

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им. Г.И.Будкера СО РАН

В.В. Вечеславов, О.В. Григорьева

ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОГОПОЛЮСНЫХ ЛИНЗ
С ИДЕАЛЬНОЙ ЦЕНТРАЛЬНОЙ
ЧАСТЬЮ ПОЛЮСА

ИЯФ 2001-1

НОВОСИБИРСК
2001

Характеристики многополюсных линз с идеальной центральной частью полюса

В.В. Вечеславов, О.В. Григорьева

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера
630090 Новосибирск, Россия

Аннотация

Описывается использующий технику конформных отображений метод вычисления потенциала и поля многополюсных линз, у которых центральная часть полюса образована идеальной кривой. Проводится сравнение характеристик таких линз с линзами, профиль которых является многоугольником. Показано, что при относительно широких полюсах профили с идеальной центральной частью обеспечивают более высокое качество поля, чем многоугольные.

Email: vecheslavov@inp.nsk.su

© *Институт ядерной физики
им. Г.И. Будкера СО РАН, Россия*

1. В современной технике формирования и транспортировки потоков заряженных частиц наряду с широким использованием квадрупольных линз (число пар полюсов $P=2$) применяются также секступоли ($P=3$) и октуполи ($P=4$) [1,2,3]. Качество создаваемого линзой поля в решающей мере определяется геометрической формой полюса. Для любой P -линзы можно указать теоретический профиль, дающий "идеальное" поле – линейное для квадрупольной, квадратичное и кубичное для секступольной и октупольной, соответственно. Однако, как известно, идеальные профили не могут быть реализованы и потому создаваемые линзами поля всегда содержат наряду с основной нежелательные высшие гармоники [2,3].

В практике поиска "хороших" профилей (библиографию см. в [2,3]) четко обозначилась тенденция строить линзы двух типов: 1) оборванный идеальный профиль заменен подходящим приближением (например, частью окружности) и 2) профиль линзы является (или допускает аккуратную аппроксимацию) многоугольником. Первая удачная попытка расчета линз второго типа сделана в работе Плотникова [4], где с помощью конформных отображений был найден плоский профиль квадрупольной линзы с подавленной шестой гармоникой потенциала. Заметим, что число подлежащих определению вершин многоугольника при этом было равно всего двум. Недавно использованная в [4] техника вычислений получила значительное дальнейшее развитие, что дало возможность аппроксимировать сектор линзы (принадлежащая одному полюсу часть поперечного сечения) многоугольником с числом вершин до десяти и более [5].

В настоящей работе мы возвращаемся к линзам первого типа и рассматриваем профили, где центральная часть полюса строго

следует идеальной кривой. Угловой размер этой части и геометрия шиммы подбираются так, чтобы сделать линзу оптимальной. Здесь надо пояснить, что качество создаваемого линзой поля принято оценивать двумя в общем случае независимыми показателями – максимальным (в пределах рабочей апертуры) отклонением поля от идеального и/или величиной амплитуды первой неосновной гармоники потенциала. Поскольку сегодня нет ясности, какой из этих показателей важнее, мы проводим оптимизацию по каждому из них отдельно (см. п.3). Ниже предполагается, что выполнены обычные для аналитических методов условия: линза длинная, имеет место полная симметрия и не учитывается насыщение железа.

2. На рис.1 в качестве примера показан сектор квадрупольа, где центральная часть полюса является идеальной кривой – гиперболой. Здесь нельзя, как это делалось в работе [5], представить эту фигуру многоугольником, поскольку замена гиперболы ломаной с относительно небольшим числом вершин грубо исказит картину

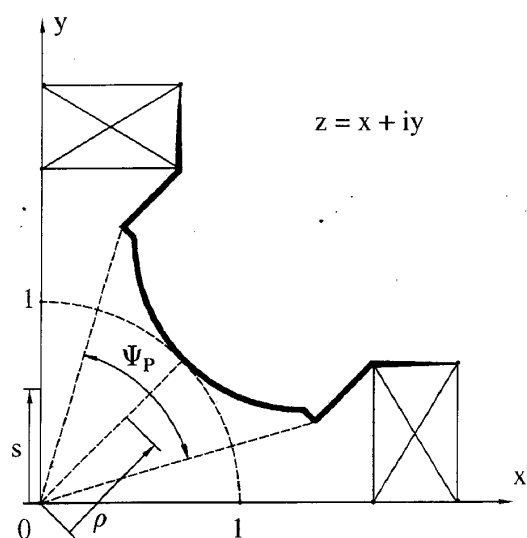


Рис. 1: Сектор квадрупольа с идеальной центральной частью полюса.

