НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им. Г.И.Будкера СО РАН

В.В. Вечеславов

ВКЛАД ВТОРИЧНЫХ ГАРМОНИК ВОЗМУЩЕНИЯ В СЕПАРАТРИСНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ

ИЯФ 2004-38

НОВОСИБИРСК
2004

Вклад вторичных гармоник возмущения в сепаратрисное отображение гамильтоновой системы

В.В. Вечеславов[1]

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера
630090 Новосибирск, СО РАН

Аннотация

В литературе уже обсуждалась особая роль, которую могут играть в нелинейных гамильтоновых системах низкочастотные вторичные гармоники, возникающие на сумме и разности явно входящих в гамильтониан первичных частот. Эти гармоники имеют второй порядок малости и составляют весьма незначительную долю возмущения. Несмотря на это, их вклад в амплитуду сепаратрисного отображения системы при определенных условиях может на несколько порядков превышать вклады от первичных частот и тем самым полностью определять формирование динамического хаоса. В настоящей работе дан обзор полученных по этой теме на сегодняшний день теоретических и численных результатов. В качестве примера приведен маятник, возмущение которого представлено в гамильтониане двумя несимметричными гармониками с высокими и близкими по модулю частотами. Получено аналитическое выражение вклада вторичной гармоники в амплитуду сепаратрисного отображения этой системы и с его помощью исследован не рассмотренный ранее случай весьма низких вторичных частот. Указаны области, где амплитуда сепаратрисного отображения растет линейно с частотой, а размер хаотического слоя вообще от нее не зависит. Приведено сравнение результатов теории и численного счета.

PACS: 05.45.-a, 05.45.Gg

[1]email: vecheslavov@inp.nsk.su

1 История вопроса

Как известно, в гамильтоновых системах с разделенным на хаотическую и регулярную компоненты фазовым пространством формирование хаоса определяется взаимодействием нелинейных резонансов. В конкретных ситуациях один из резонансов объявляется основным и вблизи него выбираются начальные условия, а остальные рассматриваются как возмущение. Наиболее интересной и неожиданной оказалась динамика в окрестности сепаратрис основного резонанса – особых траекторий, отделяющих области с вращающейся (вне резонанса) и колеблющейся (внутри резонанса) фазой. Сравнительно недавно здесь обнаружились новые любопытные детали, о которых необходимо сказать.

Всегда считалось, что хаос возникает именно вблизи сепаратрис, поскольку период движения по ним бесконечен и взаимодействие резонансов в этой области всегда существенно [1-3]. Оказалось, однако, что это представление справедливо только для систем с аналитическим потенциалом, фурье-амплитуды которого убывают экспоненциально. При этом возмущение расщепляет каждую сепаратрису на две отдельные ветви, которые заполняют узкую область, образуя хаотический слой. Напомним, что в возникающем на месте расщепленных сепаратрис хаотическом слое следует различать три части: верхнюю (фаза x вращается сверху $p > 0$), среднюю (фаза колеблется) и нижнюю (фаза x вращается снизу $p < 0$).

В случае гладкого потенциала со степенным законом убывания фурье-амплитуд ситуация может оказаться качественно иной. Примеры нерасщепленных сепаратрис (как целых, так и дробных резонансов) и отсутствия на их месте хаотического слоя в кусочно-линейных системах приведены и обсуждаются в работах [4-6]. Следует особо подчеркнуть, что сами системы при этом остаются неинтегрируемыми и их сепаратрисы сохраняются в условиях сильного локального хаоса.

Выяснилось также, что на процесс образования хаоса существенно влияет и характер самого возмущения, в первую очередь, его спектральный состав. Напомним кратко историю этого вопроса.

Пусть система представлена гамильтонианом маятника

$$H(x,p,t) = \frac{p^2}{2} + \cos(x) + V(x,t) \tag{1}$$

с единственной гармоникой возмущения

$$V(x,t) = \varepsilon\, \cos\left(\frac{n}{2}\, x - \Omega\, t\right) \tag{2}$$

и положительными параметрами n, Ω. Эта гармоника также является резонансом, на фазовой плоскости она располагается выше основного резонанса маятника и потому ее удобно назвать верхней гармоникой.

