

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина Сибирское отделение
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им. Г.И. Будкера

В.Б. Рева

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ
В НАКОПИТЕЛЕ С ПРОДОЛЬНЫМ
МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

ИЯФ 2005-36

Новосибирск
2005

Движение заряженных частиц в накопителе с продольным магнитным полем

В.Б. Рева

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера
630090, Новосибирск, Россия

Abstract

The particle motion at a presence of a large magnetic field directed along the trajectory demands the special description. This article deals with the decomposition of the Hamiltonian on the two parts: fast and slow. The first part describes the fast rotation around the magnetic line of longitudinal field. The second part describes the slow drift of rotation center from one magnetic line to another. The supposed method enables to write the simple Hamiltonian to each motion type and to formulate the matrix formalism for any element of an accelerator device (quadruple, skew- quadruple, drift gap, bend with a filed index). The Hamiltonian decomposition has physical clearness when the longitudinal field is larger than another fields but it is correct for the arbitrary parameters. At the small longitudinal field the coupling term in Hamiltonian between two modes is essential. The dispersion property of fast and slow modes is derived easy from Hamiltonian also. This method expands easily for nonlinear motion of such modes. The matrix formalism is discussed also. It is shown that the motion in such device can be reduced to the special modes that like the particle motion in the simple solenoid.

These results may be used at analyzed the electron motion in the cooling device, the muon motion in the muon ionization cooler or another system with strong solenoidal coupling.

Введение

Наличие сильного магнитного поля направленного вдоль движения частицы может существенно поднять жесткость машины, обеспечивая сильную поперечную фокусировку. Такие схемы могут представлять интерес с точки зрения их использования в мюонных коллайдерах. Проекты таких машин характеризуются большим значением эмиттанса, что связано с особенностью генерации мюонов. Наличие сильной фокусировки позволяет держать поперечный размер пучка в разумных пределах. Примером такого проекта служит кольцо Балбекова [1].

Другим применением такого рода накопительных колец может быть область низких энергий и больших значений токов. В этом случае основным ограничением на максимальный ток служит пространственный заряд. Сильная фокусировка продольным магнитным полем на протяжении всей траектории движения заряженной частицы может существенно помочь в решении данной проблемы. В каком то смысле подобная конструкция по динамике частиц ближе к токамаку или стелларатору, но с одной особенностью. В такой системе не обязательно обеспечивать устойчивость движения заряженных частиц вращающихся в накопителе навстречу друг другу.

В позитронном накопителе с электронным охлаждением LEPTA [2] для формирования устойчивого движения частиц используется спиральное квадрупольное поле. Частицы движутся в сильном продольном поле и успевают совершить порядка 300 циклотронных вращений за один оборот вокруг накопителя. В работе [3] на основе матричного метода проводится анализ собственных значений матрицы перехода и анализ устойчивости движения.

Система с продольным магнитным полем характеризуется сильной связью между горизонтальными и вертикальными колебаниями частиц. Поэтому “классический ускорительный” подход к анализу таких систем оказывается не очень удобным. Более естественным является выбор переменных принятых в физике плазмы. Движение удобно рассматривать как суперпозицию быстрого ларморовского вращения частицы и медленного дрейфа центра ларморовского кружка. В этом случае уравнения, описывающие данные движения оказываются слабо связанными между собой, и в первом приближении их можно рассматривать как независимые.

Ниже приведена таблица упрощенных гамильтонианов для различных элементов в случае сильного продольного поля. В разделе 7 данного препринта данный вопрос рассмотрен более подробно.

элемент	дрейф ларморовского кружка	быстрое циклотронное вращение
дрейфовый промежуток	0	$\frac{1}{2} P_2^2 + \frac{R^2}{2} Q_2^2$
дрейфовый промежуток с изменяющимся продольным магнитным полем	$-\frac{1}{2} \frac{N_s}{R} P_1 Q_1$	$\frac{1}{2} P_2^2 + \frac{R^2}{2} Q_2^2$
квадруполь	$-\frac{K}{R^2} \frac{P_1^2}{2} + K \frac{Q_1^2}{2}$	$\frac{P_2^2}{2} + R^2 \frac{Q_2^2}{2}$
skew-квадруполь	$\frac{N}{R} P_1 Q_1$	$\frac{P_2^2}{2} + R^2 \frac{Q_2^2}{2}$
поворотный магнит	$-\frac{K}{R^2} \frac{P_1^2}{2} + \frac{(K_x^2 + K)}{2} \left(Q_1 - \frac{K_x}{K_x^2 + K} P_s \right)^2$	$\frac{1}{2} \left(P_2 + \frac{K_x}{R} P_s \right)^2 + R^2 \frac{Q_2^2}{2}$

Увидеть разделение движений можно и с помощью матричного формализма. В разделе 8 препринта показано, как перейти к координатам, в которых движение частицы будет описываться в терминах определенного типа движений. За основу взято движение частицы в однородном слабофокусирующем накопителе дополненным сильным продольным магнитным полем. Решив соответствующее дифференциальное уравнение четвертого порядка, можно найти выражения для двух типов поперечных колебаний в такой машине. Матрица преобразований по кольцу для такого решения будет блочно диагональной без элементов связи. Если теперь к кольцу добавлять дополнительные элементы (в разумных пределах), то в матрице появляются малые коэффициенты связи, но сама она остается практически блочно диагональной.

Как показано в разделах 2 и 8 каждому типу решений можно сопоставить свой эквивалент эмиттанса. Величина эмиттанса связанного с движением центра ларморовского кружка определяет размер пучка, а величина эмиттанса связанного с быстрым циклотронным вращением – поперечный импульс частицы.

Влияние пространственного заряда описано в разделе 4. В случае индекса магнитного поля $n = 0.5$ значения ласлеттовских сдвигов частот для обеих мод совпадают и пропорциональны $\Delta v_1 = \Delta v_2 \propto J/B_s$. Здесь J – ток

пучка, B_s – продольное магнитное поле. Таким образом, сильное продольное поле обеспечивает маленький сдвиг бетатронных частот для обоих типов колебаний. В случае $n \rightarrow 0$ $\Delta\nu_2$ растет (тип движений соответствующий дрейфовому движению центра ларморовского кружка), но при разумных значениях n разница между $\Delta\nu_1$ и $\Delta\nu_2$ не очень велика

В разделах репринта 3 и 7 рассмотрены дисперсионные свойства машины рассматриваемой конструкции. Оказывается, что с точки зрения центра ларморовского кружка продольное движение в машине аналогично движению частицы в отсутствии продольного магнитного поля и присутствует эффект “отрицательной” массы.

В данном репринте мы рассматриваем только нерелятивистский случай движения частиц, но при необходимости все вычисления легко адаптируются к случаю $\gamma \gg 1$.

1. Структурная схема накопителя с продольным магнитным полем

Основная особенность такого накопителя заключается в том, что движение частицы в нем подобно движению в прямолинейном соленоиде. Частица совершает быстрое ларморовское вращение вокруг заданной силовой линии магнитного поля. Формально, любая трубка магнитного потока может содержать равновесную орбиту и часть пучка, разбивая весь пучок на отдельные “микро”-накопительные кольца. Так как движение происходит в тороидальной машине, то положение центра ларморовского вращения может медленно дрейфовать в плоскости поперечной к направлению движения. Для обоснованности такого описания нужно, чтобы продольное поле в накопителе было настолько сильным, что длина ларморовской спирали оказывалась бы много меньше характерных длин накопительного кольца, например, меньше радиуса поворота

$$\rho_{\parallel} = \frac{\gamma\beta m_p c^2}{eB_s} \ll R. \quad (1.1)$$

Таким образом, сильное продольное поле формирует основную фокусировку пучка, а слабое поперечное поле обеспечивает поворот частицы и замыкание орбиты.

Пример структурной схемы накопителя показан на рисунке 1.1.

Подобные структуры изучались в связи с разработкой плазменных бетатронов и коллективных ускорителей с электронными кольцами [4-7]. Пример подобной установки показан на рисунке 1.2.

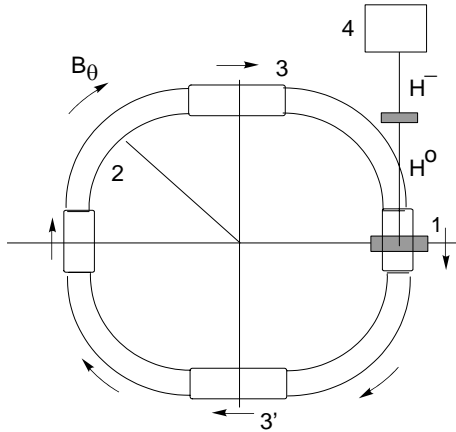


Рис. 1.1. Структурная схема накопителя с продольным магнитным полем для протонов. 1 – перезарядная мишень, 2 – поворотный магнит с продольным магнитным полем, 3 – прямолинейный промежуток с продольным магнитным полем, 4 – источник H^- .

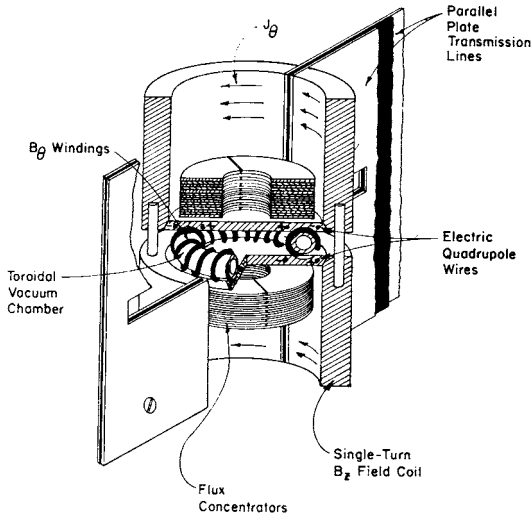


Рис. 1.2. Пример конструкции бетатрона с азимутальным магнитным полем. Ferrari L.A., Rogers K.C. Experimental study of runaway electrons in a plasma betatrons. Phys.Fluids, 10, N6, 319 (1967).

2. Уравнения движения в накопительном кольце с продольным магнитным полем

Рассмотрим сначала движение частицы в такой машине в предположении равномерной фокусировки (нет вставок соленоидов, только поворотные магниты с продольным магнитным полем). Движение может быть описано следующей системой уравнений

$$\begin{aligned} x'' + k_x^2 x + K y' &= 0, \\ y'' + k_y^2 y - K x' &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $K = 1/\rho_{\Pi}$ – величина обратная продольному ларморовскому радиусу, $k_x^2 = (1 - n)/R$ и $k_y^2 = n/R$ – параметры фокусировки в поворотных магнитах, n – показатель спада магнитного поля, R – радиус кольца.

