

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им. Г.И.Будкера СО РАН

В.В. Вечеславов

ХАОТИЧЕСКИЙ СЛОЙ  
НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСА  
ПРИ НИЗКОЧАСТОТНОМ ВОЗМУЩЕНИИ

ИЯФ 2001-30

НОВОСИБИРСК  
2001

# Хаотический слой нелинейного резонанса при низкочастотном возмущении

*В.В. Вечеславов*

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера  
630090 Новосибирск, Россия

## Аннотация

Обсуждаются условия, при которых хаотический слой нелинейного резонанса описывается низкочастотным сепаратрисным отображением. В этом случае аккуратная оценка размеров слоя требует знания картины взаимного расположения резонансов на его краю, для построения которой используются инварианты сепаратрисного отображения первых трех порядков. С помощью критерия перекрытия резонансов прослеживается динамика изменения размеров слоя при изменении амплитуды отображения. Сравниваются результаты прямого счета и анализа инвариантов. Отмечаются нерешенные вопросы.

PACS 05.45.+b

*Ключевые слова:* Гамильтонова система; Хаотический слой; Сепаратрисное отображение; Инварианты.

Email: [vecheslavov@inp.nsk.su](mailto:vecheslavov@inp.nsk.su)

© *Институт ядерной физики  
им. Г.И. Будкера СО РАН, Россия*

---

## 1 Введение

Исследования условий возникновения и количественных характеристик хаотического слоя, образующегося в окрестности сепаратрисы нелинейного резонанса в присутствии других резонансов является одной из центральных и все еще далеких от полного решения проблем современной нелинейной динамики [1,2,3]. Во многих случаях гамильтониан задачи удастся представить в виде маятника (основной резонанс) и двух возмущающих резонансов

$$H(y, p, t) = \frac{p^2}{2} + \omega^2 \cos(y) + V(y, t), \quad V(y, t) = \varepsilon_1 \cos(y - \Omega_1 t) + \varepsilon_2 \cos(y - \Omega_2 t). \quad (1)$$

Возмущение считается слабым  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ll 1$ , частоты  $|\Omega_1|, |\Omega_2| > \omega$  не обязательно высокие, могут иметь как одинаковые так и разные знаки и предполагается, что резонансы системы (1) не перекрываются.

Условимся хаотический слой основного резонанса системы (1) называть основным хаотическим слоем. В основном хаотическом слое необходимо выделить три части: верхнюю (фаза  $y$  вращается сверху  $p > 0$ ), среднюю (фаза колеблется) и нижнюю (фаза вращается снизу  $p < 0$ ). Важно подчеркнуть, что в общем случае несимметричного возмущения размеры  $w_u, w_m$  и  $w_l$  этих частей слоя могут быть существенно различными (здесь и далее  $w = p^2/2\omega^2 + \cos y - 1$  безразмерное отклонение от невозмущенной сепаратрисы по энергии) [4,5,6].

Фактическое определение ширины исследуемой части основного слоя может быть выполнено двумя способами. Первый – отыскание минимального  $T_{min}$  периода движения ( $T$  есть интервал времени между соседними моментами пересечения орбитой устойчивой фазы  $y = \pi$ ), после чего максимальное отклонение от невозмущенной сепаратрисы вычисляется по формуле  $w_{max} \approx 32 \exp(-\omega T_{min})$  [1]. Второй способ – построение введенного в работе [7] так называемого сепаратрисного отображения, которое приближенно описывает динамику системы вблизи сепаратрисы в моменты прохождения положения устойчивого равновесия. Отметим, что

на практике второй путь приводит к цели значительно быстрее первого и потому используется чаще.

В настоящее время вопрос о корректном построении сепаратрисного отображения и о размерах основного хаотического слоя можно считать надежно решенным только для симметричного высокочастотного возмущения  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ ,  $\Omega_1/\omega = -\Omega_2/\omega = \lambda \gg 1$ . Чириков, используя свой критерий перекрытия резонансов и свойства стандартного отображения показал (см. [1]), что в этом случае сепаратрисное отображение имеет вид

$$\bar{w} = w + W \sin(x), \quad \bar{x} = x + \lambda \ln \frac{32}{|\bar{w}|} \pmod{2\pi}, \quad (2)$$

где амплитуда определяется выражением

$$W = 8\pi\varepsilon\lambda^2 e^{-\pi\lambda/2} \quad (3)$$

и размеры всех трех частей слоя одинаковы

$$w_u = w_m = w_l \approx \lambda W \left(1 + \frac{4\delta}{\lambda}\right), \quad 0 \leq \delta \leq 1. \quad (4)$$