Как установил Чириков [1], теоретическая амплитуда сепаратрисного отображения верхней части хаотического слоя, порожденная верхней гармоникой возмущения (2) связана соотношением

$$W(\Omega, n) = \varepsilon\, \Omega\, A_n(\Omega), \tag{3}$$

с интегралами Мельникова-Арнольда

$$A_n(\Omega > 0) = \frac{2\,\pi}{(n-1)!}\,\frac{\exp(\pi\,\Omega/2)}{\sinh\,(\pi\,\Omega)}(2\,\Omega)^{n-1}\left[1 + f_n(\Omega)\right], \tag{4}$$

где входящие в квадратные скобки функции $f_n(\Omega)$ определяются рекуррентными соотношениями

$$f_1 = f_2 = 0\,, \quad f_{n+1} = f_n - (1 + f_{n-1})\frac{n\,(n-1)}{4\,\Omega^2}\,, \quad n \geq 3\,. \tag{5}$$

Замена в (2) Ω на $-\Omega$ превращает верхнюю гармонику в нижнюю и при вычислении ее вклада в амплитуду сепаратрисного отображения верхней части слоя надо в формуле (3) использовать существенно иное выражение

$$A_n(\Omega < 0) = (-1)^n\, A_n(|\Omega|)\, \exp(-\pi\,|\Omega|)\,. \tag{6}$$

Следует особо подчеркнуть, что при выводе соотношений (3)-(6) в работе [1] не делалось никаких упрощающих предположений и допущений и они справедливы при любой величине Ω из интервала $0 < |\Omega| < \infty$. Заметим также, что интегралы (4) при изменении частоты Ω вместе с множителем в квадратных скобках проходят через нули, число которых определяется индексом интеграла Мельникова-Арнольда n.

Исследования Чирикова показали, что для системы с симметричным возмущением вида

$$V(x,t) = \varepsilon\,\left[\cos\left(\frac{n}{2}\,x - \Omega\,t\right) + \cos\left(\frac{n}{2}\,x + \Omega\,t\right)\right]\,, \tag{7}$$

амплитуда W сепаратрисного отображения и энергетический размер хаотического слоя

$$w_{tp} = |w_{md}| = w_{bt} = \Omega\, W\,, \tag{8}$$

в высокочастотном пределе $\Omega \to \infty$ с ростом частоты убывают экспоненциально и что все три части слоя имеют одинаковую ширину (здесь $w = p^2/2 + \cos x - 1$ - относительное отклонение от невозмущенной сепаратрисы по энергии).

В недавней работе [7] также для симметричной системы (1), (7) рассматривалась низкочастотная асимптотика $\Omega \to 0$ и было найдено, что в этом пределе амплитуда сепаратрисного отображения растет линейно с частотой, а ширина слоя вообще от нее не зависит. Обе эти асимптотики устроены относительно просто и наиболее трудной для анализа является область средних частот, где отсутствует какой-либо малый (или большой) параметр адиабатичности. Весьма полезными здесь оказались так называемые резонансные инварианты, которые неплохо передают топологию отдельных резонансов. Такие инварианты первых трех порядков, соответствующие резонансам 1:1, 1:2 и 1:3, построены для стандартного отображения Чирикова в работе [8] и для одночастотного сепаратрисного отображения в [9]. Выражения для инвариантов двойной частоты, введенные специально для изучения хаоса в окрестности нулей интегралов Мельникова-Арнольда, получены недавно в [10].

Несимметричное возмущение, насколько нам известно, впервые рассмотрено в работах [11,12], где исследовался гамильтониан маятника (1) при воздействии на него двух гармоник с различными частотами

$$V(x,t) = \varepsilon_1\, \cos{(x - \Omega_1\, t)} + \varepsilon_2\, \cos{(x - \Omega_2\, t)}\,. \tag{9}$$

Амплитуды этих гармоник $\varepsilon_1\,, \varepsilon_2 \ll 1$ предполагались малыми, а частоты высокими $|\Omega_1|$, $|\Omega_2| \gg 1$.

Именно в этом случае в возмущении возникают вторичные гармоники порядка $\sim \varepsilon_1 \varepsilon_2$ с частотами

$$\Delta\Omega_+ = \Omega_1 + \Omega_2\,, \qquad \Delta\Omega_- = \Omega_2 - \Omega_1\,, \tag{10}$$

которые при $\varepsilon_1\,, \varepsilon_2 \ll 1$ оказываются много слабее первичных (см. пример ниже).

Уже первые численные эксперименты с системой (1),(9) позволили обнаружить тот удивительный на первый взгляд факт, что именно эти весьма слабые вторичные гармоники возмущения при определенных условиях полностью определяют амплитуду сепаратрисного отображения и размер хаотического слоя.