поля. Предлагается поступить следующим образом. В Приложении 3 работы [5] показано, что функция

$$\delta(z) = \eta(z) + i\xi(z) = (z \exp(-i\alpha_P))^P, \quad \alpha_P = \pi(P - 2)/4P \quad (1)$$

отображает сектор идеальной P -линзы на полосу (двуугольник) в плоскости промежуточной переменной δ . Экспоненциальный множитель введен в (1) для того, чтобы сделать биссектрису первого квадранта $\varphi = \pi/4$ на плоскости z линией симметрии сектора линзы при любом числе пар полюсов P .

Если применить преобразование (1) в отношении сектора реальной P -линзы, то на плоскости δ возникает замкнутая фигура, у которой центральная часть – точный образ идеального участка профиля – отрезок горизонтальной прямой, а остальные звенья в общем случае кривые (см.рис.2а). Эту фигуру можно достаточно аккуратно представить многоугольником с общим числом вершин $2M + 1$, поскольку такая аппроксимация задевает только периферию линзы. Отображение верхней полуплоскости комплексной переменной $w = u + iv$ на этот многоугольник осуществляет интеграл Кристоффеля–Шварца, который с учетом симметрии рассматриваемой области записывается в виде [5,6]:

$$\delta(w) = C_0 \int_{w_0}^w \prod_{m=1}^M (w^2 - a_m^2)^{\beta_m} dw + C_1, \quad (2)$$

где $\beta_m = \alpha_m - 1$, α_m – измеренные в долях π внутренние по отношению к области углы, a_m – точки вещественной оси u плоскости w , являющиеся образами вершин многоугольника A_m .

Процедура выполнения конформного отображения полностью совпадает с описанной в [5] для многоугольного профиля, что позволяет найти все входящие в отображение (2) параметры. Вместе с тем, построение распределений потенциала и индукции, а также вычисление спектра потенциала (см. Приложение) из-за наличия промежуточного преобразования на плоскость δ выполняются по-другому.

