

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина Сибирское отделение
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
им. Г.И. Будкера СО РАН

М.С. Чащин, А.Д. Беклемишев

ВЛИЯНИЕ ВРАЩЕНИЯ
НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ В ГДЛ

ИЯФ 2006-19

НОВОСИБИРСК
2006

Влияние вращения на устойчивость плазмы в ГДЛ

М.С. Чащин, А.Д. Беклемишев

Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера,
630090, Новосибирск, РФ

Аннотация

В работе рассмотрено влияние центробежной силы и КЛР-эффекта на устойчивость плазмы в ГДЛ. Получено дисперсионное уравнение для мелкомасштабных азимутальных мод. Согласно оценкам устойчивость плазмы с параметрами ГДЛ определяется сильным КЛР-эффектом “быстрых” частиц. Если КЛР-стабилизация не работает, тогда при достаточном сдвиговом вращении плазмы инкремент желобковой неустойчивости уменьшается в несколько раз, при этом порог неустойчивости не сдвигается. Инкремент желобковой неустойчивости убывает с увеличением ширя скорости.

Устойчивость первой азимутальной моды возмущения ($m = 1$) зависит от граничных условий по радиусу. Её первая радиальная мода становится неустойчивой для плазмы отделенной от стенки вакуумным промежутком.

1 Введение

Газодинамическая Ловушка (ГДЛ) является открытой ловушкой для удержания плазмы [1, 2]. Магнитное поле в ней обладает азимутальной симметрией (рис. 1). Благодаря этому в ловушке нет неклассических потерь плазмы поперек магнитного поля. С точки зрения термоядерных перспектив ГДЛ заметно отстает от токамаков. Однако она может быть использована в качестве прототипа источника термоядерных нейтронов большой мощности ($W_n \sim 2$ МВт/м²) для испытания материалов первой стенки термоядерного реактора. Было предложено несколько схем нейтронного источника на основе ГДЛ [3, 4, 5].

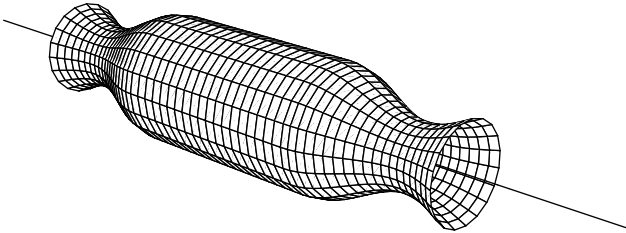


Рис. 1: Качественный вид магнитной поверхности в ГДЛ. Магнитное поле в пробках может превосходить поле центрального соленоида в 30-50 раз. Характерное значение поля в центральной ячейке $B_{min} \sim 3 \cdot 10^3$ Гс

Плазма ГДЛ содержит два сорта ионов. Основная компонента – относительно холодная плазма удерживаемая в газодинамическом режиме (“мишенная” плазма). Для ионов этой компоненты эффективная длина рассеяния в конус потерь существенно меньше размеров системы. Другая компонента возникает при наклонной

инъекции в плазму мощных пучков нейтральных атомов высокой энергии (“быстрые частицы”). Эти частицы осциллируют между точками остановки. Положение точек остановки определяется величиной пинтч-угла в момент инъекции. В окрестности этих точек наблюдается резкий пик плотности плазмы и заметный выход термоядерных нейтронов [6].

Значения концентрации и температуры “мишенной” плазмы в рабочих режимах установки составляют порядка $5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ и 100 эВ соответственно. “Быстрые” частицы имеют среднюю энергию порядка 10^4 эВ и концентрацию $5 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$. Пиковая мощность инъекции атомарных пучков достигает 4 МВт, длительность импульса инъекции около 1 мс. Основной вклад в энергосодержание вносят “быстрые” частицы, а инерция плазмы определяется “мишенной” составляющей.

Согласно предсказаниям теории и экспериментальным исследованиям в такой плазме могут возникать МГД неустойчивости. Наибольшую опасность представляет желобковая неустойчивость, которая приводит к макроскопическим выбросам плазмы на стенку вакуумной камеры. Возникновение этой неустойчивости связано с особенностями геометрии магнитного поля в ловушке. В работах [7, 8] был получен достаточный критерий устойчивости плазмы

$$\int dl \frac{\pi_{\perp} + \pi_{\parallel}}{r(l)B^2} \kappa > 0, \quad (1)$$

где π_{\perp} и π_{\parallel} – поперечная и продольная составляющие тензора потока импульса, $r(l)$ – расстояние от оси системы до магнитной поверхности, B – величина магнитного поля, κ – кривизна силовой линии магнитного поля. Интегрирование ведется вдоль силовой линии. Согласно этому условию в плазме будет развиваться неустойчивость если “средняя” кривизна магнитного поля отрицательна. Интегрирование кривизны производится с весом, пропорциональным давлению плазмы. Поскольку определяющее значение имеет интегральная характеристика, не обязательно всюду в ловушке иметь “благоприятную” кривизну (как это делается в ловушках с минимумом B). В ГДЛ вытекание плазмы осуществляется в газо-

динамическом режиме. Это означает, что давление плазмы в заборочной области (в области “благоприятной” кривизны) не мало и при определенных условиях можно добиться условия устойчивого удержания.

В плазме ГДЛ также наблюдается быстрое азимутальное вращение, вызванное дрейфом частиц в скрещенных электрическом и магнитном полях. Электрическое поле возникает из-за неоднородности распределения температуры электронов по радиусу. Перепад потенциала на радиусе плазмы (радиус плазменного столба порядка 10 см) при имеющихся параметрах составляет около 200 В. Как известно, вращение порождает центробежную силу, направленную по радиусу. Наличие этой силы в присутствии градиента плотности, как и неблагоприятная кривизна, приводит к возникновению неустойчивости желобкового типа.

Вообще говоря, вращение плазмы не обязано быть твердотельным. Соседние слои могут проскальзывать друг относительно друга. Такое дифференциальное вращение наблюдается и в ГДЛ. При этом можно ожидать возникновения неустойчивости сдвиговых течений. Эта неустойчивость хорошо изучена в гидродинамике обычной жидкости [9, 10, 11].

Для обеспечения устойчивости плазмы были изучены различные стабилизирующие механизмы. Одним из таких механизмов является эффект конечного ларморовского радиуса (КЛР) частиц [12]. Качественно этот эффект хорошо описан в [13]. Стабилизация коротковолновых желобков в ГДЛ осуществляется КЛР-эффектом “быстрых” частиц. КЛР-стабилизация тем сильнее, чем выше азимутальный номер моды возмущения. В работе [12] также показано, что так называемая “первая мода”, для которой электрическое поле в плазме постоянно, не может быть стабилизирована КЛР эффектом. Поэтому остается открытым вопрос об устойчивости “первой моды” возмущения.

В работе [14] разработана схема МГД стабилизатора для ГДЛ. Благодаря добавочному концевому элементу в установке экспериментально были созданы условия, при которых достаточный критерий устойчивости (1) выполнен. Магнитное поле в МГД стаби-

лизаторе-каспе имеет конфигурацию антипробкотрона, благодаря чему “средняя” кривизна становится благоприятной для устойчивости.

Особый интерес вызвали экспериментальные результаты, опубликованные в [15]. В эксперименте не использовался МГД стабилизатор-касп так, что силовые линии магнитного поля в запробочной области имели нулевую кривизну, а критерий (1) не выполнялся. Все же был достигнут режим, в котором время удержания плазмы в ловушке становится порядка времени продольных потерь. Эффект возникал при изменении профиля радиального распределения электростатического потенциала в плазме. Экспериментальная зависимость приведена на рис. 2. Предполагается, что в этом режиме нет МГД активности, приводящей к сильному переносу поперек магнитного поля.

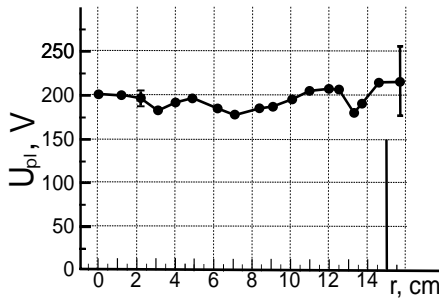


Рис. 2: Распределение потенциала в плазмы ГДЛ в устойчивом режиме

Возможно несколько интерпретаций результата в [15]. Из рис. 2 видно что в устойчивом режиме среднее поле в ловушке мало. Дестабилизирующий эффект, связанный с вращением плазмы становится несущественным. Это благоприятно сказывается на устойчивости. Однако таким образом невозможно объяснить почему плазма в ГДЛ остается устойчивой, когда условие (1) не выполнено. С другой стороны, при изменении потенциала плазмы модифицируется режим её истечения в запробочной области. Еще один из механизмов стабилизации может быть связан с сильным сдви-

говым течением плазмы. Существуют качественные соображения почему дифференциальное вращение может благоприятно влиять на устойчивость плазмы по отношению к желобковым возмущениям [16]. Этот механизм становится существенным когда всплывающий в плазме желобок попадает в область с сильным сдвиговым течением, а характерное время, за которое слои плазмы успевают провернуться друг относительно друга на угол порядка единицы, сравнимо с временем развития неустойчивости. В таком течении искажается форма желобка, который “размазывается” течением по азимуту. При этом можно ожидать уменьшения инкремента неустойчивости.

