

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им. Г.И.Будкера СО РАН

Ю.А. Цидулко

ДВУХМЕРНАЯ ДИНАМИКА
ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ
С КОНЕЧНЫМ β

ИЯФ 2003-67

НОВОСИБИРСК
2003

Двухмерная динамика двухкомпонентной плазмы с конечным β

Ю.А. Цидулко

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера
630090 Новосибирск, СО РАН

Аннотация

В работе аналитически и численно исследуется бесстолкновительная двухмерная динамика двухкомпонентной плазмы, в которой давление определяется быстрыми ионами, а инерция — ионами холодной компоненты. Ларморовский радиус быстрых ионов сравним с поперечным размером задачи. Показано, что конечное β может приводить к быстрой само-локализации пространственного распределения быстрых ионов в результате взаимодействия с холодной плазмой.

Two-dimensional dynamics of two-component plasmas with finite β

Yu.A. Tsidulko

Budker Institute for Nuclear Physics
630090 Novosibirsk, Russia

Collisionless two-dimensional dynamics of two-component plasmas, where fast ions determine pressure and cold component ions determine inertia, is studied both analytically and numerically. Larmor radius of the fast ions is of order of characteristic space scale of the problem. It is shown, that finite β can result fast self-localization of space distribution of the fast ions due to interaction with the cold component.

© *Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера СО РАН*

1 Введение

Особый интерес к исследованию динамики двухкомпонентной плазмы вызван результатами экспериментов [1] на газодинамической ловушке (ГДЛ) [2], в которых быстрые ионы создавали значительное давление, сравнимое с давлением магнитного поля. Было обнаружено, что за время, существенно меньшее, чем время торможения, быстрые ионы собираются в приосевой области. Эти результаты были неожиданными по следующим причинам. ГДЛ с хорошей степенью точности аксиально-симметричная ловушка, поэтому сохранение обобщенного импульса, сопряженного с азимутальным углом не позволяет смещаться ведущему центру иона без столкновений. Смещение ведущего центра в результате неоднородного торможения рассматривалось, например, в работе [3], однако оно происходит за время, в течение которого ион теряет большую часть энергии, что не согласуется обсуждаемыми результатами. Нарушение аксиальной симметрии может быть результатом небольшой асимметрии атомарной инжекции или развитием какой-либо неустойчивости. На первый взгляд это может приводить лишь к “разбрасыванию” быстрых ионов на большую поперечную площадь, а не к локализации. Как показывает настоящая работа, именно последнее соображение является неверным.

Простые оценки показывают, что для динамики двухкомпонентной плазмы в ГДЛ могут быть существенны трехмерные эффекты: резонансы между баунс колебаниями и азимутальным дрейфом быстрых ионов, баллонные возмущения вызываемые продольными токами. Однако, двухмерная задача сама по себе оказалась содержательной. Ей и посвящена настоящая работа.

Постановка задачи следующая: холодная бесстолкновительная плазма содержит небольшую примесь быстрых ионов имеющих ларморовский радиус, сравнимый с поперечными размерами за-

дачи. Быстрые ионы создают давление P_f , такое что отношение $\beta = P_f 8\pi / B^2$ мало (здесь B — напряженность магнитного поля) и мы будем опускать члены $\sim \beta^2$ при наличии членов $\sim \beta$. Все величины зависят только от координат, поперечных магнитному полю. Предполагаем, что характерное время рассматриваемых процессов много больше, чем период циклотронного вращения ионов и используем адиабатическое сохранение магнитного момента быстрых ионов $\mathcal{M} \simeq \epsilon_{f\perp} / B$, где $\epsilon_{f\perp}$ — поперечная энергия быстрого иона. Наконец, мы будем предполагать, что все быстрые ионы обладают одинаковым \mathcal{M} . Последнее предположение не является принципиальным с точки зрения рассматриваемых процессов, однако оно упрощает рассмотрение, позволяя из кинетической задачи сделать гидродинамическую.

С энергетической точки зрения рассматриваемый в настоящей работе механизм локализации пространственного распределения быстрых ионов заключается в том, что менее компактное пространственное распределение быстрых ионов обладает большей энергией и, переходя в более компактное распределение, отдает энергию $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -турбулентности плазмы.

Сравним энергию состояний с различным пространственным распределением быстрых ионов при отсутствии электрических полей, предполагая фиксированными число быстрых ионов $N_f = \text{const}$ и полный магнитный поток $\Phi = \int B ds = \text{const}$. (Для того, чтобы не рассматривать обмен энергией с соленоидом, можно считать, что плазма помещена внутрь сверхпроводящего цилиндра). Магнитное поле B есть сумма однородного вакуумного поля B_0 и возмущения магнитного поля $\delta B = -4\pi \mathcal{M} \overline{n_F}$, создаваемого быстрыми ионами. Здесь n_F — плотность ведущих центров быстрых ионов, а черта сверху означает усреднение по площади ларморовского круга (в возмущение дают вклад ведущие центры отстоящие от заданной точки на расстояние меньше ларморовского радиуса). С учетом этого, энергия магнитного поля равна

$$\mathcal{E}_B = \int ds \frac{(B_0 + \delta B)^2}{8\pi} = \text{const} + \int ds \frac{(\delta B)^2}{8\pi} = \text{const} + 2\pi \mathcal{M}^2 \int ds (\overline{n_F})^2$$

(линейный по δB член является константой в силу фиксированности полного потока Φ). Суммарная энергия быстрых ионов равна

$$\mathcal{E}_f = \int ds \mathcal{M} n_F (\overline{B_0 + \delta B}) = const - 4\pi \mathcal{M}^2 \int ds n_F \overline{n_F}$$

(учитываем, что магнитный момент иона определяется магнитным полем, усредненным по площади ларморовской окружности). Линейный по \mathcal{M} член заменен константой вследствие фиксированности \mathcal{M} и $N_f = \int n_F ds$.

Конечно, при наличии возмущения траектории быстрых ионов отличаются от окружности в вакуумном поле. Но в силу малости β это отличие приводит лишь к малой поправке в выражениях $\delta B = -4\pi \mathcal{M} \overline{n_F} (1 + \mathcal{O}[\beta])$ и $\epsilon_{f\perp} = \mathcal{M} B_0 + \mathcal{M} \delta B (1 + \mathcal{O}[\beta])$ и, соответственно, дает лишь поправку $\sim \beta^3$ в выражениях для энергии.

Очевидно, что оператор усреднения по площади ларморовской окружности

$$\overline{a}[\mathbf{r}] = \frac{1}{\pi \rho^2} \int ds_1 a[\mathbf{r}_1] \sigma[\rho - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|] \quad (1)$$

(где ρ – ларморовский радиус и $\sigma[x]^1$ – функция-ступенька, $\sigma = 0$ при $x < 0$ и $\sigma = 1$ при $x \geq 0$) является самосопряженным оператором. Поэтому $\int n_F \overline{n_F} ds = \int (\overline{n_F})^2 ds$. Таким образом, суммарная энергия равна

$$\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_B + \mathcal{E}_f = const - 2\pi \mathcal{M}^2 \int ds (\overline{n_F})^2, \quad (2)$$

и мы видим, что состояние с более компактным пространственным распределением быстрых ионов обладает меньшей энергией. Мы будем называть энергию \mathcal{E}_p “потенциальной”, поскольку она одно-

¹Здесь и ниже для однозначности прочтения формул мы используем квадратные скобки в формулах только для обозначения списка переменных функций.

значно определяется пространственным распределением ведущих центров².

Важно отличать бесстолкновительную задачу с сохраняющимся \mathcal{M} от столкновительного случая, в котором изменение свободной энергии при фиксированной температуре быстрых ионов определяется только изменением энергии магнитного поля, поэтому состояние с более компактным пространственным распределением быстрых ионов обладает большей свободной энергией. Иными словами, диффузионное расплывание пространственного распределения, вызванное столкновениями, сопровождается отдачей энергии термостату.

В нашей бесстолкновительной задаче, переход к более компактному пространственному распределению возможен в результате передачи части “потенциальной” энергии в кинетическую энергию $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ движения плазмы. Механизм взаимодействия быстрой компоненты с холодной следующий. Неоднородное распределение быстрых ионов создает неоднородное возмущение магнитного поля δB , что приводит к дрейфу быстрых ионов (дрейф холодных частиц из-за $\nabla \delta B$ пренебрежимо мал). Для выполнения квазинейтральности, возникает такое электрическое поле $\mathbf{E}[\mathbf{r}, t]$, что дивергенция поляризационного тока компенсирует изменение плотности быстрых ионов. Поляризационный ток возникает в результате ускорения плазмы, поэтому $\mathbf{E}[\mathbf{r}, t]$ определяется еще и распределением плотности и скорости холодных ионов. Электрическое поле в свою очередь создают дополнительный $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ дрейф быстрых ионов (отличный от дрейфа холодных из-за усреднения по орбите).

Отметим, что в двухмерной задаче с сохраняющимся \mathcal{M} движение ведущих центров является несжимаемым в силу теоремы Лиувилля, т.е. сохраняются любые интегралы вида $\int \mathcal{F}[n_F] ds$, где \mathcal{F} – произвольная функция. Этот факт сильно ограничивает воз-

²Эта классификация достаточно условна. В рамках Гамильтонова формализма, используемого ниже, одна из координат ведущего центра является обобщенным импульсом и в этом смысле \mathcal{E}_p зависит как от координат, так и от импульсов.

возможность локализации пространственного распределения быстрых ионов в двухмерной задаче. Тем не менее, как это иллюстрируется рисунком 1, возможен существенный выигрыш в “потенциальной” энергии, если начальное распределение далеко от максимально компактного.

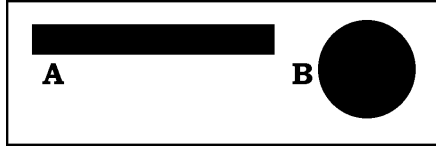


Рис. 1: Прямоугольник А и круг В одинаковой площади заполнены одинаковой плотностью ведущих центров, но им соответствуют существенно различные значения “потенциальной” энергии: $\mathcal{E}_p A = 0.6 \mathcal{E}_p B < 0$ (при усреднении использован ларморовский радиус равный радиусу круга В).

Дальнейший план изложения следующий. Сначала мы выводим систему интегро-дифференциальных уравнений, описывающих двухмерную динамику двухкомпонентной плазмы. Система состоит из трех уравнений, имеющих простой смысл: уравнения непрерывности для плотностей холодной и быстрой компонент и уравнение $\text{div } \mathbf{j} = 0$, обеспечивающее квазинейтральность. Вывод содержит достаточно традиционные элементы, такие, как переход к Гамильтониану в переменных, соответствующих координатам ведущего центра (гиро-кинетический подход [4, 5]), использование канонической теории возмущений, учет эффекта фазового размешивания для уравнения Власова, получение замыкающего уравнения из условия квазинейтральности. Тем не менее, для ясности изложения в разделах 2,3 и 4 мы кратко, но последовательно описываем все используемые процедуры.

В разделе 5 обсуждаются граничные условия. В разделе 6 выводятся уравнения для законов сохранения, которым удовлетворяют решения этой системы.

В разделе 7 рассматриваются возможные равновесия, а в разделе 8 анализируется устойчивость аксиально-симметричных рав-

новесий с неподвижной холодной плазмой. Доказывается устойчивость монотонного радиального профиля плотности ведущих центров (что довольно очевидно из наглядных соображений). Для немонотонных профилей демонстрируется возможность неустойчивости, обусловленной неоднородностью диамагнитного дрейфа. Неустойчивое возмущение должно иметь характерный размер меньше или порядка ларморовского радиуса.

В разделе 9 приводятся результаты численного моделирования. В первой его части рассматривается предел бесконечной плотности холодной плазмы и демонстрируется аналогия с двухмерной Эйлеровой гидродинамикой. Во второй части раздела обсуждаются примеры эволюции пространственного распределения ведущих центров с переходом к компактному распределению и передачей энергии $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -турбулентности.