Входящая в последнюю формулу поправка  $4\delta/\lambda$  очень сложно зависит от  $W$  и  $\lambda$  (см. раздел 4 ниже) и определяется условиями перекрытия резонансов на краю слоя. Для больших значений  $\lambda \gg 1$  ею обычно просто пренебрегают, но при низкочастотном возмущении или более аккуратных расчетах так поступать нельзя и возникает трудная задача построения и анализа картины расположения резонансов на периферии слоя. Отметим, что случай, когда частоты  $\Omega_1, \Omega_2$  системы (1) являются низкими встречается редко и потому он не привлекал к себе большого внимания исследователей. Однако, сравнительно недавно ситуация заметно изменилась в связи с обнаружением аномально сильного влияния на формирование основного хаотического слоя так называемых вторичных гармоник и в следующем разделе мы рассмотрим относящиеся сюда факты.

## 2 Вторичные гармоника в сепаратрисном отображении

Начатые в [4,5] исследования общего несимметричного возмущения системы (1) сразу же показали, что в спектре сепаратрисного отображения помимо гармоник первичных (явно входящих в гамильтониан (1)) частот  $\Omega_1, \Omega_2$  присутствуют также вторичные с частотами  $\Omega_+ = \Omega_1 + \Omega_2$  и

$\Omega_- = \Omega_2 - \Omega_1$ . Еще более неожиданным оказался тот факт, что в силу экспоненциальной зависимости от частоты (см.(3)) даже очень слабые, но низкочастотные вторичные гармоники при некоторых условиях могут практически полностью определять размер какой-либо части хаотического слоя (подробности в [4,5,6]). В этом случае сепаратрисное отображение этой части слоя можно представить в одночастотной форме (2), но входящий в него параметр  $\lambda$  уже никак нельзя считать большим. Все выглядит так, как будто бы нет двух высокочастотных возмущающих гармоник, а есть одна низкочастотная (это предположение получило полное численное подтверждение в работе [5]) и для выяснения размеров хаотического слоя необходимо уметь строить и анализировать низкочастотное сепаратрисное отображение.

Первая трудность связана с тем, что амплитуды вторичных гармоник заранее неизвестны. Строгая теория здесь пока отсутствует, но в работе [4] предложен приближенный подход и рекомендованы следующие аналитические выражения для амплитуд сепаратрисного отображения  $W_+$  и  $W_-$  на сумме и разности первичных частот, соответственно:

$$W_+ = \frac{4\pi}{3} a_+ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left[ \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} \right] \frac{e^{\pi\lambda_+/2}}{\sinh(\pi\lambda_+)} \lambda_+^2 (\lambda_+^2 - 2), \quad (5)$$

$$W_- = -\frac{\pi a_- \varepsilon_1 \varepsilon_2}{\cosh(\pi\lambda_-/2)} \left| \left[ \frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_2^2} \right] \right|, \quad (6)$$

где обозначено  $\lambda_1 = \Omega_1/\omega$ ,  $\lambda_2 = \Omega_2/\omega$ ,  $\lambda_+ = (\Omega_1 + \Omega_2)/\omega$ ,  $\lambda_- = (\Omega_2 - \Omega_1)/\omega$  и введены подгоночные коэффициенты  $a_+$  и  $a_-$ . В работе [5] показано, что формулы (5),(6) весьма неплохо согласуются с численными данными, если принять  $a_+ = 0.473$  и  $a_- = 1.35$ , хотя природа этих поправок остается неясной. Там же приведены области значений параметров, в которых именно вторичная гармоника полностью определяет размер  $w_u$  верхней части основного хаотического слоя. Заметим, что на практике наибольший интерес представляют именно внешние (верхняя и нижняя) части слоя, поскольку они определяют перекрытие соседних резонансов и участвуют в образовании глобального хаоса.

Как отмечалось выше, аккуратная оценка размера слоя требует знания картины взаимного расположения резонансов на его краю. Такая картина может быть получена без численного отыскания траекторий движения, если известны так называемые резонансные инварианты, построение которых для системы (2) обсуждается ниже.