Стабилизация плазмы неоднородным дрейфом в скрещенных электрическом и магнитном поле изучалась в экспериментах на установках ПСП-2 (Новосибирск, ИЯФ СО РАН, Россия) [17] и ZaP (University of Washington, Seattle, U.S.A.) [18]. Однако постановка эксперимента и параметры плазмы в ГДЛ принципиально отличаются от этих экспериментов.

Попытка объяснить устойчивость плазмы ГДЛ, в режиме когда средняя кривизна неблагоприятна для устойчивости, а потенциал внутри плазмы распределяется в соответствии с рис.2 была предпринята Ю.А. Цидулко [19, 20]. Согласно [19]: «устойчивость плазмы существенно зависит от распределения “быстрых” ионов, создающих “собственную магнитную яму”, и радиального электрического поля, определяющего дифференциальное вращение». При этом решающим является сочетание этих эффектов.

Главная цель представленной работы - теоретически изучить влияние вращения на устойчивость плазмы в ГДЛ. Для этого рассмотрены различные режимы удержания плазмы и показано, что в широком диапазоне параметров КЛР-эффект дает основной вклад в устойчивость коротковолновых возмущений. Показано, что инкремент желобковой неустойчивости в плазме с дифференциальным вращением меньше, чем в случае когда такого вращения нет. Рассмотрено влияние граничных условий на устойчивость первой моды.

2 Уравнение желобковых колебаний

В этом разделе приведены рассуждения, которые позволяют получить уравнение описывающее желобковые колебания в плазме ГДЛ. Уравнение должно содержать эффекты, связанные с “конечностью” ларморовского радиуса “горячих” частиц, а также с наличием дрейфа в скрещенных электрическом и магнитном полях.

Требуемый результат можно получить, воспользовавшись уравнением Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi \sum_{\alpha} q_{\alpha}n_{\alpha}, \quad (2)$$

где φ – величина электростатического потенциала в плазме, q_{α} и n_{α} – заряд и плотность частиц сорта α . Суммирование производится по всем сортам частиц (два сорта ионов и электроны). Уравнение (2) описывает эволюцию потенциала плазмы при изменении её параметров. Параметры плазмы находятся из уравнений двухжидкостной магнитной гидродинамики. Величина n_{α} выражается из уравнения непрерывности

$$\frac{\partial n_{\alpha}}{\partial t} + \operatorname{div}(n_{\alpha}\mathbf{V}_{\alpha}) = 0, \quad (3)$$

где \mathbf{V}_{α} – гидродинамическая скорость частиц сорта α . Её можно найти из уравнения движения

$$\frac{d\mathbf{V}_{\alpha}}{dt} = -\frac{T_{\alpha}\bar{\nabla}n_{\alpha}}{M_{\alpha}n_{\alpha}} + \frac{q_{\alpha}}{M_{\alpha}}(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{V}_{\alpha} \times \mathbf{B}]) - \frac{\mathbf{S}(\mathbf{V}_{\alpha}, n_{\alpha})}{M_{\alpha}n_{\alpha}}, \quad (4)$$

где T_{α} – температура соответствующей компоненты плазмы, M_{α} – масса частиц сорта α . Для простоты принято, что плазма изотермическая ($T_{\alpha} = \text{const}$). Профиль давления плазмы пропорционален профилю её плотности. Последнее слагаемое в правой части (4) описывает диссипацию импульса за счет эффективной вязкости, учитывающей КЛР-эффекты[21]. Эти уравнения необходимо дополнить уравнениями Максвелла. Тогда они образуют замкнутую систему. Всюду предполагается, что кривизна силовых линий магнитного поля мала (ловушка параксиальная), а так же $\beta \ll 1$.

Выражение для поперечной компоненты скорости $\mathbf{V}_{\perp\alpha}$ из уравнения (4) находится методом последовательных приближений. Слагаемые описывающие инерцию, а также вязкость плазмы малы и ими можно пренебречь. В этом приближении уравнение (4) принимает вид

$$-\frac{T_\alpha \bar{\nabla} n_\alpha}{M_\alpha n_\alpha} + \frac{q_\alpha}{M_\alpha} (\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}'_{\perp\alpha} \times \mathbf{B}]) = 0,$$

а скорость $\mathbf{V}'_{\perp\alpha}$ определяется соотношением

$$\mathbf{V}'_{\perp\alpha} = \frac{M_\alpha c}{q_\alpha} \left[\frac{\mathbf{b}}{B} \times \frac{T_\alpha \bar{\nabla} n_\alpha}{M_\alpha n_\alpha} - \frac{q_\alpha}{M_\alpha} \mathbf{E} \right], \quad (5)$$

где \mathbf{b} – единичный вектор, направленный вдоль магнитного поля. В следующем приближении можно учесть инерцию и вязкость. Тогда для $\mathbf{V}_{\perp\alpha}$ справедливо

$$\mathbf{V}_{\perp\alpha} = \mathbf{V}'_{\perp\alpha} + \frac{M_\alpha c}{q_\alpha} \left[\frac{\mathbf{b}}{B} \times \left(\frac{d\mathbf{V}_{\perp}}{dt} \right)'_{\alpha} + \frac{\mathbf{S}(\mathbf{V}'_{\perp\alpha}, n_\alpha)}{M_\alpha n_\alpha} \right], \quad (6)$$

где используется обозначение

$$\left(\frac{d\mathbf{V}_{\perp}}{dt} \right)'_{\alpha} = \frac{\partial \mathbf{V}'_{\perp\alpha}}{\partial t} + (\mathbf{V}'_{\perp\alpha}, \bar{\nabla}) \mathbf{V}'_{\perp\alpha}.$$

Если воспользоваться выражением для $\mathbf{V}_{\perp\alpha}$ из (6) и подставить его в (3), тогда можно получить уравнение описывающее эволюцию плотности частиц сорта α

$$\begin{aligned} & \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(n_\alpha \mathbf{V}'_{\perp\alpha}) + \frac{M_\alpha c}{q_\alpha} \operatorname{div} \left[n_\alpha \frac{\mathbf{b}}{B} \times \left(\frac{d\mathbf{V}_{\perp}}{dt} \right)'_{\alpha} \right] + \\ & + \frac{c}{q_\alpha} \operatorname{div} \left[\frac{\mathbf{b}}{B} \times \mathbf{S}(\mathbf{V}'_{\perp\alpha}, n_\alpha) \right] + \operatorname{div} \frac{1}{q_\alpha} \mathbf{j}_{\parallel\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Это уравнение можно проинтегрировать вдоль силовой линии магнитного поля. В качестве граничного условия считается, что ток не замыкается через торцевые элементы установки, т.е.

$$\mathbf{j}_{\parallel}(l = l_w) = 0,$$

тогда из (7) можно получить усредненное уравнение

$$\int dl \left\{ \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(n_\alpha \mathbf{V}'_{\perp\alpha}) + \frac{M_\alpha c}{q_\alpha} \operatorname{div} \left[n_\alpha \frac{\mathbf{b}}{B} \times \left(\frac{d\mathbf{V}_\perp}{dt} \right)'_\alpha \right] + \frac{c}{q_\alpha} \operatorname{div} \left[\frac{\mathbf{b}}{B} \times \mathbf{S}(\mathbf{V}'_{\perp\alpha}, n_\alpha) \right] \right\} = 0, \quad (8)$$

где $l = l_w$ – координата плазмопоглотителя. Если считать электростатический потенциал постоянным вдоль силовой линии, то возмущение магнитного поля можно не рассматривать, а решать электростатическую задачу.

