного излучения и излучившей частицы (другая частица не рассматривается). При моделировании предусмотрена возможность учёта эффекта ограничения прицельных параметров в тормозном излучении, а также гауссовского углового разброса частиц в сталкивающихся пучках.

В этом разделе описано моделирование на основании классического сечения, приведены используемые при моделировании формулы. Учёт вышеупомянутых эффектов будет описан позднее, в разделах 3 и 4.

После интегрирования по азимутальному углу вылета фотона из (1) получаем

$$d\sigma_0(x, y) = 2\alpha r_0^2 \cdot C_1^{-1} f_1(x) dx \cdot C_2^{-1} f_2(x, y) dy \cdot x^2 \left\{ \dots \right\}, \quad (4)$$

где  $y = k_\perp^2/(mc)^2$ ,  $f_1$  и  $f_2$  – нормированные на 1 функции распределения,

$C_1, C_2$  – нормировочные константы, относящиеся к  $f_1$  и  $f_2$ , соответственно, фигурными скобками обозначено то же выражение, что в формуле (1).

Величина  $x$  моделируется в интервале  $x_{\min} \div x_{\max}$  по распределению:

$$\frac{dW}{dx} = f_1(x) = C_1 \frac{1}{x}, \quad C_1^{-1} = \ln \frac{x_{\max}}{x_{\min}}, \quad (5)$$

где  $x_{\min} = (E_\gamma)_{\min}/E_b$ ,  $x_{\max} = (E_\gamma)_{\max}/E_b$ .

В приведённых формулах  $(E_\gamma)_{\min}$  – параметр генератора,  $(E_\gamma)_{\max}$  – максимальная энергия фотонов тормозного излучения (2). Из (5) имеем

$$\bar{x} = x_{\min} \cdot \left( \frac{x_{\max}}{x_{\min}} \right)^{\xi_1},$$

где  $\xi_1$  – случайное число, равномерно распределённое в интервале (0,1).

После того, как сгенерирована величина  $x$  (полученное значение обозначено  $\bar{x}$ ), моделируется величина  $y$  по функции распределения:

$$\frac{dW}{dy} = f_2(\bar{x}, y) = C_2 \frac{1}{[\bar{x}^2 + y]^2}, \quad C_2^{-1} = \frac{1}{\bar{x}^2} - \frac{1}{\bar{x}^2 + \gamma^2(1 - \bar{x})^2}, \quad (6)$$

где  $0 \leq y \leq \gamma^2(1 - \bar{x})^2$ . Из (6) для переменной  $y$  имеем (полученное значение обозначено  $\bar{y}$ ):

$$\bar{y} = \bar{x}^2 \left( \frac{1}{D} - 1 \right); \quad D = 1 - \xi_2 \left[ 1 - \frac{1}{1 + \gamma^2(1 - \bar{x})^2/\bar{x}^2} \right],$$

где  $\xi_2$  – случайное число, равномерно распределённое в интервале (0,1). Сгенерированным событиям приписывается вес (см. (4), без фактора  $2\alpha r_0^2$ )

$$F = C_1^{-1} \cdot C_2^{-1} \cdot \bar{x}^2 \cdot \left\{ \dots \right\} = \ln \frac{x_{\max}}{x_{\min}} \cdot \frac{\gamma^2(1 - \bar{x})^2}{\bar{x}^2 + \gamma^2(1 - \bar{x})^2} \cdot \left\{ \dots \right\}.$$

Далее, по методу Неймана, получаются события с весом 1. Максимальный вес для этой процедуры определяется в генераторе перед началом моделирования. Эффективность моделирования событий с весом 1 составляет 20 – 30%.

В завершение моделирования фотон получает энергиюю  $\bar{x} \cdot E_b$ , а электрон –  $(1 - \bar{x}) \cdot E_b$ . Угол  $\theta$  фотона с осью Z равен  $\arcsin\{\sqrt{\bar{y}}/(\gamma\bar{x})\}$ , а электрона –  $\vartheta = \arcsin\{\sqrt{\bar{y}}/\sqrt{\gamma^2(1 - \bar{x})^2 - 1}\}$ . Далее моделируется случайный азимутальный угол фотона  $\varphi = 2\pi \cdot \xi_3$ , где  $\xi_3$  – случайное число,



равномерно распределённое в интервале  $(0,1)$ , направление вылета электрона в азимутальной проекции – противоположное. Также по набранной статистике вычисляется полное сечение.

### 3 Учёт эффекта ограничения прицельных параметров

Процесс тормозного излучения обладает той особенностью, что в него дают вклад малые передачи импульса, отвечающие большим расстояниям, на которых происходит формирование излучения. Поэтому на сечение данного процесса оказывают влияние макроскопические эффекты, такие как многократное рассеяние частиц в веществе, отклонение в магнитном поле, ограничение прицельных параметров и другие. Как было установлено в экспериментах на ВЭПП-4 в начале 1980-х годов [4] и затем получено теоретически [5], [6], наиболее существенным из них, приводящим к уменьшению эффективного сечения ОТИ, является ограничение прицельных параметров поперечным размером пучка.

Необходимость учёта этого эффекта может быть получена из следующих оценок. Как известно, процесс тормозного излучения в области малых поперечных переданных импульсов можно рассматривать как комптоновское рассеяние эквивалентных фотонов, испускаемых одной из сталкивающихся частиц, на другой:

$$d\sigma = d\sigma_C dn, \quad (7)$$

где  $dn$  – число эквивалентных фотонов,  $d\sigma_C$  – дифференциальное сечение комптоновского рассеяния. Число эквивалентных фотонов (в системе коллайдера) при  $q_\perp \ll mc$  равно [8]:

$$dn = \frac{\alpha}{\pi} \frac{d\omega_v}{\omega_v} \frac{dq_\perp^2}{q_\perp^2 + (\hbar^2\omega_v/\lambda_C E_b)^2}, \quad (8)$$

где  $\hbar\omega_v$  – энергия эквивалентного фотона,  $q_\perp$  – его поперечный импульс,  $\lambda_C = 3.8 \cdot 10^{-11}$  см – (комптоновская длина волны электрона)/ $2\pi$ . Как видно из (8), облако эквивалентных фотонов представляет диск с характерным радиусом

$$\rho_0 \sim \frac{\hbar}{(q_\perp)_{\min}} \sim \lambda_C \frac{E_b}{\hbar\omega_v}. \quad (9)$$

Основной вклад в сечение комптоновского рассеяния происходит из кинематики, когда эквивалентный фотон с энергией  $\hbar\omega_v \ll E_b$  рассеива-