### 3 Резонансные инварианты

Сепаратрисное отображение (2), как и широко известное стандартное отображение Чирикова, принадлежит к классу так называемых явных отображений поворота вида [2]

$$\bar{J} = J - \xi \frac{dQ(\theta)}{d\theta}, \quad \bar{\theta} = \theta + 2\pi\nu(\bar{J}), \quad (7)$$

где  $J, \theta$  переменные действие-угол,  $\nu(J)$  частота невозмущенного движения и  $Q(\theta + 2\pi) = Q(\theta)$  в общем случае является тригонометрическим полиномом. Разностные уравнения (7), как известно, во всех отношениях эквивалентны непрерывным уравнениям Гамильтона с возмущением в форме толчков:

$$\dot{\theta} = \nu(J), \quad \dot{J} = -\xi \delta_*(t) \frac{dQ(\theta)}{d\theta}, \quad (8)$$

где  $\delta_*(t) = [1 + \sum_{n \geq 1} \cos(nt)]/2\pi$  – периодическая дельта-функция [1,2].

Сепаратрисному отображению (2) отвечают зависимости

$$Q(\theta) = \cos(\theta), \quad \nu(J) = \frac{\lambda}{2\pi} \ln \frac{32}{|J|}, \quad (9)$$

в то время как для стандартного отображения имеем

$$Q(\theta) = \cos(\theta), \quad \nu(J) = J. \quad (10)$$

Напомним, что картина расположения целых резонансов ( $\nu(J_n) = n$  – целое число) на фазовой плоскости  $J, \theta$  для отображений (9) и (10) существенно различна. У стандартного отображения расстояние между резонансами  $\delta J_n = J_{n+1} - J_n$  не зависит от  $J_n$  (отсюда второе его название – однородная модель), а у сепаратрисного отображения зависит.

Если имеют место оценки

$$\delta J_n \ll J_n, \quad \lambda \gg 1, \quad (11)$$

то сепаратрисное отображение локально (в окрестности резонанса  $J_n$ ) переходит в стандартное (этот факт был использован в [1] при выводе формулы (4)).

В работе [8] инвариантом порядка  $m$  названа функция динамических переменных и времени вида

$$S_m(J(t), \theta(t), t, \xi) = r_0(J) + \sum_{n=1}^m \frac{\xi^n}{n!} G_n(J, \theta, t), \quad (12)$$

для которой вдоль истинных траекторий системы (8) выполнено условие

$$\frac{D}{Dt}S_m(t) = \mathcal{O}(\xi^{m+1}). \quad (13)$$

В последнем выражении  $D/Dt$  – обобщенная производная, равная сумме обычной производной и обусловленной разрывами компоненты [9].

Периодическую орбиту и отвечающий ей резонанс принято обозначать отношением целых чисел  $N : M$ , где  $M$  – число итераций отображения на  $N$  периодов орбиты [2]. В [8] построены инварианты первых трех порядков стандартного отображения, описывающие целые  $M = 1$  и дробные  $M = 2, 3$  резонансы. Там же показано, что величины всех входящих в (12) слагаемых сохраняются на интервалах времени между толчками и претерпевают скачкообразные изменения только в моменты толчков. Следовательно, обычная производная от  $S_m(t)$  в (12) всюду равна нулю и условие (13) надо понимать как ограничение на величину разрыва первого рода ступенчатой функции.

Потенциалы у систем (9) и (10) одинаковы  $Q(\theta) = \cos(\theta)$  и это позволяет переписать полученные в [8] соотношения в форме, одинаково пригодной для обоих этих отображений:

$$G_1(J, \theta, t) = \frac{r'_0(J)}{2 \sin(\pi\nu(J))} \cos \Omega, \quad (14)$$

$$G_2(J, \theta, t) = \frac{a'_1(J)}{4 \sin(2\pi\nu(J))} \cos 2\Omega, \quad (15)$$

$$G_3(J, \theta, t) = \frac{r'''_0(J) + 3a'_2(J)}{16 \sin(3\pi\nu(J))} \cos 3\Omega - 3 \frac{r'''_0(J) + a'_2(J)}{16 \sin(\pi\nu(J))} \cos \Omega. \quad (16)$$

В последних формулах штрих обозначает производную по  $J$  и использованы зависимости

$$\begin{aligned} \Omega &= \theta + (\pi - t_*)\nu(J), & a_1(J) &= r'_0(J) \cot(\pi\nu(J)), \\ a_2(J) &= a'_1(J) \cot(2\pi\nu(J)), \end{aligned} \quad (17)$$

где  $0 < t_* \leq 2\pi$  – локальное время между толчками.