Для рассмотрения линейной стадии развития неустойчивости считается, что параметры плазмы возмущаются слабо, т.е.

$$n(\mathbf{r}, t)_\alpha = n_{\alpha 0}(r) + \delta n_\alpha(\mathbf{r}, t), \quad \varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi_0(r) + \delta\varphi(\mathbf{r}, t),$$

$$\frac{\delta n_\alpha}{n_{0\alpha}} \ll 1, \quad \frac{\delta\varphi}{\varphi_0} \ll 1,$$

После линеаризации в (8) можно связать изменение плотности δn_α с возмущением потенциала $\delta\varphi$. Уравнение, описывающее эволюцию азимутальной и временной Фурье компоненты потенциала $\delta\varphi$ получается, если подставить этот результат в линеаризованное уравнение Пуассона

$$\Delta\delta\varphi = -4\pi \sum_\alpha q_\alpha \delta n_\alpha \quad (9)$$

и произвести преобразование Фурье по времени и азимутальному углу. Всюду внутри плазмы слагаемое в левой части уравнения (9) мало как $(c_a/c)^2$, где c_a – альфвеновская скорость, c – скорость света. В результате можно получить

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \frac{n_0}{B_0^2} r^3 \omega_0 (\omega_0 - \omega^*) \frac{d\psi}{dr} + \frac{1 - m^2}{r^4} \frac{n_0}{B_0^2} r^3 \omega_0 (\omega_0 - \omega^*) \psi + (\omega^2 + m^2 \gamma_0^2) \left(\frac{d}{dr} \frac{n_0}{B_0^2} \right) \psi = 0, \quad (10)$$

где под r подразумевается расстояние от оси до магнитной поверхности в центральном сечении установки, B_0 - равновесное магнитное поле. Поскольку уравнение усреднено вдоль силовой линии магнитного поля в нем отсутствует зависимость от координаты вдоль оси ловушки. Величина

$$\omega_0 = \omega - m\omega_E \quad (11)$$

представляет собой частоту волны возмущения, сдвинутую на величину дрейфовой частоты

$$m\omega_E = \frac{mc}{B_0 r} \frac{d\varphi_0}{dr}.$$

Здесь m - азимутальное волновое число, ω^* - средняя (вдоль силовой линии) частота диамагнитного дрейфа,

$$\omega^* = \left\langle \frac{\sum_{\alpha} \omega_{\alpha}^* n_{0\alpha}}{\sum_{\alpha} n_{0\alpha}} \right\rangle_l,$$

$$\omega_{\alpha}^* = \frac{m c T_{\alpha}}{q_{\alpha} B_0 n_{0\alpha} r} \frac{dn_{0\alpha}}{dr}, \quad (12)$$

n_0 - усредненная вдоль силовой линии полная плотность ионов, γ_0^2 определяется соотношением

$$\gamma_0^2 = \frac{er}{m M_i c} \left\langle \sum_{\alpha} n_{0\alpha} \omega_{\alpha}^* \left(\hat{e}_{\phi}, \mathbf{rot} \frac{\mathbf{b}_0}{B_0} \right) \right\rangle_l / \left(\frac{d}{dr} \frac{n_0}{B_0^2} \right),$$

где \hat{e}_{ϕ} - единичный вектор, направленный по азимуту, e - заряд протона. Если принять, что кривизна силовых линий $\kappa \propto r$, тогда

$$\gamma_0^2 \propto \sum_{\alpha} \frac{T_{\alpha} dn_{0\alpha}/dr}{dn_0/dr} \approx \text{const}.$$

Функция ψ - нормированный потенциал возмущения

$$\psi = \frac{\delta\varphi}{\omega_0 r}. \quad (13)$$

Все слагаемые в (10) имеют простую физическую интерпретацию. Первые два члена описывают инерцию плазмы, третье слагаемое, пропорциональное ω^2 , - центробежная сила. Последнее слагаемое описывает эффекты возникающие при наличии ненулевой средней кривизны силовых линий магнитного поля в ловушке и является источником неустойчивости желобкового типа с инкрементом порядка γ_0 .

3 Устойчивость локализованных желобков

Этот раздел посвящен решению уравнения желобковых колебаний в пределе, когда радиальная длина волны возмущения много меньше размеров системы, то есть

$$m \gg 1, \quad \left. \frac{d \ln \delta \varphi}{d \ln r} \right|_{r=r_s} \gg 1. \quad (14)$$

Такие желобки локализованы по радиусу и по азимуту. Далее рассматриваются случаи слабого и сильного сдвигового вращения.

3.1 Плазма без шира азимутальной скорости

В этом подразделе изучается устойчивость локализованных желобков в отсутствии сдвигового вращения. Условие (14) позволяет довести задачу об устойчивости до конца - получить дисперсионное уравнение. Это уравнение должно описывать три важных эффекта:

- Эффект, связанный с неоднородностью магнитного поля,
- Центробежный эффект,
- КЛР-эффект.

Конкуренция этих эффектов определяет устойчивость плазмы без сдвигового вращения.

Если принять условие (14), тогда можно пренебречь геометрическими эффектами. В таком случае уравнение (10) можно переписать в виде

$$\frac{d^2}{dx^2}\delta\varphi + \left(-m^2 + \frac{\omega^2 + m^2\gamma_0^2}{\omega_0(\omega_0 - \omega^*)} \frac{d \ln n_0}{dx} \Big|_{x=1}\right) \delta\varphi = 0,$$

где $x = r/r_s$, r_s – расстояние от оси ловушки до магнитной поверхности где локализован желобок. В этом приближении коэффициенты перестают зависеть от r и в уравнении можно сделать преобразование Фурье по x . Результат выглядит следующим образом

$$-k_{\perp}^2 + \frac{\omega^2 + m^2\gamma_0^2}{(\omega_0 - \frac{\omega^*}{2})^2 - (\frac{\omega^*}{2})^2} \frac{d \ln n_0}{dx} \Big|_{x=1} = 0,$$

где $k_{\perp}^2 = k_r^2 + m^2$. Предполагается, что $\omega \propto m$, в то время как $\omega_0 - \omega^*/2 \propto 1$. Тогда в случае монотонно спадающего профиля плотности дисперсионное уравнение имеет вид

$$\left(\omega_0 - \frac{\omega^*}{2}\right)^2 = \left(\frac{\omega^*}{2}\right)^2 - (\omega_E^2 + \gamma_0^2) \left(\frac{m}{k_{\perp}}\right)^2 \frac{d \ln n_0}{dx} \Big|_{x=1}. \quad (15)$$

Первое слагаемое в правой части (15) описывает стабилизирующий эффект конечного ларморовского радиуса ионов. Второе слагаемое – центробежная сила. Последний член в (15) связан с наличием неоднородного магнитного поля. Именно это слагаемое определяет устойчивость плазмы в критерии Розенблюта-Лонгмайра [7].

Конкуренцию этих трех эффектов можно проиллюстрировать на диаграмме (см. рис. 3). По горизонтальной оси отложена величина $\rho_{Le}L/r_0^2$, где ρ_{Le} – ионный ларморовский радиус, вычисленный по электронной температуре, L – длина ловушки, r_0 – радиус плазмы. По вертикальной оси отложен корень из отношения энергосодержания в электронах к энергосодержанию в ионах. Параметр U введен для того, чтобы описать дополнительные эффекты, связанные с изменением потенциала плазмы внешними устройствами.

Согласно рис. 3 в ГДЛ доминирует КЛР-эффект быстрых ионов. Его достаточно, чтобы обеспечить устойчивость локализо-

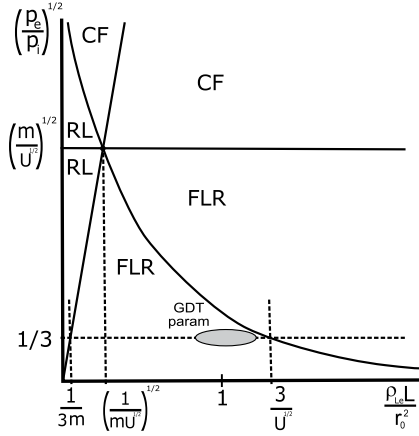


Рис. 3: Режимы удержания плазмы при различных её параметрах. Области, обозначенные символом RL - характеризуются тем, что дестабилизирующий член с кривизной силовых линий магнитного поля играет здесь определяющую роль, в областях CF доминирует центробежная сила, в областях FLR все устойчиво за счет КЛР-эффекта. Параметры плазмы в ГДЛ попадают в серую область

ванных желобков, в том числе и при неблагоприятной кривизне силовых линий. Однако в дальнейшем, если удастся увеличить электронную температуру, роль этого эффекта может уменьшиться.