Примеры траекторий частиц для значений $n = 0.2$ и $n = 0.5$ показаны на рисунках 2.2-2.3. Остальные параметры следующие: частицы – протоны,

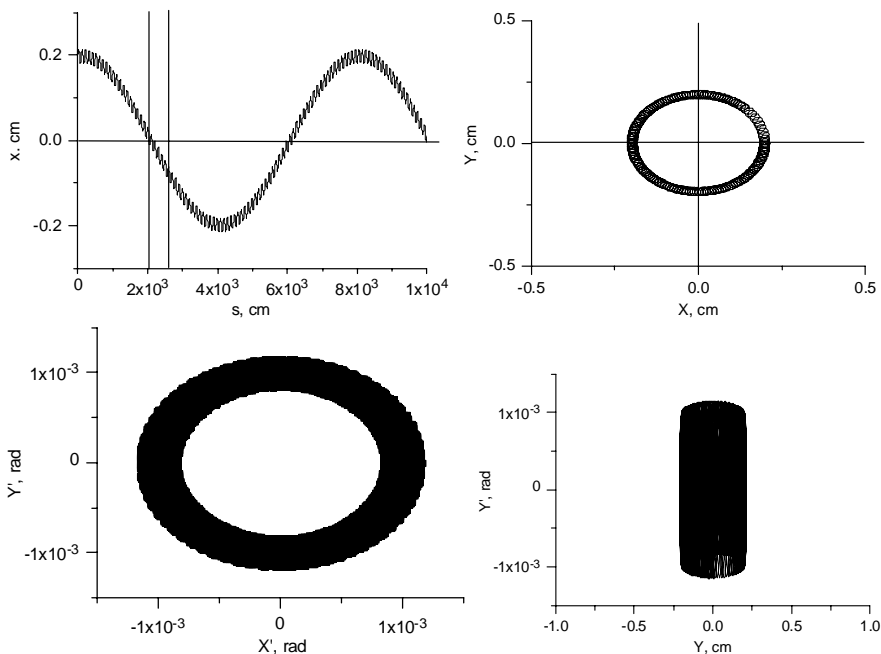


Рис. 2.2. Фазовые диаграммы движения частицы в накопителе с продольным магнитным полем. Показатель спада магнитного поля $n = 0.5$. Прямые вертикальные линии обозначают периметр накопительного кольца.

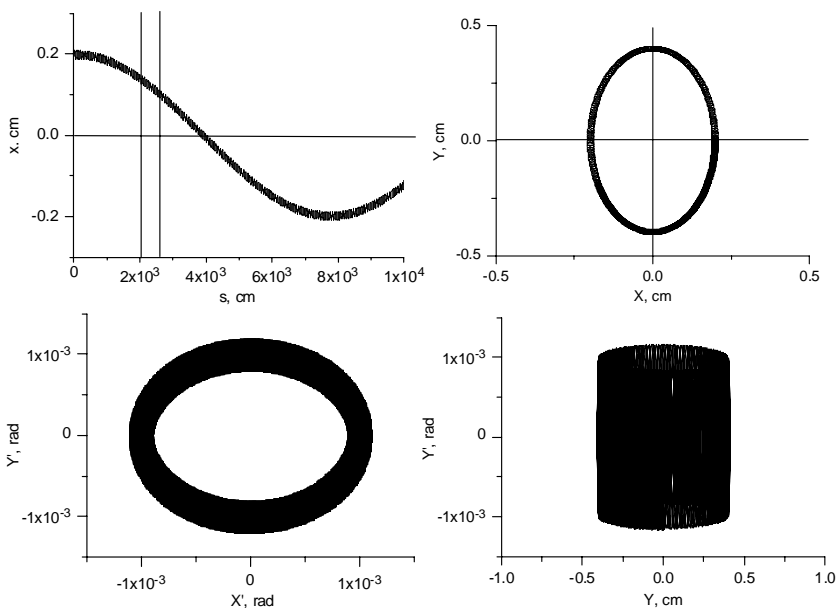


Рис. 2.3. Фазовые диаграммы движения частицы в накопителе с продольным магнитным полем. Показатель спада магнитного поля $n = 0.2$. Прямые вертикальные линии обозначают периметр накопительного кольца. Энергия протона 2 МэВ.

радиус кольца $R = 1$ м, периметр $\Pi = 6.28$ м, энергия протонов 2.0 МэВ, продольное магнитное поле $Bs = 20$ кГс, продольный ларморовский радиус $\rho_{||} = 10$ см, начальное состояние частицы $X = 0.2$ см, $Y = 0$, $X' = 0.001$, $Y' = 0$.

Из рисунков 2.2-2.3 видно, что частица одновременно с быстрым ларморовским движением совершает медленное дрейфовое перемещение в плоскости $X - Y$. Период этого движения существенно превышает периметр кольца и растет с уменьшением показателя спада магнитного поля n . В случае $n = 0.5$ движение центра ларморовского вращения круговое. При уменьшении вертикальной фокусировки ($n = 0.2$) – эллипс, вытянутый вдоль оси Y .

Решение системы уравнений (2.1) может быть найдено в виде суммы двух нормальных колебаний

$$x(s) = A_1 \cdot \cos(\lambda_1 s) + A_2 \cdot \sin(\lambda_1 s) + B_1 \cdot \cos(\lambda_2 s) + B_2 \cdot \sin(\lambda_2 s) \quad (2.2)$$

с волновыми числами λ_1 и λ_2

$$\lambda_1^2 = 0.5 \cdot \left[k_x^2 + k_y^2 + K^2 + \sqrt{(k_x^2 + k_y^2 + K^2)^2 - 4k_x^2 k_y^2} \right] \text{ и}$$

$$\lambda_2^2 = 0.5 \cdot \left[k_x^2 + k_y^2 + K^2 - \sqrt{(k_x^2 + k_y^2 + K^2)^2 - 4k_x^2 k_y^2} \right]. \quad (2.3)$$

В случае сильного магнитного поля $K \gg k_x, k_y$ эти выражения могут быть записаны в более простом виде

$$\lambda_1^2 = k_x^2 + k_y^2 + K^2 \text{ и}$$

$$\lambda_2^2 = k_x^2 k_y^2 / K^2. \quad (2.4)$$

Выражая в (2.2) коэффициенты $A_{1,2}$ и $B_{1,2}$ через начальные параметры положения частицы (x_0, x_0, y_0, y_0) , возможно получить интегралы движения для каждой из мод колебаний как сумму

$$J_1^2 = A_1^2 + A_2^2, \quad J_2^2 = B_1^2 + B_2^2,$$

$$J_1^2 = \frac{[xK(k_x^2 - \lambda_2^2) - y'K]^2}{K^2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2} + \frac{[yK^2 k_y^2 + x'K(\lambda_1^2 - k_y^2)]^2}{\lambda_1^2 K^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2}, \quad (2.5)$$

$$J_2^2 = \frac{[xK(k_x^2 - \lambda_1^2) - y'K]^2}{K^2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2} + \frac{[yK^2 k_y^2 + x'K(\lambda_2^2 - k_y^2)]^2}{\lambda_2^2 K^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2}. \quad (2.6)$$

В пределе сильного продольного поля эти выражения переходят в

$$J_1^2 = \left(x \frac{k_x^2}{K^2} - \frac{y'}{K} \right)^2 + \left(y \frac{k_y^2}{K^2} + \frac{x'}{K} \right)^2, \quad (2.7)$$

$$J_2^2 = \left(x + \frac{y'}{K} \right)^2 + \frac{k_y^2}{k_x^2} \left(y - \frac{x'}{K} \right)^2. \quad (2.8)$$

Удобно эти инварианты переписать в следующем виде $k_x, k_y \ll K$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{K} (y')^2 + \frac{1}{K} (x')^2, \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{k_x^2}{K} \left(x + \frac{y'}{K} \right)^2 + \frac{k_y^2}{R} \left(y - \frac{x'}{K} \right)^2. \quad (2.10)$$

В этом случае, если принять, что $\beta_1 = 1/\lambda_1$ и $\beta_2 = 1/\lambda_2$, выражения

$$a_p = \sqrt{\varepsilon_1 \beta_1} \text{ и } \Delta\vartheta = \sqrt{\varepsilon_2 / \beta_2}, \quad (2.11)$$

будут иметь простой физический смысл полного размера пучка и разброса поперечных углов частиц в пучке. В случае $n = 0.5$ эти выражения работают практически точно, в случае $n \neq 0.5$ (аксиально-несимметричная фокусировка) под a_p и $\Delta\theta$ надо понимать некоторые среднегеометрические значения по осям X и Y .

Таким образом, мы разделили поперечное движение частицы по двум модам. За размер пучка отвечает длинноволновая (с большим значением β -функции) мода β_2 . За разброс поперечных скоростей, коротковолновая (с малым значением β -функции) мода β_1 .

3. Эффект отрицательной массы

При отклонении импульса от равновесного $p + \Delta p$ в уравнение движения появляется дополнительный член

$$\begin{aligned} x'' + k_x^2 x + K y' &= \frac{1}{R} \frac{\Delta p}{p}, \\ y'' + k_y^2 y - K x' &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

который связан с тем, что для частицы с импульсом $p + \Delta p$ находящейся на равновесной орбите не может выполняться равенство между силой Лоренца и центростремительной силой. Происходит смещение частицы на новую орбиту

$$x = \frac{1}{R} \frac{\Delta p}{p} \frac{1}{k_x^2} = \frac{R}{1-n} \frac{\Delta p}{p}, \quad y = 0. \quad (3.2)$$

Т.е., с этой точки зрения дисперсия в накопителе с продольным полем не отличается от дисперсии в обычной машине с равномерной фокусировкой. Продольное поле не влияет на положение новой орбиты. Оно только определяет характер движения вокруг нее. Изменив первоначальный равновесный импульс p , частица начинает совершать медленные дрейфовые колебания вокруг нового положения равновесия. Если $n = 0.5$, то это круги в поперечном сечении пучка. С уменьшением n круг вырождаются в эллипс, сильно вытянутый в вертикальном направлении. Период колебания вокруг нового положения равновесия существенно превышает время обращения по накопителю. Поэтому, если добиваться решения для дисперсионной функции периодичной в пределах одного оборота, ее вид и интерпретация может быть достаточно сложной.

Как и в любой машине с “мягкой” фокусировкой, простейшему накопителю с продольным полем присущ эффект отрицательной массы. Частица, получив приращение импульса, начинает смещаться “назад” в продольном направлении относительно своих невозмущенных соседей. Это

связано с тем, что эффект увеличения длины пути оказывается преобладающим над эффектом увеличения продольной скорости. Величина относительного продольного смещения

$$\Delta\Theta = \frac{v\Delta t}{2\pi R} = -\frac{n}{1-n} \frac{\Delta p}{p}. \quad (3.3)$$

Данное свойство движения приводит к самопроизвольной модуляции плотности протонов в результате развития неустойчивости “отрицательной массы”. На рисунке 3.1 показано движение частицы в поперечном сечении в случае изменения продольного импульса ур. (3.1).

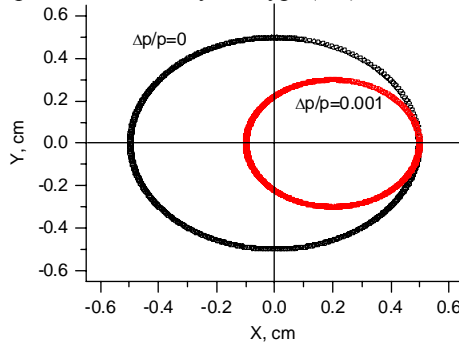


Рис. 3.1. Движение протона в поперечной плоскости. Показатель спада магнитного поля $n = 0.5$. Продольное магнитное поле 20 кГс, радиус кольца 100 см. Начальное положение частицы $X = 0.5$, $Y = 0$, $X' = 0.001$, $Y' = 0$. Энергия протона 2 МэВ.

Простейший способ избежать развития неустойчивости “отрицательной” массы – дополнить кольцевой накопитель прямолинейными промежутками. Соотношение между длинами прямолинейных и криволинейных промежутков выбирается так, чтобы при движении на прямолинейном участке частица, имеющая больший импульс и движущаяся по внешнему радиусу, успевала догнать частицу с меньшим импульсом, двигающуюся по внутреннему радиусу в поворотном магните

$$\Delta\Theta = \frac{v\Delta t}{2\pi R} = -\frac{\Delta p}{p} \left[\frac{n}{1-n} - \frac{L}{2\pi R} \right]. \quad (3.4)$$

Полная длина прямолинейных участков должна быть больше, чем

$$L > 2\pi R \frac{n}{1-n}. \quad (3.5)$$

Можно указать другие способы борьбы с “отрицательной массой”. Например, вставка участка соленоида с магнитным полем, направленным в

противоположную сторону от основного. Длина антисолоноида выбирается равной половине спирали движения протона ($l_{\text{асол}} = \pi \cdot \rho_{\text{II}}$). При входе в антисолоноид частица приобретает азимутальную скорость (эффект Буша) и начинает вращаться вокруг оси соленоида. За время пролета она успевает повернуться на угол π и перейти в положение противоположное исходному. При выходе из антисолоноида частица снова переходит к прямолинейному движению. Идея такого оптического элемента заключается в том, что он переводит частицы с внешнего радиуса накопительного кольца на внутренний. Таким образом, частица, получившая приращение продольного импульса и сместившая свою орбиту по радиусу наружу, больше времени будет находиться на внутренних радиусах. За счет этого можно уменьшить длину равновесной траектории частицы с большим импульсом.