Выражения (14)-(16) инвариантов первых трех порядков содержат малые знаменатели. Для их подавления надо, следуя предложенному в работе [10] Дуннетом, Лейнгом и Тейлором методу (ДЛТ), распорядиться входящим в формулу (12) инвариантом нулевого порядка  $r_0(J)$  (точнее,

его первой производной  $r'_0(J)$ ). Оказалось, что выбор  $r'_0(J)$  не может быть сделан универсальным образом и зависит от номера  $m$ . ДЛТ – инвариант порядка  $m$  правильно передает топологию только "своих" резонансов с  $M = m$ , которые впервые появляются именно в этом порядке и отвечает за "свою" часть фазового пространства (подробности в [8]). Наши исследования показали, что предложенные в [8] для стандартного отображения конкретные зависимости  $r'_0(J)$  можно использовать и для сепаратрисного отображения (2). Точные расчетные формулы в исходных переменных  $w, x$  для этого случая приведены в Приложении.

Отметим, что инварианты сепаратрисного отображения первых двух порядков  $S_1$  и  $S_2$  были впервые, насколько нам известно, введены в [6]. В настоящей работе мы добавляем к ним  $S_3$  и, учитывая труднодоступность для российского читателя публикации [6], приводим полную информацию по всем трем инвариантам.

## 4 Сопоставление результатов прямого счета и анализа инвариантов

Длительное прямое итерирование отображения (2) позволяет найти размеры всех частей основного хаотического слоя и проследить их зависимость от величин амплитуды  $W$  и частоты  $\lambda$ . Вместе с тем, хотелось бы не только существенно облегчить этот процесс, но и уметь правдоподобно прогнозировать его результаты. Использование приведенных в Приложении формул (1.1)–(1.3) для инвариантов сепаратрисного отображения в сочетании с критерием перекрытия резонансов предоставляет, по нашему мнению, обе эти возможности. Их удобно продемонстрировать на конкретном примере.

В работе [5] исследовалась система (1) в следующем диапазоне параметров

$$\omega = 1.0, \quad 0.01 \leq \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \leq 0.5, \quad 8.0 \leq \Omega_1 \leq 18.0, \quad \Omega_2 = -10.0. \quad (17)$$

Численный счет и спектральный анализ сепаратрисного отображения показали, что наиболее сильная вторичная гармоника на сумме частот возникает при  $\Omega_+ = \Omega_1 + \Omega_2 \approx 3.0$ . При этом ее вклад в амплитуду сепаратрисного отображения верхней части слоя в несколько сотен раз превышает суммарный вклад от первичных частот. По этой причине объектом нашего дальнейшего рассмотрения станет отображение (2) с фиксированным параметром  $\lambda = 3.0$  и понятно, что поправкой  $4\delta/\lambda$  в формуле (4)



пренебрегать нельзя. Будем рассматривать только верхнюю часть слоя с шириной  $w_u$  и на основании формулы (4) введем величину

$$D_u(W) = \frac{w_u(W)}{\lambda W}, \quad (18)$$

которая является нормированным размером этой части [1]. В высокочастотном пределе ( $\lambda \rightarrow \infty$ )  $D_u(W)$  перестает зависеть от  $W$  и стремится к тождественной единице.

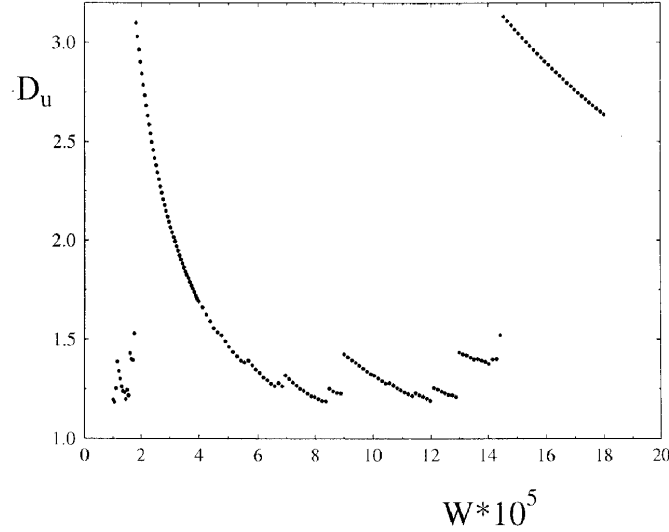


Рис. 1: Нормированная ширина (18) верхней части основного хаотического слоя системы (1) как функция амплитуды  $W$  сепаратрисного отображения (2) при  $\lambda = 3.0$ .