3.2 Плазма с широким азимутальной скорости

В этом разделе анализируются эффекты, возникающие при наличии шире азимутальной скорости вращения плазмы. Для простоты считается, что $\omega^* = 0$. Желобки, которые локализованы около магнитной поверхности с $r = r_s$ и вращаются вместе с плазмой наиболее неустойчивы. Для них выполнено условие

$$Re \omega_0 = 0,$$

или

$$\omega(r_s) = m\omega_E(r_s) + i\gamma.$$

Разложение функции $\omega_0(r)$ в окрестности точки r_s имеет вид

$$\omega_0(r) = \omega - m\omega_E \approx -m \frac{d\omega_E}{dx} \Big|_{x=1} \left(\frac{r - r_s}{r_s} \right) + i\gamma = -m\omega'_E(\zeta - i\zeta_0),$$

где используются обозначения

$$\zeta = \frac{r - r_s}{r_s}, \quad \zeta_0 = \frac{\gamma}{m\omega'_E}, \quad \omega'_E \equiv \frac{d\omega_E}{dx} \Big|_{x=1}.$$

Если произвести разложение коэффициентов уравнения (10) в окрестности точки r_s , тогда с учетом условия (14) можно получить

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\zeta - i\zeta_0)} \frac{d}{d\zeta} (\zeta - i\zeta_0)^2 \frac{d}{d\zeta} \frac{\delta\varphi}{(\zeta - i\zeta_0)} - m^2\delta\varphi + \\ & + \frac{(\omega_E^2 + \gamma_0^2)/(\omega'_E)^2}{(\zeta - i\zeta_0)^2} \left(\frac{d \ln n_0}{d\zeta} \right) \Big|_{\zeta=0} \delta\varphi = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение преобразуется к виду

$$\frac{d^2\delta\varphi}{d\zeta^2} - m^2\delta\varphi = \frac{x_0}{(\zeta - i\zeta_0)^2} \delta\varphi, \quad (16)$$

где введено обозначение

$$x_0 \equiv \frac{\omega_E^2 + \gamma_0^2}{(\omega'_E)^2} \Big|_{\zeta=0} \frac{d \ln n_0}{d\zeta}.$$

Уравнение (16) с граничными условиями

$$\begin{cases} \delta\varphi\left(\frac{r-r_s}{r_s} \rightarrow \infty\right) \rightarrow 0, \\ \delta\varphi\left(\frac{r-r_s}{r_s} \rightarrow -\infty\right) \rightarrow 0. \end{cases}$$

можно записать в интегральной форме через функцию Грина $G(\zeta|\zeta')$

$$\delta\varphi(\zeta) = x_0 \int_{-\infty}^{\infty} G(\zeta|\zeta') \frac{\delta\varphi(\zeta')}{(\zeta' - i\zeta_0)^2} d\zeta'. \quad (17)$$

Функция Грина удовлетворяет уравнению

$$G''(\zeta, \zeta') - m^2 G(\zeta, \zeta') = \delta(\zeta - \zeta') \quad (18)$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} G(\zeta \rightarrow \pm\infty|\zeta') = 0, \\ G(\zeta' + 0|\zeta') = G(\zeta' - 0|\zeta'), \\ G'(\zeta' + 0|\zeta') - G'(\zeta' - 0|\zeta') = 1. \end{cases} \quad (19)$$

Решение уравнения (18) с граничными условиями (19) имеет вид

$$G(\zeta|\zeta') = -\frac{1}{2m} \begin{cases} e^{m(\zeta-\zeta')}, & \zeta < \zeta', \\ e^{-m(\zeta-\zeta')}, & \zeta > \zeta'. \end{cases}$$

В таком случае (17) переписывается в виде интегрального уравнения

$$\delta\varphi(\zeta) = -\frac{x_0}{2m} \left[\int_{-\infty}^{\zeta} \frac{\delta\varphi(\zeta')}{(\zeta' - i\zeta_0)^2} e^{-m(\zeta-\zeta')} d\zeta' + \int_{\zeta}^{\infty} \frac{\delta\varphi(\zeta')}{(\zeta' - i\zeta_0)^2} e^{m(\zeta-\zeta')} d\zeta' \right]. \quad (20)$$

Решение уравнение (20) находится методом последовательных приближений. Для этого функцию $\delta\varphi(\zeta)$ необходимо представить в виде ряда

$$\delta\varphi(\zeta) = \delta\varphi_0(\zeta) + \sum_{n=0}^{\infty} [\delta\varphi_{n+1}(\zeta) - \delta\varphi_n(\zeta)],$$

при этом

$$\frac{\delta\varphi_{n+1}(\zeta) - \delta\varphi_n(\zeta)}{\delta\varphi_n(\zeta)} \ll 1.$$

Итерационная последовательность имеет вид

$$\begin{aligned} \delta\varphi_{n+1}(\zeta) &= -\frac{x_0}{2m} \left[\int_{-\infty}^{\zeta} \frac{\delta\varphi_n(\zeta')}{(\zeta' - i\zeta_0)^2} e^{-m(\zeta-\zeta')} d\zeta' \right. \\ &\quad \left. + \int_{\zeta}^{\infty} \frac{\delta\varphi_n(\zeta')}{(\zeta' - i\zeta_0)^2} e^{m(\zeta-\zeta')} d\zeta' \right]. \end{aligned}$$

В качестве функции нулевого приближения можно использовать

$$\delta\varphi_0(\zeta) = A \begin{cases} 1, & |\zeta| \leq \Delta\zeta, \\ 0, & |\zeta| \geq \Delta\zeta, \end{cases}$$

где A комплексная константа, а $\Delta\zeta$ – ширина возмущения, которую можно рассматривать как вариационный параметр. Тогда функция следующего приближения имеет вид

$$\delta\varphi_1(\zeta) = -A \frac{x_0}{2m} \begin{cases} \int_{-\Delta\zeta}^{\Delta\zeta} \frac{d\zeta'}{(\zeta' - i\zeta_0)^2} e^{m(\zeta - \zeta')}, & \zeta \leq -\Delta\zeta, \\ \int_{-\Delta\zeta}^{\zeta} \frac{d\zeta'}{(\zeta' - i\zeta_0)^2} e^{-m(\zeta - \zeta')} + \int_{\zeta}^{\Delta\zeta} \frac{d\zeta'}{(\zeta' - i\zeta_0)^2} e^{m(\zeta - \zeta')}, & -\Delta\zeta \leq \zeta \leq \Delta\zeta, \\ \int_{-\Delta\zeta}^{\Delta\zeta} \frac{d\zeta'}{(\zeta' - i\zeta_0)^2} e^{-m(\zeta - \zeta')}, & \zeta \geq \Delta\zeta. \end{cases}$$

Если в качестве нормировки выбрать условие

$$\delta\varphi_1(\zeta = 0) = A, \quad (21)$$

тогда из него можно получить выражение для инкремента неустойчивости. Уравнение (21) переписывается следующим образом

$$1 = -\frac{x_0}{2m} \left[\int_{-\Delta\zeta}^0 \frac{e^{m\zeta'}}{(\zeta' - i\zeta_0)^2} d\zeta' + \int_0^{\Delta\zeta} \frac{e^{-m\zeta'}}{(\zeta' - i\zeta_0)^2} d\zeta' \right]. \quad (22)$$

Второе слагаемое в (22) комплексно сопряжено к первому, тогда справедливо

$$1 = -\frac{x_0}{m} \operatorname{Re} \int_0^{\Delta\zeta} \frac{e^{-m\zeta'}}{(\zeta - i\zeta_0)^2} d\zeta' = x_0 \frac{\omega'_E}{\gamma} \int_0^{z_0} \frac{1 - z^2}{(1 + z^2)^2} e^{-\frac{\gamma}{\omega'_E} z} dz. \quad (23)$$

В (23) используются обозначения

$$z = \zeta/\zeta_0, \quad z_0 = \frac{\Delta\zeta}{\zeta_0} = \frac{m \omega'_E}{k_r \gamma},$$

$$k_r = 1/\Delta\zeta.$$

Условие (23) представляет собой дисперсионное соотношение, связывающее значение инкремента неустойчивости с компонентами волнового вектора возмущения. Величина шира скорости входит в (23) как параметр. При этом условие (23) не изменяется при замене

$$\omega'_E \rightarrow -\omega'_E.$$

Тогда его можно переписать в виде

$$\frac{\gamma}{|\omega'_E|} = \left(\frac{\Gamma}{\omega'_E}\right)^2 \int_0^{|z_0|} \frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} e^{-\frac{\gamma}{|\omega'_E|}z} dz, \quad (24)$$

где Γ – величина инкремента в отсутствии шири скорости

$$\Gamma = (\omega_E^2 + \gamma_0^2) \left| \frac{d \ln n_0}{d\zeta} \right|_{\zeta=0}.$$