ется обратно на встречном пучке. Энергия рассеянного эквивалентного фотона — фотона тормозного излучения, при этом составляет

$$E_\gamma \approx \frac{E_b^2}{E_b + m^2 c^4 / (4\hbar\omega_v)}. \quad (10)$$

Из (10) получаем энергию эквивалентных фотонов, которые дают основной вклад в сечение:

$$\hbar\omega_v \approx \frac{E_\gamma}{4\gamma^2(1 - E_\gamma/E_b)}. \quad (11)$$

Подставляя это выражение для  $\hbar\omega_v$  в (9), получаем:

$$\rho_0 \sim \lambda_C \frac{4\gamma^2(E_b - E_\gamma)}{E_\gamma}.$$

Условие, при котором в тормозном излучении будет сказываться ограничение прицельных параметров:  $\rho_0 \gtrsim a$ , где  $a$  — наименьший поперечный размер пучка, в рассматриваемом случае  $\sigma_y$  (Таблица 1). Окончательно, этот критерий можно записать в виде

$$\mathcal{K} = \frac{\rho_0}{a} = \frac{4\lambda_C \gamma^2 (E_b - E_\gamma)}{a E_\gamma} \gtrsim 1. \quad (12)$$

При  $\mathcal{K} \ll 1$  для расчёта спектра можно пользоваться классическими формулами, при  $\mathcal{K} \gtrsim 1$  — нужно учитывать ограничение прицельных параметров. Этот эффект должен проявляться на ВЭПП-4М при энергии пучка  $E_b = 1.843$  ГэВ и  $x = E_\gamma/E_b \sim 0.01 \div 0.1$ :

$$\mathcal{K} = 3.3 \frac{1-x}{x} = 30 \div 330.$$

Для ВЭПП-2000 при энергии пучка  $E_b = 0.9$  ГэВ,  $E_\gamma \ll E_b$  и  $a = 0.005$  см

$$\mathcal{K} = \frac{90}{E_\gamma [\text{МэВ}]}$$

эффект также должен иметь место при  $E_\gamma$  несколько десятков МэВ и ниже.

Таблица 1. Параметры пучков ВЭПП-4М в месте встречи в области  $\psi'$  ( $E_b=1.843$  ГэВ).

Горизонтальный бетатронный размер $\sigma_{x\beta}$	0.012 см
Полный горизонтальный размер $\sigma_x$	0.037 см
Вертикальный размер $\sigma_y = \sigma_{y\beta}$	0.0006 ÷ 0.0009 см
Продольный размер $l$	5 см
Горизонтальный угловой разброс $\sigma_{x\beta}/\beta_x$	$1.7 \cdot 10^{-4}$ Рад
Вертикальный угловой разброс $\sigma_{y\beta}/\beta_y$	$(1.2 \div 1.8) \cdot 10^{-4}$ Рад

В работах [5], [6], [7] получены формулы для энергетического спектра фотонов тормозного излучения с учётом эффекта ограничения больших прицельных параметров. При их выводе предполагается, что угловой разброс частиц в пучке не приводит к изменению всех поперечных размеров за время столкновения. Параметры пучков ВЭПП-4М удовлетворяют этому условию:

$$\frac{\Delta a}{a} \sim \frac{l\theta}{a} = (6 \div 2) \cdot 10^{-2} \ll 1.$$

Эти формулы и ряд их сравнений друг с другом приведены в Приложении А. Результаты расчёта по формулам из работ [5] и [7] близки между собой (см. Таблицы 2,3 в Приложении А). В генераторе и в расчётах, которые приводятся ниже, использованы более удобные для численного счёта формулы из работы [5].

Классический (3) и поправленный спектры фотонов тормозного излучения приведены на Рис. 3. Из рисунка видно, что ограничение больших прицельных параметров при тормозном излучении приводит к искажению низкоэнергетической части спектра тормозных квантов, которая становится более пологой. В мониторе светимости, где регистрируются фотоны с энергией больше некоторой, их число уменьшается по сравнению с расчётом по классической формуле.

На Рис. 4 показана величина поправки  $\delta = 1 - (d\sigma/dE_\gamma)_{corr}/(d\sigma_0/dE_\gamma)$  для дифференциального сечения за счёт эффекта ограничения больших прицельных параметров при тормозном излучении.

На Рис. 5 показана величина этой поправки  $\Delta = 1 - \sigma_{corr}/\sigma_0$  для полного сечения в зависимости от порога  $(E_\gamma)_{thr}$ .

В мониторе светимости детектора КЕДР по тормозному излучению используется порог по энергии фотонов около 300 МэВ. Был выполнен ряд расчётов поправки к полному сечению с порогом  $300 \pm 50$  МэВ при

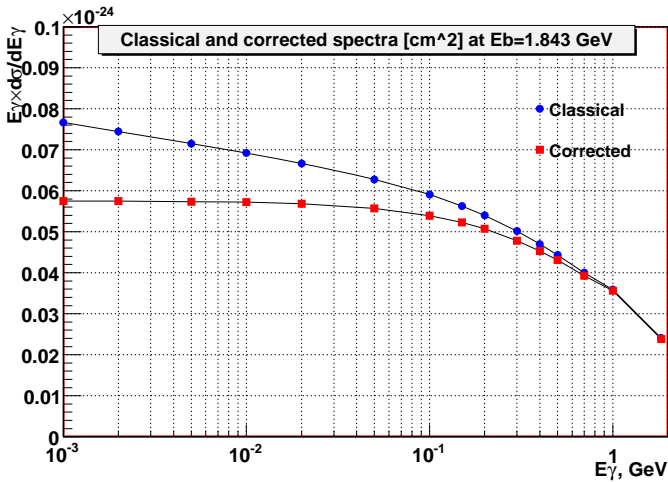


Рис. 3. Классический и поправленный спектры фотонов тормозного излучения при энергии  $E_b = 1.843$  ГэВ.  $\sigma_x = 0.037$  см,  $\sigma_y = 0.0006$  см.

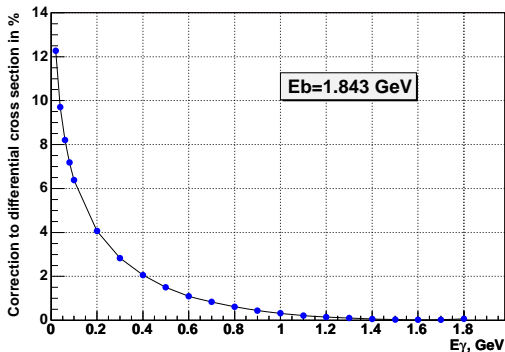


Рис. 4. Поправка (%) к дифференциальному сечению.  $\sigma_x = 370$  мкм,  $\sigma_y = 6$  мкм.

различных размерах пучков. Расчёты показали, что величина поправки при условии  $\sigma_x \gg \sigma_y$  практически зависит только от минимального — вертикального размера пучков  $\sigma_y$  в области возможных значений этих параметров ВЭПП-4М. Результаты расчётов для широкой области значений  $\sigma_x = 0.01 \div 1$  см и  $\sigma_y$  показаны на Рис. 6 для  $E_b = 1.843$  ГэВ.