На рис.1 приведена полученная численно итерированием отображения (2) зависимость  $D_u(W)$  (число итераций для каждой точки рисунка равно  $10^8$ ), которая содержит много разрывов. Некоторые из этих разрывов отчетливо видны, другие для своего обнаружения требуют увеличения масштаба. Такая структура в рамках современной динамики объясняется тем, что с ростом  $W$  происходит последовательное разрушение инвариантных кривых с иррациональными числами вращения и образование на их месте так называемых "кантор-торов"[11]. Если такая кривая является границей между основным хаотическим слоем и ближайшим к нему резонансом  $N:M$  сепаратрисного отображения, то при ее

разрушении происходит слияние этих объектов и размер слоя прирастает на конечную величину – фазовый объем присоединившегося резонанса. Точное значение амплитуды отображения  $W$ , при котором это происходит удобно называть пороговым и обозначать через  $W(N : M)$

Как отмечено в [1], максимальное увеличение размера происходит при перекрытии основного слоя с целым резонансом сепаратрисного отображения – на рис.1 видны два таких случая в окрестностях значений  $W \approx 1.81 \cdot 10^{-5}$  (резонанс 6:1) и  $W \approx 1.45 \cdot 10^{-4}$  (резонанс 5:1). Рассмотрим подробнее первый из них.

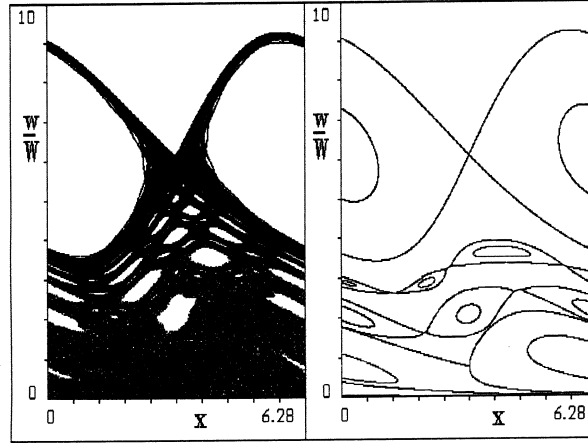


Рис. 2: Параметры сепаратрисного отображения  $W = 1.83 \cdot 10^{-5}$  и  $\lambda = 3.0$ . Слева – верхняя часть основного хаотического слоя сразу же после его перекрытия с целым резонансом 6:1. Справа – инварианты резонансов (сверху вниз) 6:1, 19:3, 13:2 и 7:1.

На левой половине рис.2 показан основной хаотический слой сразу после того, как к нему присоединился целый резонанс 6:1. В хаотическом море видны, в частности, островки устойчивости резонансов 19:3, 13:2 и 7:1. На правой половине рисунка нанесены линии уровня инвариантов этих четырех резонансов, построенные по формулам (1.1)-(1.3) Приложения (резонанс 20:3 здесь не представлен, поскольку линии его инварианта пересекаются с линиями инвариантов 13:2 и 7:1 и рисунок получается некрасивый).

С помощью картины расположения инвариантов можно выполнить некоторые оценки. Так, найденный по максимальной ординате гранично-

го инварианта 6:1 нормированный размер верхней части основного слоя равен  $D_u \approx 3.06$  при точном значении 3.10. Линия инварианта 19:3 позволяет оценить размер слоя до перекрытия и получается величина 1.34 при точном значении 1.53. Последняя оценка оказывается существенно более грубой, чем предыдущая и это можно объяснить следующим образом. Инварианты, как и любое другое аналитическое описание, принципиально не могут передать хаотическую компоненту движения (в частности, учесть ширины хаотических слоев резонансов). Мы выполнили измерение не на краю, а внутри основного слоя, где влияние этой компоненты достаточно велико и получили искаженный результат. На рис.2 представлены два соседних целых резонанса (нижний 7:1 и верхний 6:1) и потому можно сказать, что этот рисунок фиксирует момент их перекрытия. Видно, что эти резонансы резко неодинаковы, что является прямым следствием отмечавшейся в разделе 3 неоднородности сепаратрисного отображения (напомним, что у стандартного отображения все целые резонансы одинаковы). Наша ближайшая задача – проследить динамику перекрытия целых резонансов 6:1 и 5:1, сравнивая результаты прямого счета и анализа картины расположения линий инвариантов.

Заметно выше верхней границы рис.2 расположены резонансы сепаратрисного отображения (по порядку снизу вверх) 17:3, 11:2, 16:3 и 5:1. По мере роста величины  $W$  их фазовые области будут "тонуть" в основном хаотическом слое, причем присоединение к нему целого резонанса 5:1 вновь будет сопровождаться большим скачком (правый случай на рис.1).