Еще один метод заключается в попытке создать фокусирующий элемент для длинноволновой динамики частицы (мода колебаний частицы с большим значением β -функции) на основе спирального квадруполя.

Очевидными недостатками обоих последних методов является крайне высокие требования к точности изготовления и выставки оптических элементов. При этом всегда остается опасность перекачать часть “геометрического” эмиттанта в эмиттанс, связанный с поперечным разбросом скоростей.

4. Пространственный заряд в накопителе с продольным магнитным полем

Оценим влияние пространственного заряда. Уравнения движения частицы (2.1) при наличии пространственного заряда можно переписать в виде

$$\begin{aligned} x'' + k_x^2 x + K y' &= Qx, \\ y'' + k_y^2 y - K x' &= Qy, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где Q – член, отвечающий за действие пространственного заряда

$$Q = \frac{2J_i r_p}{\beta^3 \gamma^3 c e a_i^2}. \quad (4.2)$$

Видно, что в первом приближении действие пространственного заряда можно учесть, переопределив значения k_x и k_y . Воспользуемся выражениями для бетатронных частот в случае сильного магнитного поля $K \gg k_x, k_y$ (2.4),

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 &= k_x^2 + k_y^2 + K^2 \text{ и} \\ \lambda_2^2 &= k_x^2 k_y^2 / K^2, \end{aligned} \quad (4.3)$$

тогда

$$\Delta v_1 = \frac{QR}{K} = \frac{2J_i r_p R}{\gamma^3 \beta^3 c e a_i^2} \frac{\gamma \beta m_p c^2}{e B_s},$$

$$\Delta v_2 = \frac{Q(k_x^2 + k_y^2)R}{2K k_x k_y} = \frac{2J_i r_p}{\beta^3 \gamma^3 c e a_i^2} \frac{(k_x^2 + k_y^2)R}{2k_x k_y} \frac{\gamma \beta m_p c^2}{e B_s}. \quad (4.4)$$

В случае $n = 0.5$ значения Δv_1 и Δv_2 для обеих мод совпадают. В случае $n \rightarrow 0$ Δv_2 растет, но при разумных значениях n разница между Δv_1 и Δv_2 не очень велика.

5. Гамильтонова форма уравнений движения

Рассмотрим движение частицы с зарядом e и массой m в системе, где преобладает аксиально симметричное магнитное поле. Как хорошо известно [8], в этом случае гамильтониан движения может быть записан в виде

$$H = \frac{1}{2m} \left(P_x - \frac{e}{c} A_x \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(P_y - \frac{e}{c} A_y \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(P_z - \frac{e}{c} A_z \right)^2, \quad (5.1)$$

где P_x, P_y, P_z – канонически сопряженные декартовым координатам X, Y, Z импульсы. Они связаны с обычными импульсами ρ_x, ρ_y, ρ_z соотношениями

$$P_x = \rho_x + \frac{e}{c} A_x. \quad (5.2)$$

Запишем гамильтониан в натуральной системе координат, в которой радиус вектор произвольной точки представляется в виде

$$\vec{r} = \vec{r}_0(s) + x \vec{n}(s) + y \vec{b}(s), \quad (5.3)$$

где $\vec{r}_0(s)$ – радиус-вектор равновесной орбиты, $\vec{\tau}(s)$, $\vec{n}(s)$ и $\vec{b}(s)$ – касательная, нормаль и бинормаль к равновесной орбите. Координатам (x, y, s) сопоставляется тройка ортогональных векторов

$$\vec{a}_1 = \vec{n}, \quad \vec{a}_2 = \vec{b}, \quad \vec{a}_3 = (1 + h \cdot x) \vec{\tau}. \quad (5.4)$$

Здесь $h = 1/\rho$ – модуль кривизны равновесной орбиты, ρ – радиус кривизны. Равновесная орбита предполагается плоской, кручение отсутствует. Увеличение x соответствует движению во вне накопительного кольца. Отметим, что определение векторов нормали и бинормали отличается знаком от принятого в теории кривых в дифференциальной геометрии [9]. Поэтому и формулы Френе записываются в несколько ином виде

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = -h \cdot \vec{n}, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = h \cdot \vec{n} + \kappa \cdot \vec{b}, \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = -\kappa \cdot \vec{n}. \quad (5.5)$$

Выполним каноническое преобразование гамильтониана с помощью производящей функции

$$F = -\vec{P} \cdot [\vec{r}_0 + x\vec{n}(s) + y\vec{b}(s)], \quad (5.6)$$

Здесь $P=(P_x, P_y, P_z)$ “старый” канонический импульс, а (x, y, s) – “новые” координаты. Соотношения для “новых” импульсов $q = (q_s, q_x, q_y)$ и “старых” координат (X, Y, Z) получаются из соотношений

$$q_i = -\frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad Q_i = -\frac{\partial F}{\partial P_i}, \quad H(q_i, x_i, t) = H(P_i, X_i, t) + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (5.7)$$

В этом случае можно записать

$$\begin{aligned} q_s &= \left(1 + \frac{x}{R}\right) \vec{P} \cdot \vec{\tau}(s), \\ q_x &= \vec{P} \cdot \vec{n}(s), \\ q_y &= \vec{P} \cdot \vec{b}(s), \end{aligned} \quad (5.8)$$

и гамильтониан принимает вид

$$H = \frac{1}{2m} \left[\left(q_x - \frac{e}{c} A_1 \right)^2 + \left(q_y - \frac{e}{c} A_2 \right)^2 + \frac{\left(q_s - \frac{e}{c} A_3 \right)^2}{(1 + hx)^2} \right]. \quad (5.9)$$

Здесь (A_1, A_2, A_3) составляющие вектор потенциала в новых координатах

$$\begin{aligned} A_1 &= \vec{A} \cdot \vec{n} \\ A_2 &= \vec{A} \cdot \vec{b} \\ A_3 &= \vec{A} \cdot \vec{\tau}(1 + hx). \end{aligned} \quad (5.10)$$

6. Магнитное поле и векторный потенциал в криволинейной системе координат

Для получения формул для векторного потенциала в случае продольного магнитного поля на траектории частицы воспользуемся методом, изложенным в [10]. Запишем разложение векторного потенциала в виде

$$A = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_s \vec{e}_s, \quad (6.1)$$

где \vec{e}_x , \vec{e}_y и \vec{e}_s суть $\vec{n}(s)$, $\vec{b}(s)$ и $\vec{\tau}(s)$. Магнитное поле должно удовлетворять уравнениям Максвелла в пустом пространстве

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{B} = 0, \quad (6.2)$$

что определяет уравнения на векторный потенциал. В криволинейных координатах связанных с равновесной орбитой формулы векторного анализа выглядят следующим образом

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{1}{\mathfrak{a}} \frac{\partial \phi}{\partial s} \vec{e}_s, \quad (6.3)$$

$$\nabla \vec{A} = \frac{1}{\mathfrak{a}} \frac{\partial (\mathfrak{a} A_x)}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{1}{\mathfrak{a}} \frac{\partial A_s}{\partial s},$$

$$\nabla \times \vec{A} = \left[\frac{\partial A_s}{\partial y} - \frac{1}{\mathfrak{a}} \frac{\partial A_y}{\partial s} \right] \vec{e}_x + \frac{1}{\mathfrak{a}} \left[\frac{\partial A_x}{\partial s} - \frac{\partial (\mathfrak{a} A_s)}{\partial x} \right] \vec{e}_y + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] \vec{e}_s,$$

где $\mathfrak{a} = 1 + h x$ – скэйлинг фактор.

Реально более удобно стартовать со скалярного потенциала $B = \nabla \phi$, а затем найти соотношение, связывающее векторный и скалярный потенциалы. В окрестности равновесной орбиты ($x = 0, y = 0$) скалярный потенциал может быть разложен в ряд Тейлора

$$\phi(x, y, s) = - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n a_{n-m, m}(s) \frac{x^{n-m}}{(n-m)!} \frac{y^m}{m!}. \quad (6.4)$$

Для того, чтобы потенциал описывал решение уравнения Максвелла $\Delta \phi = 0$ коэффициенты $a_{n, m}$ должны быть связаны следующим рекуррентным соотношением [10]

$$a_{n, m+2} = -a_{n+2, m} - \sum_{p=0}^n (-\mathfrak{a})^p \frac{n!}{(n-p)!} \times \quad (6.5)$$

$$\times \left[\mathfrak{a} a_{n-p+1, m} + (p+1) a_{n-p, m} - \binom{p+2}{2} (n-p) \mathfrak{a}' a'_{n-p-1, m} \right].$$

Справедливость данного соотношения легко может быть проверено с помощью системы символьных вычислений Maple. Символом

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (6.6)$$

обозначается биномиальный коэффициент.

Из формулы (6.5) видно, что существует две независимые цепочки рекуррентных соотношений для четных и нечетных значений индекса m . Так как индекс m описывает зависимость магнитного поля от y , то можно считать, что четные (нечетные) компоненты $a_{n, m}$ определяют нормальные

(skew-квадрупольные) составляющие поля. Таким образом, в качестве основного набора коэффициентов характеризующих поле можно выбрать $a_{n,0}(s)$ и $a_{n,1}(s)$. Все высшие члены в разложении по m могут быть получены из них.

Зависимость магнитного поля в плоскости орбиты от x дается следующими выражениями

$$\begin{aligned} B_x(x,0,s) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,0}(s) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \\ B_y(x,0,s) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,1}(s) \frac{x^{n-1}}{n!}, \\ B_s(0,0,s) &= a'_{0,0}(s). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Отсюда коэффициенты $a_{n,m}$

$$\begin{aligned} a_{n,1} &= \left. \frac{\partial^n B_y}{\partial x^n} \right|_{x=y=0} = n! b_n, \\ a_{n,0} &= \left. \frac{\partial^{n-1} B_x}{\partial x^{n-1}} \right|_{x=y=0} = (n-1)! a_{n-1}, \\ a'_{0,0} &= \left. \frac{\partial^{n-1} B_x}{\partial x^{n-1}} \right|_{x=y=0} = b_s. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Для того чтобы связать векторный и скалярный потенциалы удобно выбрать калибровку в виде [10]

$$x A_x + y A_y = 0 \quad (6.9)$$

вместо кулоновской калибровки $\text{div } \vec{A} = 0$. Используя эту калибровку, можно ввести две новые независимые функции $F(x,y,s)$ и $G(x,y,s)$ и выразить компоненты векторного потенциала в виде

$$A_x = -yF, \quad A_y = xF, \quad A_s = \frac{G}{\mathfrak{a}}. \quad (6.10)$$

Тогда магнитное поле $B = \text{rot } \vec{A}$

$$B_x = \frac{1}{\mathfrak{a}} \left(\frac{\partial G}{\partial y} - x \frac{\partial F}{\partial s} \right), B_y = \frac{1}{\mathfrak{a}} \left(-\frac{\partial G}{\partial x} - y \frac{\partial F}{\partial s} \right), B_s = x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + 2 \cdot F. \quad (6.11)$$

Из (6.11) следует уравнение на G и F

$$\begin{aligned} x \frac{\partial G}{\partial x} + y \frac{\partial G}{\partial y} &= \mathfrak{a}(yB_x - xB_y), \\ x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + 2 \cdot F &= B_s. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Данные уравнения могут быть решены в виде [10]

$$\begin{aligned} F &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2} B_s^{(n)}, \\ G &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} + \frac{\mathfrak{a}x}{n+1} \right] (yB_x^{(n-1)} - xB_y^{(n-1)}), \end{aligned} \quad (6.13)$$

где индекс n показывает суммарную степень в разложении поля в ряд по степеням x и y .