В работе [12] рассмотрен пример системы с параметрами $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.075$, $\Omega_1 = 13$, $\Omega_2 = -10$, причем образующаяся на сумме частот $\Delta\Omega_+ = 3$ вторичная гармоника имела в возмущении амплитуду $\approx 4.5 \cdot 10^{-5}$, что в ~ 1700 раз меньше амплитуд первичных гармоник. Однако, ее вклад в амплитуду отвечающего за образование хаоса сепаратрисного отображения верхней части слоя превысил суммарный вклад от первичных гармоник почти в 400 раз. Размеры отдельных частей слоя оказались при этом существенно различными. Все это есть следствие упоминавшейся выше экспоненциальной зависимости ширины слоя от частоты при $\Omega \gg 1$, что и позволяет очень слабым, но низкочастотным вторичным гармоникам решающим образом влиять на образование хаоса. Эта важная роль вторичных гармоник на сумме частот была также подтверждена и для гладких систем [13].

Наконец, в недавней работе [14] рассмотрено несимметричное возмущение достаточно общего вида

$$V(x,t) = \varepsilon_1 \cos\left(m_1 x - \Omega_1 t\right) + \varepsilon_2 \cos\left(m_2 x - \Omega_2 t\right), \tag{11}$$

где m_1 и m_2 – произвольные положительные целые числа. Напомним, что именно эти параметры возмущения m_1 и m_2 определяют структуру (в частности, число нулей) интегралов Мельникова-Арнольда (4), (5). В окрестности этих нулей динамический хаос формируется с особенностями, которые обсуждены в [14] (см. там раздел 3). Мы также будем ниже рассматривать систему (1) с возмущением (11). Заметим попутно, что нам придется иметь дело с интегралами (4), (5) только четных индексов n, поскольку m_1 и m_2 целые числа.

2 Амплитуды вторичных гармоник

Амплитуды вторичных гармоник возмущения заранее неизвестны и их необходимо найти. Строгая теория здесь пока отсутствует, однако общий подход к проблеме и способ получения приближенных аналитических соотношений был предложен в работе [11]. Следуя этой работе, сделаем в (1), (11) замену переменных, введя вместо координаты $x(t)$ и импульса $p(t)$ их отклонения от значений на невозмущенной сепаратрисе $x_s(t) = 4\,\arctan\left(e^t\right)$, $p_s(t) = 2\,\sin\left(x_s(t)\right)$:

$$y(t) = x(t) - x_s(t), \qquad u(t) = p(t) - p_s(t), \tag{12}$$

и с помощью производящей функции $F_2(u,x,t) = [p_s(t) - u][x - x_s(t)]$ построим новый гамильтониан

$$H(y,u,t) = \frac{u^2}{2} + \cos y\, \cos x_s(t) - \sin y\, \sin x_s(t) + y\, \sin x_s(t)$$

$$+ \sum_{k=1}^{2} \varepsilon_k \left[\cos(m_k y)\, \cos(m_k x_s(t) - \Omega_k t) - \sin(m_k y)\, \sin(m_k x_s(t) - \Omega_k t)\right]. \tag{13}$$

Учитывая слабость возмущения, полагаем $|y(t)| \ll 1$, производим в (13) замены $\cos(m\,y) \to 1 - (m\,y)^2/2$, $\sin(m\,y) \to m\,y$ и находим уравнение

$$\begin{aligned} d^2y/dt^2 \quad &= \quad y\left[\cos x_s + \sum_{k=1}^{2} \varepsilon_k m_k^2 \cos(m_k x_s - \Omega_k t)\right] \\ &+ \sum_{k=1}^{2} \varepsilon_k m_k \sin(m_k x_s - \Omega_k t). \end{aligned}$$

Обозначим через Δy_ε разность между левой и правой частями этого уравнения

$$\begin{aligned} \Delta y_\varepsilon = \frac{d^2y}{dt^2} - y\left[\cos x_s + \sum_{k=1}^{2} \varepsilon_k m_k^2 \cos(m_k x_s - \Omega_k t)\right] \\ - \sum_{k=1}^{2} \varepsilon_k m_k \sin(m_k x_s - \Omega_k t). \end{aligned} \tag{14}$$