В заключении обсуждается возможность обобщения задачи на случай произвольной функции распределения.

В приложении I приводятся примеры аналитических решений линеаризованных уравнений описывающих неустойчивость в плоской геометрии с немонотонным профилем.

В приложении II обсуждается возможность применения двухмерной постановки к задаче двухкомпонентной плазмы в ловушке, обобщаются уравнения с учетом источников и диссипативных процессов в расширителях и рассматривается пример численного моделирования, демонстрирующий ускорение локализации в результате диссипации в расширителе.

В приложении III приводятся уравнения сохранения с учетом лимитера, источников и диссипативных членов.

2 Гамильтониан в терминах координат ведущего центра

Мы стартуем с Гамильтониана $H[p_x, p_y; x, y; t] = (\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2 / (2m_f) + e\varphi$, где m_f – масса быстрого иона, e – заряд ионов (считаем все ионы однозарядными), c – скорость

света, $\varphi[x, y, t]$ – электростатический потенциал и \mathbf{A} – векторный потенциал, имеющий компоненты $A_x = -B_0 y + \delta A_x[x, y, t]$, $A_y = \delta A_y[x, y, t]$, $A_z = 0$, удовлетворяющие $\partial_x \delta A_y - \partial_y \delta A_x = \delta B$. Будем считать малыми первого порядка величины

$$\frac{\delta B}{B_0} \sim \epsilon, \quad \frac{e\varphi}{H} \sim \epsilon \quad (3)$$

и малыми второго порядка величины

$$\frac{\partial_t \delta B}{\Omega_{f0} B_0} \sim \epsilon^2, \quad \frac{e \partial_t \varphi}{\Omega_{f0} H} \sim \epsilon^2, \quad (4)$$

где $\Omega_{f0} = eB_0/(m_f c)$ – вакуумная циклотронная частота быстрых ионов.

Используя производящую функцию

$$\begin{aligned} \Phi_1 [\tilde{\mu}, \tilde{P}_X; x, y] &= \tilde{\mu} \left(\Theta_\mu - \frac{1}{2} \sin [2\Theta_\mu] \right) + \tilde{P}_X x, \\ \Theta_\mu [\tilde{\mu}, \tilde{P}_X, y] &\equiv \arccos \left[\frac{m_f \Omega_{f0} y + \tilde{P}_X}{\sqrt{2\tilde{\mu} m_f \Omega_{f0}}} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

получаем канонические переменные

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= \frac{(p_x + m_f \Omega_{f0} y)^2 + p_y^2}{2m_f \Omega_{f0}}, \quad \tilde{P}_X = p_x, \\ \tilde{\theta}_\mu &= \Theta_\mu [\tilde{\mu}, p_x, y], \quad \tilde{X} = x - \tilde{\rho} \sin \tilde{\theta}_\mu, \end{aligned} \quad (6)$$

соответствующие координатам ведущего центра в вакуумном поле $\tilde{\mathbf{R}}$ с компонентами \tilde{X} и $\tilde{Y} \equiv -\tilde{P}_X/(m_f \Omega_{f0})$, т.е. $\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{R}} + \tilde{\rho}$, где $\tilde{\rho} \equiv \tilde{\rho} \{\sin \tilde{\theta}_\mu, \cos \tilde{\theta}_\mu\}$ и $\tilde{\rho} = \sqrt{2\tilde{\mu}/(m_f \Omega_{f0})}$ – ларморовский радиус. Гамильтониан в этих переменных имеет вид $H = \tilde{\mu} \Omega_{f0} + H_1$, где

$$H_1 = \Omega_0 (\mathbf{b} \times \tilde{\rho}) \cdot \frac{e}{c} \delta \mathbf{A} [\tilde{\mathbf{R}} + \tilde{\rho}] + e\varphi [\tilde{\mathbf{R}} + \tilde{\rho}] + \mathcal{O} [\epsilon^2] \quad (7)$$

и $\mathbf{b} = \{0, 0, 1\}$ – единичный вектор в направлении магнитного поля. Функция H_1 , включая отброшенные члены $\sim \epsilon^2$, является периодической функцией $\tilde{\theta}_\mu$.

Далее, определяя усреднение по ларморовской фазе вращения

$$\langle a \rangle_{\tilde{\theta}_\mu} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a d\tilde{\theta}_\mu, \quad (8)$$

следуем канонической теории возмущений [6] и используем производящую функцию $\Phi_2 [\mu, P_X; \tilde{\theta}_\mu, \tilde{X}] = \mu\tilde{\theta}_\mu + P_X\tilde{X} + \Phi_3$, где

$$\Phi_3 = \frac{1}{\Omega_{f0}} \int_{-\pi}^{\tilde{\theta}_\mu} \left(\langle H_1 \rangle_{\tilde{\theta}_\mu} - H_1 \right) d\tilde{\theta}_\mu, \quad (9)$$

периодическая функция ларморовской фазы $\tilde{\theta}_\mu$. Получаем преобразование

$$\begin{aligned} \mu &= \tilde{\mu} + \frac{1}{\Omega_{f0}} \left(H_1 - \langle H_1 \rangle_{\tilde{\theta}_\mu} \right), & P_X &= \tilde{P}_X - \partial_{\tilde{X}} \Phi_3 = \tilde{P}_X + \mathcal{O}[\epsilon], \\ \theta_\mu &= \tilde{\theta}_\mu + \partial_\mu \Phi_3 = \tilde{\theta}_\mu + \mathcal{O}[\epsilon], & X &= \tilde{X} + \partial_{P_X} \Phi_3 = \tilde{X} + \mathcal{O}[\epsilon], \end{aligned} \quad (10)$$

к переменным, соответствующим координатам ведущего центра $\mathbf{R} = \{X, Y\} = \{X, -P_X/(m_f\Omega_{f0})\}$ с учетом возмущения.

Гамильтониан в этих переменных есть $\mathcal{H}[\mu, P_X; \theta_\mu, X; t] = \mu\Omega_{f0} + \langle H_1 \rangle_{\tilde{\theta}_\mu} + \partial_t \Phi_3$, где последний член $\sim \epsilon^2$ в силу условия (4). Будем обозначать угловыми скобками без индекса усреднение полей по невозмущенной орбите,

$$\langle a \rangle = \frac{1}{2\pi\rho} \int a[\mathbf{r}] \delta[\rho - |\mathbf{R} - \mathbf{r}|] dx dy. \quad (11)$$

Тогда, опуская члены $\sim \epsilon^2$, можем записать Гамильтониан в виде

$$\mathcal{H}[\mu, P_X; \theta_\mu, X; t] = \mu\overline{\Omega}_f + e \langle \varphi \rangle, \quad (12)$$

где $\Omega_f = eB/(m_f c)$ — циклотронная частота с учетом возмущений магнитного поля, а черта сверху означает усреднение (1) по площади ларморовской орбиты. Усреднение по площади возникает здесь

вследствие того, что среднее $\langle H_1 \rangle_{\tilde{\theta}_\mu}$, согласно (7), содержит циркуляцию возмущения векторного потенциала равного интегралу от возмущения магнитного поля по площади.

Уравнения, соответствующие Гамильтониану (12), сохраняют адиабатический инвариант μ . Фаза θ_μ , быстро растет во времени, однако малые члены в (10) и отброшенные члены в (12), являясь периодическими функциями θ_μ , остаются ограниченными и малыми.

Магнитный момент \mathcal{M} , использованный во введении, в соответствии с (12), равен

$$\mathcal{M} = e\mu/(m_f c) = (\mathcal{H} - e \langle \varphi \rangle) / \overline{B}. \quad (13)$$

3 Уравнение Власова, фазовое размешивание

Уравнение Власова для функции распределения быстрых ионов

$$\partial_t f + \{H, f\}_{p_x, x} + \{H, f\}_{p_y, y} = 0,$$

(где $\{a, b\}_{\alpha, \beta} \equiv \partial_\alpha a \partial_\beta b - \partial_\beta a \partial_\alpha b$ — скобки Пуассона) в переменных ведущего центра $[\mu, P_X; \theta_\mu, X]$ приобретает вид

$$\partial_t f + \overline{\Omega_f} \partial_{\theta_\mu} f + \{\mathcal{H}, f\}_{P_X, X} = 0. \quad (14)$$

Представим функцию распределения в виде суперпозиции $f = F + \delta f$ функции, независимой от фазы ларморовского вращения $F[\mu, P_X; X] = \langle f \rangle$, и поправки δf , зависящей от всех переменных. Тогда уравнение для F есть $\partial_t F + \{\mathcal{H}, F\}_{P_X, X} = 0$, а уравнение для поправки есть $\partial_t \delta f + \overline{\Omega_f} \partial_{\theta_\mu} \delta f = 0$. В следствие эффекта фазового размешивания [7], решение последнего уравнения быстро затухает при учете даже очень слабых столкновений.

Полагая, что все быстрые ионы обладают одинаковым адиабатическим инвариантом μ_0 , записываем функцию распределения в форме $F = n_F \delta[\mu - \mu_0] / (2\pi m_f \Omega_f)$. Тогда уравнение Власова приобретает вид

$$\partial_t n_F + \left\{ \frac{\mu_0 \overline{\Omega}_f + e \langle \varphi \rangle}{m_f \Omega_{f0}}, n_F \right\}_{X,Y} = 0, \quad (15)$$

являясь формой уравнения непрерывности для плотности ведущих центров $n_F[X, Y, t]$.

Плотность быстрых ионов n_f (прописной индекс вместо заглавного, используемого для плотности ведущих центров), в соответствии с преобразованиями (6) и (10), выражается через плотность ведущих центров, как

$$n_f \equiv \int f dp_x dp_y = \langle n_F \rangle (1 + \mathcal{O}[\epsilon]). \quad (16)$$

Дивергенция тока быстрых ионов $\mathbf{j}_f = e \int (\mathbf{p}/m_f) f dp_x dp_y$, в соответствии с уравнением (15), равна

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_f = e \int \partial_t f dp_x dp_y = e \langle \partial_t n_F \rangle. \quad (17)$$

Наконец, нетрудно убедиться, что возмущение магнитного поля, создаваемое быстрыми ионами, записанное в форме

$$\delta B_f = -B_0 \frac{\overline{n_F}}{n_B} + B_0 \mathcal{O}[\epsilon^2], \quad n_B \equiv B_0^2 / (4\pi \mu_0 \Omega_{f0}), \quad (18)$$

является решением уравнения $\nabla \times (\mathbf{b} \delta B_f) = (4\pi/c) \mathbf{j}_f$.

4 Система уравнений для двухкомпонентной плазмы

Уравнение (15) для плотности ведущих центров быстрых ионов дополняем гидродинамикой для холодных компонент и уравнением квазинейтральности

$$\begin{aligned} m_i \frac{d_i v_i}{dt} &= e \mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}, \quad 0 = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}, \\ \partial_t n_i + \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}_i) &= 0, \quad n_e = n_i + n_f, \end{aligned} \quad (19)$$

а также уравнениями Максвелла, записанными в виде:
 $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\partial_t\mathbf{A} - \nabla\varphi$, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ и

$$\frac{4\pi}{c} \{en_i\mathbf{v}_i - en_e\mathbf{v}_e + \mathbf{j}_f\} = \nabla \times \mathbf{B}. \quad (20)$$

Здесь m_i — масса холодных ионов, n_e и n_i — плотности электронов и холодных ионов, \mathbf{v}_e и \mathbf{v}_i — скорости электронов и холодных ионов, и $d_i/dt \equiv \partial_t + (\mathbf{v}_i \cdot \nabla)$.

Для того, чтобы выделить члены, которыми можно пренебречь, удобно перейти к естественным для данной задачи безразмерным переменным. Во-первых, определяем переменную времени $\tau = t\Omega_{f0}$, так что производные $\partial_\tau a \sim \epsilon a$ содержат малость первого порядка.