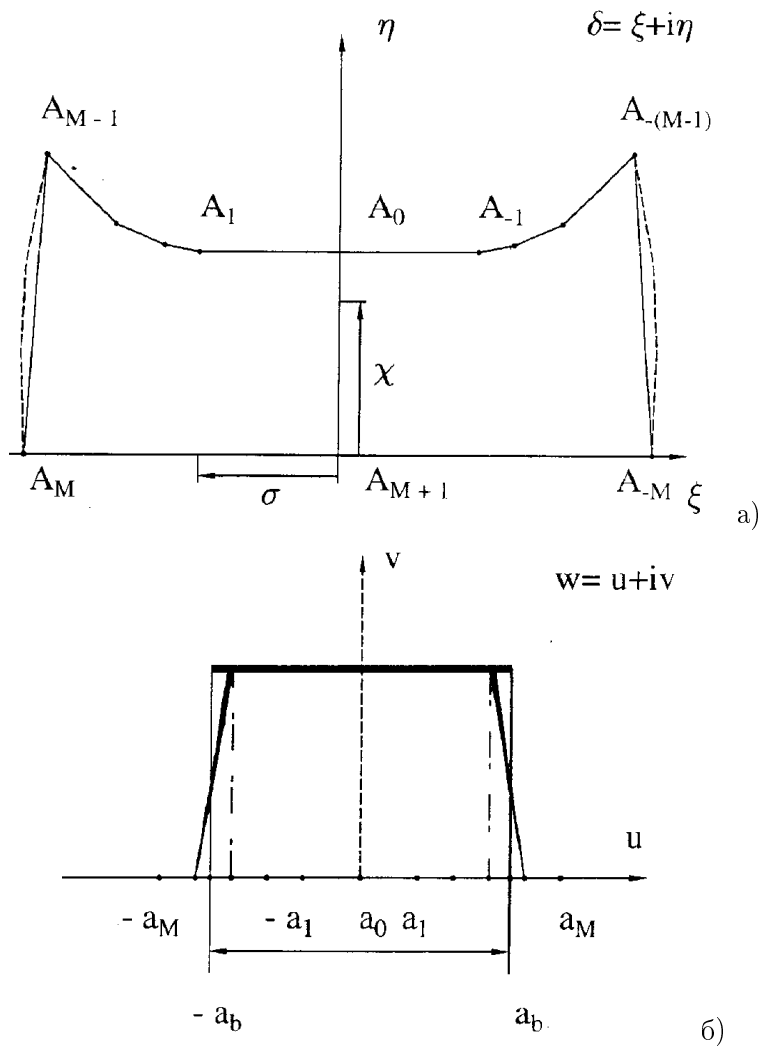


Рис. 2: Образ сектора рис.1 при отображении его функцией (1).

Комплексный магнитный потенциал Р-линзы на плоскости δ можно представить в форме ряда

$$\mathcal{P}(\delta) = \mathcal{D}(\delta) + i\mathcal{F}(\delta) = p_0 \delta \left(1 + \sum_n^{\infty} \tilde{p}_n \delta^{2n} \right), \quad (3)$$

где $\mathcal{D}(\delta)$ и $\mathcal{F}(\delta)$ – векторный и скалярный магнитные потенциалы, соответственно [2]. Мы работаем со скалярным потенциалом $\mathcal{F}(\delta)$, распределение которого по сектору линзы показано на рис.1: на поверхности полюса $\mathcal{F} = 1$ (жирная линия), в области обмотки величина потенциала спадает до нуля (линия меняющейся толщины) и равна нулю на всей остальной границе сектора (тонкие линии). Отображение (2) позволяет перенести это распределение на действительную ось u плоскости w . Вычисления показывают, что участок обмотки весьма мал и истинное распределение $\mathcal{F}(u)$ можно с хорошей точностью заменить эквивалентным по площади прямоугольным (рис.2б):

$$\mathcal{F}(u) = 1 \quad -a_b \leq u \leq a_b, \quad \mathcal{F}(u) = 0 \quad u. \quad (4)$$

Потенциал в любой точке верхней полуплоскости w определяется по известной формуле Шварца, которая для нашего случая с учетом (4) дает

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u, v) &= \frac{v}{\pi} \int_{-a_b}^{a_b} \frac{d\bar{u}}{(u - \bar{u})^2 + v^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\arctan \left(\frac{a_b - u}{v} \right) + \arctan \left(\frac{a_b + u}{v} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

При отображении плоскости w на промежуточную плоскость δ мнимая полуось $0 \leq v < \infty$ переходит в отрезок $0 < \chi < 1$ мнимой оси η , который, в свою очередь, является образом отрезка единичной длины от центра линзы до центра полюса $x = y = 1/\sqrt{2}$ на плоскости z (см. рис.1). Распределение потенциала вдоль полуоси $0 \leq v < \infty$ приобретает вид

$$\mathcal{F}(\chi) = \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{a_b}{v(\chi)} \right). \quad (6)$$

Записанные в переменных u, v плоскости w выражения (5),(6) точно совпадают с формулами (9),(10) из [5]. Но, как будет показано ниже, возврат на исходную плоскость z должен включить в себя переменные промежуточной плоскости δ . В частности, для получения входящей в (6) зависимости $v(\chi)$ заметим, что расстояние χ от центра линзы вдоль отрезка A_0A_{M+1} равно

$$\chi = 1 - |C_0| \int_0^v \prod_{m=1}^M (v^2 + a_m^2)^{\beta_m} dv. \quad (7)$$