Нас интересует только вынужденное (исчезающее при $\varepsilon \to 0$) решение y_ε, которое удобно находить последовательными приближениями, стремясь свести Δy_ε к нулю [11]. После двух приближений имеем

$$y_\varepsilon^{(2)}(t) \approx -\sum_{k=1}^{2} \frac{\varepsilon_k m_k}{(m_k p_s - \Omega_k)^2} \sin(m_k x_s - \Omega_k t)$$

$$-\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 m_1 m_2}{2} \left\{ \left[\frac{m_2}{(m_1 p_s - \Omega_1)^2} + \frac{m_1}{(m_2 p_s - \Omega_2)^2}\right] \frac{\sin(m_+ x_s - \Delta\Omega_+ t)}{(m_+ p_s - \Delta\Omega_+)^2} \right.$$

$$\left. + \left[\frac{m_1}{(m_2 p_s - \Omega_2)^2} - \frac{m_2}{(m_1 p_s - \Omega_1)^2}\right] \frac{\sin(m_- x_s - \Delta\Omega_- t)}{(m_- p_s - \Delta\Omega_-)^2} \right\} + \ldots, \tag{15}$$

где не выписаны второстепенные члены и введены обозначения для суммы и разности параметров возмущения $m_+ = m_1 + m_2$, $m_- = m_2 - m_1$.

В работе [14] нас интересовали в основном окрестности нулей интегралов (4), которые располагаются при значениях частоты $\Delta\Omega_\pm$ порядка единицы, поэтому для упрощения выражений во всех знаменателях формулы (15) в [14] (там она фигурирует под номером (16)) были опущены члены вида $m\,p_s$. В настоящей работе мы планируем рассмотреть случай очень низких вторичных частот $\Delta\Omega_\pm \ll 1$ (см. следующий раздел), и потому отказываемся от этих упрощений и используем далее точные формулы.

Возвращаясь к системе (1), (11), положим в ней $x = x_s(t) + y_\varepsilon^{(2)}(t)$. Поскольку движение происходит вблизи невозмущенной сепаратрисы введем замены $\cos my \to 1$, $\sin my \approx m\,y_\varepsilon^{(2)}$ и перепишем выражение для возмущения (11) в виде

$$V(y,t) \approx -y_\varepsilon^{(2)} \left[\sin x_s + \sum_{k=1}^{2} \varepsilon_k m_k \sin\left(m_k x_s - \Omega_k t\right) \right]. \qquad (16)$$

Подставив (15) в (16), убеждаемся, что низкочастотные гармоники на сумме и разности частот (только они представляют интерес) могут проникнуть в возмущение двумя путями. Один из них реализуется при взаимодействии суммы в (15) с первичными гармониками возмущения в (16). Это приводит к появлению в возмущении гармоник как на сумме частот

$$\varepsilon_+ \cos\left(m_+ x_s - \Delta\Omega_+ t\right),\ \varepsilon_+ = -\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 m_1 m_2}{2} \left[\frac{m_2}{(m_1\,p_s - \Omega_1)^2} + \frac{m_1}{(m_2\,p_x - \Omega_2)^2} \right], \qquad (17)$$

так и на их разности

$$\varepsilon_- [\cos\left(m_- x_s - \Delta\Omega_- t\right),\ \varepsilon_- = -\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 m_1 m_2}{2} \left[\frac{m_1}{(m_2\,p_s - \Omega_2)^2} - \frac{m_2}{(m_1\,p_s - \Omega_1)^2} \right]. \qquad (18)$$

Уместно заметить, что формулы (17), (18) описывают вклады от взаимодействий гармоник возмущения друг с другом.

Второй путь – взаимодействие членов $\sim \varepsilon_1\varepsilon_2$ в (15) с порожденным основным резонансом членом $\sin x_s$ в (16). Здесь возникают по две вторичных гармоники возмущения на сумме частот

$$\frac{\varepsilon_+}{2} \left\{ \frac{\cos\left((m_+ - 1)x_s - \Delta\Omega_+ t\right)}{[(m_+ - 1)\,p_s - \Delta\Omega_+]^2} - \frac{\cos\left((m_+ + 1)x_s - \Delta\Omega_+ t|\right)}{[(m_+ + 1)\,p_s - \Delta\Omega_+]^2} \right\}, \qquad (19)$$

где значение ε_+ дается формулой (17), и на разности частот

$$\frac{\varepsilon_-}{2}\left\{\frac{\cos\left((m_- - 1)x_s - \Delta\Omega_- t\right)}{[(m_- - 1)\,p_s - \Delta\Omega_-]^2} - \frac{\cos\left((m_- - 1)x_s - \Delta\Omega_- t|\right)}{[(m_- - 1)\,p_s - \Delta\Omega_-]^2}\right\}, \qquad (20)$$

где значение ε_- дается формулой (18). Формулы (19), (20) описывают вклады от взаимодействия порожденных возмущением членов с основным резонансом.