Во-вторых, используя ларморовский радиус ρ в качестве единицы расстояния, переопределяем обозначения

$$\frac{X}{\rho} \rightarrow x, \quad \frac{Y}{\rho} = -\frac{\rho P_X}{\mu_0} \rightarrow y, \quad \frac{x}{\rho} \rightarrow x, \quad \frac{y}{\rho} \rightarrow y, \quad \frac{\mathbf{v}_{e,i}}{\rho\Omega_{f0}} \rightarrow \mathbf{v}_{e,i}, \quad (21)$$

так что характерные размеры задачи становятся порядка единицы. Используемый ниже оператор ∇ означает дифференцирование по безразмерным координатам, а используемые усреднения $\langle a \rangle$ и \bar{a} означают усреднение по окружности и площади круга единичного радиуса, соответственно. Обратим внимание, что нам нет необходимости различать заглавные и прописные обозначения для координат, понимая, что каждое усреднение ($\langle a \rangle$ и \bar{a}) производит отображение из пространства обычных координат в пространство координат ведущего центра или назад.

В-третьих, используя величину $n_B = B_0^2/(4\pi\mu_0\Omega_{f0})$ в качестве единицы плотности и μ_0 в качестве единицы действия, определяем величины

$$\psi = \frac{e\varphi}{\mu_0\Omega_{f0}}, \quad \eta = \frac{n_F}{n_B}, \quad M = \frac{m_i n_i}{m_f n_B}. \quad (22)$$

Согласно (3), безразмерные потенциал ψ и плотность ведущих центров η — величины первого порядка малости. Отметим, что, в со-

ответствии с (18), усредненное η определяет относительное возмущение магнитного поля, создаваемое быстрыми ионами: $\delta B_f/B_0 = -\bar{\eta}$.

Безразмерную плотности холодной плазмы M можно также оценить, как $M \sim v_f^2/v_A^2$, где $v_f = \rho\Omega_{f0}$ — скорость быстрых ионов и v_A — альфвеновская скорость. В отличие от плотности быстрых ионов, считаем M величиной порядка единицы, поскольку плотность холодных ионов много больше быстрых. При этом предполагаем выполненным условие $M \ll 1/\epsilon$, что позволяет пренебречь возмущением магнитного поля, созданного поляризационным током холодной плазмы. Наконец, переопределяем обозначение плотности тока $\mathbf{j}/(e\rho\Omega_{f0}n_B) \rightarrow \mathbf{j}$.

Согласно определенным выше оценкам, производна $\partial_t \mathbf{A}/c \sim \frac{\mu_0\Omega_{f0}}{e\rho} \partial_\tau \eta$ в выражении для электрического поля является малой величиной по сравнению с $\nabla\varphi$. Поэтому, исходя из (19), безразмерная поперечная скорость электронов может быть записана как

$$\mathbf{v}_{e\perp} = \mathbf{b} \times \nabla\psi + \mathcal{O}[\epsilon^2] \quad (23)$$

и является величиной первого порядка малости, а разность поперечных скоростей холодных ионов и электронов

$$\mathbf{v}_{i\perp} - \mathbf{v}_{e\perp} = \frac{m_i}{m_f} \mathbf{b} \times (\partial_\tau \mathbf{v}_{e\perp} + (\mathbf{v}_{e\perp} \cdot \nabla) \mathbf{v}_{e\perp}) + \mathcal{O}[\epsilon^3] \quad (24)$$

является величиной второго порядка малости.

Теперь мы можем записать в безразмерном виде уравнение непрерывности для холодной плазмы³ $\partial_\tau M + \{\psi, M\}_{x,y} = 0$ и уравнение Власова

$$\partial_\tau \eta + \left\{ \left(\langle \psi \rangle + \frac{\bar{\delta B}}{B_0} \right), \eta \right\}_{x,y} = 0. \quad (25)$$

³Очевидно, что $\{f, g\}_{x,y} = \nabla \cdot (f \nabla g \times \mathbf{b}) = (\nabla f \times \nabla g) \cdot \mathbf{b}$ для любых функций $f[x, y]$ и $g[x, y]$. Здесь и далее для краткости мы используем скобки Пуассона при записи таких выражений. К тому же, такая запись делает элементарным переход к любым другим парам координат, канонически сопряженным с x, y , например, к полярным координатам $\xi = (x^2 + y^2)/2$ и $\theta = \arctan[y/x]$.

Наконец, используя квазинейтральность и уравнение (16), и переписываем уравнение Максвелла (20) в безразмерных переменных

$$\mathbf{j} \equiv \mathbf{j}_f + M \frac{m_f}{m_i} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) - \langle \eta \rangle \mathbf{v}_e = \frac{1}{2} \nabla \times \frac{\delta \mathbf{B}}{B_0}. \quad (26)$$

Заметим, что только член \mathbf{j}_f в левой части и правая часть являются величинами первого порядка малости, а остальные члены величинами $\sim \epsilon^2$. Таким образом, уравнение (26) определяет поправку для $\delta \mathbf{B}$ следующего порядка, по сравнению с результатом (18), при условии, что дивергенция левой части равна нулю. Следовательно, замыкающим уравнением является условие разрешимости следующего приближения, а именно, уравнение $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$.

Теперь подставляем в уравнение Власова (25) в качестве возмущения магнитного поля решение (18), определяем полную производную по τ как $d\mathbf{f}/d\tau \equiv \partial_\tau \mathbf{f} + \{\psi, \mathbf{f}\}_{x,y}$ и преобразуем дивергенцию уравнения (26) с учетом (17), (23), (24). В результате получаем искомую систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\partial_\tau M + \{\psi, M\}_{x,y} = 0, \quad (27)$$

$$\partial_\tau \eta + \{(\langle \psi \rangle - \bar{\eta}), \eta\}_{x,y} = 0, \quad (28)$$

$$\nabla \cdot \left(M \frac{d\nabla \psi}{d\tau} \right) + \langle \partial_\tau \eta \rangle + \{\psi, \langle \eta \rangle\}_{x,y} = 0, \quad (29)$$

описывающих двухмерную динамику двухкомпонентной плазмы. Отметим, что члены уравнения (27) являются величинами первого порядка, а все члены уравнений (28) и (29) являются величинами второго порядка малости.

Заметим также, что система (27 – 29) инвариантна относительно преобразования $\eta \rightarrow \lambda \eta$, $\psi \rightarrow \lambda \psi$, $\tau \rightarrow \tau/\lambda$. Поэтому характерное время любого решения, стартующего с $\psi = 0$, обратно пропорционально $\beta \simeq -2\bar{\eta}$.

5 Граничные условия

Если в поперечных магнитному полю направлениях плазма ограничена лимитером, то граничное условие для плотности холодных

ионов должно быть поставлено на магнитной поверхности \mathcal{L}_M , которая каждой силовой линией касается внутренних краев лимитера. Граничным условием является равенство $M = 0$ на тех участках \mathcal{L}_M , где скорость $\mathbf{v} = \mathbf{b} \times \nabla\psi$ направлена внутрь объема. Для плотности ведущих центров η аналогичное граничное условие должно выполняться на магнитной поверхности \mathcal{L}_η , каждая силовая линия которой отстоит на ларморовский радиус от ближайшей точки лимитера. На этой поверхности плотность η должна обращаться в ноль на тех участках, где скорость $\mathbf{v}_F = \mathbf{b} \times \nabla(\langle\psi\rangle - \bar{\eta})$ направлена внутрь объема.

Отметим, что вычисление средних $\langle\eta\rangle$ и $\bar{\eta}$ вблизи границы \mathcal{L}_η должно проводиться, подразумевая, что за пределами границы усредняемая величина равна нулю.

Если лимитер проводящий, то он определяет граничное условие на потенциал $\psi = 0$ на поверхности \mathcal{L}_M . В случае изолирующего лимитера на нем должна обращаться в ноль нормальная компонента плотности тока \mathbf{j} . Поскольку вклад в \mathbf{j} от ларморовского вращения быстрых ионов (являющийся величиной первого порядка) на поверхности \mathcal{L}_M направлен по касательной к поверхности, в нормальную компоненту плотности тока дают вклад только величины второго порядка. Таким образом, граничным условием в случае изолирующего лимитера является равенство

$$\mathbf{n}_M \cdot \left(M\mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} \right) \Big|_{\mathbf{r}_M} + \mathbf{n}_\eta \cdot \eta \mathbf{v}_F \frac{dl_\eta}{dl_M} \Big|_{\mathbf{r}_\eta} = 0, \quad (30)$$

где \mathbf{r}_M — точка на поверхности \mathcal{L}_M , \mathbf{n}_M — единичный вектор нормали к поверхности \mathcal{L}_M , $\mathbf{r}_\eta[\mathbf{r}_M]$ — ближайшая к \mathbf{r}_M точка на поверхности \mathcal{L}_η , \mathbf{n}_η — единичный вектор нормали к поверхности \mathcal{L}_η , $dl_M = \mathbf{b} \cdot (d\mathbf{r}_M \times \mathbf{n}_M)$ и $dl_\eta = \mathbf{b} \cdot (d\mathbf{r}_\eta \times \mathbf{n}_\eta)$ — элементы длины вдоль контуров на поверхностях \mathcal{L}_M и \mathcal{L}_η , соответственно.

6 Законы сохранения

В этом разделе мы полагаем, что либо лимитер отсутствует, либо плотности M и η равны нулю всюду на поверхностях \mathcal{L}_M и \mathcal{L}_η , соот-

ответственно. В этом случае решения системы (27 — 29), удовлетворяют уравнениям сохранения частиц, импульса, момента импульса и энергии, несодержащих поверхностных интегралов, связанных с потерями частиц. Уравнения сохранения, учитывающие потоки на стенки и источники частиц, приведены в Приложении III.

Определим операцию свертки $f \otimes g \equiv \int f g dx dy$ для скалярных функций $f[x, y]$, $g[x, y]$, $\mathbf{f} \otimes \mathbf{g} \equiv \int \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} dx dy$ для векторных функций и $f \otimes \mathbf{g} \equiv \int f \mathbf{g} dx dy$ для скалярной f и векторной \mathbf{g} . Интегрирование производится по всей области где подынтегральное выражение отлично от нуля. (При отсутствии лимитеров предполагаем, что подынтегральные выражения убывают на бесконечности так, что интегралы существуют.)

Следующие очевидные свойства операторов:

$$\begin{aligned}
 \partial_{x,y} \langle f \rangle &= \langle \partial_{x,y} f \rangle, & \partial_{x,y} \bar{f} &= \overline{\partial_{x,y} f}, & \partial_\theta \langle f \rangle &= \langle \partial_\theta f \rangle, & \partial_\theta \bar{f} &= \overline{\partial_\theta f}, \\
 \langle \mathbf{r} \rangle &= \mathbf{r}, & \bar{\mathbf{r}} &= \mathbf{r}, & \langle \xi \rangle &= \xi + 1/2, & \bar{\xi} &= \xi + 1/4, \\
 \{f, g\}_{x,y} &= -\{g, f\}_{x,y}, & \{\mathbf{f}^2, g\}_{x,y} &= 2\mathbf{f} \cdot \{\mathbf{f}, g\}_{x,y}, \\
 \{\mathbf{r} \cdot \nabla f, f\}_{x,y} &= \mathbf{r} \cdot \{\nabla f, f\}_{x,y}, & f \otimes \langle g \rangle &= \langle f \rangle \otimes g, \\
 f \otimes \bar{g} &= \bar{f} \otimes g, & f \otimes \{g, h\}_{x,y} &= \{f, g\}_{x,y} \otimes h, \\
 \mathbf{f} \otimes \{g, h\}_{x,y} &= \{\mathbf{f}, g\}_{x,y} \otimes h, & f \otimes \nabla \cdot \mathbf{g} &= -\nabla f \otimes \mathbf{g}, \\
 (\mathbf{r} \times \mathbf{b}) \otimes \{f, g\}_{x,y} &= f \otimes \nabla g, & (\mathbf{r} \times \mathbf{b}) \otimes \nabla(fg) &= f \otimes (\mathbf{b} \times \mathbf{g}) \quad (31)
 \end{aligned}$$

позволяют легко получить выражения для законов сохранения.