Дифференцируя (7), находим уравнение, определяющее зависимость v от промежуточной переменной χ

$$\frac{dv}{d\chi} = -\frac{1}{|C_0|} \prod_{m=1}^M (v^2 + a_m^2)^{-\beta_m}. \quad (8)$$

Распределение индукции на единичном отрезке от центра линзы до центра полюса на исходной плоскости z с учетом равенства $\chi = \rho^P$ задается формулой

$$\mathcal{B}(\rho) = \frac{d\mathcal{F}}{d\rho} = \frac{d\mathcal{F}}{dv} \frac{dv}{d\chi} \frac{d\chi}{d\rho} = \frac{2}{\pi} \frac{a_b}{v^2(\chi) + a_b^2} \frac{P}{|C_0|} \prod_{m=1}^M [v^2(\chi) + a_m^2]^{-\beta_m} \rho^{P-1}. \quad (9)$$

Фактически вычисление распределения $\mathcal{B}(\rho)$ по биссектрисе сектора линзы выполняется совместным использованием формул (8) и (9).

Из (9) можно получить точное значение индукции в центре полюса, полагая $v = 0$:

$$\mathcal{B}_{\rho=1} = \frac{2P}{\pi} \left(\frac{1}{a_b |C_0|} \right) \prod_{m=1}^M a_m^{-2\beta_m}. \quad (10)$$

а также определить индукцию вблизи центра линзы из условия $\rho \rightarrow 0, v \rightarrow \infty$:

$$\mathcal{B}_{\rho \rightarrow 0} = \frac{2Pa_b}{\pi |C_0|} \rho^{P-1}. \quad (11)$$

Сравнение выражений (11) и (3) с учетом (1) позволяет написать точное значение коэффициента основной гармоники потенциала

$$p_0 = \frac{2}{\pi} \frac{a_b}{|C_0|} \quad (12)$$

Для построения второго распределения индукции $\mathcal{B}(s)$ от центра линзы по границе сектора рис.1 (координата s отсчитывается от центра линзы, для квадрупольа $s \equiv y$) можно получить аналогичные (8) и (9) зависимости следующим образом.

Левая граница сектора линзы плоскости z отображается на отрезок $A_M \leq \sigma \leq 0$ вещественной оси ξ промежуточной плоскости δ . Этот отрезок, в свою очередь, отображается на отрезок $a_M \leq u < \infty$ вещественной оси u плоскости w , где отлична от нуля только v -компонента индукции, которая вычисляется через потенциал (5):

$$\mathcal{B}_v(u, 0) = - \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} = - \frac{2a_b}{\pi} \frac{1}{u^2 - a_b^2}.$$

Зависимость $u(\sigma)$ определяется интегрированием уравнения (способ его построения совпадает с таковым для (8))

$$\frac{du}{d\sigma} = \frac{1}{|C_0|} \prod_{m=1}^M (u^2 - a_m^2)^{-\beta_m}. \quad (13)$$

Окончательно распределение индукции на границе сектора линзы дается выражением

$$\mathcal{B}(s) = \mathcal{B}_v(u, 0) \frac{du}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds} = - \frac{2a_b}{\pi |C_0|} \frac{P}{u^2(\sigma) - a_b^2} \prod_{m=1}^M [u^2(\sigma) - a_m^2]^{-\beta_m} s^{P-1}, \quad (14)$$

и вычисляется совместно с (13). Заметим, что из последнего соотношения с помощью предельного перехода $u(\sigma) \rightarrow \infty$ можно подтвердить правильность формул (11) и (12).

Из двух распределений (9) и (14) во внимание принимается то, которое дает наибольшее (в пределах рабочей апертуры) относительное отклонение поля от основного.