Знание амплитуд вторичных гармоник в возмущении позволяет с помощью соотношения (3) записать их амплитуды в сепаратрисном отображении через интегралы Мельникова-Арнольда (4):

$$W_\pm = -\tilde{\varepsilon}_\pm\, a_\pm\, \Delta\Omega_\pm \left[A_{2m_\pm}(\Delta\Omega_\pm) + \frac{A_{2m_\pm - 2}(\Delta\Omega_\pm)}{2\,[(m_\pm - 1)\,p_s - \Delta\Omega_\pm]^2}\right.$$

$$\left. - \frac{A_{2m_\pm + 2}(\Delta\Omega_\pm)}{2\,[(m_\pm + 1)\,p_s - \Delta\Omega_\pm]^2}\right], \qquad (21)$$

$$\tilde{\varepsilon}_\pm = \frac{m_1\, m_2\, \varepsilon_1\, \varepsilon_2}{2}\left[\frac{m_1}{[m_2\, p_s - \Omega_2]^2} \pm \frac{m_2}{[m_1\, p_s - \Omega_1]^2}\right], \qquad (22)$$

где в нижних индексах верхние знаки относятся к сумме частот, нижние к разности и в зависимость (21) введены подгоночные эмпирические коэффициенты a_+ и a_-. Практика применения формулы (21) показала, что главная роль в ней принадлежит первому члену в квадратных скобках.

Как отмечалось выше, при выводе основных формул (21), (22) не делались никакие упрощающие предположения и они пригодны при любых значениях первичных частот [14]. Но в следующем разделе мы подробно рассмотрим случай очень низкочастотной вторичной гармоники (возникающей на сумме двух близких по модулю первичных частот), где такие упрощения оказываются уместны.

3 Случай близких первичных частот

Пусть возмущение в гамильтониане содержит две близкие по модулю и разные по знаку частоты $\Omega_1 \approx |\Omega_2| \gg 1$. Интерес здесь представляет только низкочастотная вторичная гармоника на сумме частот $\Delta\Omega_+ = \Omega_1 + \Omega_2 \ll 1$. Вторичная гармоника на разности частот оказывается много слабее (а при равных параметрах возмущения $m_1 = m_2$ она вообще не возникает, см. формулу (22)). По этой причине в нижних индексах формул (21), (22) мы будем впредь использовать только знак плюс.

Дальнейшие упрощения связаны со значениями интегралов Мельникова-Арнольда (4) в низкочастотном пределе $\Delta\Omega_+ \to 0$. Здесь существенным оказывается асимптотическое выражение для суммы в квадратной скобке, которое при четных значениях индекса $n = 2, 4, 6, \ldots$ записывается в виде

$$1 + f_n(\Delta\Omega_+) \to s_n(\Delta\Omega_+) = \frac{c_n}{\Delta\Omega_+^{n-2}}\,, \qquad \Delta\Omega_+ \to 0\,, \tag{23}$$

где для коэффициентов c_n в (23) с помощью рекуррентных соотношений (5) находим

$$c_2 = 1\,, \quad c_4 = -2\,, \quad c_6 = \frac{23}{2}\,, \quad c_8 = -132\,, \quad c_{10} = \frac{5067}{2} \quad \ldots \tag{24}$$

Используя последние соотношения, можно показать, что в низкочастотном пределе интегралы (4) перестают зависеть от частоты и стремятся к неким постоянным величинам K_n, значения которых определяются только индексом n

$$K_n = A_n(\Omega \to 0) = \frac{2^n}{(n-1)!}\,c_n\,. \tag{25}$$

Амплитуда сепаратрисного отображения в низкочастотном пределе оказывается, таким образом, линейной функцией частоты

$$\begin{aligned} W_+ &= -\tilde{\varepsilon}_+ \Delta\Omega_+ \left[K_{2m_+} + \frac{K_{2m_+-2}}{2\,[(m_+-1)\,p_s]^2} - \frac{K_{2m_++2}}{2\,[(m_++1)\,p_s]^2}\right] \\ &\approx -\tilde{\varepsilon}_+\,C_+\,\Delta\Omega_+\,. \end{aligned} \tag{26}$$

В работе [7] показано, что если амплитуда сепаратрисного отображения изменяется по линейному закону, то размер верхней части хаотического слоя вообще перестает зависеть от частоты. Численную проверку этих фактов мы проведем в следующем разделе, а сейчас уместно напомнить некоторые связанные с сепаратрисным отображением сведения.