Свертка уравнений (27) и (28) с производной от произвольной функции $\mathcal{F}'[M]$ и $\mathcal{F}'[\eta]$, соответственно, дает равенства $\partial_\tau \int \mathcal{F}[M] dx dy = 0$ и $\partial_\tau \int \mathcal{F}[\eta] dx dy = 0$, которые эквивалентны утверждению о несжимаемости движения для плотностей M и η . В случае $\mathcal{F}[g] \equiv g$ эти равенства означают сохранение числа частиц.

Вычисляя сумму сверток $\mathbf{v} = \mathbf{b} \times \nabla \psi$ с уравнением (27), $(-\mathbf{r} \times \mathbf{b})$ с уравнением (28) и $(\mathbf{r} \times \mathbf{b})$ с уравнением (29), после несложных преобразований с использованием свойств операторов (31), получаем уравнение сохранения импульса $\partial_\tau \int M \mathbf{v} dx dy = 0$.

Аналогично, переходя к полярным координатам $\xi \equiv r^2/2$ и $\theta = \arctan[y/x]$, и вычисляя сумму сверток $\{\mathbf{b} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v})\} = (\mathbf{r} \cdot \nabla \psi)$

с уравнением (27), $\langle \xi \rangle$ с уравнением (28) и $(-\xi)$ с уравнением (29), получаем уравнение сохранения z -компоненты момента импульса $\partial_\tau \int M(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{b} d\xi d\theta = 0$.

Наконец, вычисляя сумму свертков $(\mathbf{v}^2/2) = (\nabla\psi)^2/2$ с уравнением (27), $(\langle \psi \rangle - \bar{\eta})$ с уравнением (28) и $(-\psi)$ с уравнением (29), получаем уравнение сохранения энергии

$$\partial_\tau \int \frac{1}{2} \{ M\mathbf{v}^2 - (\bar{\eta})^2 \} dx dy = 0. \quad (32)$$

В случае $\nabla\psi = 0$ интеграл в уравнении (32) равен обезразмеренной “потенциальной” энергии \mathcal{E}_p , определенной выражением (2) во введении.

7 Равновесные конфигурации

Переходя к полярным координатам ξ и θ , и полагая, что M , η и ψ зависят только от ξ , видим, что все скобки Пуассона в уравнениях (27 – 29) равны нулю, поэтому, любая аксиально-симметричная конфигурация является равновесной. Ясно, что комбинация из несколько таких конфигураций, аксиально-симметричных относительно разных (параллельных) осей и разделенных пространством с $M = const$, $\eta = const$ и $\psi = const$, также является равновесной, при условии, что эти конфигурации не “взаимодействуют”, то есть расстояние между точками, принадлежащими разным конфигурациям, больше двух ларморовских радиусов (и расстояние до лимитера больше ларморовского радиуса). Также равновесным является любое плоское распределение параметров.

В случае $\psi = const$ необходимым и достаточным условием равновесия является параллельность $\nabla\eta$ и $\nabla\bar{\eta}$. При этом распределение $M[\mathbf{r}]$ может быть любым. Заметим, что $\exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}]$ есть собственная функция оператора усреднения:

$$\overline{\exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}]} = \frac{2}{k} J_1[k] \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}], \quad (33)$$

где J_1 – функция Бесселя. Поэтому любая суперпозиция вида

$$\eta = C_0 + \sum_n \operatorname{Re}[C_n \exp[i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}]], \quad (34)$$

с одинаковым $k = |\mathbf{k}_n|$ при отсутствии лимитера является равновесием. Например, равновесным является распределение⁴ $\eta = 1 + \cos[kx] \cos[ky]$.

8 Устойчивость аксиально-симметричного равновесия

В этом разделе сначала мы покажем, что “потенциальная” энергия аксиально-симметричного распределения с монотонно спадающим профилем плотности ведущих центров (и обращающимся в ноль на цилиндрической поверхности \mathcal{L}_η или на бесконечности) увеличивается при любом несжимаемом смещении. И наоборот, “почти” для любого немонотонного профиля найдется несжимаемое смещение, уменьшающее энергию.

Произвольное несжимаемое смещение может быть задано каноническим преобразованием. Используя полярные координаты $\xi = (x^2 + y^2)/2$ и $\theta = \arctan[y/x]$, запишем производящую функцию в виде $\Phi[\xi, \Theta] = \xi\Theta + \epsilon\phi[\xi, \Theta]$, где зависимость ϕ от второго аргумента периодическая с периодом 2π . Каноническое преобразование дает новые переменные Ξ и Θ , которые могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \Xi &= \xi + \epsilon\phi_{,\theta}[\xi, \theta] - \epsilon^2\phi_{,\xi}\phi_{,\theta\theta}[\xi, \theta] + \mathcal{O}[\epsilon^3], \\ \Theta &= \theta - \epsilon\phi_{,\xi}[\xi, \theta] + \epsilon^2\phi_{,\xi}\phi_{,\xi\theta}[\xi, \theta] + \mathcal{O}[\epsilon^3], \end{aligned} \quad (35)$$

где индекс после запятой означает частную производную $\phi_{,\xi} \equiv \partial_\xi\phi$, $\phi_{,\theta} \equiv \partial_\theta\phi$.

⁴На первый взгляд можно привести аналогичный с квадратным лимитером: $\eta = \cos[kx] \cos[ky]$ с ограничивающей поверхностью \mathcal{L}_η проходящей по плоскостям $x = \pm\pi/(2k)$ и $y = \pm\pi/(2k)$. Однако это не так, поскольку при усреднении в окрестности границы \mathcal{L}_η нужно использовать нулевое значение η за границей. В результате, $\nabla\eta$ и $\nabla\bar{\eta}$ оказываются непараллельными.

Если равновесная плотность $\eta = N[\xi]$ зависит только от ξ , то возмущенная плотность $\tilde{\eta}$ равна

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}[\xi, \theta] &= N[\Xi] = N[\xi + \epsilon\phi, \theta - \epsilon^2\phi, \xi\phi, \theta\theta] + \mathcal{O}[\epsilon^3] = \\ &= N[\xi] + \epsilon N' \phi, \theta - \epsilon^2 \partial_\theta (N' \phi, \xi \phi, \theta) + \frac{\epsilon^2}{2} \partial_\xi (N' \phi, \theta^2) + \mathcal{O}[\epsilon^3], \end{aligned} \quad (36)$$

где штрих означает дифференцирование по ξ . Энергия невозмущенного равновесия есть $\mathcal{E}_p = -(1/2) \int (\bar{\eta})^2 d\xi d\theta$, а возмущение энергии равно

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E}_p &\equiv \frac{1}{2} \int \left\{ (\bar{\eta})^2 - (\overline{\tilde{\eta}})^2 \right\} d\xi d\theta = \\ &= \frac{\epsilon^2}{2} \int \left\{ N' (\overline{N'})' \phi, \theta^2 - (\overline{N' \phi, \theta})^2 \right\} d\xi d\theta + \mathcal{O}[\epsilon^3] \end{aligned} \quad (37)$$

(отметим, что оператор усреднения не коммутирует с дифференцированием по ξ).

Для определения знака $\delta\mathcal{E}_p$ необходимо использовать периодичность зависимости ϕ от θ . Для этого представим ϕ в виде ряда Фурье:

$$\phi[\xi, \theta] = \sum_{m=0}^{\infty} \phi_m[\xi] e^{im\theta} + c.c. \quad (38)$$

Также, необходимо воспользоваться монотонностью потенциала взаимодействия δ -образных распределений

$$\begin{aligned} U[r] &\equiv -\overline{\delta[\mathbf{r}]} = -\int_r^2 \sqrt{4-r^2} dr = r\sqrt{1-r^2/4} - 2 \arccos[r/2], \\ U &= 0, \quad \text{если } r \geq 2. \end{aligned} \quad (39)$$

Теперь мы можем переписать возмущение энергии в виде

$$\delta\mathcal{E}_p = -\frac{\epsilon^2}{2} \int U[|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|] N'_1 N'_2 \left\{ \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{r_2^2} \phi, \theta_1^2 - \phi, \theta_1 \phi, \theta_2 \right\} d^2 \mathbf{r}_1 d^2 \mathbf{r}_2, \quad (40)$$

где $\xi_n = r_n^2/2$, $N_n = N[\xi_n]$, $\phi_{,\theta_n} = \partial_{\theta_n}\phi[\xi_n, \theta_n]$ и $n = 1, 2$. Используя разложение (38) и переходя к интегрированию по ξ_1 , ξ_2 , θ_2 и $\theta = \theta_1 - \theta_2$, после интегрирования по частям получаем

$$\delta\mathcal{E}_p = \pi\epsilon^2 \sum_{m=0}^{\infty} \int d\xi_1 d\xi_2 N'_1 N'_2 r_1 r_2 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{U'[r_{12}]}{r_{12}} m \sin \theta \times \quad (41)$$

$$\times \left\{ (|\Phi_{m2}| - |\Phi_{m1}|)^2 m \sin \theta + 2 |\Phi_{m1} \Phi_{m2}| (m \sin \theta - \sin [m\theta] \cos \alpha_m) \right\},$$

где $r_{12} \equiv \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta}$, $\Phi_{1m} = \phi_m[\xi_1]r_2/r_1$, $\Phi_{2m} = \phi_m[\xi_2]r_1/r_2$ и $\alpha_m \equiv \arg [\Phi_{1m}\Phi_{2m}^*]$. Поскольку $U' \geq 0$ и $|m \sin \theta| \geq |\sin [m\theta]|$, последний интеграл в (41) положительный (для $m \neq 0$).

Если $N[\xi]$ монотонная функция, то $\delta\mathcal{E}_p > 0$ для любой производящей функции ϕ , зависящей от θ . (Равенство $\delta\mathcal{E}_p = 0$ имеет место только для поворотов без радиальных смещений.) Таким образом, равновесия с $\psi = 0$ и монотонным профилем $\eta[\xi]$ являются устойчивыми, поскольку любое растущее во времени собственное решение линеаризованной системы должно увеличивать энергию, что противоречит ее сохранению.

Если N' меняет знак и хотя бы один экстремум плотности центров N не совпадает с экстремумом усредненной плотности \overline{N} , то существует интервал ξ , где произведение $N'(\overline{N})'$ отрицательно. Выбирая функцию $\phi[\xi, \theta]$, отличную от нуля только в этом интервале, видим, что оба члена в интеграле (37) отрицательны, то есть $\delta\mathcal{E}_p < 0$. В этом случае сохранение энергии не запрещает неустойчивости.

Случаи особой симметрии, когда все экстремумы функций N и \overline{N} совпадают, требуют индивидуального рассмотрения. Пример такого исследования для равновесия типа (34) приведен в Приложении I.

Полезно отметить, что возмущение энергии немонотонного профиля может быть отрицательным и в случае, когда характерный размер неоднородности много больше, чем ларморовский радиус.

Однако, в этом случае произведение $U' [r_{12}] N'[\xi_1] N'[\xi_2]$ в выражении (41) строго меньше нуля только, когда ξ_1 и ξ_2 расположены по разные стороны экстремума N и отстоят друг от друга на расстоянии менее двух ларморовского радиусов. Поэтому, неустойчивое возмущение должно быть локализовано на размере меньше или порядка ρ . В противном случае суммарное возмущение “потенциальной” энергии будет положительным. Таким образом, если неустойчивость и существует, то она не может быть обнаружена в рамках приближения, в котором характерные размеры возмущения считаются много больше ларморовского радиуса.