Основой моделирования, выполняемого в генераторе событий, являются формулы, полученные в рамках стандартной КЭД (см. раздел 2).

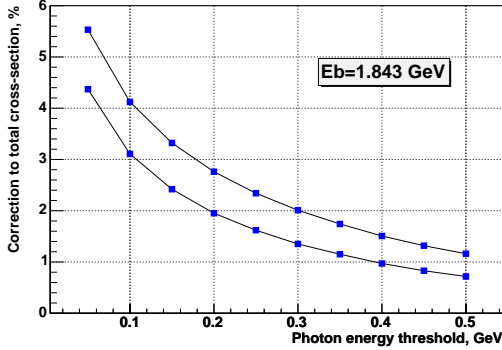


Рис. 5. Поправка (%) к полному сечению в зависимости от порога по энергии фотонов. Верхняя кривая:  $\sigma_x = 370$  мкм,  $\sigma_y = 6$  мкм; нижняя кривая:  $\sigma_x = 370$  мкм,  $\sigma_y = 9$  мкм.

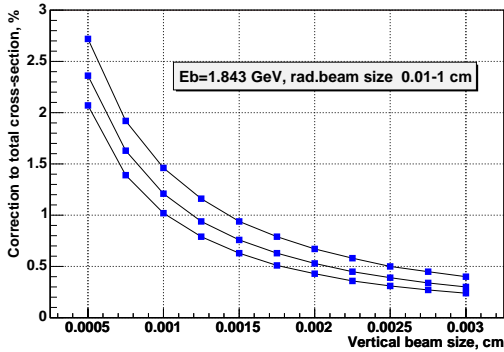


Рис. 6. Поправка (%) к полному сечению тормозного излучения в зависимости от вертикального размера  $\sigma_y$ . Порог по энергии фотонов: 250 МэВ (верхняя кривая), 300 МэВ (средняя кривая) и 350 МэВ (нижняя кривая).

Так как угловое распределение тормозных фотонов слабо зависит от их энергии, а формулы для тормозного излучения с учётом эффекта ограничения прицельных параметров получены только для энергетического спектра, то в генераторе данный эффект учитывается по методу Неймана с использованием для отбраковки функции  $(d\sigma/dE_\gamma)_{corr}/(d\sigma_0/dE_\gamma)$ . Для рассматриваемых параметров пучков и  $E_\gamma$  поправка мала (Рис. 4), поэтому эффективность высокая.

## 4 Учёт углового разброса частиц в пучке

После того, как сгенерирован угол  $\theta$  тормозного фотона с осью пучков, моделируется случайный азимутальный угол и вычисляются горизонтальная ( $\theta_x^0$ ) и вертикальная ( $\theta_y^0$ ) проекции угла  $\theta$ . Далее, отдельно к  $\theta_x^0$  и  $\theta_y^0$  может быть добавлен (при включении соответствующей опции генератора) угол, обусловленный гауссовским угловым разбросом частиц в пучке. Угловые разбросы частиц в пучке в месте встречи являются параметрами генератора. Они равны:  $\sigma_{\theta_x} = \sigma_{x\beta}/\beta_x$  - по горизонтали и  $\sigma_{\theta_y} = \sigma_{y\beta}/\beta_y$  - по вертикали<sup>1</sup>. Для более точного моделирования угловых разбросов нужно разыгрывать точку взаимодействия на оси Z, вычислять соответствующие этой точке  $\sigma_{\theta_x}$ ,  $\sigma_{\theta_y}$ , после чего выполнять моделирование углов  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ . Для моделирования используются стандартные формулы. Например, для  $\theta_x$ :

$$\theta_x = \theta_x^0 + \sigma_{\theta_x} \cdot \sqrt{-2 \ln \eta_1} \cdot \cos(2\pi\eta_2),$$

где  $\eta_1$  и  $\eta_2$  - случайные числа в интервале (0,1).

Дифференциальное (Рис. 7,8) и интегральное (Рис. 9,10) распределения по горизонтальной и вертикальной проекции угла тормозных фотонов с энергией больше порога, равного 250 МэВ, показаны на следующих далее рисунках. В расчёте использовались данные Таблицы 1: горизонтальный (бетатронный) и вертикальный разбросы характеризуются  $\sigma_{\theta_x} = 0.617/\gamma$ ,  $\sigma_{\theta_y} = 0.433/\gamma$ . Расчёты выполнены без учёта эффекта ограничения прицельных параметров. При его учёте распределения практически не меняются.

На Рис. 11 показано угловое распределение фотонов с энергией больше 250 МэВ и подгонка распределения гауссовской кривой. Расчёт выполнен без учёта углового разброса частиц в пучке для горизонтальной плоскости. (Для вертикальной плоскости распределение, очевидно, такое же.)

На Рис. 12 представлены значения  $\sigma$  по угловому распределению и  $\sigma$  гауссовского фита в зависимости от минимальной энергии фотонов. Видно, что эти величины близки к  $1/\gamma$  и слабо изменяются в широком диапазоне изменения энергий фотонов.

---

<sup>1</sup>Здесь следует заметить, что ограничение прицельных параметров зависит от полного радиального размера пучка  $\sigma_x$ , тогда как радиальный угловой разброс зависит от  $\sigma_{x\beta}$ .

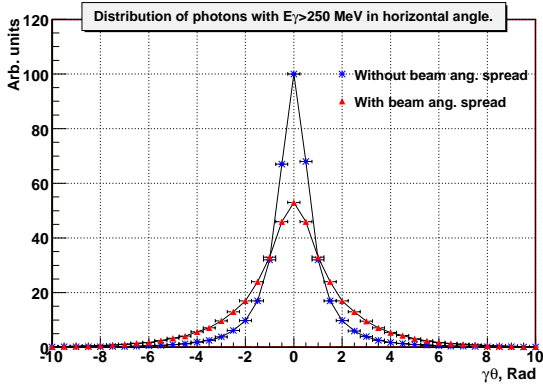


Рис. 7. Распределение фотонов с энергией  $> 250$  МэВ по горизонтальной проекции угла  $\theta$  без учёта и с учётом углового разброса частиц в пучке.  $E_b = 1.843$  ГэВ.  $\sigma_{\theta_x} = 0.617/\gamma$  Рад.

