

Сибирское отделение Российской Академии наук
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им. Г.И. Будкера

В.В. Вечеславов

ПОДАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА
В ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ

ИЯФ 2000-59

НОВОСИБИРСК
2000

**Подавление динамического хаоса
в гамильтоновых системах**

В.В. Вечеславов

Институт ядерной физики им.Г.И. Будкера
630090 Новосибирск, Россия

Аннотация

Описываются результаты выполненного недавно численного исследования канонического отображения с пилообразной силой и обсуждаются обнаруженные при этом новые и неожиданные динамические эффекты. Показано, в частности, что если значения параметра K системы принадлежат определенному в теореме Овсянникова счетному множеству, то сепаратрисы целых резонансов не только не расщепляются, но и образуют непроходимые для других траекторий барьеры. Обследованы первые дробные резонансы и для них также найдены свои множества значений K , при которых их сепаратрисы сохраняются. Обнаружен и описан механизм, объясняющий устойчивость сепаратрисы целого резонанса в критическом режиме. Введена родственная этому отображению и демонстрирующая такие же динамические эффекты непрерывная гамильтонова система. Для этой системы построено сепаратрисное отображение и получен интеграл Мельникова-Арнольда, анализ которых способствует пониманию причин, порождающих необычную динамику. Показано, что такая динамика сохраняется при значительных изменениях формы пила. Важность этих фактов связана с тем, что наличие неразрушенной сепаратрисы резонанса любого порядка исключает возможность развития глобального хаоса и ограничивает диффузию по импульсу в фазовом пространстве. Отмечены возникшие в этой связи новые проблемы и открытые вопросы, решение которых может способствовать дальнейшему развитию теории нелинейных гамильтоновых систем.

PACS 05.45.+b

Ключевые слова: Гамильтонова система; Сепаратриса резонанса; Хаотический слой; Каноническое отображение.

V. V. Vecheslavov

**Elimination of dynamical chaos
in Hamiltonian systems**

Email: vecheslavov@inp.nsk.su

© Институт ядерной физики
им. Г.И. Будкера СО РАН, Россия

1 Введение

Возникновение динамического хаоса, согласно современной теории нелинейных гамильтоновых систем, связано с эффектом разрушения сепаратрис резонансов и образованием на их месте хаотических слоев. Именно хаотический слой является первоисточником хаоса и в значительной мере определяет все его свойства [1,2,3]. По этой причине выяснение тонких деталей движения вблизи сепаратрисы (численно или путем построения так называемого сепаратрисного отображения системы) продолжает оставаться весьма актуальной темой и привлекает внимание многих исследователей.

Напомним, что сепаратрисой одиночного нелинейного резонанса называется особая траектория, отделяющая колебания фазы (внутри резонанса) от ее вращения (вне резонанса). На самом деле это две пространственно совпадающие ветви, отвечающие ходу времени вперед и назад, соответственно. Каждая ветвь представляет собой непрерывную траекторию с бесконечным периодом движения, которая выходит из положения неустойчивого равновесия (седло) и затем асимптотически к нему же приближается.

При наличии в системе других (хотя бы одного) нелинейных резонансов она расщепляется на две пересекающиеся ветви, которые по-прежнему выходят из седла навстречу друг другу, но более к нему не возвращаются. Свободные концы ветвей расщепленной сепаратрисы образуют бесконечное число петель неограниченно возрастающей длины, которые заполняют при этом узкую область вблизи невозмущенной сепаратрисы, образуя хаотический слой [1,2,3]. Перекрывание хаотических слоев всех резонансов системы означает возникновение глобального хаоса.