В результате получаются следующие выражения для векторного потенциала.

$$\begin{aligned} A_x(x, y, z) &= -\frac{1}{2}b_s y + \frac{1}{3}hb_s xy - \frac{1}{3}b_0' y^2 - \\ &\quad - \frac{1}{8}(2h^2b_s + a_1')x^2 y - \frac{1}{4}(b_1' - hb_0')xy^2 + \frac{1}{8}(a_1' + b_s'')y^3 + \dots, \\ A_y(x, y, s) &= \frac{1}{2}b_s x - \frac{1}{3}hb_s x^2 + \frac{1}{3}b_0' xy + \\ &\quad + \frac{1}{8}(2h^2b_s + a_1')x^3 + \frac{1}{4}(b_1' - hb_0')x^2 y - \frac{1}{8}(a_1' + b_s'')xy^2 + \dots \\ A_s(x, y, z) &= -b_0 x - \frac{1}{2}(b_1 - hb_0)x^2 + \frac{1}{2}(2a_1 + b_s')xy + \frac{1}{2}b_1 y^2 - \\ &\quad - \frac{1}{6}(2b_2 - hb_1 + 3h^2b_0)x^3 + \frac{1}{6}(6a_2 - 5hb_s' - 2h'b_s)x^2 y + \\ &\quad + \frac{1}{6}(6b_2 + b_0'')xy^2 - \frac{1}{6}(2a_2 + h(a_1 - 2b_s') - h'b_s)y^3 \end{aligned}$$

7. Гамильтониан в линейном приближении

Оставляя в разложении векторного потенциала только линейные и квадратичные члены по поперечному смещению частицы от равновесной орбиты, получаем

$$A_x = -\frac{1}{2} B_s(s) y, \quad (7.1)$$

$$A_y = \frac{1}{2} B_s(s) x,$$

$$A_s = -b_0(s)x - \frac{1}{2}(b_1(s) - h(s)b_0(s))x^2 + \left(a_1(s) + \frac{1}{2} B_s'(s)\right)xy + \frac{1}{2} b_1(s)y^2.$$

При использовании данного выражения для векторного потенциала необходимо учитывать, что неоднородное продольное магнитное также дает вклад и в член $a_1(s)$ согласно формуле (6.8). Например, для прямолинейного промежутка с изменяющимся магнитным полем этот коэффициент равен

$$a_1 = \frac{\partial B_x}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial B_s}{\partial s} = -\frac{1}{2} B_s' \quad (7.2)$$

согласно выражению для магнитного поля в параксиальном приближении

$$\vec{B}_\perp = -\frac{\vec{r}_\perp}{2} \frac{\partial B_s}{\partial s}. \quad (7.3)$$

Если мы интересуемся только описанием движения частицы в линейном приближении, то эту формулу можно использовать и для криволинейных участков траектории в продольном магнитном поле.

Таким образом, гамильтониан движения частицы принимает вид

$$H = \frac{1}{2m} \left[\left(q_x - \frac{e}{c} A_x \right)^2 + \left(q_y - \frac{e}{c} A_y \right)^2 + \frac{\left(q_s - \frac{e}{c} A_s (1 + hx) \right)^2}{(1 + hx)^2} \right], \quad (7.4)$$

откуда

$$H = \frac{1}{2} + p_s + \frac{p_s^2}{2} + \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{x^2}{2} \left(K_x^2 + K + \frac{R^2}{4} \right) - N x \cdot y - K_x p_s x + \frac{R}{2} (p_x y - p_y x) + \frac{y^2}{2} \left(-K + \frac{R^2}{4} \right). \quad (7.5)$$

Здесь (B_x, B_y, B_s) – горизонтальная, вертикальная и продольная

компоненты магнитного поля, $K_x = \frac{eb_0}{q_{s0}c} = \frac{eB_y}{q_{s0}c}$, $R = \frac{eB_s}{q_{s0}c}$,

$K = \frac{eb_1}{q_{s0}c} = K_x \frac{1}{B_y} \frac{\partial B_y}{\partial x}$ – нормальная компонента градиента магнитного

поля, $N = \frac{ea_1}{q_{s0}c} = K_x \frac{1}{B_y} \frac{\partial B_x}{\partial x}$ – skew-компонента градиента магнитного

поля, $N_s = K_x \frac{1}{B_y} \frac{\partial B_s}{\partial s}$ – продольный градиент продольного магнитного

поля, Относительный продольный и поперечный импульсы частиц измеряются в единицах полного продольного импульса

$$p_s = \frac{q_s}{p_{s0}}, \quad p_x = \frac{q_x}{p_{s0}}, \quad p_y = \frac{q_y}{p_{s0}} \quad (7.6)$$

в качестве времени выступает величина $\xi = \frac{p_{s0}}{m} t^1$.

Сделаем теперь каноническую замену переменных с помощью производящей функции

$$\Phi(\bar{p}_i, x_i) = \bar{p}_x \cdot x + \bar{p}_y \cdot y + \bar{p}_s \cdot s + p_{s0} \cdot s - \bar{p}_s \cdot \frac{p_{s0}}{m} t, \quad (7.7)$$

где набор $(\bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_s)$ – набор новых канонических импульсов, а (x, y, s) – набор старых канонических координат. С помощью этой замены мы совершаем следующее преобразование координат

$$\left[\begin{array}{l} \bar{x} = x \\ \bar{y} = y \\ \bar{s} = s - \frac{p_{s0}}{m} t \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{l} \bar{p}_x = p_x \\ \bar{p}_y = p_y \\ \bar{p}_s = p_s - p_{s0} \end{array} \right] \quad (7.8)$$

¹ $H = \frac{p_{s0}^2}{m} H' \Rightarrow \frac{d}{d p_{s0} t / m} \frac{p_i}{p_{s0}} = -\frac{\partial H'}{\partial q}, \frac{d}{d p_{s0} t / m} q_i = \frac{\partial H'}{\partial p_i / \partial p_{s0}}$

и гамильтониан принимает следующий вид

$$H = \frac{p_s^2}{2} + \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{x^2}{2} \left(K_x^2 + K + \frac{R^2}{4} \right) - N x \cdot y - K_x p_s x - \frac{R}{2} (p_y x - p_x y) + \frac{y^2}{2} \left(-K + \frac{R^2}{4} \right), \quad (7.9)$$

здесь все параметры движения K, K_x, R, N, N_s являются функциями уже и от времени $\xi = p_{s0} t/m$ и от новой продольной координаты, как $f(\bar{s} + \xi)$.

В условиях сильного ведущего поля, когда параметр R очень велик, наиболее удобной является рассмотрение в терминах принятых в физике плазмы. Частица совершает быстрое ларморовское вращение вокруг направления магнитного поля. Центр ларморовской окружности, называемый также ведущим центром, движется не только вдоль магнитной силовой линии, но и совершает медленный дрейф в плоскости (x, y) . Этот дрейф вызван действием слабых поперечных магнитных и электрических полей, неоднородностью ведущего поля, наличием центробежных или иных сил. Движение частицы распадается на два типа – быстрое и медленное, слабо связанных между собой. Для того, чтобы данное приближение было физически наглядным, необходимо, чтобы ведущее магнитное поле было сильнее всех остальных магнитных (и электрических) полей в накопителе.

Сделаем следующую замену переменных

$$\begin{cases} P_1 = p_x - \frac{1}{2} R y \\ Q_1 = \frac{p_y}{R} + \frac{1}{2} x \end{cases}, \quad \begin{cases} P_2 = p_y - \frac{1}{2} R x \\ Q_2 = \frac{p_x}{R} + \frac{1}{2} y \end{cases}. \quad (7.10)$$

Учитывая, что p_x и p_y обобщенные моменты импульса $\vec{p} = \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}$, получаем

связь между новыми переменными и обычными импульсами (p_x, p_y) и координатами.

$$\begin{cases} P_1 = \frac{p_x}{p_{s0}} - \frac{e B_s}{p_{s0} c} y \\ Q_1 = \frac{p_{s0} c}{e B_s} \frac{p_y}{p_{s0}} + \frac{x}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} P_2 = \frac{p_y}{p_{s0}} \\ Q_2 = \frac{p_{s0} c}{e B_s} \frac{p_x}{p_{s0}} \end{cases}. \quad (7.11)$$

Видно, что по аналогии с движением частицы в прямом соленоиде, (P_1, Q_1) описывает (X, Y) координаты центра ларморовской окружности, а (P_2, Q_2)

связано с амплитудой вращения частицы вокруг силовой линии магнитного поля.

Производящая функция, соответствующая замене переменных (10)

$$\Psi(x, y, Q_1, Q_2) = R \left(-\frac{1}{2} x y - Q_1 Q_2 + x Q_2 + y Q_1 \right). \quad (7.12)$$

Новый гамильтониан

$$H' = H + \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = H + \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial s} \left(Q_1 Q_2 - \frac{1}{R} (Q_1 P_1 + P_2 Q_2) - \frac{1}{R^2} P_2 P_1 \right) \quad (7.13)$$

или после постановки всех выражений²

$$\begin{aligned} H = & -\frac{K}{R^2} \frac{P_1^2}{2} + (K_x^2 + K) \frac{Q_1^2}{2} + \frac{1}{R} \left(N - \frac{N_s}{2} \right) P_1 Q_1 + \\ & + \left(1 + \frac{K_x^2}{R^2} + \frac{K}{R^2} \right) \frac{P_2^2}{2} + (R^2 - K) \frac{Q_2^2}{2} + \frac{1}{R} \left(N - \frac{N_s}{2} \right) P_2 Q_2 - \\ & - \frac{1}{R} (K_x^2 + K) P_2 Q_1 + \frac{K}{R} P_1 Q_2 - N \left(Q_1 Q_2 + \frac{1}{R^2} P_1 P_2 \right) + \frac{N_s}{2} \left(Q_1 Q_2 - \frac{1}{R^2} P_2 P_1 \right) \\ & + \frac{P_s^2}{2} + \frac{K_x}{R} P_2 P_s - K_x Q_1 P_s. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Здесь мы не делаем различий между s и \bar{s} , а также учли, что

$$\frac{\partial R}{\partial s} = N_s. \quad (7.15)$$

Первая строчка в выражении описывает движение медленной дрейфовой моды (P_1, Q_1) обладающей большой “массой” $M = R^2/K$, вторая строчка в гамильтониане соответствует быстрым осцилляциям моды (P_2, Q_2) с характерной частотой R . Третья строчка – член связи между движениями вышеописанных мод. В случае $R \gg K, K_x, N, N_s$ он мал и в первом приближении может быть опущен. В дальнейшем он может быть учтен по методу возмущений. Последняя строчка связана с продольным движением частицы и с дисперсионными членами.

Рассмотрим физический смысл полученного гамильтониана на серии простых примеров. Везде подразумевается наличие сильного ведущего (продольного) магнитного поля.