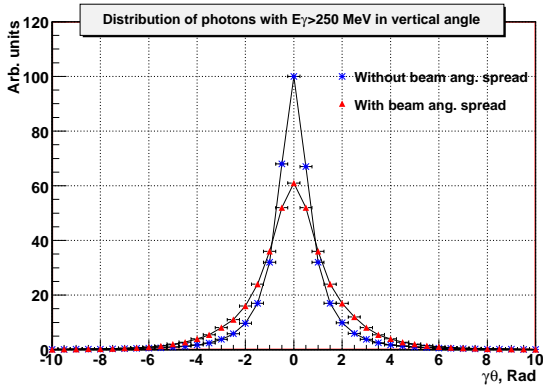


Рис. 8. Распределение фотонов с энергией  $> 250$  МэВ по вертикальной проекции угла  $\theta$  без учёта и с учётом углового разброса частиц в пучке.  $E_b = 1.843$  ГэВ.  $\sigma_{\theta_y} = 0.433/\gamma$  Рад.

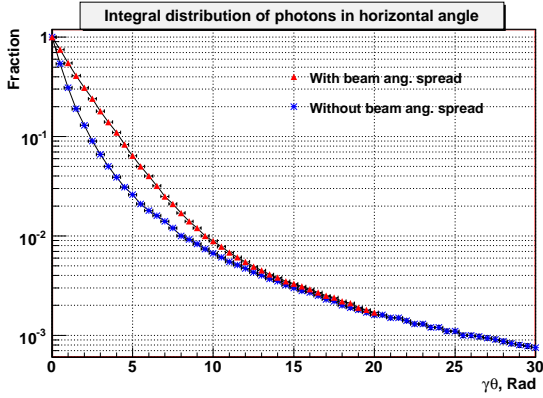


Рис. 9. Интегральное распределение фотонов с энергией  $> 250$  МэВ по горизонтальной проекции угла  $\theta$ .  $E_b = 1.843$  ГэВ.  $\sigma_{\theta_x} = 0.617/\gamma$  Рад.

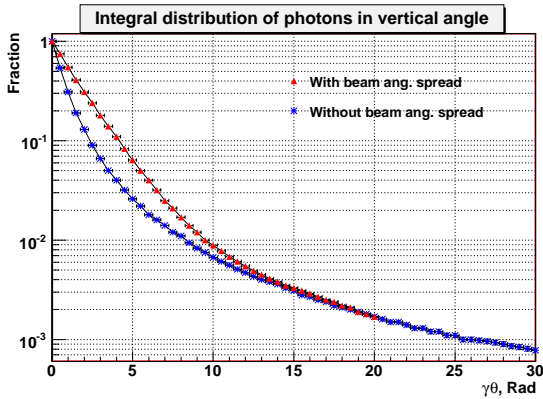


Рис. 10. Интегральное распределение фотонов с энергией  $> 250$  МэВ по вертикальной проекции угла  $\theta$ .  $E_b = 1.843$  ГэВ.  $\sigma_{\theta_y} = 0.433/\gamma$  Рад.



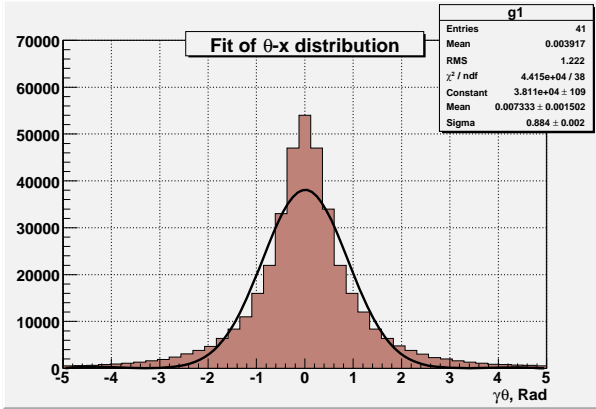


Рис. 11. Подгонка распределения фотонов с энергией  $> 250$  МэВ по  $\theta_x$  – проекции угла  $\theta$  в горизонтальной плоскости.  $E_b = 1.843$  ГэВ.

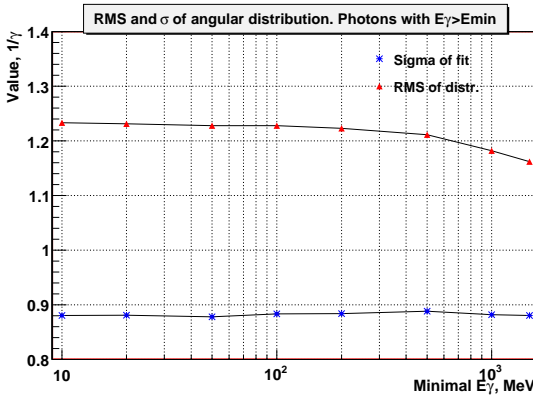


Рис. 12. Среднеквадратичная ширина распределения по  $\theta_x$  – проекции угла  $\theta$  в горизонтальной плоскости и  $\sigma$  гауссовского фита этого распределения в зависимости от порога по энергии фотонов.  $E_b = 1.843$  ГэВ.

## 5 Программные компоненты генератора

Генератор выполняет моделирование процесса тормозного излучения. При моделировании возможен учёт эффекта ограничения прицельных параметров размерами пучка и углового разброса частиц в пучке. Считается, что движущиеся по оси  $Z$  пучки равной энергии сталкиваются под нулевым углом.

Генератор состоит из программных модулей: BremGen (головная подпрограмма), Brem1, Brem2, Brem3, Brem4, Brem5, Brem6. В нём также используются вспомогательные подпрограммы и функции: BremGaus, BremintL, BremintLF, BremMcI, BremRng. Язык программирования – Фортран. Вещественные переменные имеют длину 8 байтов, целые – 4 байта.

SUBROUTINE **BremGen**(EB,Omin,SX,SY,STX,STY,ID,IPC,IBS,PE,PG)

*Назначение:* головная подпрограмма моделирования тормозного излучения

*Входные параметры:*

- EB: энергия пучка (ГэВ) ( $EB=0.1 \div 7.5$ ).
- Omin: минимальная энергия тормозного фотона (ГэВ) ( $Omin > 0.0015$ ).
- SX: горизонтальный размер пучка (см).
- SY: вертикальный размер пучка, (см).
- STX: горизонтальная угловой разброс пучка, (Рад).
- STY: вертикальный угловой разброс пучка, (Рад).
- ID: =0/1/2: задаёт направления вылета  $\gamma$ :  
1/2 – по/против оси  $Z$ , 0 – оба.
- IPC: =1/0, 1 – включение ограничения прицельных параметров.
- IBS: =1/0, 1 – включение углового разброса пучка.

*Результат работы:*

- PE: 4-х импульс конечного электрона (ГэВ) в лаб. системе.
- PG: 4-х импульс фотона ОТИ (ГэВ) в лаб. системе.

Кроме того, в общем блоке /BREMCOM/ находится расчётное полное сечение тормозного излучения с ошибкой.

SUBROUTINE **Brem1**(GAM,Xmin,XMAX,XE,TE,WE)

*Назначение:* моделирование  $X = E_e/E_b$ , угла  $\theta$  конечного электрона.