Это отображение, впервые введенное в работе [15], описывает поведение движущейся вблизи сепаратрисы основного резонанса гамильтоновой системы и в случае маятника имеет вид

$$\overline{w} \;=\; w + \sum_l W_l\,\sin\Omega_l t_\pi\,, \quad \overline{t_\pi} = t_\pi + \ln\left(\frac{32}{|\overline{w}|}\right)\,, \quad l = 1, 2, \ldots\,, \tag{27}$$

где $w = p^2/2 + \cos x - 1$ – относительное отклонение от невозмущенной сепаратрисы по энергии (см. (8)) и t_π – моменты прохождения системой положения устойчивого равновесия $x = \pi$. Под знаком суммы должны быть перечислены все существенные для исследуемой части хаотического слоя гармоники, как первичные (явно входящие в возмущение (11)), так и вторичные (которых в (11) нет).

При несоизмеримых частотах Ω_l моменты t_π отсчитываются в шкале непрерывного времени. Если же частоты кратны некоторой опорной частоте Ω_0, то последнее соотношение в (27) можно (но не обязательно) переписать в виде

$$\overline{\psi_\pi} = \psi_\pi + \Omega_0 \, \ln\left(\frac{32}{|\overline{w}|}\right), \qquad \psi_\pi = \Omega_0 \, t_\pi \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi)\,. \tag{28}$$

Итерации сепаратрисного отображения, как известно, являются самым быстрым и экономным способом определения размеров отдельных частей хаотического слоя и это оправдывает усилия, направленные на его построение.

Нам предстоит сравнить между собой величины теоретически и численно найденных амплитуд сепаратрисного отображения и уместно кратко напомнить алгоритм численного построения этого отображения (подробности в [11]).

Прежде всего, на линии симметрии $x = \pi$ с высокой точностью отыскивается центральная гомоклинная точка p_{fb} как граница между вращением и колебанием фазы. Вблизи этой точки гарантированно в исследуемой части слоя выбирается узкий по импульсу интервал $x = \pi$, $p_{fb} < p < p_{fb} + \delta p$, из которого запускается случайная траектория. Эта траектория либо совершает предписанное число периодов движения, либо прерывается из-за перехода в другую часть слоя. В обоих случаях из того же интервала запускается новая случайная траектория, пока не наберется требуемое число периодов N. Для каждого периода определяется отклонение от невозмущенной сепаратрисы по энергии

$$w = 32\,\exp\left(-T\right), \tag{29}$$

где T – интервал времени между двумя последовательными прохождениями положения устойчивого равновесия $x = \pi$. Определяя изменение $\delta\, w = \overline{w} - w$ энергии для каждой пары соседних периодов и приписывая его к общему для этой пары моменту времени t_π можно построить сепаратрисное отображение (27) $(\delta\, w)_k$, $t_{\pi,k}$, $k = 1, 2, ..., N-1$. Мы будем для определенности всегда исследовать верхнюю часть слоя. Именно внешние части слоя (верхняя и нижняя) представляют основной интерес, поскольку участвуют в перекрытии соседних резонансов и возникновении глобального хаоса.

4 Сравнение результатов теории и численного эксперимента

Как отмечалось выше, исследование окрестностей нулей интегралов Мельникова-Арнольда выполнено в [14] и в настоящей работе мы ими интересоваться не будем. По этой причине в этом разделе рассматривается возмущение (11) с фиксированными параметрами

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.01\,, \qquad m_1 = 1, \qquad m_2 = 1\,, \qquad \Omega_1 = 16.0 \tag{30}$$

при различных значениях первичной частоты Ω_2. Отметим, что интегралы Мельникова-Арнольда (4) при таком выборе возмущения не имеют нулей во всем интервале частот $0 < \Omega < \infty$.

Чтобы работать с величинами порядка единицы, будем использовать далее так называемые приведенные значения амплитуды сепаратрисного отображения и энергетического размера верхней части хаотического слоя вида

$$W^* = \frac{10^3\, W}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\ , \qquad w^*_{tp} = \frac{10^3\, W}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\,. \tag{31}$$

Начнем с симметричного случая равных по модулю частот

$$\Omega_1 = 16.0\,, \qquad \Omega_2 = -16.0\,. \tag{32}$$

Вычисленная по формулам Чирикова (3)-(6) теоретическая амплитуда сепаратрисного отображения и полуширина слоя оказались равны $W^* = 3.92\cdot 10^{-2}$ и $w^*_{tp} \approx 0.65$ соответственно. Численное построение отображения по формулам (27), (28) и последующие его итерации подтверждают эти цифры и картинка имеет вид синусоиды с частотой $\Omega = 16.0$.