Выше отмечалось, что объектом минимизации может быть также относительная амплитуда первой неосновной гармоники потенциала. В Приложении описана рекуррентная процедура вычисления относительных амплитуд входящих в (3) высших гармоник $\tilde{p}_n, n \leq N$ для любого N . При $N > 1$ это удается сделать только с привлечением средств компьютерной аналитики [7], но для $N = 1$ вычисления оказываются несложными и точное выражение для \tilde{p}_1 дается формулой

$$\tilde{p}_1 = -\frac{1}{3C_0^2} \left(a_b^2 + \sum_{m=1}^M \beta_m a_m^2 \right) \quad (15)$$

3. На базе приведенных выше и в работе [5] алгоритмов был написан пакет программ MULTIPOL, дающий возможность в интерактивном режиме вычислять и оптимизировать линзы с любым числом пар полюсов. С помощью этого пакета был получен довольно большой объем данных по расчету квадруполь и секступоль как для профилей с идеальной центральной частью, так и многоугольных.

Одним из основных входных параметров в расчете является величина полного относительного угла полюса Р-линзы (см. рис.1)

$$\tilde{\Psi}_P = P \Psi_P / \pi. \quad (16)$$

Во всех случаях программа автоматически (без участия оператора) подбирала длину и угол шиммы так, чтобы минимизировать либо максимальное (в пределах рабочей апертуры $r_a \leq 0.9$) отклонение поля $\delta V/V$ от идеального, либо относительную амплитуду \tilde{p}_1 первой неосновной гармоники (угловой размер идеальной части полюса определялся при этом как разность между угловым размером полюса и угловым размером шимм). Для многоугольных профилей кроме того также автоматически подбирались значения регулировочных параметров T_φ и T_r , корректирующих угловые и радиальные координаты вершин многоугольника (см. раздел 3 в [5]).

Анализ численных данных позволяет сделать следующие выводы. Для обоих типов профилей полюсов при оптимизации по отклонению поля $\delta B/B$ имеется своя область превосходства, что видно из рис.3. Профили с идеальной центральной частью обеспечивают более высокое качество поля при широких полюсах $\tilde{\Psi}_P \geq 0.6$, а для узких полюсов следует использовать многоугольные профили. При минимизации по амплитуде первой неосновной гармоники потенциала \tilde{p}_1 картина оказывается не столь однозначной, тем не менее наличие профилей, когда эта гармоника сильно подавлена, не вызывает сомнений.

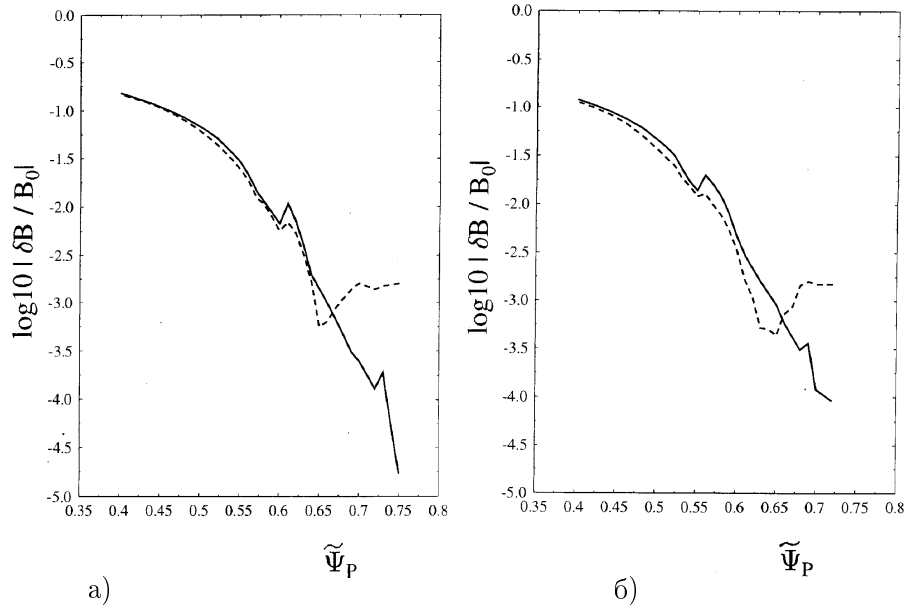


Рис. 3: Максимальные относительные отклонения поля от идеального а) для квадруполей и б) для секступолей. Сплошные линии – профиль с идеальной центральной частью полюса, пунктирные – многоугольный. $\tilde{\Psi}_P$ – относительный угол полюса линзы (16).