Теперь рассмотрим вопрос устойчивости, анализируя линеаризованные уравнения. Сначала рассмотрим предельный случай с $M \rightarrow \infty$ и, соответственно, $\psi \rightarrow 0$. В этом случае линеаризация уравнения (28) дает уравнение $\partial_\tau \eta_1 = \eta_{1,\theta} \left(\overline{\overline{N}} \right)' - N' \overline{\overline{\eta_{1,\theta}}}$. Определим функции $f[\xi] = \sqrt{|N'|}$, $s[\xi] \equiv N'/|N'| = \pm 1$ и рассмотрим возмущения, определяемые смещением с производящей функцией ϕ , то есть $\eta_1 = f \Psi$, где $\Psi[\xi, \theta] \equiv s f \phi_{,\theta}$. Тогда уравнение для Ψ можно записать в виде

$$\partial_\tau \Psi = \partial_\theta \hat{\mathcal{H}} \Psi, \quad \hat{\mathcal{H}} \Psi \equiv \left(\overline{\overline{N}} \right)' \Psi - s f \overline{\overline{f \Psi}}. \quad (42)$$

(Заметим, что в этих обозначениях возмущение “потенциальной” энергии (37) равно $\delta \mathcal{E}_p = s \Psi \otimes \hat{\mathcal{H}} \Psi / 2$.) Линейный оператор $\hat{\mathcal{H}}$ коммутирует с оператором сдвига по θ , поэтому его собственные функции можно искать в виде $\Psi \propto \exp [im\theta - i\omega\tau]$.

В случае монотонного профиля $s = -1$ и оператор $\hat{\mathcal{H}}$ является самосопряженным. Поэтому его собственные функции образуют полный набор, и собственные значения $-\omega/m$ действительны. Таким образом, еще раз показываем, что монотонный профиль устойчив.

Для немонотонного профиля $s \neq const$, оператор $\hat{\mathcal{H}}$ не является самосопряженным и собственные значения могут быть комплексными. Однако, $\hat{\mathcal{H}}$ в общем случае не коммутирует с эрмитово-сопряженным оператором $\hat{\mathcal{H}}^\dagger \Psi \equiv \left(\overline{\overline{N}} \right)' \Psi - f \overline{\overline{s f \Psi}}$, поэтому собственные функции могут не существовать.

Для случая равновесия с конечным $M = const$ и $\psi_0 = 0$ введем дополнительные обозначения: $\check{\Psi}[\xi, \theta] \equiv (M\nabla^2\psi_1 + \langle\eta_1\rangle) / \check{f}$, $\check{f}[\xi] \equiv \sqrt{|\langle N \rangle'|}$ и $\check{s}[\xi] \equiv \langle N \rangle' / |\langle N \rangle'|$. Тогда линеаризованную систему

$$\begin{aligned} \partial_\tau \eta_1 + \partial_\theta \left(N' \overline{\overline{\eta_1}} - \left(\overline{\overline{N}} \right)' \eta_1 - N' \langle \psi_1 \rangle \right) &= 0, \\ \partial_\tau (M\nabla^2\psi_1 + \langle\eta_1\rangle) - \langle N \rangle' \partial_\theta \psi_1 &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \partial_\tau \begin{pmatrix} \Psi \\ \check{\Psi} \end{pmatrix} &= \partial_\theta \hat{\mathcal{H}} \begin{pmatrix} \Psi \\ \check{\Psi} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathcal{H}} \equiv \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{H}}_{11} & \hat{\mathcal{H}}_{12} \\ \hat{\mathcal{H}}_{21} & \hat{\mathcal{H}}_{22} \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathcal{H}}_{11}\Psi &\equiv \hat{\mathcal{H}}\Psi - \frac{sf}{M} \langle \nabla^{-2} \langle f\Psi \rangle \rangle, \quad \hat{\mathcal{H}}_{12}\check{\Psi} \equiv \frac{sf}{M} \langle \nabla^{-2} (f\check{\Psi}) \rangle, \\ \hat{\mathcal{H}}_{21}\Psi &\equiv \frac{\check{s}\check{f}}{M} \nabla^{-2} \langle f\Psi \rangle, \quad \hat{\mathcal{H}}_{22}\check{\Psi} \equiv -\frac{\check{s}\check{f}}{M} \nabla^{-2} (f\check{\Psi}), \end{aligned} \quad (44)$$

где $g = \nabla^{-2}h$ есть решение уравнения Пуассона $\nabla^2 g = h$ с нулевыми граничными условиями (полагаем, что плазма окружена идеально проводящим лимитером, тогда $f\check{\Psi}$ и $\langle f\Psi \rangle$ обращаются в ноль на нем).

В случае монотонного профиля ($s = \check{s} = -1$) оператор $\hat{\mathcal{H}}$ является эрмитовым, что говорит об устойчивости, теперь с учетом холодной плазмы.

Примеры неустойчивых решений в плоской геометрии для равновесия с немонотонным профилем η при $M = \infty$ и $M \gg 1$ см. в Приложении I.

9 Численное моделирование

В этом разделе приводятся результаты численного решения системы уравнений (28,29) с однородной плотностью холодной плазмы. Уравнение (28) решалось методом частиц в ячейках аналогичным

[8], а для уравнения (29) использовалась консервативная гибридная схема с интегрированием по времени методом Рунге-Кутты-Фельберга [9] совместно с уравнениями движения ведущих центров.

9.1 Предел бесконечной массы холодной компоненты

Рассмотрим предельный случай, когда $M \rightarrow \infty$ и $\psi \rightarrow 0$. Тогда холодная компонента неподвижна, а быстрая компонента эволюционирует согласно уравнению

$$\partial_\tau \eta + \left\{ \eta, \overline{\overline{\eta}} \right\}_{x,y} = 0. \quad (45)$$

Уравнение (45) во многом схоже с уравнением, описывающим двухмерное движение электронной плазмы в сильном магнитном поле

$$\partial_t n + \left\{ n, \nabla^{-2} n \right\}_{x,y} = 0, \quad (46)$$

где n – плотность электронов. Уравнение (46) также эквивалентно двухмерной Эйлеровой гидродинамике. В этом случае $n = (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{b}$ есть z -компонента завихренности поля скоростей. Исследованию уравнения (46) посвящена обширная литература (см. в [10],[11]).

Различие между уравнениями (45) и (46) обусловлено только формой потенциала взаимодействия. Уравнение (45) есть кинетическое уравнение для ансамбля частиц с парным потенциалом взаимодействия $U = -\overline{\overline{\delta[\mathbf{r}]}}$ (см. формулу (39)), а уравнение (46) есть кинетическое уравнение для ансамбля частиц (вихрей) с парным потенциалом взаимодействия $U_q = -\nabla^{-2} \delta[\mathbf{r}] = -\ln |\mathbf{r}| / (2\pi)$.

На рисунках 2 и 3 показаны эволюция кольцеобразного распределения электронной плотности, в соответствии с уравнением (46), и плотности ведущих центров, в соответствии с уравнением (45).

Начальный этап на Рис 2 демонстрирует развитие диокотронной неустойчивости [12, 10], (неустойчивости Кельвина-Гельмгольца для гидродинамической интерпретации). Аналогичная неустойчивость, вызванная неоднородностью диамагнитного дрейфа, развивается и в нашей задаче (Рис 3). Далее в обоих случаях происходит

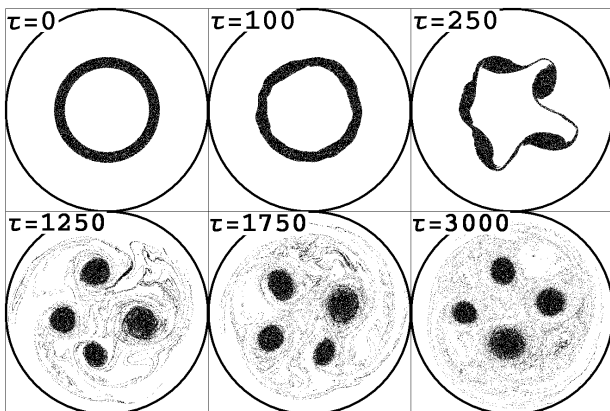


Рис. 2: Эволюция кольцеобразного распределения электронной плотности.

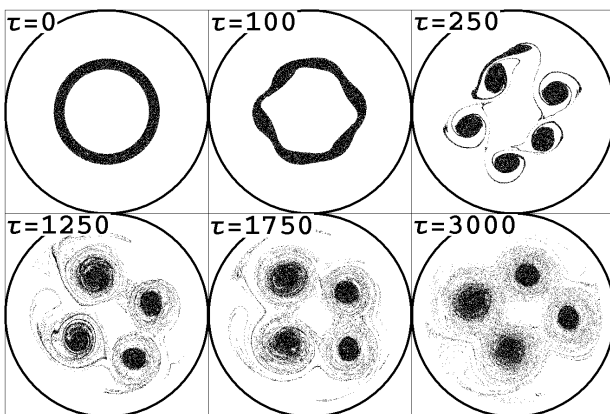


Рис. 3: Эволюция кольцеобразного распределения ведущих центров с плотностью $\eta = 0.111$ для $M = \infty$ и радиуса лимитера $R_M = 6.25\rho$.

формирование нескольких “ядер”, приблизительно сохраняющих начальную плотность. Фазовое размешивание “хвостов”, ранее соединявших “ядра”, приводит к образованию гало с низкой плотностью. Образуется квази-стационарное вращающееся равновесие

(иногда называемое электронным кристаллом [13]). В результате слабого взаимодействия “ядер” с гало через некоторое время происходит слияние пары “ядер” и переход в другое квази-стационарное равновесие. При этом оба уравнения сохраняют энергию и обобщенный момент импульса: $-\int (\bar{\eta})^2 d\xi d\theta$ и $\int \xi \eta d\xi d\theta$ для уравнения (45) и $\int \{\nabla(\nabla^{-2}n)\}^2 d\xi d\theta$ и $\int \xi n d\xi d\theta$ для уравнения (46). Образование в конечном итоге одного “ядра” происходит, но через очень большое время, поскольку уменьшение энергии и момента импульса “ядер” возможно только за счет роста и растекания гало.

9.2 Конечная масса холодной плазмы, локализация быстрой компоненты

На рисунках 4 и 5 показана эволюция кольцеобразного распределения ведущих центров с участием холодной плазмы для значений $M = 1$ и $M = 0.1$. В результате передачи энергии $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ движению холодной плазмы процесс слияния “ядер” ускоряется. Это становится особенно заметно для случая $M \ll 1$ (ср. Рис. 3 и Рис. 5).

На Рис. 6 приведены зависимости кинетической энергии от времени в процессе эволюции. Крутые участки ступеней на переднем фронте кривых соответствуют моментам слияния “ядер”. Максимальная кинетическая энергия растет с уменьшением M , однако даже для $M = 0.1$ она составляет лишь третью часть от потенциально доступной энергии: если исходное кольцо собрать в круг с той же плотностью η , то “потенциальная” энергия $\mathcal{E}_p = -\int \bar{\eta}^2 dx dx$ уменьшится на 0.027.

Предполагая, что характерные пространственные масштабы задачи порядка ларморовского радиуса, из линеаризованной системы можно получить грубую оценку времени развития неустойчивости $\tau \sim 1/\beta$. Численное моделирование и аналитический пример из Приложения I показывают, что здесь еще есть численный фактор порядка 10. Грубая оценка времени, когда кинетическая энергия станет порядка “потенциальной” есть $\tau \sim \sqrt{M}/\beta$. С тем же фактором ~ 10 такая оценка грубо соответствует крутым участкам переднего фронта на Рис. 6. Однако, полное время от исходного

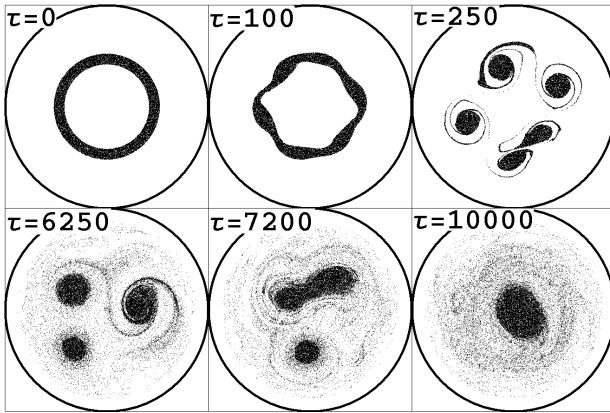


Рис. 4: Эволюция кольцеобразного распределения ведущих центров с плотностью $\eta = 0.111$ для $M = 1$ и радиуса лимитера $R_M = 6.25\rho$.