Варьируя инкремент γ по параметру $\epsilon = \frac{m}{k_r}$ и приравнявая вариацию к нулю

$$\delta\gamma = 0, \quad (25)$$

можно получить значение инкремента наиболее неустойчивых возмущений. Вариация имеет вид

$$\frac{\delta\gamma}{\omega'_E} = \left(\frac{\Gamma}{\omega'_E}\right)^2 \left\{ \omega'_E \delta\left(\frac{\epsilon}{\gamma}\right) \frac{1-z_0^2}{(1+z_0^2)^2} e^{-\epsilon} - \frac{\delta\gamma}{\omega'_E} \int_0^{|z_0|} \frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} e^{-\frac{\gamma}{\omega'_E}z} z dz \right\}.$$

Из условия (25) возникает требование

$$z_0 = 1,$$

то есть

$$\Delta\zeta = \zeta_0 = \frac{\gamma}{m\omega'_E}.$$

В результате из (24) можно получить уравнение на максимум инкремента γ_{ex}

$$\frac{\gamma_{ex}}{|\omega'_E|} = \left(\frac{\Gamma}{\omega'_E}\right)^2 \int_0^1 \frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} e^{-\frac{\gamma_{ex}}{|\omega'_E|}z} dz.$$

На рис. 4 построена зависимость γ_{ex}/Γ от значения нормированного шири скорости $|\omega'_E|/\Gamma$. Из представленной зависимости видно, что эффект проскальзывания слоев плазмы становится существенным когда

$$|\omega'_E| \sim \Gamma. \quad (26)$$

Из рис. 4 видно, что с ростом шири скорости инкремент неустойчивости уменьшается.

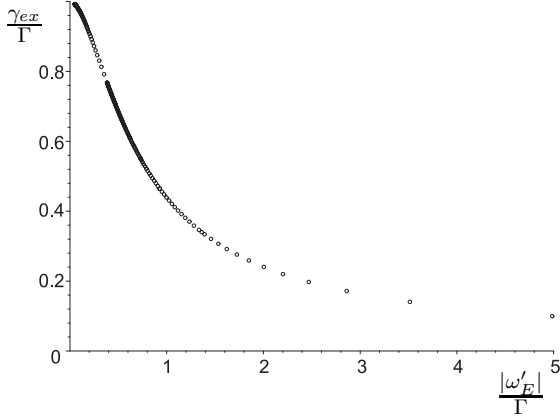


Рис. 4: Зависимость инкремента неустойчивости от модуля шири скорости.

4 Устойчивость моды $m = 1$

В предыдущем разделе рассмотрена устойчивость мелкомасштабных желобков. Для ГДЛ наиболее актуален вопрос устойчивости первой моды возмущения. Это связано с тем, что старшие моды устойчивы за счет сильного КЛР-эффекта быстрых ионов. В данном разделе рассмотрен вопрос устойчивости $m = 1$ моды в присутствии азимутального вращения плазмы.

4.1 Собственная функция для твердотельного смещения плазмы

Исходя из простых физических соображений, можно получить выражение для возмущения потенциала, приводящего к смещению плазмы как целого. В отсутствии вращения электрическое поле всюду в плазме должно быть однородно. Если плазма еще и вращается, тогда электрическое поле возмущения не однородно.

Согласно рассуждениям, приведенным в [22], в линейном приближении возмущение гидродинамической скорости имеет вид

$$\delta\mathbf{V} = \frac{\partial\xi}{\partial t} + (\mathbf{V}_0, \bar{\nabla})\xi - (\xi, \bar{\nabla})\mathbf{V}_0, \quad (27)$$

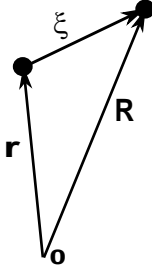


Рис. 5: Смещение плазменной “капли” при наложении возмущения $\xi(\mathbf{r}, t)$.

где ξ – вектор смещения. Такой вид $\delta\mathbf{V}$ связан с тем, что возмущение скорости из точки \mathbf{r} течением переносится в точку $\mathbf{r} + \xi$ (см. рис. 5).

Результат (27) можно получить из следующих соображений. Если зафиксировать точку \mathbf{r} , тогда возмущение скорости в ней определяется соотношением

$$\delta\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}(\mathbf{r}) - \mathbf{V}_0(\mathbf{r}),$$

где \mathbf{V}_0 – равновесное значение скорости. В линейном приближении по возмущению можно посчитать значение функции \mathbf{V} в точке $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \xi(\mathbf{r}, t)$

$$\mathbf{V}(\mathbf{R}) = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{d\xi(\mathbf{r}, t)}{dt} = \mathbf{V}_0(\mathbf{r}) + \frac{\partial\xi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + (\mathbf{V}_0(\mathbf{r}), \bar{\nabla})\xi(\mathbf{r}, t).$$

С другой стороны,

$$\mathbf{V}(\mathbf{R}) = \mathbf{V}(\mathbf{r}) + (\xi(\mathbf{r}, t), \bar{\nabla})\mathbf{V}_0.$$

При сравнении этих выражений воспроизводится результат (27)

$$\delta\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{\partial\xi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + (\mathbf{V}_0(\mathbf{r}), \bar{\nabla})\xi(\mathbf{r}, t) - (\xi(\mathbf{r}, t), \bar{\nabla})\mathbf{V}_0.$$

Пользуясь азимутальной симметрией и стационарностью равновесия, можно рассматривать устойчивость только Фурье гармоник

возмущения

$$\xi \propto \exp(i\phi - i\omega t).$$

Смещение плазмы возникает из-за дрейфа в скрещенных электрическом и магнитном поле. Радиальная компонента смещения

$$\delta V_r = -\frac{ic}{Br} \delta\varphi.$$

С другой стороны, из (27) можно написать

$$\delta V_r = -i\omega\xi_r + \frac{iV_0}{r}\xi_r.$$

При твердотельном смещении $\xi_r = const$ или

$$\frac{\delta\varphi}{\omega_0 r} = \psi_1 = const. \quad (28)$$

4.2 Инкремент неустойчивости для моды $m = 1$

В этом подразделе обсуждается устойчивость первой моды возмущения. Для этого необходимо воспользоваться уравнением (10). Это уравнение имеет самосопряженный вид. Умножив его слева на функцию ψ^* и проинтегрировав по радиусу плазмы, можно получить интегральное соотношение

$$\int_0^{r_0} dr \left\{ \psi^* \frac{d}{dr} \frac{n_0}{B_0^2} r^3 \omega_0 (\omega_0 - \omega^*) \frac{d}{dr} \psi + \frac{1 - m^2}{r^2} \frac{n_0}{B_0^2} r^3 \omega_0 (\omega_0 - \omega^*) |\psi|^2 + (\omega^2 + m^2 \gamma_0^2) r^2 \left(\frac{d}{dr} \frac{n_0}{B_0^2} \right) |\psi|^2 = 0 \right\}.$$

Если “унести” стенки камеры установки на бесконечность, т.е. $r_0 \rightarrow \infty$, тогда это уравнение преобразуется к виду

$$\int_0^\infty \left\{ \frac{n_0}{B_0^2} r^3 \omega_0 (\omega_0 - \omega^*) \left| \frac{d\psi}{dr} \right|^2 \frac{m^2 - 1}{r^2} \frac{n_0}{B_0^2} r^3 \omega_0 (\omega_0 - \omega^*) |\psi|^2 + (\omega^2 + m^2 \gamma_0^2) r^2 \left| \frac{d}{dr} \frac{n_0}{B_0^2} \right| |\psi|^2 \right\} dr = 0. \quad (29)$$

Выделение мнимой части частоты в (29) в явном виде приводит к результату

$$\gamma^2 - 2i\gamma D - C = 0. \quad (30)$$

Соответствующие коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} D &= \left\langle \omega_{0r} - \frac{\omega^*}{2} \right\rangle_m + \left\langle m\omega_E + \frac{\omega^*}{2} \right\rangle_1, \\ C &= m^2 \left\langle \gamma_0^2 \right\rangle_1 + \left\langle \omega_{0r}(\omega_{0r} - \omega^*) \right\rangle_m + 2\omega_r \left\langle m\omega_E + \frac{\omega^*}{2} \right\rangle_1 \\ &\quad - \left\langle \left(m\omega_E + \frac{\omega^*}{2} \right)^2 \right\rangle_1 + \left\langle \frac{\omega^*}{2} \right\rangle_1. \end{aligned}$$

Угловые скобки соответствуют усреднению с весовой функцией

$$\left\langle F(r) \right\rangle_m \equiv \left[\int_0^\infty P_m(r) dr \right]^{-1} \int_0^\infty P_m F(r) dr,$$

где для $m > 1$

$$P_m(r) \equiv n_0 r^3 \left| \frac{d\psi_m}{dr} \right|^2 + (m^2 - 1) r n_0 |\psi_m|^2 + r^2 \left| \frac{dn_0}{dr} \right| |\psi_m|^2.$$