Авторы глубоко благодарны Е.Б.Левичеву и В.Н.Корчуганову за обсуждения и советы.

Спектр потенциала Р-линзы.

С помощью соотношений (6) и (12) относительное распределение потенциала вдоль отрезка χ на линии симметрии линзы (см. рис.2) можно представить в виде

$$\tilde{\mathcal{F}}(\mu) = \mathcal{F}/p_0 = \mu - \frac{(a_b/|C_0|)^2}{3} \mu^3 + \frac{(a_b/|C_0|)^4}{5} \mu^5 - \dots \quad (1.1)$$

где введена новая переменная

$$\mu(\chi) = \frac{|C_0|}{v(\chi)} \quad (1.2)$$

и предполагается выполненным неравенство $v > a_b$ (см.(4)).

Зависимость $\mu(\chi)$ также ищется в виде ряда

$$\mu = \chi[1 + \theta(\chi)], \quad \theta(\chi) = \sum_{n=1}^N \tilde{\alpha}_n \chi^{2n}, \quad (1.3)$$

где последнее выражение считается малой поправкой $|\theta(\chi)| \ll 1$.

Из определения (1.2) через переменную v находим

$$\frac{d\mu}{d\chi} = -\frac{|C_0|}{v^2} \frac{dv}{d\chi} = \prod_{m=1}^M \left[1 + \left(\frac{\mu a_m}{|C_0|} \right)^2 \right]^{-\beta_m}, \quad (1.4)$$

где $dv/d\chi$ задается формулой (8) и учтено геометрическое равенство $\sum_{m=1}^M \beta_m = -1$.

Раскладывая правую часть (1.4) по формулам бинома с учетом (1.3) и группируя члены, можно получить ряд по степеням χ , в коэффициенты которого входят неизвестные величины $\tilde{\alpha}_n$.

С другой стороны, производную $d\mu/d\chi$ можно найти и непосредственно из основного определения (1.3) также в виде ряда

$$\frac{d\mu}{d\chi} = 1 + 3\tilde{\alpha}_1 \chi^2 + 5\tilde{\alpha}_2 \chi^4 + \dots \quad (1.5)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях χ в соотношениях (1.4),(1.5) и используя знание точных значений величин

$p_0, |C_0|$, получаем возможность рекуррентного определения входящих в (1.3) параметров $\tilde{\alpha}_n, n = 1, 2, \dots$. Это позволяет построить в явном виде зависимость (1.2) для $\mu(\chi)$ и с помощью (1.1) найти амплитуды $\tilde{p}_n, n = 1, 2, \dots$ гармоник потенциала в разложении (3).

Список литературы

- [1] *Courant E.D. et al.* // Phys. Rev., 1952, Vol.88. P.1190; Пробл. соврем. физ. Сб. перев. и обз. ин. период. лит, 1954, Т.11. С.169.
- [2] *И.М. Капчинский.* Динамика частиц в линейных резонансных ускорителях. М.: АтомИздат, 1966. 310 с.
- [3] *К. Штеффен.* Оптика пучков высокой энергии. М.: Мир, 1969. 222 с.
- [4] *В.К. Плотников.* // ПТЭ. 1962. №2. С.29.
- [5] *В.В. Вечеславов, О.В. Логинова.* // ЖТФ. Т.70, вып.10, 2000. С.81.
- [6] *М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 678 с.
- [7] *A.C. Hearn.* REDUCE User's Manual, version 3.6, (RAND Pub. CP78 Rev. 7/95, 1995).

В.В. Вечеславов, О.В. Григорьева

**Характеристики многополюсных линз
с идеальной центральной частью полюса**

O.V. Grigoryeva and V.V. Vecheslavov

**Performances of multipole lenses
with an ideal central part of a pole**

ИЯФ 2001-1

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев

Работа поступила 27.12.2000 г.

Сдано в набор 3.01.2001 г.

Подписано в печать 3.01.2001 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 0.8 печ.л., 0.7 уч.-изд.л.

Тираж 90 экз. Бесплатно. Заказ № 1

Обработано на IBM PC и отпечатано на

ротапринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН

Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.