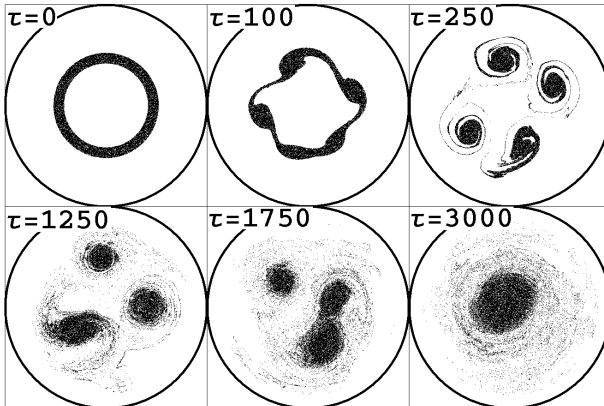


Рис. 5: Эволюция кольцеобразного распределения ведущих центров с плотностью $\eta = 0.111$ для $M = 0.1$ и радиуса лимитера $R_M = 6.25\rho$.

равновесия до образования последнего “ядра”, как видно из Рис. 6, содержит дополнительный фактор ~ 100 .

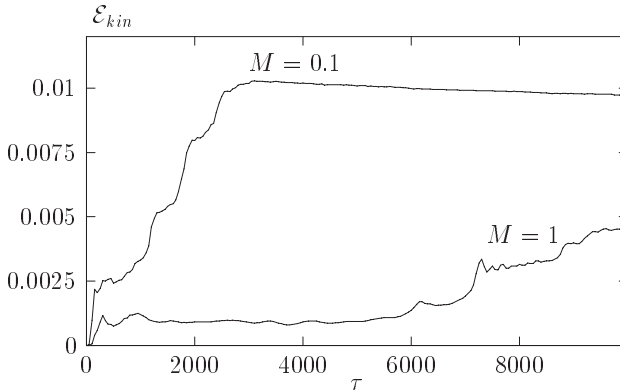


Рис. 6: Зависимость кинетической энергии от времени в процессе эволюции кольцеобразного распределения ведущих центров на фоне холодной плазмы с безразмерной плотностью $M = 0.1$ и $M = 1$.

10 Заключение

Мы рассмотрели динамику двухкомпонентной плазмы, в которой роли компонент четко разделены: быстрая компонента определяет “потенциальную” энергию, а движение холодной — кинетическую. Однако такое разделение не является принципиальным, а лишь существенно упрощает вычисления. Пусть начальный уровень $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ турбулентности низок, а пространственное распределение ведущих центров таково, что теорема Лиувилля, не запрещает переход к более компактному распределению с меньшей “потенциальной” энергией. Тогда при любом распределении частиц по μ должно происходить перераспределение энергии по степеням свободы, сопровождаемое пространственной локализацией фракции ионов, несущей основную часть “потенциальной” энергии. Принципиальным является лишь сохранение μ в течение достаточно длинного времени обратно пропорционального β . Поэтому обсуждаемые явления могут представлять интерес с точки зрения широкого класса задач физики плазмы и астрофизики, где бесстолкновительное рассмотрение применимо.

Приложение I

Пример аналитических решений линеаризованной задачи для больших M

Будем искать решение линеаризованной задачи на фоне равновесия $M = const$, $\psi = 0$ и $\eta[x] = N \sin [k_0 x] + const$.

Сначала рассмотрим предел $M \rightarrow \infty$. В этом случае имеем только одно уравнение

$$\partial_\tau \eta_1 + \partial_y (\eta_{,x} \overline{\eta_1} - \overline{\eta_{,x}} \eta_1) = 0 \quad (47)$$

для возмущения η_1 . Будем искать возмущение в виде Фурье ряда

$$\eta_1[x, y, \tau] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp [ink_0 x + ik_y y - i\omega \tau]. \quad (48)$$

Двойное усреднение дает

$$\begin{aligned} \overline{\eta_{,x}} &= N k_0 \mathcal{G}[k_0] \cos [k_0 x], \\ \overline{\eta_1} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \mathcal{G} \left[\sqrt{k_y^2 + n^2 k_0^2} \right] \exp [ink_0 x + ik_y y - i\omega \tau], \end{aligned} \quad (49)$$

где функция $\mathcal{G}[x] \equiv (2J_1[x]/x)^2$ есть Фурье образ ядра операции двойного усреднения (см. Рис. 7) и J_1 — функция Бесселя. Немонотонность $\mathcal{G}[x]$, связанная с наличием характерного радиуса взаимодействия, позволяет находить решения с конечным числом членов ряда (48).

Подстановка рядов (48) и (49) в уравнение (47) дает рекуррентные соотношения для Фурье амплитуд a_n :

$$Q_{n-1} a_{n-1} - \Omega a_n + Q_{n+1} a_{n+1} = 0. \quad (50)$$

где

$$\Omega \equiv \frac{2\omega}{N k_y k_0}, \quad Q_n \equiv \mathcal{G}[K_n] - \mathcal{G}[k_0], \quad K_n \equiv \sqrt{k_y^2 + n^2 k_0^2}. \quad (51)$$

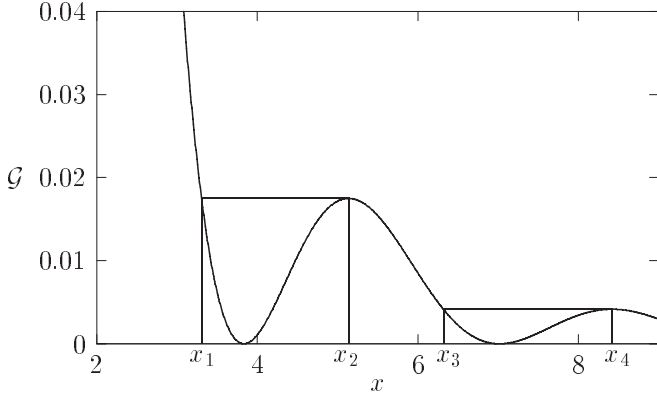


Рис. 7: График функции $\mathcal{G}[x] = (2J_1[x]/x)^2$. Для значений k_0 на участках $x_1 \leq k_0 \leq x_2$ и $x_3 \leq k_0 \leq x_4$ существуют решения k_y уравнений $\mathcal{G}[k_0] = \mathcal{G}[\sqrt{k_0^2 + n^2 k_y^2}]$.

Если k_0 находится в одном из диапазонов (примеры двух таких участков показаны на Рис. 7), где выбором k_y можно обратить в ноль какой-либо из коэффициентов $Q_{\pm n}$ ($n > 1$), то ряд (48) может быть оборван с обеих сторон.

В простейшем случае величина k_y может быть выбрана так, чтобы обратить в ноль $Q_{\pm 2}$. Тогда, полагая $a_n = 0$ для всех $|n| > 2$, получаем решение системы (50) $a_{\pm 1} = a_0 Q_0 / \Omega$, $a_{\pm 2} = a_0 / 2$ и $\Omega = \sqrt{2Q_0 Q_1}$. Таким образом, простейшее аналитическое решение есть

$$\eta_1[x, y, \tau] = \left(\cos[k_0 x] + \frac{\Omega}{Q_0} \cos^2[k_0 x] \right) \exp[ik_y y - i\omega \tau], \quad (52)$$

где k_y есть корень уравнения $Q_2[k_0, k_y] = 0$ и собственная частота равна $\omega = N k_0 k_y \sqrt{Q_0 Q_1} / 2$.

На Рис. 8 показана зависимость Ω^2 и коэффициента второй гармоники $|\Omega|/Q_0$ от k_0 . Есть два участка $3.558 < k_0 < 3.577$ и $3.666 < k_0 < 3.698$, где $\Omega^2 < 0$, то есть, имеет место неустойчивость.

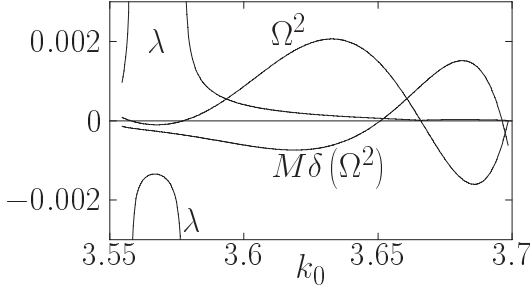


Рис. 8: Квадрат нормированной собственной частоты $\Omega^2 = 2Q_0Q_1$ (для случая $M \rightarrow \infty$), коэффициент второй гармоники $|\Omega|/Q_0$ (на рисунке представлен график $\lambda = 0.0005 \cdot |\Omega|/Q_0$) и поправка $M\delta(\Omega^2)$ (для больших значений M), как функции параметра равновесия k_0

Для случая равновесия с конечным $M = const$ линейризованная система содержит два уравнения

$$\begin{aligned} \partial_\tau \eta_1 + \partial_y (\eta_{,x} \overline{\eta_1} - \overline{\eta_{,x}} \eta_1 - \eta_{,x} \langle \psi_1 \rangle) &= 0, \\ \partial_\tau (M \nabla^2 \psi_1 + \langle \eta_1 \rangle) - \langle \eta_{,x} \rangle \partial_y \psi_1 &= 0, \end{aligned} \quad (53)$$

Возмущение потенциала также представляем в виде Фурье ряда

$$\psi_1[x, y, \tau] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n \exp[ink_0x + ik_yy - i\omega\tau]. \quad (54)$$

Усреднение возмущения по орбите дает

$$\langle \eta_1 \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n J_0 \left[\sqrt{k_y^2 + n^2 k_0^2} \right] e^{ink_0x + ik_yy}, \quad (55)$$

где J_0 – функция Бесселя. Подстановка рядов в линейризованную систему дает рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} Q_{n-1} a_{n-1} - \mathcal{J}_{n-1} p_{n-1} - \Omega a_n + Q_{n+1} a_{n+1} - \mathcal{J}_{n+1} p_{n+1} &= 0, \\ J_0 p_{n-1} + \Omega (\mathcal{J}_n a_n - MK_n^2 p_n) + J_0 p_{n+1} &= 0, \end{aligned} \quad (56)$$

где $J_0 \equiv J_0[k_0]$ и $\mathcal{J}_n \equiv J_0[K_n]$.

Система (56) не имеет решений с конечным числом членов в рядах, но для больших значений M , рассматривая описанные выше решения в качестве нулевого приближения, мы можем найти следующие приближения с убывающими Фурье амплитудами $p_n \sim a_n/M \sim 1/M^n$. Первое приближение дает поправленные собственные значения

$$\Omega^2 = \Omega_0^2 + \delta(\Omega^2), \quad k_y = k_{y0} + \frac{\mathcal{J}_2^2}{MK_2^2 Q_2'},$$

$$\delta(\Omega^2) = \frac{2Q_0 Q_1}{M} \left\{ \frac{\mathcal{J}_2^2}{K_2^2 Q_2'} \left(\frac{Q_0'}{Q_0} + \frac{Q_1'}{Q_1} \right) - \frac{\mathcal{J}_0^2}{K_0^2 Q_0} - \frac{\mathcal{J}_1^2}{K_1^2 Q_1} \right\}, \quad (57)$$

где $Q_n' \equiv \partial_{k_y} Q_n$.

На Рис. 8 показана зависимость поправки $\delta(\Omega^2)$ от k_0 . Видно, что на первом участке неустойчивости $3.558 < k_0 < 3.577$ холодная компонента усиливает неустойчивость, а на втором $3.666 < k_0 < 3.698$ — оказывает стабилизирующее влияние.