Функция P_1 определяется следующим образом

$$P_1(r) = r^2 \left| \frac{dn_0}{dr} \right| |\psi_m|^2.$$

Если учесть (28), то справедлив предельный переход

$$\lim_{m \rightarrow 1} P_m(r) = \lim_{m \rightarrow 1} P_1(r).$$

Поскольку γ по определению вещественное, в уравнении (30) мнимое слагаемое должно обращаться в ноль. Это возможно если

$$D = 0.$$

Тогда вещественная часть частоты определяется соотношением

$$\omega_r = \left\langle m\omega_E + \frac{\omega^*}{2} \right\rangle_m - \left\langle m\omega_E + \frac{\omega^*}{2} \right\rangle_1,$$

а инкремент неустойчивости

$$\gamma^2 = C = m^2 \langle \gamma_0^2 \rangle_1 - \left[\langle m\omega_E + \frac{\omega^*}{2} \rangle_m - \langle m\omega_E + \frac{\omega^*}{2} \rangle_1 \right]^2 + \left[\langle m\omega_E(m\omega_E + \omega^*) \rangle_m - \langle m\omega_E(m\omega_E + \omega^*) \rangle_1 \right]. \quad (31)$$

Первое слагаемое в правой части (31) описывает эффекты, связанные с неоднородностью магнитного поля в ловушке. Второе слагаемое – стабилизирующий эффект конечного ларморовского радиуса. Последнее слагаемое – дестабилизирующая центробежная сила.

Если в (31) перейти к пределу $m \rightarrow 1$, тогда инкремент неустойчивости для твердотельного смещения плазмы имеет вид

$$\gamma^2 = \langle \gamma_0^2 \rangle_1.$$

Таким образом можно утверждать, что сдвиговое течение, как и КЛР-эффект, не влияет на устойчивость твердотельного смещения плазменного столба. При таких возмущениях плазма смещается вместе со своей внутренней вращающейся структурой.

4.3 Влияние граничных условий на устойчивость первой моды

Наличие проводящего кожуха камеры установки сильно меняет ситуацию описанную в предыдущем разделе, поскольку решение уравнения (10) зависит от вида граничных условий. Появление границы приводит к отклонению решения ($m = 1$) от (28).

4.3.1 Плазма, опирающаяся на проводящий кожух

Уравнение желобковых колебаний для моды с азимутальным числом $m = 1$ имеет вид (см.10)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} S(r) \frac{d\psi}{dr} + (\omega^2 + \gamma_0^2) \frac{dn_0}{dr} \psi = 0. \quad (32)$$

Для простоты удобно рассматривать случай, когда профиль плотности плазмы близок к гауссовскому, а частота вращения и

ларморовская частота не зависят от радиуса. Уравнение (32) необходимо дополнить граничными условиями

$$\begin{aligned}\psi(x=0) &= 1, \\ \psi(x=1) &= 0,\end{aligned}\tag{33}$$

где $x = r/a$, a – радиус плазмы. В (33) учтено то обстоятельство, что кожух, в который помещена плазма проводящий, поэтому потенциал плазмы на нем обращается в ноль. А вблизи оси потенциал плазмы должен вести себя линейно по x .

Подставляя модельный профиль плотности и, обезразмерив r на радиус плазмы, можно получить следующее дифференциальное уравнение

$$\psi'' + \left(\frac{3}{x} - 2x\right)\psi' - 2\Omega^2\psi = 0,\tag{34}$$

где используется обозначение $\Omega^2 = (\omega^2 + \gamma_0^2)/\omega_0(\omega_0 - \omega^*)$.

Уравнение (34) имеет два решения. Асимптотическое поведение этих решений в нуле можно получить если устремить x к нулю и решить это уравнение в малой окрестности нуля. В этом пределе уравнение принимает вид

$$\psi_0'' + \frac{3}{x}\psi_0' = 0$$

и имеет два решения

$$\psi_0(x) = \text{const}_1 + \frac{\text{const}_2}{x^2}.$$

Граничным условиям (33) удовлетворяет только решение $\psi_0(x) = \text{const}_1$.

Если решать уравнение (34) во всей области x от 0 до 1, тогда решение выглядит следующим образом

$$\psi(x) = C_1 \frac{e^{x^2/2}}{x^2} M_{1-\frac{\Omega^2}{2}, \frac{1}{2}}(x^2) + C_2 \frac{e^{x^2/2}}{x^2} W_{1-\frac{\Omega^2}{2}, \frac{1}{2}}(x^2).$$

$M_{\mu\nu}$ и $W_{\mu\nu}$ – функции Уиттекера. Для выполнения граничных условий (конечность собственной функции в нуле) необходимо потребовать

$$C_2 = 0.$$

Тогда

$$\psi(x) = \frac{e^{x^2/2}}{x^2} M_{1-\frac{\Omega^2}{2}, \frac{1}{2}}(x^2). \quad (35)$$

Это решение удовлетворяет граничному условию (33) в нуле. Условие $\psi(1) = 0$ позволяет получить дисперсионное уравнение

$$M_{1-\frac{\Omega^2}{2}, \frac{1}{2}}(1) = 0.$$

Обозначим ρ_μ – решение уравнения $M_{\rho_\mu, \frac{1}{2}}(1) = 0$ (см. рис. 6). Тогда дискретный спектр частот имеет вид

$$\Omega_\mu^2 = -2(\rho_\mu - 1). \quad (36)$$

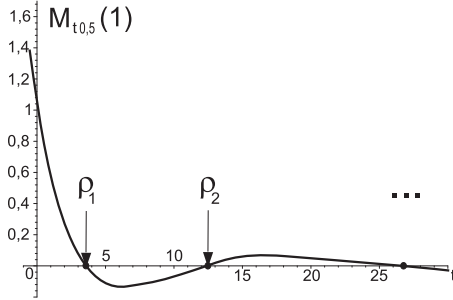


Рис. 6: График функции Уиттекера $M_{t, \frac{1}{2}}(1)$, ρ_μ – нули этой функции

Если разрешить уравнение (36) относительно частоты ω , тогда можно получить

$$(\omega - \Delta\omega)^2 = -\gamma_0^2 \frac{1}{(2\rho_\mu - 1)} - \left(\omega_E + \frac{\omega^*}{2}\right)^2 \frac{2\rho_\mu - 2}{(2\rho_\mu - 1)^2} + \left(\frac{\omega^*}{2}\right)^2 \frac{2\rho_\mu - 2}{2\rho_\mu - 1}, \quad (37)$$

где введено обозначение

$$\Delta\omega = \left(\omega_E + \frac{\omega^*}{2}\right) \frac{2\rho_\mu - 2}{2\rho_\mu - 1}.$$

Первое слагаемое в уравнении (37) стандартное и описывает эффекты кривизны в параксиальном приближении. Второе слагаемое – дестабилизирующая центробежная сила, вызванная вращением плазмы как целого. Последнее слагаемое, стабилизирующее, связано с конечностью ларморовского радиуса ионов. Как следует из (37), учет граничных условий (например, зануление потенциала на поверхности проводящего кожуха) приводит к тому, что ранее известные эффекты, стабилизирующие коротковолновые возмущения остаются существенными и для длинноволновых возмущений. Отличие высоких мод ($m \gg 1$) от первой ($m = 1$) содержится лишь в численных коэффициентах.

Поскольку функции Уиттекера достаточно хорошо изучены, можно найти все коэффициенты ρ_μ (см. таб. 1).

На рис. 7 представлен вид собственной функции ψ_μ для разных значений μ . Последнее слагаемое в (37) для параметров плазмы в ГДЛ самое большое (и не обращается в ноль для значений параметра ρ_μ из таб. 1). Поэтому можно заключить, что в представленной геометрии первая азимутальная мода устойчива и стабилизирована проводящим кожухом. Эффект стабилизации связан с тем, что поляризационные токи, вызывающие неустойчивость не приводят к разделению зарядов в плазменном столбе. Они замыкаются через проводящие элементы конструкции установки.

Таблица 1: Корни уравнения $M_{\rho_\mu \frac{1}{2}}(1) = 0$

μ	ρ_μ	Ω_μ^2
1	3.75	-5.5
2	12.39	-22.78
3	25.96	-49.92
..