*Входные параметры:*

GAM: гамма-фактор пучка.

Xmin: минимальное значение  $X = E_e/E_b$  – доли энергии конечного электрона.

XMAX: максимальное значение  $X = E_e/E_b$ .

*Результат работы:*

XE: =  $E_e/E_b$  – энергия конечного электрона в единицах энергии пучка.

TE: угол конечного электрона от оси пучков (рад).

WE: вес.

SUBROUTINE **Brem2**(Omin,SX,SY,IMAX,SIG,SIGER)

*Назначение:* вычисление сечения с учётом эффекта ограничения прицельных параметров размерами пучка.

*Входные параметры:*

Omin: минимальная энергия фотона (ГэВ).

SX: горизонтальная сигма пучка, (см).

SY: вертикальная сигма пучка, (см).

IMAX: статистика для MC интегрирования.

*Результат работы:*

SIG: сечение ( $\text{см}^2$ ).

SIGER: ошибка сечения ( $\text{см}^2$ ).

### FUNCTION **Brem3**(X)

*Назначение:* вычисление классического дифференциального сечения  $d\sigma/dE_\gamma$ .

*Входные параметры:*

X: энергия фотона (ГэВ).

*Результат работы:*

Brem3: дифференциальное сечение  $d\sigma/dE_\gamma$  (см<sup>2</sup>/ГэВ).

### FUNCTION **Brem4**(X,IMAX,FBERR,SX1,SY1)

*Назначение:* вычисление дифференциального сечения ОТИ с учётом эффекта ограничения прицельных параметров размерами пучка [5].

*Входные параметры:*

X: энергия фотона (ГэВ).

IC: статистика Монте-Карло.

SX1: горизонтальная сигма пучка (см).

SY1: вертикальная сигма пучка (см).

*Результат работы:*

Brem4: спектр  $d\sigma/dE_\gamma$  (см<sup>2</sup>/ГэВ).

FBERR: оценка ошибки спектра.

### FUNCTION **Brem5**(X)

*Назначение:* вычисление спектра фотонов  $d\sigma/dE_\gamma$  с учётом ограничения прицельных параметров размерами пучка (интерполяция по таблице).

*Входные параметры:*

X: энергия фотона (ГэВ).

*Результат работы:*

Brem5: спектр фотонов  $(d\sigma/dE_\gamma) \cdot 10^{25}$  (см<sup>2</sup>/ГэВ).

## FUNCTION **Brem6**(X)

*Назначение:* вычисление отношения спектра фотонов с учётом эффекта ограничения прицельных параметров размерами пучка к классическому спектру.

*Входные параметры:*

X: энергия фотона (ГэВ).

*Результат работы:*

Brem6: отношение.

## SUBROUTINE **BremMcI**(F,Emin,EMAX,NM,SIG,SIGER)

*Назначение:* интегрирование функции по Монте-Карло.

*Входные параметры:*

F: подынтегральная функция F(E).

Emin: нижний предел по E.

EMAX: верхний предел по E .

NM: число точек, используемых при вычислении интеграла.

*Результат работы:*

SIG значение интеграла

SIGER оценка ошибки величины интеграла.

## FUNCTION **BremIntL**(X)

*Назначение:* вычисление интегрального логарифма  $\int_0^x \ln(t)/(1-t^2) dt$ .  
Используется в подпрограмме Brem4.

*Входные параметры:*

X: аргумент.

*Результат работы:*

BremIntL: значение интегрального логарифма.

## FUNCTION **BremIntLF(X)**

*Назначение:* подынтегральная функция. Используется в BremIntL.

*Входные параметры:*

X: аргумент.

*Результат работы:*

BremIntLF: значение подынтегральной функции.

## Function **BremGaus(F,A,B,EPS)**

*Назначение:* вычисление определённого интеграла методом Гаусса.

*Входные параметры:*

F: подынтегральная функция

A: нижний предел

B: верхний предел

EPS: относительная точность интеграла

*Результат работы:*

BremGaus: значение интеграла.

## SUBROUTINE **BremRng(R,IDUM)**

*Назначение:* оболочка для датчика псевдослучайных чисел.

*Входные параметры:*

IDUM: не используется

*Результат работы:*

R: псевдослучайное число.

В генераторе используется COMMON-блок /BREMCOM/:  
COMMON /BREMCOM/ EBEAM,EM,PI,CLSEC,CLSECER,SWCOR,  
SWCORER,SEC,ERR,WM,SPE(5000),RAT(5000),ST,  
KMAX,NTOT

EBEAM	энергия пучка (ГэВ).
EM	масса электрона (ГэВ).
PI	число $\pi$ .
CLSEC	классическое сечение (в одном направлении)
CLSECER	его ошибка
SWCOR	сечение с поправкой на эффект ограничения прицельных параметров
SWCORER	его ошибка
SEC	сечение, полученное при генерации событий
ERR	его ошибка
WM	максимальный вес, полученный при моделировании событий
SPE(.)	таблица спектра с поправками $(d\sigma/dE_\gamma) \cdot 10^{25}$ (см <sup>2</sup> /ГэВ).
RAT(.)	отношение спектра с поправками к классическому.
ST	=0.0015 ГэВ – шаг таблицы спектра SPE.
KMAX	число используемых точек в массивах SPE, RAT.
NTOT	счётчик испытаний для получения событий с весом 1.

## 6 Заключение

В данной работе описан монте-карловский генератор событий тормозного излучения, который используется для моделирования эксперимента с детектором КЕДР. Генератор учитывает угловой разброс частиц в пучке и поправку за счёт эффекта ограничения прицельных параметров. Учёт последнего эффекта важен для правильного определения светимости по процессу ОТИ, для расчёта фона от тормозного излучения в СРРЭ детектора, а также для оценки времени жизни пучков в  $e^+e^-$  фабриках, обусловленного тормозным излучением. Величина эффекта существенно больше величины радиационных поправок, которые не превосходят 1% [9].

Расчёты показали, что в эксперименте с детектором КЕДР на ВЭПП-4М поправка к классическому полному сечению и, следовательно, к величине измеряемой светимости, при пороге регистрации фотонов в мониторе 200–300 МэВ составляет около 2.0% при энергии пучка 1.843 ГэВ ( $\psi'$ -мезон).

Поправка к дифференциальному сечению за счёт эффекта ограничения прицельных параметров достигает  $\sim 10\%$  при  $E_\gamma/E_b \approx 0.02$ , когда электрон, излучивший тормозной фотон, будет зарегистрирован в СРРЭ детектора КЕДР.

В заключение автор благодарит В.М.Страховенко за полезные обсуждения.