Приложение II

Двухмерная модель пробкотрона

Как указывалось во введении, динамика двухкомпонентной плазмы в пробкотроне в общем случае существенно трехмерна. В этом разделе мы укажем каким условиям должны удовлетворять параметры ловушки, чтобы описание могло быть приближенно двухмерным, и учтем вклад инжекции и торцевых граничных условий в двухмерную систему уравнений.

Полагаем, что длинная однородная по z часть ловушки с длиной L заканчивается с обеих сторон одинаковыми относительно короткими параксиальными концевыми участками с длиной l , содержащими пробки с большим пробочным отношением $R_m \gg 1$ и затем расширители. Наличие пробок позволяет удерживать быстрые ионы в адиабатическом режиме и холодную плазму в газодинамическом режиме [14]. Расширители заканчиваются торцевы-

ми плазмо-приемными поверхностями, являющимися проводящими или изолирующими.

Инжекция быстрых ионов должна осуществляться с питч-углом θ_p , далеким от конуса потерь, но достаточно малым, чтобы частота азимутального дрейфа была много меньше частоты баунс колебаний, и продольный адиабатический инвариант сохранялся. Таким образом, угол инжекции должен удовлетворять неравенствам

$$\frac{1}{R_m} \ll \theta_p^2 \ll \frac{a^2}{\rho L \beta}. \quad (58)$$

Кроме того, мы должны полагать, что вклад в азимутальный дрейф быстрых ионов в короткой области в концевых участках мал по сравнению со вкладом однородного участка. Согласно [14], отношение плотности быстрых ионов в точке остановки n_F^* к плотности на однородном участке есть $n_F^*/n_F \sim 1/\sqrt{\theta_p^3 \Delta\theta_p}$, где $\Delta\theta_p$ — ширина разброса функции распределения быстрых ионов по питч-углам. Используя модель $\partial_z^2 B = \text{const}$ в области растущего поля, длину области пикировки можно оценить как $\Delta l \sim l \Delta\theta_p / (\theta_p^2 \sqrt{R_m})$. Для параксиальности и отсутствия дополнительной магнитной ямы в области пикировки плотности достаточно выполнения условий

$$l \gg a \sqrt{R_m}, \quad \beta \ll \sqrt{\theta_p (\Delta\theta_p)^3}. \quad (59)$$

Сравнивая вклады в азимутальный дрейф однородного и неоднородного участков, получаем дополнительное ограничение на угол инжекции

$$\theta_p^3 \sqrt{R_m} \gg l/L. \quad (60)$$

Продольные потери холодной плазмы приводит к появлению в правой части уравнения (27) члена порядка $-M/\tau_{\parallel}$, где $\tau_{\parallel} \sim LR_m/(c_s \Omega_{f0})$ — время жизни холодной плазмы нормированное частотой Ω_{f0} и c_s — скорость звука в пробке. Однако учет этого члена заведомо превышает точность используемого приближения.

Поскольку, мы полагаем, что питч-углы быстрых ионов далеки от конуса потерь, модификация первых двух уравнений в системе (27 – 29), сводится только к учету источников, связанных с инжекцией. Инжекция всех сортов частиц вследствие ионизации и перезарядки нейтральных атомов является локально нейтральной, поэтому, источник электронов $S_e[\mathbf{r}, t]$, холодных ионов $S_i[\mathbf{r}, t]$ и источник быстрых ионов $S_f[\mathbf{r}, \mathbf{p}, t]$ удовлетворяют соотношению $S_e - S_i = \int S_f dp_x dp_y dp_z$.

Полагая, что все быстрые ионы обладают одинаковым адиабатическим инвариантом μ_0 , записываем усредненный по лармовской окружности источник S_f в форме $\langle S_f \rangle = \mathcal{S}_F n_B \delta[\mu - \mu_0]/(2\pi m_f)$, где \mathcal{S}_F – безразмерный источник ведущих центров. Также определим безразмерные источники холодных частиц $\mathcal{S}_{e,i} = S_{e,i}/(\Omega_{f0} n_B)$ (мы включаем в рассмотрение источник холодных ионов, для того, чтобы можно было учесть подпитку быстрой компоненты в результате перезарядки инжектируемых быстрых нейтралов с холодными ионами).

Для модификации уравнения (29) нужно учесть наличие продольной компоненты плотности тока j_{\parallel} и поправки к поперечным компонентам тока на концевых участках, обусловленные продольным движением плазмы. Отметим, что возмущение магнитного поля (18) в концевых участках быстро спадает вдоль z за областями остановки быстрых ионов. Продолжаем исследуемое решение в область концевых элементов желобковыми возмущениями и интегрируем уравнение $B[z]\nabla \cdot (\mathbf{j}_{\perp} + \mathbf{j}_{\parallel}) = 0$ вдоль силовой линии (аналогично тому, как это делается в [15]), учитывая параксиальность и аксиальную симметрию невозмущенного поля. В итоге, с учетом источников \mathcal{S}_e , \mathcal{S}_i и \mathcal{S}_F получаем систему уравнений

$$\partial_{\tau} M + \{\psi, M\}_{x,y} = \mathcal{S}_i, \quad (61)$$

$$\partial_{\tau} \eta + \{(\langle \psi \rangle - \bar{\eta}), \eta\}_{x,y} = \mathcal{S}_F, \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(M \frac{d\nabla \psi}{d\tau} \right) + \langle \partial_{\tau} \eta \rangle + \{\psi, \langle \eta \rangle\}_{x,y} \\ = \mathcal{S}_e - \mathcal{S}_i - \nabla \cdot (M \gamma_{\parallel} \nabla \psi) + M \nu_{\parallel} \psi, \end{aligned} \quad (63)$$

где $\gamma_{\parallel} = B_0/(\tau_{\parallel} B_{end})$, B_{end} — магнитное поле на плазмо-приемной поверхности, $\nu_{\parallel} \sim m_f \mu_0 \Omega_{f0}/(m_i T_e \tau_{\parallel})$ — коэффициент эффективной проводимости концевых участков и T_e — электронная температура.

Член в правой части уравнения (63), содержащий γ_{\parallel} , ответственен за эффект продольной потери поперечного импульса. Он возникает в результате интегрирования члена пропорционального $(v_{i\parallel} \mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}_{i\perp}$, имеющего место в выражении для $d_i \mathbf{v}_i/d\tau$, определяющего разность $\mathbf{v}_{i\perp} - \mathbf{v}_{e\perp}$. При этом мы пренебрегаем членом $\sim v_{\parallel}^2 \boldsymbol{\kappa}$, содержащим кривизну силовых линий $\boldsymbol{\kappa} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} \sim a R_m/l^2$ в силу малости последней⁵. Также, мы не учитываем вклад в поперечный ток от дрейфа быстрых ионов, вызванный кривизной силовых линий в концевых участках. Это законно, когда

$$\sqrt{R_m} a^2/l \ll \beta L. \quad (64)$$

Как видно из выражения для γ_{\parallel} , эффект продольной потери поперечного импульса может быть существенен, когда магнитное поле на плазмо-приемной поверхности много меньше B_0 .

Член в правой части уравнения (63), содержащий ν_{\parallel} , имеет место в случае проводящей плазмо-приемной поверхности (чей потенциал полагаем равным нулю) и определяется обменными процессами в пристеночном дебаевском слое. В общем случае связь между плотностью тока и разностью потенциала плазма-стенка нелинейна и существенно зависит от T_e [16, 17, 18]. Приведенная выше оценка эффективной проводимости концевого элемента $M\nu_{\parallel}$ соответствует дифференциальной проводимости в модели полностью поглощающей плазмо-приемной поверхности в расширителе. Полная система уравнений должна была бы содержать еще и уравнение для переноса T_e и описывала бы, в частности, процессы, связанные

⁵В “классической” газодинамической ловушке [15]) наличие члена $\sim v_{\parallel}^2 \boldsymbol{\kappa}$ в области расширителя, где B мало, а кривизна значительна, играет основную роль в стабилизации желобковых возмущений. Однако, в упомянутых выше экспериментах [1] расширители работали в режиме, в котором кривизна магнитных линий пренебрежимо мала. Поэтому для упрощения задачи мы тоже не учитываем этот член.

с температурно-градиентной неустойчивостью, вызываемой проводящими торцами [17, 18]. Но здесь мы пренебрегаем такими процессами, поскольку считаем электронное давление много меньше давления быстрых ионов, и полагаем коэффициенты γ_{\parallel} и ν_{\parallel} заданными константами.

Наконец, приведем оценку, когда можно пренебречь искажением магнитного поля, создаваемым продольным током. Для того, чтобы смещение силовой линии в различных сечениях было много меньше ларморовского радиуса, члены в правой части уравнения (63), определяемые продольным током, вытекающим из центральной части ловушки, должны быть меньше ρ^2/L^2 . Для того, чтобы имело смысл учитывать такие члены, они должны быть больше чем члены, отброшенные при выводе (29), то есть должно выполняться условие

$$\beta^3 \ll \rho^2/L^2. \quad (65)$$

Условия (58 — 60), (64) и 65) совместимы с возможностью бесстолкновительного рассмотрени на временах, характерных для двухмерной динамики.

Отметим, что наличие диссипативных членов в уравнении (63) гарантирует по крайней мере диссипативную неустойчивость для равновесия с $\psi = 0$, когда существует возмущение, уменьшающее “потенциальную” энергию. Согласно уравнению (72) Приложения III, в результате такого возмущения полная энерги будет продолжать уменьшаться, то есть система будет релаксировать к равновесию, отличному от начального.

На Рис. 9 приведена зависимость кинетической и полной энергии от времени в процессе эволюции кольцеобразного распределения ведущих центров в случае $M = 1$ с учетом потери поперечного импульса в расширителе.

Сравнение Рис. 9 с Рис. 6 (для случая $M = 1$) показывает, что наличие диссипативного члена приводит к существенному ускорению локализации распределения ведущих центров.

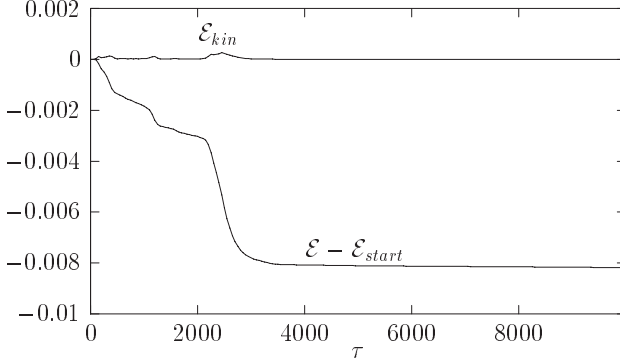


Рис. 9: Зависимость кинетической энергии и изменения полной энергии от времени в процессе эволюции кольцеобразного распределения ведущих центров на фоне холодной плазмы с $M = 1$ и с диссипативными факторами $\gamma_{\parallel} = 0.02$, $\nu_{\parallel} = 0$.