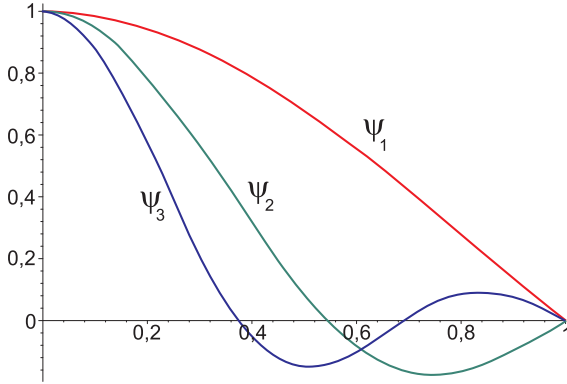


Рис. 7: График собственной функции ψ_μ для разных значений μ

4.3.2 Плазма с вакуумным промежутком

Интересно рассмотреть другую ситуацию, когда плазму от проводящего кожуха отделяет вакуумный промежуток. При этом граничные условия меняются. К тому же необходимо по отдельности находить решение в области ненулевой плотности плазмы и в вакуумном промежутке. При этом важно правильно сшить решения.

Для описания данной ситуации достаточно задание следующего профиля плотности

$$n_0(x) = \begin{cases} n_0(0)e^{-x^2}, & x \leq 1; \\ 0, & 1 \leq x \leq x_w, \end{cases} \quad (38)$$

где x_w – координата стенки. Тогда для функции $\psi(x)$ необходимо наложить граничные условия

$$\begin{cases} \psi(0) = 1, \\ \psi(x_w) = 0, \\ \psi(1-0) = \psi(1+0). \end{cases}$$

Еще одно граничное условие можно получить непосредственно из уравнения (32). Для этого нужно проинтегрировать его в окрестности единицы и устремить интервал интегрирования к нулю

$$\omega_0(\omega_0 - \omega^*) \left[n_0(1+0) \frac{d\psi}{dx}(1+0) - n_0(1-0) \frac{d\psi}{dx}(1-0) \right] + (\omega^2 + \gamma_0^2) \psi(1) [n_0(1+0) - n_0(1-0)] = 0.$$

Если принять во внимание (38), тогда выполнено условие $n_0(1+0) = 0$ и граничное условие принимает вид

$$\frac{d\psi}{dx}(1-0) + \Omega^2 \psi(1) = 0. \quad (39)$$

Оно выступает взамен требования $\psi(1) = 0$ (см. 33). Для получения дисперсионного уравнения достаточно знать как выглядит решение внутри плазмы. Оно получено в предыдущем разделе (см. 35). Если подставить (35) в (39) и учесть соотношение

$$\frac{d}{dt} M_{\rho \frac{1}{2}}(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\rho}{t} \right) M_{\rho \frac{1}{2}}(t) + \frac{\rho + 1}{t} M_{\rho+1 \frac{1}{2}}(t),$$

то можно получить дисперсионное уравнение в следующем виде

$$(1 - 2\rho) M_{\rho \frac{1}{2}}(1) + (1 + \rho) M_{\rho+1 \frac{1}{2}}(1) = 0,$$

где используется обозначение $\rho = 1 - \Omega^2/2$. График функции

$$F(\rho) = (1 - 2\rho) M_{\rho \frac{1}{2}}(1) + (1 + \rho) M_{\rho+1 \frac{1}{2}}(1)$$

приведен на рис. 8. В таблице 2 приведены значения нескольких первых нулей этой функции. При этом спектр частот по прежнему определяется соотношением (37). В данном случае примечателен первый корень функции $F(\rho)$. Для этой радиальной моды частота, определяемая соотношением (37), принимает вид

$$\omega_1^2 = -\gamma_0^2.$$

Это означает что радиальная мода с $\rho = \rho_1 = 1$ неустойчива, при этом инкремент неустойчивости соответствует классическому инкременту из теории Розенблюта-Лонгмайра.

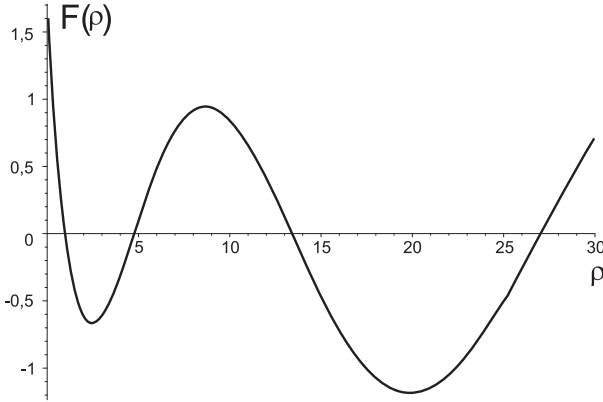


Рис. 8: График функции $F(\rho)$.

Таблица 2: Корни уравнения $F(\rho) = 0$

μ	ρ_μ
1	1,0
2	4,75
3	13,39
4	26,96
..	...

Вид собственных радиальных мод можно получить, решив уравнение в вакуумном промежутке и сшив его с решением внутри плазмы. Поскольку постановка задачи подразумевает отсутствие возмущения магнитного поля (оно настолько мало по сравнению с вакуумным полем, что ими можно пренебречь) уравнение на собственную функцию в зазоре между плазмой и заземленной стенкой имеет вид

$$\Delta x\psi = 0.$$

Для первой азимутальной моды в цилиндрической геометрии оператор Лапласа выглядит следующим образом

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{1}{x^2}.$$

В таком случае на функцию ψ можно получить уравнение

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{3}{x} \frac{d\psi}{dx} = 0,$$

которое имеет два простых решения

$$\psi(x) = C_1 + \frac{C_2}{x^2}.$$

Постоянные множители C_1 и C_2 находятся из граничных условий

$$\begin{cases} \psi(x_w) = 0, \\ \psi(1+0) = \psi(1-0). \end{cases}$$

Теперь нетрудно определить, что

$$C_2 = -C_1 x_w^2 = -\frac{\sqrt{e} M_{\rho \frac{1}{2}}(1)}{1 - x_w^2} x_w^2.$$

Таким образом, собственная функция ψ во всей области вплоть до проводящей стенки имеет вид

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2/2}}{x^2} M_{\rho \frac{1}{2}}(x^2), & x \leq 1, \\ \sqrt{e} M_{\rho \frac{1}{2}}(1) \left(\frac{1-x_w^2/x^2}{1-x_w^2} \right), & 1 \leq x \leq x_w. \end{cases}$$

На рис. 9 приведены графики собственных функций различных радиальных мод. Для определенности считается, что $x_w = 1,5$. Мода ψ_1 соответствует однородному профилю электрического поля внутри плазмы.

4.4 Обсуждение граничных условий

Согласно результатам предыдущих двух разделов, граничные условия играют существенную роль в динамике желобковой неустойчивости первой моды. Например, при переходе в режим, в котором плазмы ограничена от стенки вакуумным промежутком первая радиальная мода становится неустойчивой. В то время как плазма, опирающаяся на проводящий кожух, устойчива. Переход между

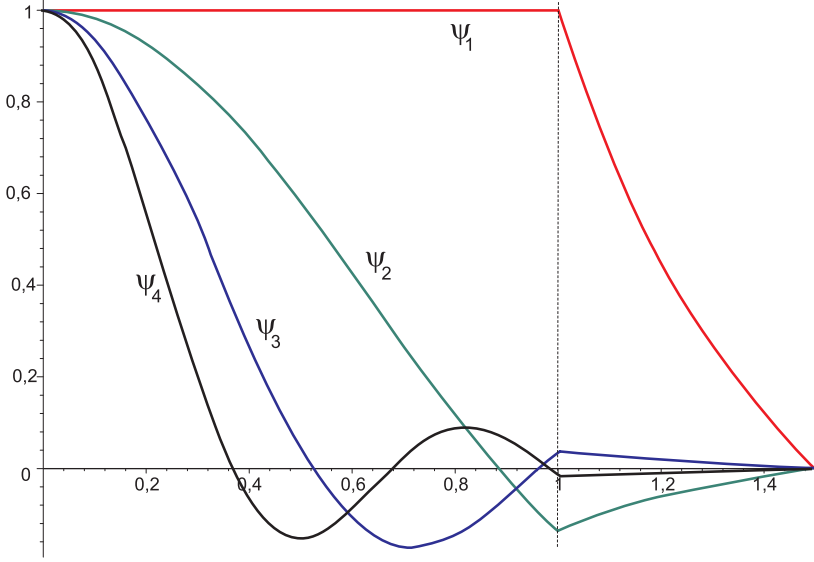


Рис. 9: Графики собственных функций ψ_μ для разных значений μ .