Казалось бы, небольшое изменение одной из частот не должно резко изменить полученный выше результат. Для проверки этого предположения внесем в возмущение (32) слабую несимметрию

$$\Omega_1 = 16.0\,, \qquad \Omega_2 = -15.9\,, \qquad \Delta\Omega_+ = 0.1\,. \tag{33}$$

На рис.1 представлены данные численного счета. Видно, что сепаратисное отображение осталось одночастотным, но его амплитуда возросла примерно в 30 раз $W^* = 1.20$, и, что самое важное, оно с высокой частоты $\Omega = 16.0$ перестроилось на очень низкую частоту вторичной гармоники $\Delta\Omega_+ = 0.1$. Размер верхней части слоя вырос при этом более чем в два раза $w^*_{tp} \approx 1.55$. Заметим попутно, что суммарный вклад в амплитуду W первичных гармоник возмущения составил менее двух процентов. Мы вновь сталкиваемся с уже знакомой ситуацией, когда формирование хаоса в верхней части слоя полностью определяется слабой, но низкочастотной вторичной гармоникой [11,12].

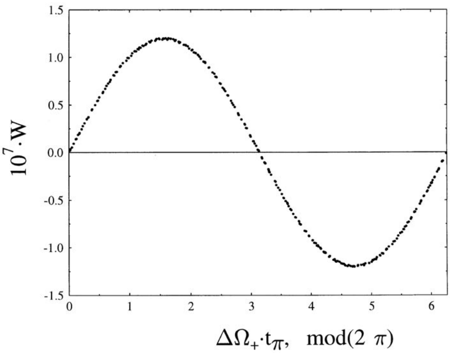

Рис. 1: Численное построение сепаратрисного отображения (27), (28) для системы (1), (11) с частотами $\Omega_1 = 16.0$, $\Omega_2 = -15.9$, $\Delta\Omega_+ = 0.1$. Амплитуда равна $W = 1.20 \cdot 10^{-7}$.

В работе [7] исследовался низкочастотный предел $\Omega \to 0$ маятника для симметричного возмущения и там было показано существование областей, в которых амплитуда сепаратрисного отображения растет линейно с частотой, а размер хаотического слоя от нее не зависит. Но в [7] эти низкие частоты являлись первичными и явно входили в гамильтониан (сравнительно редкий для практики случай), а вторичные гармоники вообще не возникали. Рассматриваемая в настоящей работе ситуация качественно иная: в возмущении имеются как высокие первичные, так и низкие вторичные частоты. Интересно выяснить, какие зависимости обнаружатся при высоких первичных частотах, если их сумму устремить к нулю.

На рис.2,3 показано поведение приведенных (см. формулы (31)) величин амплитуды сепаратрисного отображения и размера верхней части хаотического слоя как для верхних, так и для нижних вторичных гармоник (нижние индексы в W^*_+ здесь опущены). Эти рисунки демонстрируют

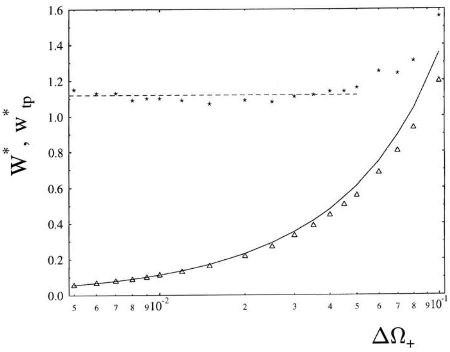

Рис. 2: Система (1),(11) с частотами $\Omega_1 = 16.0$, $\Omega_2 =$var, $\Delta\Omega_+ > 0$. Приведенная амплитуда сепаратрисного отображения W^*: треугольники - численный счет, сплошная линия построена по формуле (21) при $a_+ = 0.4$. Приведенный размер верхней части хаотического слоя w^*_{tp}: звездочки - численная итерация сепаратрисного отображения (27), пунктирным отрезком отмечена область w^*_{tp} ≈const.

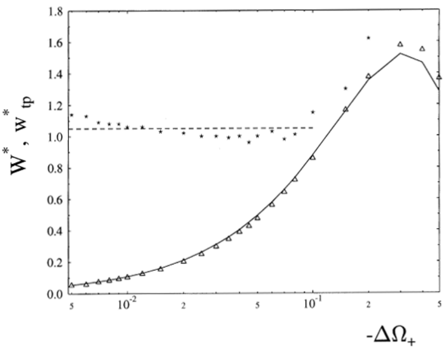

Рис. 3: Система (1),(11) с частотами $\Omega_1 = 16.0$, $\Omega_2 =$var, $\Delta\Omega_+ < 0$, остальное как на рис.2.