Приложение III

Законы сохранения с учетом источников, лимитера и расширителей

Уравнение (62) справедливо внутри \mathcal{L}_{η} и вне \mathcal{L}_{η} (плотность ведущих центров η и ее производные равны нулю), если считать, что $\mathcal{S}_F = 0$ вне \mathcal{L}_{η} . Для того, чтобы это уравнение было справедливо и на границе, нужно добавить δ -образный сток, компенсирующий производную от плотности, меняющуюся скачком:

$$\partial_{\tau}\eta + \{(\langle\psi\rangle - \bar{\eta}), \eta\}_{x,y} = \mathcal{S}_F - \delta[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\eta}) \cdot \mathbf{n}_{\eta}] \eta \mathbf{v}_F \cdot \mathbf{n}_{\eta}, \quad (66)$$

где $\mathbf{v}_F \equiv \mathbf{b} \times \nabla (\langle\psi\rangle - \bar{\eta})$ – скорость ведущих центров, \mathbf{n}_{η} – нормаль к поверхности \mathcal{L}_{η} , направленная наружу, и \mathbf{r}_{η} – радиус вектор точки на поверхности \mathcal{L}_{η} , ближайшей к \mathbf{r} . Аналогично модифицируем уравнения (61) и (63):

$$\partial_\tau M + \{\psi, M\}_{x,y} = \mathcal{S}_i - \delta [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_M) \cdot \mathbf{n}_M] M \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_M, \quad (67)$$

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \left(M \frac{d\nabla\psi}{d\tau} \right) + \langle \partial_\tau \eta \rangle + \{\psi, \langle \eta \rangle\}_{x,y} = \\ & = \mathcal{S}_e - \mathcal{S}_i + M \nu_{\parallel} \psi - \nabla \cdot (M \gamma_{\parallel} \nabla \psi) - \\ & - \delta [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_M) \cdot \mathbf{n}_M] M \left(\frac{d\nabla\psi}{d\tau} + \gamma_{\parallel} \nabla \psi \right) \cdot \mathbf{n}_M, \end{aligned} \quad (68)$$

где источники \mathcal{S}_i и \mathcal{S}_e равны нулю вне \mathcal{L}_M , $\mathbf{v} \equiv \mathbf{b} \times \nabla \psi$ – скорость холодной плазмы, \mathbf{n}_M – нормаль к поверхности \mathcal{L}_M , направленная наружу и \mathbf{r}_M – радиус вектор точки на поверхности \mathcal{L}_M .

Теперь, пользуясь алгебраическими правилами (31), получаем уравнения сохранения числа частиц в виде

$$\begin{aligned} \partial_\tau \int M dx dy &= \int \mathcal{S}_i dx dy - \int_{\mathcal{L}_M} M \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_M dl, \\ \partial_\tau \int \eta dx dy &= \int \mathcal{S}_F dx dy - \int_{\mathcal{L}_\eta} \eta \mathbf{v}_F \cdot \mathbf{n}_\eta dl. \end{aligned} \quad (69)$$

Вычисляя сумму свертков $\mathbf{v} = \mathbf{b} \times \nabla \psi$ с уравнением (67), $(-\langle \mathbf{r} \times \mathbf{b} \rangle)$ с уравнением (66) и $(\mathbf{r} \times \mathbf{b})$ с уравнением (68), получаем уравнение сохранения импульса

$$\begin{aligned} & \partial_\tau \int M \mathbf{v} dx dy = - \int M \{ \gamma_{\parallel} \mathbf{v} - (\mathbf{r} \times \mathbf{b}) \nu_{\parallel} \psi \} dx dy + \\ & + \int \{ (\mathbf{r} \times \mathbf{b}) (\mathcal{S}_e - \langle \mathcal{S}_F \rangle - \mathcal{S}_i) + \mathcal{S}_i \mathbf{v} \} dx dy - \int_{\mathcal{L}_M} M \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_M) dl + \\ & + \int_{\mathcal{L}_M} (\mathbf{r} \times \mathbf{b}) M \left\{ \mathbf{b} \times \left(\frac{d\mathbf{v}}{d\tau} + \gamma_{\parallel} \mathbf{v} \right) \right\} \cdot \mathbf{n}_M dl + \int_{\mathcal{L}_\eta} (\mathbf{r} \times \mathbf{b}) \eta \mathbf{v}_F \cdot \mathbf{n}_\eta dl. \end{aligned} \quad (70)$$

Первый интеграл в правой части (70) описывает потери импульса в расширителе. Второй интеграл в правой части есть приток обобщенного импульса ($\sum m\mathbf{v} + e\mathbf{A}/c$) вследствие инжекции. Третий и

четвертый интегралы описывают вынос на лимитер обобщенного импульса холодной плазмы. Последний интеграл — вынос на лимитер обобщенного импульса быстрых ионов.

Поскольку из-за квазинейтральности суммарный обобщенный импульс равен просто суммарному импульсу и суммарная инжекция также предполагается нейтральной, смысл интегралов можно сформулировать в других терминах: второй интеграл в правой части есть сумма объемных сил действующую на плазму вследствие инжекции, третий интеграл описывают вынос импульса на лимитер, а последние два интеграла есть суммарная сила действующая на замыкающиеся через лимитер токи (если лимитер изолирующий, то согласно (30) сумма эти двух интегралов равна нулю).

Вычисляя сумму сверток $\{\mathbf{b} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v})\} = (\mathbf{r} \cdot \nabla \psi)$ с уравнением (67), $\langle \xi \rangle$ с уравнением (66) и $(-\xi)$ с уравнением (68), получаем уравнение сохранения z -компоненты момента импульса

$$\begin{aligned} \partial_\tau \int \mathbf{b} \cdot M(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) d\xi d\theta = & - \int \{M\gamma_{\parallel} \mathbf{b} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) + \xi M\nu_{\parallel} \psi\} d\xi d\theta + \\ & + \int \{\xi (\langle \mathcal{S}_F \rangle + \mathcal{S}_i - \mathcal{S}_e) + \mathbf{b} \cdot \mathcal{S}_i(\mathbf{r} \times \mathbf{v})\} d\xi d\theta - \\ & - \int_{\mathcal{L}_M} \mathbf{b} \cdot M(\mathbf{r} \times \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_M) dl - \\ & - \int_{\mathcal{L}_M} \xi M \mathbf{b} \times \left(\frac{d\mathbf{v}}{d\tau} + \gamma_{\parallel} \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{n}_M dl - \int_{\mathcal{L}_\eta} \langle \xi \rangle \eta \mathbf{v}_F \cdot \mathbf{n}_\eta dl. \end{aligned} \quad (71)$$

Вычисляя сумму сверток $(\mathbf{v}^2/2) = (\nabla \psi)^2/2$ с уравнением (67), $(\langle \psi \rangle - \bar{\eta})$ с уравнением (66) и $(-\psi)$ с уравнением (68), получаем уравнение сохранения энергии

$$\begin{aligned}
& \partial_\tau \int \frac{1}{2} \{ M(\nabla\psi)^2 - (\bar{\eta})^2 \} dx dy = - \int M \{ \nu_{\parallel} \psi^2 + \gamma_{\parallel} (\nabla\psi)^2 \} dx dy + \\
& + \int \left\{ \mathcal{S}_F(\langle\psi\rangle - \bar{\eta}) + \mathcal{S}_i \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \psi \right) - \mathcal{S}_e \psi \right\} dx dy - \int_{\mathcal{L}_M} \frac{M\mathbf{v}^2}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_M dl - \\
& - \int_{\mathcal{L}_M} \psi M \mathbf{b} \times \left(\frac{d\mathbf{v}}{d\tau} + \gamma_{\parallel} \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{n}_M dl - \int_{\mathcal{L}_\eta} (\langle\psi\rangle - \bar{\eta}) \eta \mathbf{v}_F \cdot \mathbf{n}_\eta dl. \quad (72)
\end{aligned}$$

Роли интегралов в правой части уравнений сохранения момента импульса и энергии аналогичны описанным выше для уравнения сохранения момента.

Наконец, интегрируя по площади уравнение (66) и (68), получаем уравнение сохранения заряда

$$\begin{aligned}
\int (\langle\mathcal{S}_F\rangle + \mathcal{S}_i - \mathcal{S}_e - M\nu_{\parallel}\psi) dx dy &= \int_{\mathcal{L}_\eta} \eta \mathbf{v}_F \cdot \mathbf{n}_\eta dl + \\
&+ \int_{\mathcal{L}_M} M \mathbf{b} \times \left(\frac{d\mathbf{v}}{d\tau} + \gamma_{\parallel} \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{n}_M dl. \quad (73)
\end{aligned}$$

Для случая аксиально-симметричного лимитера и $\gamma_{\parallel} = \nu_{\parallel} = 0$, сравнивая (71) и (73), видим, что потери момента импульса через границу равны нулю.

Список литературы

- [1] A.A. Lizunov, A.V. Anikeev, P.A. Bagryansky, D. Den Hartog, G. Fiksel, A.A. Ivanov, S.A. Korepanov, V.V. Maximov, S.A. Murakhtin, V.V. Prikhodko, D.N. Stepanov, *Confinement of high-beta plasma with anisotropic ions in a gas dynamic trap*, // Proc. of 30th European Physics Society Conference on "Plasma physics", St.Peterburg (2003).
- [2] Мирнов В.В. Рютов Д.Д., *Газодинамическая ловушка*, Вопросы Атомной Науки и Техники. Сер. Термоядерный синтез, 1980, вып.1(5), с.57.
- [3] Рютов Д.Д., *Захват быстрых атомов в газодинамической ловушке*, Препринт ИЯФ СО АН СССР, N 85-32. Новосибирск, 1985.
- [4] J.R. Cary, A.N. Kaufman, Phys.Fluids **24**, 1238 (1981).
- [5] D.H.E. Dubin, J.A. Krommes, C. Oberman, and W.W. Lee, Phys.Fluids **26**, 3524 (1983).
- [6] А. Лихтенберг, М. Либерман, *Регулярная и стохастическая динамика*, перевод под ред. Б.В. Чирикова. // М.:Мир, 1984.
- [7] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Т.10 , *Физическая кинетика* //М.:Физматлит, 2001.
- [8] Yu. Tsidulko, R. Pozzoli, M. Rome, *A new 3D PIC Code for the Simulation of the Dynamics of a Non-Neutral Plasma*, to be published in Proceeding of Workshop on Non-Neutral Plasmas, Santa Fe, (2003).
- [9] G.E. Forsythe, M.A. Malcolm, C.B. Moler, *Computer methods for mathematical computations*, Prentice-hall, inc. Englewood cliffs, N.J. 0763, 1977.
- [10] R.C. Davidson, *Theory of Nonneutral Plasmas*, (Benjamin, Reading, MA, 1974.)

- [11] А.В. Тимофеев, *Резонансные эффекты в колебаниях неоднородных течений сплошных сред*, Вопросы теории плазмы: Сб.статей под ред. Б.Б.Кадомцева. М.:Энергоатомиздат, 1989. Вып.17. с. 157–242.
- [12] R.H. Levy, Phys. Fluids **11**, 920 (1968).
- [13] C.F. Driscoll, D.Z. Jin, D.A. Schecter, D.H.M. Dubin, *Vortex dynamics of 2D electron plasmas*, Physica C 369 (2002) p.21.
- [14] Мирнов В.В., Нагорный В.П., Рютов Д.Д., *Газодинамическая ловушка с двухкомпонентной плазмой*. // Препринт ИЯФ СО АН СССР, N 84-40. Новосибирск, 1984.
- [15] Nagornyj V.P., Ryutov D.D., Stupakov G.V., *Flute Instability of Plasma in a Gas-Dynamic Trap*, Nucl. Fusion, v.24, 1421, (1984).
- [16] Kunkel W., Guillory J., // Proc. of the VII Int. Conf. on Phenomena in Ionized Gases, (Belgrade, 1965, Ed. B.Perovic and D.Tocsic), Grad Jevinska Kniga, Belgrade, Yugoslavia, 1966, Vol.2, p.702.
- [17] Берк Г.Л., Рютов Д.Д., Цидулко Ю.А., *Температурно-градиентная неустойчивость плазмы, вызываемая проводящими концевыми поверхностями*, Письма в ЖЭТФ. 1990. Т.52. вып. 1, с.677.
- [18] Berk H.L., Ryutov D.D., Tsidulko Yu.A., *Temperature-gradient instability induced by conducting end walls*, Phys. Fluids, v.B.3, p.1346 (1991).

Ю.А. Цидулко

**Двухмерная динамика
двухкомпонентной плазмы с конечным β**

Yu.A. Tsidulko

**Two-dimensional dynamics
of two-component plasmas with finite β**

ИЯФ 2003-67

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев

Работа поступила 14.10.2003 г.

Сдано в набор 15.10.2003 г.

Подписано в печать 16.10.2003 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2.6 печ.л., 2.1 уч.-изд.л.

Тираж 105 экз. Бесплатно. Заказ № 67

Обработано на IBM PC и отпечатано на
роталпринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН

Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.