² При выкладках необходимо учитывать, что $\frac{\partial}{\partial \xi} B_s(s + \xi) = \frac{\partial}{\partial s} B_s$

7.1 Движение в прямолинейном промежутке

Данный тип движения соответствует движению в прямом соленоиде. Значения параметров гамильтониана $K = 0$, $K_x = 0$, $N = 0$, $N_s = 0$

$$H = \frac{1}{2} p_s^2 + \frac{1}{2} P_2^2 + \frac{R^2}{2} Q_2^2. \quad (7.1.1)$$

Гамильтониан не зависит от переменных P_1 и Q_1 , что свидетельствует о том, что они являются инвариантами движения. Действительно, в рассматриваемом случае центр ларморовской окружности остается неподвижным. Ларморовское вращение описывается соответствующим стандартным гамильтонианом для (P_2, Q_2) .

7.2 Движение в прямолинейном промежутке с изменяющимся значением продольного магнитного поля

Движение в прямолинейном промежутке с изменяющимся значением продольного магнитного поля описывается гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} p_s^2 + \frac{1}{2} P_2^2 + \frac{R^2}{2} Q_2^2 - \frac{1}{2} \frac{N_s}{R} P_2 Q_2 - \frac{1}{2} \frac{N_s}{R} P_1 Q_1 + \frac{N_s}{2} \left(Q_1 Q_2 - \frac{1}{R^2} P_1 P_2 \right). \quad (7.2.1)$$

Данное выражение может быть упрощено за счет отбрасывания малых членов и членов, отвечающих за связь между колебаниями. Так как частоты колебаний мод 1 и 2 сильно различаются, то эта операция оправдана. Например, член в гамильтониане вида $Q_1 Q_2$ ведет к появлению быстроосциллирующей силы в уравнении для медленной моды 1 и к появлению медленной вынуждающей силы для движения быстрой моды 2, что практически не сказывается на движении самих мод. Упрощенная версия гамильтониана

$$H = \frac{1}{2} p_s^2 + \frac{1}{2} P_2^2 + \frac{R^2}{2} Q_2^2 - \frac{1}{2} \frac{N_s}{R} P_1 Q_1. \quad (7.2.2)$$

Движение дрейфовой моды (P_1, Q_1) подчиняется в этом случае уравнениям

$$\begin{aligned} P_1' &= -\frac{\partial H}{\partial Q_1} = \frac{N_s}{2 R} P_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial B_s}{B_s} \frac{\partial B_s}{\partial s} P_1 \\ Q_1' &= \frac{\partial H}{\partial P_1} = -\frac{N_s}{2 R} Q_1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial B_s}{B_s} \frac{\partial B_s}{\partial s} Q_1 \end{aligned} \quad (7.2.3)$$

Отсюда легко могут быть получены выражения, описывающие поперечный размер пучка

$$P_1' = \frac{\partial P_1}{\partial \xi} = \frac{\partial P_1}{\partial s} = \frac{1}{2} \frac{\partial B_s}{\partial s} P_1, \quad (7.2.4)$$

$$P_1 B_s^{-1/2} = const \implies Y B_s^{1/2} = const.$$

Выражение для X координаты центра ларморовской окружности получается аналогичным образом.

$$Q_1' = \frac{\partial Q_1}{\partial \xi} = \frac{\partial Q_1}{\partial s} = -\frac{1}{2} \frac{\partial B_s}{\partial s} Q_1, \quad (7.2.5)$$

$$Q_1 B_s^{1/2} = const \implies X B_s^{1/2} = const.$$

Таким образом, получается хорошо известный результат о том, что магнитный поток через сечение пучка сохраняется при его движении в переменном магнитном поле.

Движение быстроосциллирующей моды описывается гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} P_2^2 + \frac{R^2}{2} Q_2^2. \quad (7.2.6)$$

При медленном изменении частоты вынуждающей силы сохраняется адиабатический инвариант. Поэтому

$$\frac{H}{R} = const \implies \frac{P_x^2}{B_s} = const \quad \text{и} \quad \frac{P_y^2}{B_s} = const. \quad (7.2.7)$$

7.3 Движение в квадрупольной линзе

Полный гамильтониан движения частицы в комбинации полей сильного продольного поля и квадрупольного дается выражением

$$H = -\frac{K}{R^2} \frac{P_1^2}{2} + K \frac{Q_1^2}{2} + \left(1 + \frac{K}{R^2}\right) \frac{P_2^2}{2} + (R^2 - K) \frac{Q_2^2}{2} - \frac{K}{R} (P_2 Q_1 - Q_2 P_1) + \frac{p_s^2}{2}. \quad (7.3.1)$$

Пренебрегая второстепенными членами, получаем

$$H = -\frac{K}{R^2} \frac{P_1^2}{2} + K \frac{Q_1^2}{2} + \frac{P_2^2}{2} + R^2 \frac{Q_2^2}{2} + \frac{p_s^2}{2}. \quad (7.3.2)$$

Видно, что быстрое (циклотронное) движение частицы остается практически неизменным. Изменение же формы пучка описывается уравнениями

$$\begin{aligned} P_1' &= -K Q_1 & \implies & \frac{\partial}{\partial \xi} (P_1 + R Q_1) = -\frac{K}{R} (P_1 + R Q_1) \\ Q_1' &= -\frac{K}{R^2} P_1 & \implies & \frac{\partial}{\partial \xi} (P_1 - R Q_1) = \frac{K}{R} (P_1 - R Q_1) \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

Из их решения видно, что пучок при движении в квадруполе приобретает форму эллипса повернутого под углом 45 градусов к координатной системе (X, Y) . По одной из осей эллипса пучок растягивается, а по другой сжимается.

7.4 Движение в skew- квадрупольной линзе

Движение в skew-квадрупольной линзе очень похоже на движение в обычной квадрупольной линзе. Упрощенный гамильтониан движения

$$H = \frac{N}{R} P_1 Q_1 + \frac{P_2^2}{2} + R^2 \frac{Q_2^2}{2} + \frac{P_s^2}{2}. \quad (7.4.1)$$

Уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} P_1 &= -\frac{N}{R} P_1 \\ \frac{\partial}{\partial \xi} Q_1 &= \frac{N}{R} Q_1 \end{aligned} \quad (7.4.2)$$

Переменные Q_1 и P_1 связаны с X и Y координатами центра ларморовской окружности. Видно, что вдоль оси Y пучок растягивается, а вдоль оси X пучок сжимается. Ситуация такая же как при движении в квадруполе, но с поворотом осей на 45 градусов.

7.5 Движение в поворотном магните

Рассмотрим движение в поворотном магните в присутствии сильного продольного магнитного поля

$$H = -\frac{K}{R^2} \frac{P_1^2}{2} + (K_x^2 + K) \frac{Q_1^2}{2} + \frac{P_2^2}{2} + R^2 \frac{Q_2^2}{2} + \frac{P_s^2}{2} + \frac{K_x}{R} P_2 p_s - K_x Q_1 p_s. \quad (7.5.1)$$

Если $K < 0$, то динамика (P_1, Q_1) описывается уравнением обычного осциллятора. Центры ларморовских кружков совершают движение вдоль эллипса. В случае показателя спада магнитного поля $n = 0.5$ траекториями движения являются окружности. Длина, на которой совершается полный оборот ларморовского кружка вдоль своей траектории, есть

$$L = 2\pi \frac{R^2}{K(K_x^2 + K)}. \quad (7.5.2)$$

Случай $K = 0$ соответствует простому наложению продольного поля B_s на поворотное поле B_y . Уравнения движения в этом случае

$$\begin{aligned} P_1' &= K_x^2 Q_1 \\ Q_1' &= 0 \end{aligned} \implies \begin{aligned} X &= \text{const} \\ Y' &= \frac{K_x^2}{R} X \end{aligned} \quad (7.5.3)$$

Таким образом, горизонтальное положение частицы в повороте остается неизменным. Но при этом происходит ее смещение в вертикальном направлении из-за центробежного дрейфа. При радиальном смещении ($X \neq 0$) центробежная сила уже не уравновешивается действием поворачивающего магнитного поля B_y .

С учетом дисперсии гамильтониан в новых переменных может быть переписан следующим образом

$$\begin{aligned} H &= -\frac{K}{R^2} \frac{P_1^2}{2} + \frac{1}{2} (K_x^2 + K) \left(Q_1 - \frac{K_x}{K_x^2 + K} p_s \right)^2 + \frac{1}{2} \left(p_2 + \frac{K_x}{R} p_s \right)^2 \\ &+ R^2 \frac{Q_2^2}{2} + \frac{P_s^2}{2} \left(\frac{K}{K_x^2 + K} - \frac{K_x^2}{R^2} \right) \end{aligned} \quad (7.5.4)$$

или пренебрегая членом $K_x^2/R^2 \ll 1$

$$\begin{aligned} H &= -\frac{K}{R^2} \frac{P_1^2}{2} + \frac{1}{2} (K_x^2 + K) \left(Q_1 - \frac{K_x}{K_x^2 + K} p_s \right)^2 + \frac{1}{2} \left(p_2 + \frac{K_x}{R} p_s \right)^2 \\ &+ R^2 \frac{Q_2^2}{2} + \frac{P_s^2}{2} \frac{K}{K_x^2 + K} \end{aligned}$$

Характер движения частицы с измененным моментом импульса существенно не меняется. Центр эллипса, вокруг которого движется ларморовский кружок, смещается на величину

$$\Delta X = \frac{K_x}{K_x^2 + K} p_s \quad (7.5.5)$$

В быстром циклотронном вращении появляется дополнительная добавка к поперечному импульсу

$$\frac{\Delta p_y}{p_{s0}} = -\frac{K_x}{R} \frac{\Delta p_s}{p_{s0}} \quad (7.5.6)$$

Член в гамильтониане

$$\frac{p_s^2}{2} \frac{K}{K_x^2 + K} \quad (7.5.7)$$

описывает эффект "отрицательной" продольной массы подробно изложенный в разделе 3.

8. Матричный метод анализа движения частицы

8.1 Определение однооборотной матриц

Пусть значения X_0, X_0', Y_0, Y_0' описывают первоначальное положение и углы движения частицы в некоторой точке относительно равновесной орбиты накопителя. Через оборот частица изменит свои параметры на X, X', Y, Y' . Записывая

$$Z_0 = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_0' \\ Y_0 \\ Y_0' \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} X \\ X' \\ Y \\ Y' \end{pmatrix}, \quad (8.1.1)$$

мы получаем, что динамика частицы может быть описана с помощью матрицы поворота T

$$\begin{pmatrix} X \\ X' \\ Y \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ X_0' \\ Y_0 \\ Y_0' \end{pmatrix}. \quad (8.1.2)$$

Через n оборотов положение и углы частицы будут

$$Z = T^n \cdot Z_0. \quad (8.1.3)$$

Часто удобно вместо Z, Z_0, T ввести двухкомпонентные вектора и матрицы 2×2 [11], таким образом, что

$$Z_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{Y}_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_0' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_0 = \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_0' \end{pmatrix}, \quad (8.1.4)$$

$$Z = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y \\ Y' \end{pmatrix} \quad (8.1.5)$$

и

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{n} \\ \mathbf{m} & \mathbf{N} \end{bmatrix}, \quad (8.1.6)$$

где $\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ – матрицы 2×2 .

8.2 Свойство симплектичности матрицы преобразования.