этими режимами становится прозрачен если граничное условие на границе плазма-вакуум записать точно. Оно следует из интегрирования уравнения Пуассона вблизи границы плазмы. Полагая условия $\omega_E = const$, $\omega^* = const$ выполненными для $m = 1$ из (9) можно получить

$$-\frac{1}{4\pi}\Delta\delta\varphi = \frac{\omega_0 - \omega^*}{\omega_0} \frac{Mc^2}{B_0^2} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^3 n_0 \frac{d}{dr} \frac{\delta\varphi}{r} + \Omega^2 \frac{dn_0}{dr} \frac{\delta\varphi}{r} \right]. \quad (40)$$

Поскольку тангенциальная компонента электрического поля должна быть непрерывна, возмущение электрического потенциала тоже непрерывно

$$\{\delta\varphi\}|_{r=r_0} = 0,$$

где скобки $\{ \}$ требуют взятие скачка функции в указанной точке. Проинтегрировав уравнения (40) в малой окрестности границы плазмы, воспользовавшись условием непрерывности потенциала, можно получить

$$-\frac{d\delta\varphi}{dr}\Big|_{r_0-0}^{r_0+0} = \frac{4\pi M c^2}{B_0^2} \left[r n_0 \frac{d}{dr} \frac{\delta\varphi}{r} + \Omega^2 n_0 \frac{\delta\varphi}{r} \right] \Big|_{r_0-0}^{r_0+0}.$$

Поскольку плотность плазмы справа от ее границы равна нулю это условие принимает вид

$$-\frac{d\delta\varphi}{dx}\Big|_{1-0}^{1+0} = \frac{c^2}{c_a^2} \left[\frac{d}{dx} \frac{\delta\varphi}{x} + \Omega^2 \frac{\delta\varphi}{x} \right]_{x=1+0}. \quad (41)$$

Из (41) видно, что радиальная компонента поля рвется. Этот разрыв порожден поверхностным зарядом, образовавшимся в результате поляризации плазменного столба. Учитывая, что $c_a/c \ll 1$ левой частью этого уравнения можно пренебречь. В таком случае граничное условие переходит в (39), а поправки к частоте из за левой части будут порядка $O(c_a^2/c^2)$. Очевидно, что ими можно пренебречь. Граничное условие в виде (39) справедливо до тех пор пока можно пренебречь левой частью в уравнении (40). Это условие может нарушаться только при достаточно узком зазоре

$$\frac{\Delta r}{r_0} \sim \frac{c_a^2}{c^2}.$$

Стоит отметить, что при любом профиле плотности, когда плазма от стенки отделена вакуумным промежутком, будет существовать неустойчивое решение с частотой $\Omega^2 = 0$ ($\psi(x) = 1, x \leq 1$). Вакуумное поле в таком случае позволяет “сшить” плазменное поле с полем на проводящей стенке, где потенциал обращается в ноль.

5 Выводы

Из представленной работы можно сделать ряд выводов относительно устойчивости плазмы в ГДЛ в присутствии азимутального вращения. Согласно (рис.3) логично заключить, что все моды желобковых колебаний с азимутальным волновым числом $m > 1$ стабилизированы сильным КЛР-эффектом “быстрых” частиц. В присутствии сдвигового вращения условие устойчивости модифицирует-

ся. При этом инкремент неустойчивости становится меньше классического в несколько раз, когда шир скорости достаточно велик, а именно больше величины инкремента, который был бы, если бы отсутствовало сдвиговое вращение, т.е. $|\omega'_E| > \Gamma$, где Γ - величина инкремента из теории Розенблюта-Лонгмайра (см. рис.4). Устойчивость первой азимутальной моды желобковых возмущений сильно зависит от граничных условий. Если плазма касается проводящего кожуха установки, т.е. её плотность отлична от нуля всюду вплоть до стенки, тогда все радиальные желобковые моды устойчивы, поскольку электрическое поле возмущения в плазме становится существенно неоднородным. Однако если плазма отделена вакуумным промежутком от проводящего кожуха установки неустойчивой остается первая радиальная мода.

Список литературы

- [1] *Мирнов В.В., Рюттов Д.Д.* Газодинамическая линейная ловушка для удержания плазмы, Письма в ЖТФ, 1979, т.5(11). с.678.
- [2] *Мирнов В.В., Рюттов Д.Д.* Газодинамическая ловушка, Вопросы атомной науки и техники (серия “Термоядерный синтез”), 1980, вып.1(5). с.57.
- [3] *Kotel'nikov I.A., Mirnov V.V., Nagornij V.P., Rytov D.D.* New results of gas-dynamic trap research, Proc. of Tenth Int. Conf. on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, London, 1984. v.2, p.309.
- [4] *Мирнов В.В., Нагорный В.П.* Кинетика высокоэнергетичных ионов в газодинамической ловушке, Вопросы атомной науки и техники (серия “Термоядерный синтез”), 1984, вып.3(16), с.40.
- [5] *Котельников И.А., Рюттов Д.Д., Цидулко Ю.А., и др.* Математическая модель источника нейтронов на основе газодинамической ловушки, Препринт, Ин-т ядерной физики СО АН СССР 90-105, Новосибирск, 1990.
- [6] *P.A. Bagryansky, A.V. Anikeev, A.A. Ivanov, e.a.* Axial Profile measurement of DD product yield in the GDT central cell, In proc. of the 4th International Conference on Open Magnetic Systems for Plasma Confinement (July 1-4, 2002, Jeju, Korea); Transaction of Fusion Science and Technology, v.43, No 1T (2003), p.259-261
- [7] *Rosenbluth M.N., Longmire C.L.* Stability of plasmas confined by magnetic fields, Annals of Physics. 1957, v.1, p.210.

- [8] *Кадоццев Б.Б.* В сб.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, М.: АН СССР, 1958, т.4, с.353.
- [9] *Rayleigh (J. W. Strutt).* Scientific Papers. Cambr. Univ. Press, 1880, v.1, p.474.
- [10] *Линь Цзя-Цзяо.* Теория гидродинамической устойчивости, М.: ИЛ, 1958.
- [11] *Тимофеев А.В.* Резонансные явления в колебаниях плазмы, М.: Физматлит, 2000, с.153.
- [12] *Rosenbluth M.N., Krall N.A., Rostoker N.* Finite Larmor Radius Stabilization of "Weakly" Unstable Confined Plasmas, Nuclear Fusion: Supplement, Part 1, 1962, p.143.
- [13] *Hoh F.S.* Simple picture of the finite Larmor radius stabilization effect, Phys. Fluids, 1963, v.6, p.1359.
- [14] *Anikeev A.V., Bagryansky P.A., Deichuli P.P., e.a.* Observation of magnetohydrodynamic stability limit in cusp-anchored Gas-Dynamic Trap, Physics of Plasmas, 1997, v.4, p.347.
- [15] *Bagryansky P.A., Lizunov A.A., Zuev A.A., e.a.* Experiments with controllable application of radial electric field in GDT central cell, Transactions of Fusion Science and Technology, 2002, v.1T, p.152.
- [16] *Рухадзе А.А., Шнигель И.С.* Стабилизация желобковой неустойчивости плазмы неоднородным электрическим полем, ЖЭТФ, 1965, т.48(1), с.151.
- [17] *Бехтенов А.А., Волосов В.И.* О некоторых особенностях желобковых колебаний в открытой ловушке с радиальным электрическим полем, ЖТФ, 1977, т.47(7), с.1450.
- [18] *Den Hartog D.J., Golingo R.P., Jackson S.L., e.a.* The ZaP Flow Z-Pinch: Plasma Flow Shear and Stability, Transactions of Fusion Science and Technology, 2004, v.1T, p.134.
- [19] *Цидулко Ю.А.* Резистивные моды в ГДЛ с двухкомпонентной плазмой и конечным бета, Материалы XXXIII конференции по Физике Плазмы и Проблемам УТС, Звенигород, Москва, февраль 13-17, с.85, 2006.
- [20] *Tsidulko Yu.A.* Two-dimensional dynamic of two-component plasma with finite beta, Phys. Plasmas, 2004, v.11, p.4420.
- [21] *Kaufman A.N.* Plasma Viscosity in a Magnetic Field, The Phys. Fluids, 1960, v.3, p.610.
- [22] *Нагорный В.П., Рюттов Д.Д., Ступаков Г.В.* Влияние течения плазмы на желобковую неустойчивость, Препринт, Ин-т ядерной физики СО АН СССР 83-74.

М.С. Чащин, А.Д. Беклемисhev

**Влияние вращения
на устойчивость плазмы в ГДЛ**

M.S. Chaschin, A.D. Beklemishev

**Effect of rotation
on the plasma stability in the GDL**

ИЯФ 2006-19

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев
Работа поступила 7.04.2006 г.

Сдано в набор 11.04.2006 г.

Подписано в печать 12.04.2006 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2.2 печ.л., 1.8 уч.-изд.л.

Тираж 100 экз. Бесплатно. Заказ № 19

Обработано на IBM PC и отпечатано на
ротапринте "ИЯФ им. Г.И. Будкера РАН"

Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.