На рис.3 показана ситуация при  $W = 6.7 \cdot 10^{-5}$  непосредственно перед объединением основного слоя с резонансом 17:3. С помощью инвариантов можно, как и выше, получить оценку размера слоя до перекрытия и величину ожидаемого скачка, обе эти величины разумно согласуются с данными рис.1. Исследуя взаимное расположение инвариантов в окрестности значения  $W = 6.7 \cdot 10^{-5}$  и применяя критерий перекрытия резонансов можно также предположить, что перекрытие должно произойти в интервале  $6.0 \cdot 10^{-5} < W < 7.5 \cdot 10^{-5}$  – точное значение оказалось равно  $W(17 : 3) = 6.954 \cdot 10^{-5}$ . Видно также, что до перекрытия с резонансом 11:2 еще далеко (оно случится при  $W(11 : 2) = 9.009 \cdot 10^{-5}$ , см. рис.1).

На рис.4 представлена ситуация перед объединением основного слоя с очередным целым резонансом 5:1. На картине инвариантов представлены оба целых резонанса (вверху 5:1, внизу 6:1) и потому мы говорим, что рис.4 описывает последнюю стадию в их перекрытии. Здесь также удалось указать интервал  $1.35 \cdot 10^{-4} < W < 1.5 \cdot 10^{-4}$ , внутри которого было найдено пороговое значение  $W(5 : 1) = 1.453 \cdot 10^{-4}$ .

Выше мы ограничились единственным значением частоты  $\lambda = 3.0$  и

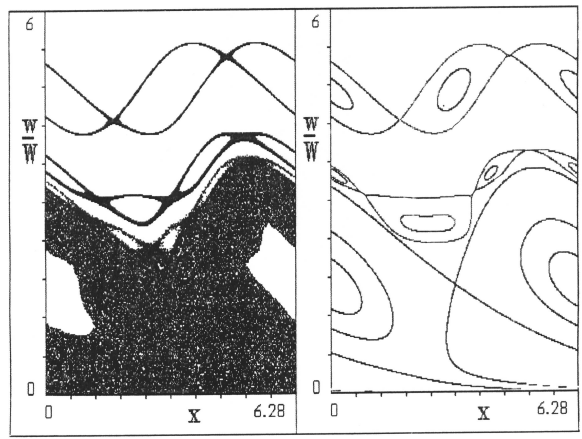


Рис. 3: Параметры сепаратрисного отображения  $W = 6.7 \cdot 10^{-5}$  и  $\lambda = 3.0$ . Слева – три хаотические траектории: нижняя является основным хаотическим слоем, две верхние есть хаотические слои резонансов 17:3 и 11:2 сепаратрисного отображения. Ситуация непосредственно перед перекрытием основного слоя с резонансом 17:3. Справа – инварианты резонансов (снизу вверх) 6:1, 17:3 и 11:2.

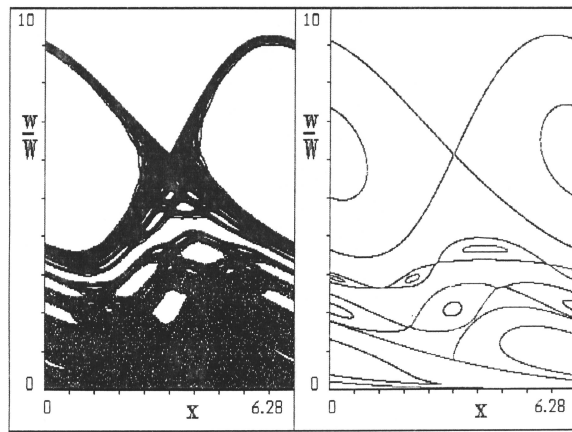


Рис. 4: Параметры сепаратрисного отображения  $W = 1.44 \cdot 10^{-4}$  и  $\lambda = 3.0$ . Слева – две хаотические траектории: нижняя является основным хаотическим слоем, верхняя есть хаотический слой целого резонанса 5:1 сепаратрисного отображения, ситуация непосредственно перед их перекрытием. Справа – инварианты резонансов (сверху вниз) 5:1, 16:3, 11:2 и 6:1.