Пусть матрица преобразования T обладает свойством симплектичности. Это значит, что

$$T^+ S T = S = T S T^+. \quad (8.2.1)$$

Здесь матрица

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & 0 \\ 0 & \mathbf{S} \end{bmatrix}, \quad (8.2.2)$$

а знак $+$ – означает транспонирование матрицы. Матрица S обладает свойством

$$S^2 = -I, \quad (8.2.3)$$

где I – единичная матрица

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (8.2.4)$$

Введем понятие симплектического сопряжения [11] как

$$\bar{A} = -SA^+S. \quad (8.2.5)$$

Тогда для матриц 2×2

$$\bar{A}A = A\bar{A} = (A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}) \cdot \mathbf{I} = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{I}, \quad (8.2.6)$$

$$\bar{A} + A = A\bar{A} = (A_{11} + A_{22}) \cdot \mathbf{I} = (\text{Tr } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{I}, \quad (8.2.7)$$

а для симплектических матриц 4×4

$$\bar{T}T = T\bar{T} = -S^2 = I. \quad (8.2.8)$$

Следовательно $\bar{T} = T^{-1}$. Записывая матрицы \bar{T} и T , через M, N, m, n получим следующие условия на симплектичность матрицы T

$$\begin{aligned} |\mathbf{M}| + |\mathbf{m}| = 1, \quad |\mathbf{N}| + |\mathbf{n}| = 1, \quad \bar{\mathbf{M}}\mathbf{n} + \bar{\mathbf{m}}\mathbf{N} = \mathbf{0}, \\ |\mathbf{M}| + |\mathbf{n}| = 1, \quad |\mathbf{N}| + |\mathbf{m}| = 1, \quad \mathbf{M}\bar{\mathbf{m}} + \mathbf{n}\bar{\mathbf{N}} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (8.2.9)$$

Кроме этого условия (8.2.8) и (8.2.9) подразумевают

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{N}| \quad \text{и} \quad |\mathbf{m}| = |\mathbf{n}|.$$

8.3 Собственные значения матрицы преобразования

Из условия симплектичности следует, что если λ – собственное значение матрицы T , то и $1/\lambda$ тоже является собственным значением. Предположим, что матрица T имеет 4 различных собственных значения не равных 1 или -1 . Тогда собственные значения матрицы

$$T + \bar{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} + \bar{\mathbf{M}} & \mathbf{n} + \bar{\mathbf{m}} \\ \mathbf{m} + \bar{\mathbf{n}} & \mathbf{N} + \bar{\mathbf{N}} \end{bmatrix} \quad (8.3.1)$$

есть

$$\Lambda_1 = \lambda_1 + 1/\lambda_1, \quad \Lambda_2 = \lambda_2 + 1/\lambda_2. \quad (8.3.2)$$

Соответствующее характеристическое уравнение может быть записано в виде

$$(M - \Lambda)(N - \Lambda) - |\mathbf{m} + \bar{\mathbf{n}}| = 0, \quad (8.3.3)$$

где

$$M = \text{tr } \mathbf{M} = M_{11} + M_{22}, \quad N = \text{tr } \mathbf{N} = N_{11} + N_{22}.$$

Тогда

$$2\Lambda = M + N \pm \sqrt{(M - N)^2 + 4 \cdot |\mathbf{m} + \bar{\mathbf{n}}|} \quad (8.3.4)$$

и определяя собственные значения как

$$\lambda_1 = e^{i\varphi_1} = \cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1), \quad (8.3.5)$$

$$\lambda_2 = e^{i\varphi_2} = \cos(\varphi_2) + i \sin(\varphi_2) \quad (8.3.6)$$

получаем уравнения на фазы φ_1 и φ_2

$$4\cos(\varphi_1) = M + N + \sqrt{(M - N)^2 + 4 \cdot |\mathbf{m} + \bar{\mathbf{n}}|}, \quad (8.3.7)$$

$$4\cos(\varphi_2) = M + N - \sqrt{(M - N)^2 + 4 \cdot |\mathbf{m} + \bar{\mathbf{n}}|}. \quad (8.3.8)$$

Частоты, ассоциированные с собственными значениями, записываются как

$$Q_1 = \frac{\varphi_1}{2\pi}, \quad Q_2 = \frac{\varphi_2}{2\pi}. \quad (8.3.9)$$

8.4 Блочно-диагональная форма матрицы преобразования

Пусть матрица T имеет 4 различных собственных значения и симплектична, тогда можно найти симплектическую матрицу U такую, что

$$T = WUW^{-1}, \quad (8.4.1)$$

где

$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_1) & \sin(\varphi_1) \\ -\sin(\varphi_1) & \cos(\varphi_1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_2) & \sin(\varphi_2) \\ -\sin(\varphi_2) & \cos(\varphi_2) \end{bmatrix}. \quad (8.4.2)$$

Отметим, что матрица W определена неоднозначно. Однако можно сделать утверждение, что если существует другая симплектическая матрица \tilde{W} , переводящая матрицу T к блочно-диагональному виду

$$T = \hat{W}U\hat{W}^{-1}, \quad (8.4.3)$$

то

$$\hat{W} = WO, \quad (8.4.4)$$

где

$$O = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & 0 \\ 0 & \mathbf{Q} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 \\ -s_1 & c_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 \\ -s_2 & c_2 \end{bmatrix} \quad (8.4.5)$$

и

$$c_1^2 + s_1^2 = 1, \quad c_2^2 + s_2^2 = 1. \quad (8.4.6)$$

8.5 Параметризация Эдварда-Тенга (Edwards-Teng parametrization)

Эдвард и Тенг [12], а впоследствии Биллинг (Billing) [13] и Росер (Roser) [14] предложили следующую схему параметризации связанных колебаний

$$T = RUR^{-1}, \quad (8.5.1)$$

где T – матрица одного оборота

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{n} \\ \mathbf{m} & \mathbf{N} \end{bmatrix}, \quad (8.5.2)$$

U – блочно-диагональная матрица вида

$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad (8.5.3)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\phi_1) + \alpha_1 \sin(\phi_1) & \beta_1 \sin(\phi_1) \\ -\gamma_1 \sin(\phi_1) & \cos(\phi_1) - \alpha_1 \sin(\phi_1) \end{bmatrix} = C_1 \mathbf{I} + S_1 \mathbf{J}_1, \quad (8.5.4)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos(\phi_2) + \alpha_2 \sin(\phi_2) & \beta_2 \sin(\phi_2) \\ -\gamma_2 \sin(\phi_2) & \cos(\phi_2) - \alpha_2 \sin(\phi_2) \end{bmatrix} = C_2 \mathbf{I} + S_2 \mathbf{J}_2, \quad (8.5.5)$$

$$C_1 = \cos(\phi_1), \quad C_2 = \cos(\phi_2), \quad S_1 = \sin(\phi_1), \quad S_2 = \sin(\phi_2), \quad (8.5.6)$$

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\gamma_1 & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ -\gamma_2 & -\alpha_2 \end{bmatrix} \quad (8.5.7)$$

и R – “некоторая” матрица связи

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} d \cdot \mathbf{I} & \overline{\mathbf{W}} \\ -\mathbf{W} & d \cdot \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} W_{11} & -W_{12} \\ -W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}. \quad (8.5.8)$$

Матрица \mathbf{R} – симплектична, а детерминант матрицы \mathbf{W} связан с параметром d как

$$d^1 = 1 - |\mathbf{W}|. \quad (8.5.9)$$

Таким образом, матрица оборота T выражается через 10 независимых параметров $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \psi_1, \psi_2, W_{11}, W_{12}, W_{21}, W_{22}$.

Подставляя явный вид матриц R, T, U в уравнение 1 и обращая его, получаем связь матриц $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{W}$ с матрицами $\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{m}$ и \mathbf{n} .

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} - \frac{\mathbf{nW}}{d}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{N} + \frac{\mathbf{Wn}}{d}, \quad \mathbf{W} = -\frac{\mathbf{m} + \bar{\mathbf{n}}}{dU}, \quad (8.5.10)$$

Здесь

$$d^2 = \frac{1}{2} + \frac{T}{2U}, \quad T = \text{Tr}(\mathbf{M} - \mathbf{N}), \quad U = \sqrt{T^2 + 4 \cdot |\mathbf{m} + \bar{\mathbf{n}}|}. \quad (8.5.11)$$

Знак U выбирается так, что d^2 положительно.

9. Движение в накопителе с продольным полем по Эдварду-Тенгу

Рассмотрим движение в бетатроне с продольным полем, основываясь на параметризации предложенной Эдвардсом и Тенгом. Для этого надо сначала получить матрицу, описывающую движение частицы в поворотном дипольном магните с сильным продольным полем.

Зная решение (2.2) для уравнения движения частицы (2.1), можно записать соответствующую ему матрицу.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x'_1 \\ y_1 \\ y'_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x'_0 \\ y_0 \\ y'_0 \end{bmatrix}, \quad (9.1)$$

где

$$\begin{aligned} M_{11} &= -\frac{\lambda_2^2 - k_x^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \cos(\lambda_1 s) + \frac{\lambda_1^2 - k_x^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \cos(\lambda_2 s), \\ M_{12} &= \frac{1}{\lambda_1} \frac{\lambda_1^2 - k_y^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \sin(\lambda_1 s) - \frac{1}{\lambda_2} \frac{\lambda_2^2 - k_y^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \sin(\lambda_2 s), \\ M_{13} &= \frac{1}{\lambda_1} \frac{K k_y^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \sin(\lambda_1 s) - \frac{1}{\lambda_2} \frac{K k_y^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \sin(\lambda_2 s), \\ M_{14} &= -\frac{K}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \cos(\lambda_1 s) + \frac{K}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \cos(\lambda_2 s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{21} &= \lambda_1 \frac{\lambda_2^2 - k_x^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \sin(\lambda_1 s) - \lambda_2 \frac{\lambda_1^2 - k_x^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \sin(\lambda_2 s), \\
M_{22} &= \frac{\lambda_1^2 - k_y^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \cos(\lambda_1 s) - \frac{\lambda_2^2 - k_y^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \cos(\lambda_2 s), \\
M_{23} &= \frac{K k_y^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \cos(\lambda_1 s) - \frac{K k_y^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \cos(\lambda_2 s), \\
M_{24} &= \frac{\lambda_1 K}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \sin(\lambda_1 s) - \frac{\lambda_2 K}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \sin(\lambda_2 s), \\
M_{31} &= -\frac{1}{\lambda_1} \frac{K k_x^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \sin(\lambda_1 s) + \frac{1}{\lambda_2} \frac{K k_x^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \sin(\lambda_2 s), \\
M_{32} &= \frac{K}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \cos(\lambda_1 s) - \frac{K}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \cos(\lambda_2 s), \\
M_{33} &= -\frac{\lambda_{22}^2 - k_y^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \cos(\lambda_1 s) - \frac{\lambda_1^2 - k_y^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \cos(\lambda_2 s), \\
M_{34} &= \frac{1}{\lambda_1} \frac{\lambda_1^2 - k_x^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \sin(\lambda_1 s) - \frac{1}{\lambda_2} \frac{\lambda_2^2 - k_x^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \sin(\lambda_2 s), \\
M_{41} &= -\frac{K k_x^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \cos(\lambda_1 s) + \frac{K k_x^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \cos(\lambda_2 s), \\
M_{42} &= -\frac{\lambda_1 K}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \sin(\lambda_1 s) + \frac{\lambda_2 K}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \sin(\lambda_2 s), \\
M_{43} &= \lambda_1 \frac{\lambda_2^2 - k_y^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \sin(\lambda_1 s) - \lambda_2 \frac{\lambda_1^2 - k_y^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \sin(\lambda_2 s), \\
M_{44} &= \frac{\lambda_1^2 - k_x^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \cos(\lambda_1 s) - \frac{\lambda_2^2 - k_x^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \cos(\lambda_2 s). \tag{9.2}
\end{aligned}$$

Параметры λ_1 , λ_2 , k_x и k_y определены в уравнениях (2.1), (2.2) и (2.4). Длина участка траектории, вдоль которого происходит движение частицы, обозначена символом s .