## А Сечения с ограничением прицельных параметров

В работах [5-7] получены точные (в низшем порядке т.в.) и приближённые формулы для дифференциального по энергии фотона сечения ОТИ с учётом ограничения прицельных параметров для гауссовского распределения плотности пучков. Поперечное движение частиц в сгустках не учитывалось. В этом разделе приведены формулы из указанных работ. Они записаны в виде классического сечения (3) и поправки к нему:

$$d\sigma_{obs} = d\sigma_0 - d\sigma_{cor}. \quad (13)$$

В них для удобства сделаны одинаковыми обозначения переменных. Энергии и поперечные размеры встречных пучков в расчётах по этим формулам, относящихся к эксперименту ВЭПП-4М/КЕДР, считаются одинаковыми, а оси пучков совпадают.

### А.1 Точные формулы. Результаты расчёта

#### Формула Байера-Каткова-Страховенко

Согласно работе [5], поправка<sup>2</sup>, в случае гауссовских пучков, равна

$$d\sigma_{cor} = -8\alpha r_0^2 \frac{dx}{\pi x} (1-x) \cdot \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^\infty dt t e^{-t} R(\varphi, t), \quad (14)$$

где  $x = E_\gamma/E_b$  – отношение энергии фотона к энергии пучка,

$$R(\varphi, t) = \sqrt{1 + \beta^2} \left( v - \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\beta^2 \right) \ln \mu + 2v - \frac{11}{9} + \frac{4}{3}\beta^2 + (\beta \ln \mu)^2$$

---

<sup>2</sup>В работе [5] в выражении для  $R$  содержатся опечатки; здесь приведены исправленные формулы.



$$\begin{aligned}
& -\frac{\pi^2}{4}\beta v - 2\beta v \int_0^\mu \frac{dz \ln z}{1-z^2}, \\
\mu &= \frac{\beta}{1 + \sqrt{1 + \beta^2}}, \quad \beta^2 = \frac{q_{\min}^2}{\hbar^2 t (\Sigma_x^2 \cos^2 \varphi + \Sigma_y^2 \sin^2 \varphi)}, \\
\Sigma_x^2 &= \frac{1}{4\sigma_x^2}, \quad \Sigma_y^2 = \frac{1}{4\sigma_y^2}, \quad v = 1 - x + \frac{1}{1-x}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Здесь  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  – среднеквадратичные поперечные размеры гауссовских пучков,  $q_{\min}$  даётся формулой

$$q_{\min} = \frac{\hbar x}{4\lambda_C \gamma^2 (1-x)} \quad - \quad \text{минимальная передача импульса.} \tag{16}$$

При моделировании событий с учётом поправки на эффект ограничения прицельных параметров, используются приведённые выше формулы [5]. Примеры расчётов поправки по разным формулам содержится в Таблицах 2,3.

### Формула Коткина-Политыко-Сербо

В работе [7] получена формула, учитывающая влияние поперечных размеров пучков ускорителя HERA на сечение процесса  $e^-p \rightarrow e^-p\gamma$ . Для перехода к случаю электрон-позитронных пучков равной энергии в этой формуле нужно заменить  $E_p \rightarrow E_b$ ,  $m_p \rightarrow m$ . Поправка  $d\sigma_{cor}$  выражается через дифференциальное сечение комптоновского рассеяния эквивалентных фотонов от одного пучка на электронах (позитронах) другого –  $d\sigma_C/dx$ , и число фотонов, пролетевших мимо:

$$d\sigma_{cor} = \int d\omega \frac{d\sigma_C(\omega)}{dx} \cdot \frac{\alpha}{\pi\omega} G(\omega). \tag{17}$$

$$d\sigma_C = \frac{2\pi r_0^2}{z} \left[ \frac{1}{1-x} + 1-x - \frac{4x}{z(1-x)} + \frac{4x^2}{z^2(1-x)^2} \right] dx, \tag{18}$$

где

$$z = \frac{4\omega E_b}{m^2} \geq \frac{x}{1-x}, \quad x = E_\gamma/E_b,$$

$\omega$  – энергия эквивалентного фотона,  $m$  – масса электрона.

Функция  $G(\omega)$  учитывает геометрию столкновения, она имеет вид

$$G(\omega) = \int \rho \frac{\partial g(\rho, \varphi)}{\partial \rho} [K_0(u) \cdot K_2(u) - K_1^2(u)] \frac{d^2 \rho}{2\pi(\gamma\omega)^2}, \tag{19}$$

где

$$\vec{\rho} = (\rho_x, \rho_y, 0) = \rho(\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \quad - \text{прицельный параметр,}$$

$$u = \frac{\rho\omega}{E_b\lambda_C}, \quad \gamma = E_b/m,$$

$K_0(u)$ ,  $K_1(u)$ ,  $K_2(u)$  – функции Макдональда.

Использовавшиеся в расчётах формулы для функций Макдональда приведены в Приложении В.

$$g(\vec{\rho}) = 1 - \frac{\int n_+(\vec{r}, t)n_-(\vec{r} + \vec{\rho}, t)d^3rdt}{\int n_+(\vec{r}, t)n_-(\vec{r}, t)d^3rdt}.$$

Здесь  $n_{\pm}$  – плотности частиц в сгустках.

Для гауссовских пучков, движущихся по прямой по оси  $z$ , их плотности равны:

$$n_{\pm} = \frac{N_{\pm}}{(2\pi)^{3/2}\sigma_x\sigma_y\sigma_z} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{(z \pm ct)^2}{2\sigma_z^2}\right],$$

где  $N_{\pm}$  – число частиц в сгустках. При лобовом столкновении имеем:

$$g(\vec{\rho}) = 1 - \exp\left(-\frac{\rho_x^2}{4\sigma_x^2} - \frac{\rho_y^2}{4\sigma_y^2}\right) = 1 - \exp\left(-\frac{\rho^2 \cos^2 \varphi}{4\sigma_x^2} - \frac{\rho^2 \sin^2 \varphi}{4\sigma_y^2}\right) \quad (20)$$

и

$$\frac{\partial g(\rho, \varphi)}{\partial \rho} = \frac{1}{2\rho} \left[ \frac{\rho_x^2}{\sigma_x^2} + \frac{\rho_y^2}{\sigma_y^2} \right] \cdot \exp\left(-\frac{\rho^2 \cos^2 \varphi}{4\sigma_x^2} - \frac{\rho^2 \sin^2 \varphi}{4\sigma_y^2}\right).$$

Подставив это выражение в (14) для  $G(\omega)$ , получаем:

$$G(\omega) = \frac{1}{4\pi(\gamma\omega)^2} \int \left[ \frac{\rho_x^2}{\sigma_x^2} + \frac{\rho_y^2}{\sigma_y^2} \right] \exp\left(-\frac{\rho_x^2}{4\sigma_x^2} - \frac{\rho_y^2}{4\sigma_y^2}\right) \\ \times [K_0(u) \cdot K_2(u) - K_1^2(u)] d\rho_x d\rho_y.$$

Расчёт поправки к тормозному спектру по формуле (17) выполнялся методом Монте-Карло. Так как авторы [7] рассчитали поправку к тормозному спектру по своей формуле для пучков HERA, это позволило проверить нашу программу при тех же параметрах пучков электронов и протонов (параметры взяты из [7]).