рассмотрели динамику одного этапа перекрытия целых резонансов сепаратрисного отображения (2). Исследования, по-видимому, следует продолжить и, в частности, проследить переход от низких частот к асимптотическому пределу  $\lambda \rightarrow \infty$ . Было бы полезно также приобрести определенный опыт в использовании эффективного критерия перекрытия резонансов применительно к обсуждаемой проблеме и научиться более аккуратно находить пороговые значения параметра отображения  $W(N : M)$ .

## 5 Заключение

Из данных предыдущего раздела видно, что ДЛТ – инварианты очень неплохо передают топологию "своих" резонансов и это позволяет использовать их для получения надежных оценок размеров основного хаотического слоя. С помощью известного критерия перекрытия резонансов Чирикова и картины взаимного расположения инвариантов удастся найти интервал значений параметра  $W$ , "подозрительный" в смысле возможного объединения основного хаотического слоя с ближайшим к нему резонансом  $N:M$  сепаратрисного отображения. Для отыскания точного отвечающего этому событию порогового значения  $W(N : M)$  достаточно провести численное исследование лишь внутри указанного интервала.

Заметим, что вычерчивание полной картины инвариантов на фазовой плоскости не всегда обязательно. Для приближенных оценок достаточно бывает найти длины и взаимное расположение принадлежащих различным резонансам отрезков на линии  $x = 0$ , которая является доминантной (на ней лежат центры всех резонансов).

Особо надо подчеркнуть, что возможное использование инвариантов на этом не кончается и они могут составить основу достаточно продвинутой теории. В Приложении мы записывали  $S_m(w, x)$  в исходных переменных  $w, x$ , но можно построить производящие функции  $\mathcal{F}(I, x)$  канонического преобразования к другим переменным  $I, \psi$  и найти инвариант  $S_m(I)$  как функцию только нового действия  $I$ . Это, во-первых, заметно упрощает исследование самого инварианта, поскольку линия уровня допускает явное представление в виде  $I(w, x) = const$ . Во-вторых, это позволяет построить гамильтонианы конкретных резонансов и находить, например, частоты движений. Соответствующая техника для стандартного отображения описана в [8].

Вместе с тем, теория ДЛТ – инвариантов никогда, к сожалению, не была предметом внимания профессиональных математиков и потому при их построении большую роль играет элемент угадывания (именно так бы-

ли найдены приведенные в Приложении устраняющие особенности зависимости  $r'_0(w)$ . Это обстоятельство чрезвычайно затрудняет продвижение в более высокие порядки  $m$ . Другим препятствием является прогрессивно возрастающее с ростом  $m$  усложнение аналитических выражений. В литературе (см.[2,8]) уже отмечалась возможная связь этих фактов с тем, что в методе ДЛТ устраняются все полюса всех резонансов  $M = m$  и инвариант  $S_m$  оказывается аналитической функцией во всем фазовом пространстве. Вполне возможно, что отказ от требования такой глобальной аналитичности поможет облегчить решение обсуждаемых проблем [8]. Заметим, что пример построения инварианта первого порядка для случая, когда из всего счетного множества целых резонансов надо было устранить особенности лишь у нескольких соседних содержится в [12].

Одна из целей настоящей работы – еще раз привлечь внимание исследователей к методу ДЛТ построения резонансных инвариантов, который, по нашему мнению, заслуживает дальнейшего совершенствования и развития.

Автор глубоко признателен Б.В.Чирикову и Э.А.Бибердорфу за обсуждения и советы. Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 01-02-16836).

## Приложение

### Три первых инварианта отображения (2)

Для фактического построения инвариантов сепаратрисного отображения (2) удобно возвратиться от  $J, \theta$  к прежним переменным  $w, x$  и потому во всех формулах данного Приложения штрих означает производную по  $w$ . Обнаружилось, что прямое использование формул (14)-(17) в отношении этого отображения сильно затруднено из-за вычислительной неустойчивости при построении линий уровня инвариантов. Положение изменилось к лучшему, когда вместо  $w$  была введена новая переменная вида

$$z(w) = \frac{\lambda}{2} \ln \frac{32}{|w|}.$$

Чтобы картина резонансов на фазовой плоскости  $w, x$  получилась правильной следует положить входящий в (17) момент наблюдения  $t_*$  равным  $2\pi$ .