Данное преобразование не обладает свойством симплектичности. Для того, чтобы получить симплектическую матрицу необходимо перейти к каноническим координатам с помощью специальной матрицы T , что эквивалентно преобразованию входа в магнитное поле и выхода из него.

$$M = TMT^{-1}, \quad (9.3)$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/(2\rho_{\parallel}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/(2\rho_{\parallel}) & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица движения частицы в прямолинейном соленоиде хорошо известна и может быть записана как

$$M_{sol}(s) = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{\parallel} sn & 0 & \rho_{\parallel} - \rho_{\parallel} cs \\ 0 & cs & 0 & sn \\ 0 & \rho_{\parallel} cs - \rho_{\parallel} & 1 & \rho_{\parallel} sn \\ 0 & -sn & 0 & cs \end{bmatrix}, \quad (9.4)$$

где

$$cs = \cos(s/\rho_{\parallel}), \quad sn = \sin(s/\rho_{\parallel}), \quad \rho_{\parallel} = \gamma\beta m_p c^2 / qB. \quad (9.5)$$

Радиус поворота накопителя был выбран равным 100 см. Энергия протонов 1.8 МэВ ($HR = 190$ кГ·см). Для нахождения параметров кольца в любой точке по продольной координате использовалось преобразование

$$M(s)M(\Pi)M(s)^{-1},$$

где $M(\Pi)$ – матрица преобразования одного оборота по накопительному кольцу, $M(s)$ – матрица прохождения длины s вдоль кольца.

На рисунке 9.1 показаны различные варианты поведения параметров Эдварда-Твиса в зависимости от структуры бетатрона. Схема бетатрона показана на рис. 1.1. При задании структуры используются следующие параметры:

- $R = 100$ см – радиус поворотного магнита,
- $L_{bend} = \pi R/2$ – длина поворотной части траектории,
- B_{bend} – продольное магнитное в поворотах,
- L_{sol} – длина соленоида в прямолинейных участках дрейфа,
- B_{sol} – продольное магнитное поле в прямолинейных участках,

поперечное поле в диполях поворота выбиралось в соответствии с радиусом поворота ($B = 1.9$ кГс), n – показатель спада магнитного поля в диполях поворота.

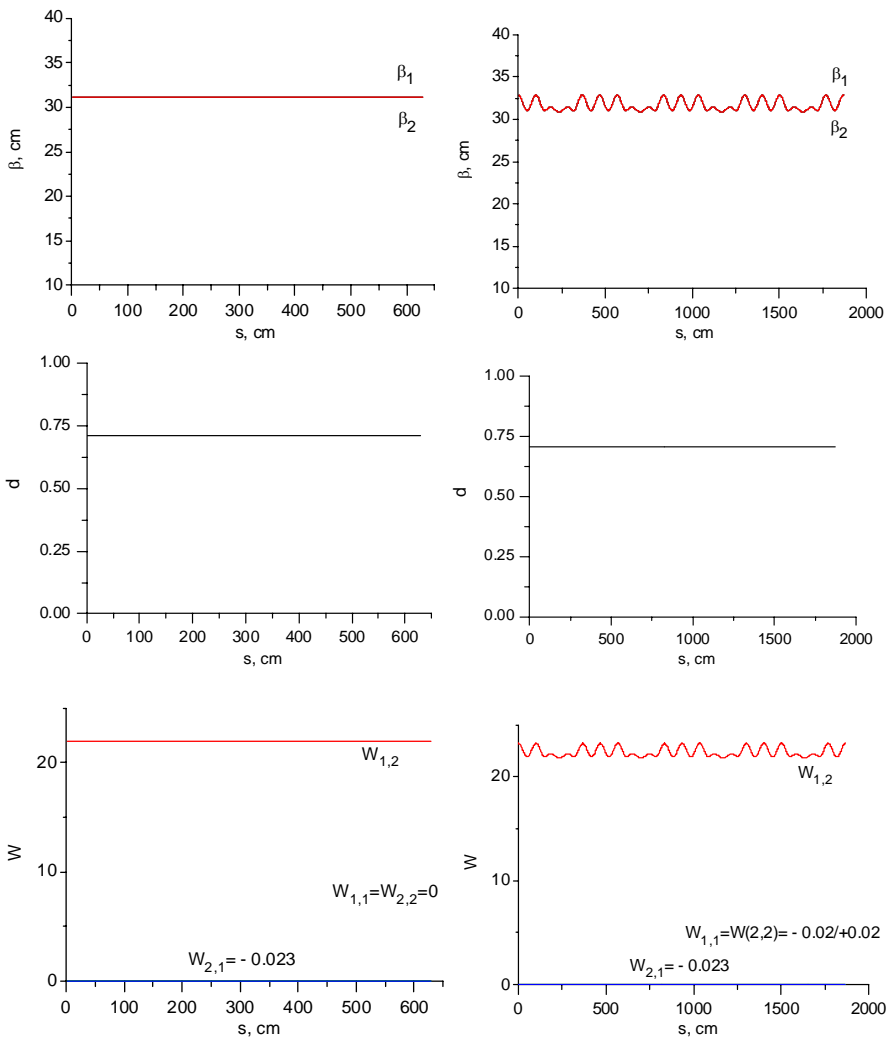


Рис. 9.1. Зависимости значений β -функции, параметра связи d и значений матрицы связи W в бетатроне с продольным полем:

вариант слева: $n = 0.5$, $B_{\text{bend}} = 12$ кГс, $L_{\text{sol}} = 0$.

вариант справа $n = 0.5$, $B_{\text{bend}} = 12$ кГс, $L_{\text{sol}} = 155$ см, $B_{\text{sol}} = 12$ кГс.

10. Приведение движения в бетатроне произвольной конфигурации к модам машины с равномерной фокусировкой

Зная матрицу преобразования при движении протона в поворотном магните в присутствии сильного продольного магнитного поля (9.1)-(9.2), можно найти преобразование координат, переводящее однооборотную матрицу T в блочно-диагональную матрицу вида

$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{B} \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_1) & \sin(\varphi_1) \\ -\sin(\varphi_1) & \cos(\varphi_1) \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_2) & \sin(\varphi_2) \\ -\sin(\varphi_2) & \cos(\varphi_2) \end{bmatrix}. \quad (10.1)$$

Такое преобразование описывается матрицей

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & 0 & Q_{14} \\ 0 & Q_{22} & Q_{23} & 0 \\ Q_{31} & 0 & 0 & Q_{34} \\ 0 & Q_{42} & Q_{43} & 0 \end{bmatrix}, \quad (10.2)$$

$$Q_{11} = \frac{\lambda_2^2(\lambda_1^2 - k_y^2)}{k_y^2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}, \quad Q_{14} = -\frac{K}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}, \quad (10.3)$$

$$Q_{22} = \frac{(\lambda_1^2 - k_y^2)}{\lambda_1(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}, \quad Q_{23} = \frac{k_y^2 K}{\lambda_1(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}, \quad (10.4)$$

$$Q_{31} = -\frac{\lambda_1^2(\lambda_2^2 - k_y^2)}{k_y^2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}, \quad Q_{34} = \frac{K}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}, \quad (10.5)$$

$$Q_{42} = -\frac{(\lambda_2^2 - k_y^2)}{\lambda_2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}, \quad Q_{43} = -\frac{k_y^2 K}{\lambda_2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}. \quad (10.6)$$

Для того чтобы привести матрицу к заданному виду, описывающему движение с двумя β -функциями $\beta_1=1/\lambda_1$ и $\beta_2=1/\lambda_2$ (2.4) используем следующее преобразование:

$$F = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & 1/\sqrt{\lambda_1} & & \\ & & \sqrt{\lambda_2} & \\ & & & 1/\sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix}. \quad (10.7)$$

Тем самым мы устанавливаем требуемые значения бета функций $\beta_1 = 1/\lambda_1$ и $\beta_2 = 1/\lambda_2$.

Результирующая матрица преобразования между новыми и старыми переменными записывается

$$QS = F \cdot Q \cdot T^{-1}, \quad (10.8)$$

где T – матрица входа и выхода из магнитного поля (9.4). Она добавлена, чтобы преобразование воздействовало на симплектическую матрицу перехода частицы вдоль кольца от элемента к элементу записанную для канонических переменных. Тогда выполняется следующее тождество

$$QS \cdot \tilde{M} \cdot QS^{-1} = F \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot T \cdot M \cdot T^{-1} \cdot T \cdot Q^{-1} \cdot F^{-1} = F \cdot Q \cdot M \cdot Q^{-1} \cdot F^{-1}. \quad (10.9)$$

Данное преобразование QS переводит (9.1) к блочно-диагональному виду, однако оно не является симплектическим. Но можно заметить, что матрица QS обладает следующим свойством

$$QS \cdot S \cdot QS^+ = \begin{bmatrix} 0 & q_1 & 0 & 0 \\ -q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & -q_2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.10)$$

В этом случае с помощью простейшего дополнительного преобразования вида

$$CS = \begin{bmatrix} 1/s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/s_2 \end{bmatrix}, \quad (10.11)$$

где

$$s_1 = \frac{(\lambda_1^2 - k_y^2) \sqrt{k_y^2 - \lambda_2^2}}{K k_y \sqrt{\lambda_1} \sqrt{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}}, \quad s_2 = \frac{(k_y^2 - \lambda_2^2) \sqrt{\lambda_1^2 - k_y^2}}{K k_y \sqrt{\lambda_2} \sqrt{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}}, \quad \lambda_1 > \lambda_2, \quad (10.12)$$

преобразование QS приводится к симплектическому виду.

Результирующее преобразование к новым переменным выглядит следующим образом

$$QCS = \begin{bmatrix} QCS_{11} & 0 & 0 & QCS_{14} \\ 0 & QCS_{22} & QCS_{23} & 0 \\ QCS_{31} & 0 & 0 & QCS_{34} \\ 0 & QCS_{42} & QCS_{43} & 0 \end{bmatrix}, \quad (10.13)$$

где

$$QCS_{11} = \frac{(\lambda_2^2 + k_y^2)K}{2k_y(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^{1/2}(k_y^2 - \lambda_2^2)^{1/2}}, \quad QCS_{14} = -\frac{(k_y^2 - \lambda_2^2)^{1/2}}{k_y(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^{1/2}} \quad (10.14)$$

$$QCS_{22} = \frac{K k_y}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^{1/2}(k_y^2 - \lambda_2^2)^{1/2}}, \quad QCS_{23} = \frac{(-2\lambda_2^2 + 2k_y^2 + K^2)k_y}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^{1/2}(k_y^2 - \lambda_2^2)^{1/2}}, \quad (10.15)$$

$$QCS_{31} = \frac{(\lambda_1^2 + k_y^2)K}{2k_y(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^{1/2}(\lambda_1^2 - k_y^2)^{1/2}}, \quad QCS_{34} = \frac{(\lambda_1^2 - k_y^2)^{1/2}}{k_y(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^{1/2}}, \quad (10.16)$$

$$QCS_{42} = \frac{K k_y}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^{1/2}(\lambda_1^2 - k_y^2)^{1/2}}, \quad QCS_{43} = \frac{(-2\lambda_1^2 + 2k_y^2 + K^2)k_y}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^{1/2}(\lambda_1^2 - k_y^2)^{1/2}}. \quad (10.17)$$

В пределе сильного поля $K \gg k_x, k_y$ матрица перехода от старых канонических переменных к новым существенно упрощается

$$QCS = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{K} \\ 0 & 1 & \frac{K}{2} & 0 \\ \frac{K}{2k_y} & 0 & 0 & \frac{1}{k_y} \\ 0 & \frac{k_y}{K} & -\frac{k_y}{2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.18)$$

Если мы хотим найти преобразование между новыми и реальными X, Y, X', Y' переменными, то необходимо умножить нашу QCS на матрицу T .

$$QCS \cdot T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{K} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{K}{k_y} & 0 & 0 & \frac{1}{k_y} \\ 0 & \frac{k_y}{K} & -k_y & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.19)$$

Таким образом, переход к новым переменным выглядит следующим образом

$$Q_1 = \frac{Y'}{K}, P_1 = X', Q_2 = \frac{K}{k_y} X + \frac{1}{k_y} Y', P_2 = \frac{k_y}{K} X' - k_y Y. \quad (10.20)$$

Вспомяная, что в пределе сильного продольного поля значения β -функции, определенные в разделе 2 (2.4), принимают значения

$$\beta_1 = 1/K, \quad \beta_2 = K/k_x k_y, \quad (10.21)$$

получаем, что определение эмиттансов для новых переменных выглядит следующим образом

$$\varepsilon_1 = Q_1^2/\beta_1 + \beta_1 P_1^2 = \frac{(Y')^2}{K} + \frac{(X')^2}{K} = \beta_1 \left((X')^2 + (Y')^2 \right), \quad (10.22)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= Q_2^2/\beta_2 + \beta_2 P_2^2 = \frac{k_x k_y}{K} \left(\frac{K}{k_y} X + \frac{1}{k_y} Y' \right)^2 + \frac{K}{k_x k_y} \left(\frac{k_y}{K} X' - k_y Y \right)^2 \\ &= \frac{K^2}{k_x k_y} \left[\frac{k_x^2}{K} \left(X + \frac{Y'}{K} \right)^2 + \frac{k_y^2}{K} \left(Y - \frac{X'}{K} \right)^2 \right] = \beta_2 \left[k_x^2 \left(X + \frac{Y'}{K} \right)^2 + k_y^2 \left(Y - \frac{X'}{K} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (10.23)$$

что практически полностью совпадает с результатами, полученными в разделе 2.