Сравнение обоих расчётов показано на Рис. 13. Как видно из рисунка, их результаты хорошо согласуются.

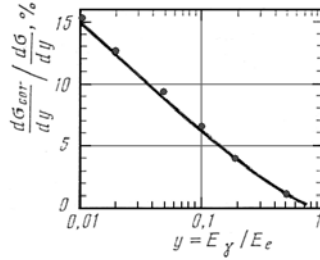


Рис. 13. Поправка к дифференциальному сечению тормозного излучения в  $e^-p$ -столкновении для установки HERA за счёт эффекта ограничения прицельных параметров. Кривая – график из работы [7], точки – данный расчёт.

Расчёты поправки [7] к сечению тормозного излучения для эксперимента ВЭПП-4М/КЕДР при  $E_b = 1.843$  ГэВ были выполнены для поперечных размеров пучков, указанных в Таблице 1. В Таблице 2 представлены результаты расчёта дифференциального сечения по классической формуле (1) и относительных поправок к ней по точным формулам [5], [7] при выполнении условия (12).

Как видно из Таблицы 2, расчёты поправки по формулам работ [5] и [7] хорошо согласуются, их относительное отличие не превышает нескольких %.

Таблица 2. Дифференциальное сечение процесса тормозного излучения  $d\sigma_0/dE_\gamma$  ( $\text{см}^2/\text{ГэВ}$ ) и относительная поправка  $\delta_{cor} = (d\sigma_{cor}/dE_\gamma)/(d\sigma_0/dE_\gamma)$  (в %) к нему при энергии  $E_b = 1.843$  ГэВ.  $\sigma_x=370$  мкм,  $\sigma_y=6$  мкм. Указаны статистические погрешности.

$E_\gamma$ (ГэВ)	$E_\gamma/E_b$	$d\sigma_0/dE_\gamma$ (3)	$\delta_{cor}$ (%), Байер и др. (14)	$\delta_{cor}$ (%), Коткин и др. (17)
0.002	0.0011	$3.73 \cdot 10^{-23}$	$22.794 \pm 0.080$	$22.911 \pm 0.055$
0.005	0.0027	$1.43 \cdot 10^{-23}$	$19.745 \pm 0.071$	$19.959 \pm 0.049$
0.01	0.0054	$6.92 \cdot 10^{-24}$	$17.248 \pm 0.064$	$17.585 \pm 0.044$
0.02	0.011	$3.34 \cdot 10^{-24}$	$14.900 \pm 0.056$	$15.222 \pm 0.039$
0.05	0.027	$1.26 \cdot 10^{-24}$	$11.373 \pm 0.045$	$11.663 \pm 0.033$
0.1	0.054	$5.91 \cdot 10^{-25}$	$8.745 \pm 0.037$	$8.786 \pm 0.026$
0.3	0.163	$1.67 \cdot 10^{-25}$	$4.597 \pm 0.022$	$4.595 \pm 0.016$
0.5	0.271	$8.86 \cdot 10^{-26}$	$2.825 \pm 0.015$	$2.824 \pm 0.011$
0.7	0.380	$5.72 \cdot 10^{-26}$	$1.763 \pm 0.010$	$1.768 \pm 0.008$
1.0	0.543	$3.59 \cdot 10^{-26}$	$0.797 \pm 0.005$	$0.795 \pm 0.005$
1.4	0.760	$2.40 \cdot 10^{-26}$	$0.177 \pm 0.001$	$0.177 \pm 0.002$

## А.2 Приближённые формулы. Сравнение с точными

Точные формулы, приведённые в предыдущем параграфе, представляют сложные выражения, требующие вычисления многомерных интегралов. Для расчётов тормозных спектров в области энергий фотонов  $E_\gamma \ll E_b$  в [5-7] получены приближённые формулы, не требующие интегрирования. Они приводятся ниже. Расчёты по приближённым формулам сравниваются с расчётами по точным, что служит дополнительной проверкой программ расчётов и позволяет оценить область применимости первых. Энергии фотонов ОТИ — в области, где выполняется условие (12).

### Формула Бурова-Дербенёва

В работе [6] получена формула для наблюдаемого дифференциального сечения ОТИ. Поправка  $d\sigma_{cor}$  имеет вид

$$d\sigma_{cor} = 4\alpha r_0^2 \frac{dx}{x} \left\{ \left( x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} \right) \left[ \ln \frac{2\gamma^2(1-x)\lambda_C(\sigma_x + \sigma_y)}{x\sigma_x\sigma_y} - \frac{1}{2}C - \frac{3}{2} \right] - \frac{1-x}{9} \right\}, \quad (21)$$

где  $C = 0.577\dots$  — константа Эйлера.

Формула применима для прямолинейного движения гауссовских пучков при выполнении условия (12).

### Приближённая формула Байера-Каткова-Страховенко

В работе [5] получен ряд приближённых формул для тормозного спектра с учётом эффекта ограничения прицельных параметров. Формула для поправки при условии (12) и  $\sigma_x \gg \sigma_y$ , имеет вид

$$d\sigma_{cor} = 4\alpha r_0^2 \frac{dx}{x} \left\{ \left( x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} \right) \left[ \ln \frac{2\gamma^2(1-x)\lambda_C(\sigma_x + \sigma_y)}{x\sigma_x\sigma_y} - \frac{1}{2}C - \frac{3}{2} \right] - \frac{1-x}{9} + \Delta \right\}, \quad (22)$$

где

$$\Delta = \frac{\pi^{3/2} \ln 2[(1-x)^2 + 1]x\sigma_x\sigma_y}{4\lambda_C\gamma^2(1-x)(\sigma_x + \sigma_y)} \sqrt{\frac{\sigma_x}{\sigma_y}}.$$

Как видно из (22), эта формула отличается от формулы Бурова-Дербенёва (21) членом  $\Delta$ .

## Приближённая формула Коткина-Политыко-Сербо

В работе [7] получена асимптотическая формула при очень малых  $x$

$$d\sigma_{cor}^{as} = \frac{16}{3}\alpha r_0^2 dx \left[ \left(1-x + \frac{4}{3}x^2\right) \ln \frac{2\gamma^2 \lambda_C (1-x)(\sigma_x + \sigma_y)}{x\sigma_x\sigma_y} - \frac{13}{12}(1-x) - \frac{3}{2}x^2 \right]. \quad (23)$$

Ниже, в Таблице 3, приведены результаты расчётов для  $E_b = 1.843$  ГэВ поправки к тормозному спектру по этой и другим приближённым формулам. Данные расчётов сравниваются с вычислениями по точной формуле (14). Как видно из Таблицы 3, приближённые формулы работ [5-7] позволяют оценить тормозной спектр с точностью  $\sim 20\%$  и лучше при низкой энергии,  $E_\gamma/E_b \lesssim 0.05$ . При энергии фотонов, равной порогу регистрации в мониторе светимости и выше, приближённые формулы неприменимы — нужно использовать точные формулы.