неплохое качественное согласие теории и численного счета. Мы убеждаемся в том, что при $\Delta\Omega_+ \to 0$ для вторичных гармоник имеют место те же закономерности, что и для низкочастотных первичных гармоник при симметричном возмущении – амплитуда сепаратрисного отображения растет линейно с частотой, а размер слоя практически от нее не зависит. Вместе с тем, обращает на себя внимание тот факт, что предсказанная теорией независимость размера хаотического слоя от частоты выполняется лишь приближенно и заметно нарушается на краях указанного интервала. Рост размера слоя на правом краю этого интервала естественно связан с выходом из области низкочастотной асимптотики. Отклонение на левом краю можно объяснить тем, что вклад вторичной гармоники в амплитуду сепаратрисного отображения становится соизмерим с вкладом от первичной частоты и само отображение перестает быть одночастотным.

5 Заключение

В описанных выше исследованиях по выяснению деталей формирования динамического хаоса в гамильтоновых системах широко использована модель маятника, находящегося под действием различных гармонических возмущений. Эта модель, как и ее дискретный аналог – стандартное отображение Чирикова, является весьма популярной и часто применяется в нелинейной динамике.

Наиболее подробно рассмотрен случай, когда возмущение представлено в гамильтониане двумя гармониками с различными частотами. Приведены теоретические и экспериментальные факты, которые заставляют признать, что возникающие на сумме и разности этих частот вторичные гармоники - реальные объекты. При определенных условиях именно они решающим образом влияют на образование хаотической компоненты движения.

Вместе с тем, представленные здесь аналитические соотношения носят приближенный характер и для согласия с численным экспериментом нуждаются в использовании поправочных эмпирических коэффициентов (см. формулу (21)), природу которых еще предстоит прояснить. Построение полноценной теории гамильтоновых систем требует, по нашему мнению, дальнейшего экспериментального и теоретического исследования участия вторичных гармоник в формировании динамического хаоса.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке комплексной научной программы РАН "Математические методы в нелинейной динамике".

Список литературы

[1] *B.V. Chirikov.* Phys. Reports **52**, 263 (1979).

[2] *A. Lichtenberg and M. Lieberman. Regular and Chaotic Dynamics*, Springer, Berlin, (1992).

[3] *Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев.* Введение в нелинейную физику, Наука, Москва (1988).

[4] *S. Bullett.* Commun. Math. Phys., **107**, 241 (1986).

[5] *В.В. Вечеславов.* Динамика пилообразного отображения: 1. Новые численные результаты, Препринт ИЯФ 2000-27, Новосибирск, 2000; E-print archive nlin.CD/0005048.

[6] *В.В. Вечеславов, Б.В. Чириков.* ЖЭТФ, **120**, вып.3, 740 (2001).

[7] *В.В. Вечеславов.* ЖТФ, **74**, вып.5 (2004) с.1.

[8] *В.В. Вечеславов.* ЖТФ **58**, вып.1, 20 (1988).

[9] *В.В. Вечеславов.* ЖТФ **72**, вып.2, 20 (2002).

[10] *В.В. Вечеславов.* ЖЭТФ, **125**, вып.2, 399 (2004).

[11] *В.В. Вечеславов.* ЖЭТФ, **109**, вып.6, 2208 (1996).

[12] *В.В. Вечеславов.* ПЖЭТФ, **63**, вып.12, 989 (1996).

[13] *В.В. Вечеславов.* ЖТФ, **73**, вып.9, 1 (2003).

[14] *В.В. Вечеславов.* ЖЭТФ, **126**, вып.2, 1 (2004).

[15] *Г.М. Заславский, Н.Н. Филоненко.* ЖЭТФ **54**, 1590 (1965).

В.В. Вечеславов

Вклад вторичных гармоник возмущения в сепаратрисное отображение гамильтоновой системы

V.V. Vecheslavov

Contribution of the secondary harmonics of perturbation in the separatrix mep of Hamiltonian system

ИЯФ 2004-38

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев
Работа поступила 9.06.2004 г.

Сдано в набор 15.06.2004 г.
Подписано в печать 16.06.2004 г.
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1.0 печ.л., 0.8 уч.-изд.л.
Тираж 95 экз. Бесплатно. Заказ № 38

Обработано на IBM PC и отпечатано на
ротапринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.