Физический смысл полученных выражений абсолютно ясен. Первая пара новых переменных описывает изменение поперечного импульса протона при его движении вдоль силовой линии магнитного поля. Вторая пара новых переменных описывает эффективное движение центра ларморовской окружности, вокруг которого протон совершает свои быстрые осцилляции. Соответствующие эмиттансы ε_1 , ε_2 и значения β -функций β_1 , β_2 дают характеристику эффективного углового разброса протонов в пучке и характерный размер протонного пучка ур. (10.22) и (10.23).

Основание для такого выбора таких новых переменных можно найти в рис. 2.2-2.3. Видно, что фазовое движение в пространстве поперечных скоростей и поперечных координат представляет собой некоторые эллипсы, что аналогично движению обычного маятника на фазовой плоскости. Единственная трудность возникает в том, какую переменную в паре считать скоростью, а какую координатой. Очевидно, что X' и Y' – поперечные скорости, а также $X + Y'/K$ и $Y - X'/K$ – координаты центра ларморовского кружка, являются равноправными с физической точки зрения. Поэтому и возникает асимметрия в записи перехода от старых координат к новым в формуле (10.20). Параметр k_y , например, входит явно несимметричным образом, что и определяет: какая из координат центра ларморовской окружности будет “квазиординатой”, а какая “квазискоростью”.

11. Примеры расчетов параметров кольца в терминах мод описывающих движение протонов в бетатроне с равномерной фокусировкой

Зная матрицу движения в бетатроне с равномерной фокусировкой и с продольным магнитным полем, найдем численное значение преобразования к новым координатам согласно уравнениям (10.13). Данное преобразование применяется ко всем однооборотным матрицам, подсчитанным для любой точки кольца. После этого получившиеся матрицы проходят через процедуру расчета параметров по Эдварду-Генгу. Таким образом, мы сначала задаем базовые моды колебаний, такие же, как в кольце с равномерной фокусировкой, а затем мы учитываем возможность появления связи между новыми модами. В этом случае движение в бетатроне без соленоидальных вставок описывается двумя постоянными значениями β -функций. Значение параметра $d = 1$ соответствует отсутствию связи. Однооборотная матрица перехода по кольцу блочно-диагональна. Этот результат не зависит от параметра n .

При добавлении соленоидальных промежутков ситуация меняется. Значения β -функций и параметра d показаны на рисунке 11.1. Значение $s = 0$ соответствует центру одного из соленоидов. Видно, что при добавлении прямолинейных промежутков движение остается слабо связанным в терминах выбранных мод. Параметр связи d отличается от 1 на величину порядка $d \approx 1.5 \cdot 10^{-4}$.

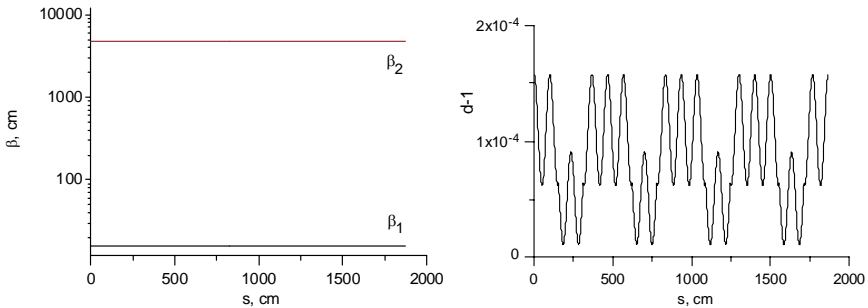


Рис. 11.1. Зависимости значений β -функции и параметра связи d в бетатроне с продольным полем: Параметры бетатрона: $n=0.5$, $B_{\text{bend}}= 12$ кГс, $L_{\text{sol}}= 155$ см, $B_{\text{sol}}= 12$ кГс.

Если значения магнитного поля на прямолинейных и поворотных участках различны, то динамика β -функций и параметра d выглядят так, как показано на рисунке 11.2. При переходе к новым координатам кольца с равномерной фокусировкой использовалось значение магнитного поля в

повороте (10.5 кГс). Видно, что в этом случае отличие реального движения от выбранных мод сводится к некоторой зависимости параметра связи от продольной координаты. Значения β -функций при этом остаются практически постоянными.

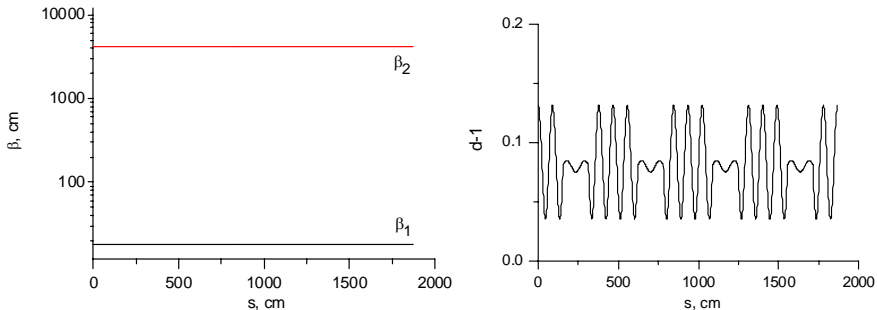


Рис. 11.2. Зависимости значений β -функции и параметра связи d в бетатроне с продольным полем: Параметры бетатрона: $n=0.5$, $B_{\text{bend}}=10.5$ кГс, $L_{\text{sol}}=155$ см, $B_{\text{sol}}=13.5$ кГс. При переходе к новым координатам кольца с равномерной фокусировкой использовалось значение магнитного поля в повороте (10.5 кГс).

Интересно отметить, что если в качестве базового продольного магнитного поля взять поле в соленоиде (13.5 кГс), то поведение параметра связи d изменит свой характер. Там, где на рисунке два наблюдается осцилляторный характер, станет плато и наоборот.

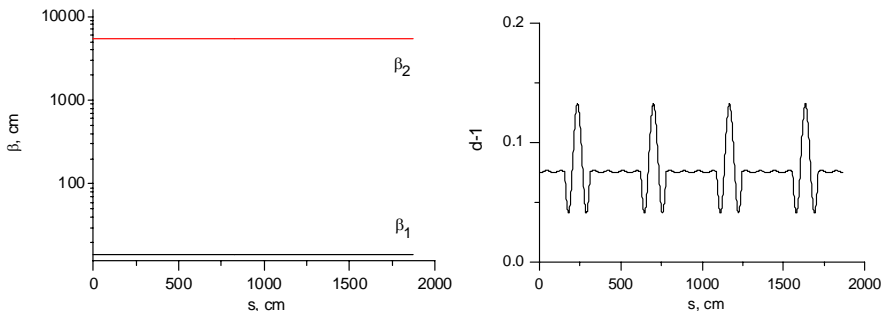


Рис. 11.3. Зависимости значений β -функции и параметра связи d в бетатроне с продольным полем: Параметры бетатрона: $n=0.5$, $B_{\text{bend}}=10.5$ кГс, $L_{\text{sol}}=155$ см, $B_{\text{sol}}=13.5$ кГс. При переходе к новым координатам кольца с равномерной фокусировкой использовалось значение магнитного поля в соленоиде (13.5 кГс).

Литература

- [1] *R.B. Palmer*. Progress in ring cooler studies. Nucl. Instr. Meth. A 532 (2004), p.255-259.
- [2] *V. Antropov, E. Boltushkin, et al.* Positron storage ring LEPTA. Nucl. Instr. Meth. A 532 (2004), p.173-176.
- [3] *Мешков И.Н., Сидорин А.О., Смиргов А.В., Сыресин Е.М.* Трубников Г.В. Моделирование динамики частиц в накопительных кольцах со связанным поперечным движением. Атомная энергия, т.98, вып.4, 2005, с.300-306.
- [4] *Ferrari L.A., Rogers K.C.* Experimental study of runaway electrons in a plasma betatrons. Phys. Fluids, 10, N6, 319 (1967).
- [5] *Ferrari L.A., Rogers K.C., Landau R.W.* Observation of the negative-mass instability in a plasma betatron. Phys. Fluids, 11, N3, 691 (1968).
- [6] *Ferrari L.A., Zucker M.S.* Stability of orbits in combined betatron and azimuthal magnetic fields. Phys.Fluids, 12, N6, 1312 (1969).
- [7] *Дж. Лоусон*. Физика пучков заряженных частиц. М.Мир, 1980, с.103.
- [8] Коломенский А.А., Лебедев А.Н. Теория циклических ускорителей. Москва, 1962.
- [9] *Дубровин Б., Новиков С., Фоменко А.* Современная геометрия, М.: Наука, 1986.
- [10] *Lee Teng*. Paraxial expansion of a static magnetic field in a ring accelerator. Proceeding of Particle Accelerator Conference, 1995, v.5, p.2814-2816.
- [11] *C. Gardner*. Some useful linear coupling approximations. C-A/AP#101, July 2003, Brookhaven National Laboratory, New-York.
- [12] *D. Edward and L. Teng*. Parametrization of Linear Coupled Motion in Peroidic Systems, IEEE Trans. On Nuclear Sc. 20, 885 (1973).
- [13] *M. Billing*. The theory of weakly Coupled Transverse motion in Storage Rings, Cornell University Report CBN 85-2.
- [14] *T. Roser*. Generalized Treatment of Linear Motion in Two-Dimensional Periodic Systems, University of Michigan Report UM-HE 88-8 (1988).

В.Б. Рева

**Движение заряженных частиц в накопителе
с продольным магнитным полем**

V.B. Reva

**Charged particles motion in storage ring
with the longitudinal magnetic field**

ИЯФ 2005-36

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев
Работа поступила 14.07.2005

Сдано в набор 15.07.2007

Подписано в печать 18.07.2005

Формат 60x90 1/16 Объем 2.5 печ.л., 2.0 уч.-изд.л.

Тираж 100 экз. Бесплатно. Заказ № 36

*Обработано на IBM PC и отпечатано
на ротативе ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН
Новосибирск, 630090, пр. Академика Лаврентьева, 11*