Таблица 3. Сравнение расчётов поправки  $\delta_{cor} = (d\sigma_{cor}/dE_\gamma)/(d\sigma_0/dE_\gamma)$  (в %) к тормозному спектру по приближённым формулам с расчётом по точной формуле (14). Энергия пучка  $E_b = 1.843$  ГэВ.  $\sigma_x = 370$  мкм,  $\sigma_y = 6$  мкм.

$E_\gamma$ (ГэВ)	$E_\gamma/E_b$	Точная, Байер и др. (14)	Прибл., Буров, Дербенёв (21))	Прибл., Байер и др. (22)	Прибл., Коткин и др. (23)
0.002	0.0011	22.79±0.08	22.81	22.84	26.04
0.005	0.0027	19.75±0.07	19.75	19.83	23.11
0.01	0.0054	17.25±0.06	17.27	17.43	20.73
0.02	0.011	14.90±0.06	14.61	14.95	18.18
0.05	0.027	11.37±0.05	10.79	11.67	14.53
0.1	0.054	8.75±0.04	7.59	9.52	11.48
0.3	0.163	4.60±0.02	1.64	8.54	5.84
0.5	0.271	2.83±0.02	-1.84	11.63	2.49
0.7	0.379	1.76±0.01	-4.66	17.51	-0.45
1.0	0.543	0.80±0.005	-8.62	33.21	-5.44
1.4	0.760	0.18±0.001	-17.38	89.12	-16.15

## В Формулы для вычисления $K_0(x)$ , $K_1(x)$ , $K_2(x)$

В формуле Коткина-Политыко-Сербо (17) поправка к классическому сечению (3) выражается через функции Макдональда  $K_0(x)$ ,  $K_1(x)$ ,  $K_2(x)$ . Ниже приведены удобные для численного счёта формулы для этих функций, которые использовались в монте-карловских расчётах в данной работе.

Для вычисления  $K_0(x)$  использовались следующие формулы.

$$K_0(x) = \begin{cases} -\left[\ln \frac{x}{2} + C\right] \cdot \left[1 + \frac{x^2}{4}\right] + \frac{x^2}{4}, & \text{при } x \leq 0.01 \text{ ([10], с.124)} \\ -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos(t)} [\ln(2x \sin^2 t) + C] dt, & \text{при } 0.01 < x < 8 \text{ ([11], с.589)} \\ \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, & \text{при } x \geq 8 \text{ ([12], с.466)}. \end{cases}$$

Здесь  $C=0.5772156649015325$  – константа Эйлера.

Функция  $K_1(x)$  связана с  $K_0(x)$  соотношением:

$$K_1(x) = -K_0'(x), \quad ([11], \text{ стр. 984}).$$

Функция  $K_1(x)$  вычислялась по следующим формулам, полученным дифференцированием формул для  $K_0(x)$

$$K_1(x) = \begin{cases} -\left[\ln \frac{x}{2} + C\right] \cdot \frac{x}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \left[1 + \frac{x^2}{4}\right], & \text{при } x \leq 0.01 \\ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos t} [\cos(t) (\ln(2x \sin^2 t) + C) + \frac{1}{x}], & \text{при } 0.01 < x < 8 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[\frac{1}{2x} + 1\right], & \text{при } x \geq 8. \end{cases}$$

Для вычисления  $K_2(x)$  использовалось её выражение через  $K_0(x)$   $K_1(x)$ :

$$K_2(x) = \frac{2}{x} K_1(x) + K_0(x) \quad ([10], \text{ стр. 984}).$$

Результаты вычислений  $K_0(x)$  и  $K_1(x)$  по приведённым выше формулам с точностью лучше 1% согласуются с табличными данными [12].

## Список литературы

- [1] *С.А. Балашиов*. Измерение светимости по однократному тормозному излучению. - Дипломная работа, Новосибирск, 2002.
- [2] *Т.А. Пурлац*. Проект системы регистрации рассеянных электронов для накопителя ВЭПП-4М. - Дипломная работа, Новосибирск, 1987.
- [3] *V.N. Baier, e.a.* Phys. Rep. 78 (1981) 293. Inelastic processes in high energy quantum electrodynamics, стр.304.
- [4] *А.Е. Блиннов, e.a.* Large impact parameter cut-off in the process  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma$ . - Phys. Lett., 113B (1982) 423.  
*Ю.А. Тихонов*. Эффект ограничения прицельных параметров в тормозном излучении на встречных пучках. - Кандидатская диссертация, Новосибирск, 1982.
- [5] *В.Н. Байер, В.М. Катков, В.М. Страховенко*. Роль геометрических факторов в процессе тормозного излучения на встречных  $e^-e^+$  пучках. - ЯФ, 36 (1982) 163.
- [6] *А.Б. Буров, Я.С. Дербенёв*. Эффект конечности поперечных размеров встречных пучков в тормозном излучении. - Препринт ИЯФ 82-07, Новосибирск 1982.
- [7] *Г.Л. Коткин, С.И. Политыко, В.Г. Сербо*. Влияние поперечных размеров пучков ускорителя HERA на сечение процесса  $ep \rightarrow ep\gamma$ . - ЯФ, 42 (1985) 925.
- [8] *Г.Л. Коткин, С.И. Политыко, В.Г. Сербо*. Влияние поперечных размеров сталкивающихся пучков на процессы излучения и образования  $e^+e^-$ -пар. - ЯФ, 42 (1985) 692.
- [9] *Э.А. Кураев и др.* Радиационные поправки к тормозному излучению при высоких энергиях. - ЖЭТФ, 65 (1973) 2155.
- [10] *Д.С. Кузнецов*. Специальные функции. - Высшая школа. Москва 1965.
- [11] *И.Г. Градштейн, И.М. Рыжик*. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - Наука. Москва, 1971.
- [12] *И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев*. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. - Гос. изд-во техн.-теор. литературы, Москва, 1953.

*В.А. Талорский*

**МС генератор тормозного излучения**

*V.A. Tayursky*

**МС generator of bremsstrahlung**

ИЯФ 2008-35

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев  
Работа поступила 18.12.2008 г.

---

Сдано в набор 21.12.2008 г.

Подписано в печать 22.12.2008 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2,0 печ.л., 1.6 уч.-изд.л.

Тираж 90 экз. Бесплатно. Заказ № 35

---

Обработано на РС и отпечатано на  
ротапринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН  
*Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*