Предложенные в [8] для подавления малых знаменателей в случае стандартного отображения конкретные зависимости  $r'_0(w)$  оказались пригодны и для сепаратрисного отображения (2). В наших обозначениях

имеем для инварианта первого порядка

$$r'_0 = \sin z,$$

для инварианта второго порядка

$$r'_0 = \sin^2 z \sin 2z = \frac{2 \sin 2z - \sin 4z}{4},$$

и для инварианта третьего порядка

$$r'_0 = \sin^2 z \sin^2 2z \sin 3z = \frac{1}{16}(\sin z + 3 \sin 3z - \sin 5z - 2 \sin 7z + \sin 9z).$$

Ниже выписаны полные выражения первых трех инвариантов сепаратрисного отображения (2)

$$S_1(z(w), x) = e^{-2z/\lambda} \left[ \sin z + \frac{\lambda}{2} \cos z \right] + \frac{W}{64} \left[ 1 + \frac{\lambda^2}{4} \right] \cos(x - z), \quad (1.1)$$

$$S_2(z(w), x) = 16e^{-2z/\lambda} \left[ \frac{\sin 2z + \lambda \cos 2z}{1 + \lambda^2} - \frac{\sin 4z + 2\lambda \cos 4z}{2(1 + 4\lambda^2)} \right] + \frac{W}{2} \sin z \sin 2z \cos(x - z) - \lambda e^{2z/\lambda} \left( \frac{W}{16} \right)^2 \cos 2z \cos 2(x - z), \quad (1.2)$$

$$S_3(z(w), x) = 4e^{-2z/\lambda} f_0(z) + \frac{W}{2} \sin z \sin^2 2z \sin 3z \cos(x - z) - 3\lambda e^{2z/\lambda} \left( \frac{W}{32} \right)^2 \sin z \sin 2z (2 + 3 \cos 2z + 3 \cos 4z) \cos 2(x - z) + \frac{\lambda}{6} \left( \frac{e^{2z/\lambda}}{512} \right)^2 W^3 [f_1(z) \cos 3(x - z) - 3f_2(z) \cos(x - z)]. \quad (1.3)$$

В последнем выражении введены обозначения:

$$f_0(z) = g(z) + 3g(3z) - g(5z) - 2g(7z) + g(9z), \quad g(nz) = \frac{2 \sin nz + n\lambda \cos nz}{1 + (n\lambda/2)^2},$$

$$f_1(z) = \lambda(27 + 35 \cos 2z + 49 \cos 4z + 81 \cos 6z) + 14 \sin 2z + 14 \sin 4z + 18 \sin 6z,$$

$$f_2(z) = \lambda(23 + 51 \cos 2z + 69 \cos 4z + 49 \cos 6z) + 10 \sin 2z + 22 \sin 4z + 14 \sin 6z.$$

Уместно заметить, что при выполнении условий (11) инварианты сепаратрисного отображения переходят в инварианты стандартного отображения.

## Список литературы

- [1] *B.V. Chirikov*. Phys. Reports, **52**, 263 (1979).
- [2] *A. Lichtenberg and M. Leiberman*. Regular and Chaotic Dynamics, Springer (1992).
- [3] *Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев*. Введение в нелинейную физику, Наука, Москва (1988).
- [4] *В.В. Вечеславов*. ЖЭТФ, **109** 2208 (1996).
- [5] *В.В. Вечеславов*. ПЖЭТФ, **63** 989 (1996).
- [6] *V.V. Vecheslavov*. Physica D, **131** 55 (1999).
- [7] *Г.М. Заславский, Н.Н. Филопенко*. ЖЭТФ, **54**, 1590 (1968).
- [8] *В.В. Вечеславов*. ЖТФ, **58** 20 (1988).
- [9] *И.М. Гельфонд, Г.Е. Шилов*. Обобщенные функции и действия над ними. М.: ГИФМЛ, 1958, 439с.
- [10] *D.A. Dunnet, E.W. Laing, J.B. Taylor*. J. Math. Phys., **9**, No.11 (1968) p.1819.
- [11] *R.S. MacKay, J.D. Meiss, I.C. Percival*. Physica D, **13** 55 (1984).
- [12] *В.В. Вечеславов*. ЖТФ, **57** 896 (1987).



*V.V. Vecheslavov*

**Хаотический слой нелинейного резонанса  
при низкочастотном возмущении**

*V.V. Vecheslavov*

**Chaotic layer of a nonlinear resonance  
driven by low-frequency perturbation**

ИЯФ 2001-30

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев

Работа поступила 23.04.2000 г.

---

Сдано в набор 25.04.2001 г.

Подписано в печать 26.04.2001 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1.5 печ.л., 1.2 уч.-изд.л.

Тираж 90 экз. Бесплатно. Заказ № 30

---

Обработано на IBM PC и отпечатано на  
ротапринтере ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН

*Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*