Утверждение о том, что расщепление сепаратрисы резонанса и образование на ее месте хаотического слоя в типичной (то есть неинтегрируемой) гамильтоновой системе происходят при почти любом возмущении можно назвать центральным пунктом современных представлений. Считается также, что сепаратрисы разрушаются в первую очередь потому, что имеют нулевую частоту и взаимодействие нелинейных резонансов в

их окрестности всегда существенно [1,2,3]. В этой "обычной" динамике переход от хаотического слоя к хаотическому морю с ростом параметра возмущения изучен достаточно хорошо и объясняется разрушением инвариантных кривых и образованием так называемых кантор-торов [4]. Последними, как известно, исчезают инвариантные кривые со специальными иррациональными числами вращения (для наиболее полно исследованного стандартного отображения это "золотое" число $(\sqrt{5}-1)/2$, максимально удаленное от всех рациональных чисел [5]).

Совсем недавно был обнаружен качественно другой механизм возникновения и развития хаоса в гамильтоновых системах, когда сепаратрисы нелинейных резонансов не только не расщепляются, но и являются непроходимыми для других траекторий барьерами. Исследования в этом новом направлении начались сразу же после появления теоремы Л.В.Овсянникова [6] о существовании у отображения с пилообразной силой сепаратрис целых резонансов при точно определенном счетном множестве значений параметра системы (текст этой теоремы приведен в [7]).

Относящиеся сюда и не укладывающиеся в рамки современных представлений факты изложены в работе [7], где численно изучалась динамика двумерного канонического отображения вида

$$\bar{p} = p + K \cdot f(x), \quad \bar{x} = x + \bar{p} \pmod{1} \quad (1)$$

с пилообразной силой

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & \text{если } x \leq 0.25, \\ 4(0.5 - x), & \text{если } |0.5 - x| \leq 0.25, \\ 4(x - 1.0), & \text{если } |x - 1.0| \leq 0.25. \end{cases} \quad (2)$$

Функция (2) антисимметрична $f(-x) = -f(x)$, ее период равен единице и степень гладкости (число непрерывных производных) $l = 0$. Краткий обзор полученных к настоящему времени в отношении этого отображения основных численных результатов дается во втором разделе настоящей работы.

В третьем разделе рассматривается динамическая ситуация вблизи сепаратрисы целого резонанса в окрестности критического режима. Здесь, в частности, описывается и обсуждается механизм, обеспечивающий удивительную устойчивость сепаратрисы в критическом состоянии.

Наряду с отображением (1), (2) мы рассмотрим также родственную ему непрерывную систему с гамильтонианом

$$H(x, p, t) = H_0(x, p) + \epsilon U(x, t), \quad H_0 = \frac{p^2}{2} + \omega_0^2 V(x),$$

$$U(x, t) = \cos(2\pi x - \tau - \tau_0) + \cos(2\pi x + \tau + \tau_0), \quad \tau = \Omega t, \quad (3)$$

где $V(x) = -\int f(x)dx$ – потенциал пилы, $\epsilon \ll 1$ и возмущение содержит две симметричные гармоники. Исследование этой системы, выполненное в четвертом разделе, помогает понять некоторые детали динамического поведения отображения (1), (2).

Пятый раздел посвящен рассмотрению общей модели несимметричной пилы, частным случаем которой является симметричная пила (2). Здесь показано, что необычная динамика сохраняется внутри всего диапазона возможного изменения параметра перекоса и исчезает только в предельных точках (где двузубая пила превращается в однозубую). В заключении подводятся некоторые итоги и обсуждаются открытые вопросы.

2 Критические числа резонансов и критические режимы отображения (1), (2)

В работе [7] основными объектами рассмотрения являлись резонансы системы (1), (2) и их сепаратрисы. Напомним, что периодическую орбиту и отвечающий ей резонанс принято обозначать отношением целых чисел $P : Q$, где Q – число итераций отображения на P периодов орбиты [2]. Резонансы с $Q = 1$ называются целыми, остальные – дробными.

Одной из самых удивительных и необычных черт обсуждаемой динамики оказалось наличие "критических" значений параметра K , при которых сепаратрисы резонансов не расщепляются и соответствующие им хаотические слои не образуются. Для поиска таких режимов использовалась разработанная нами ранее техника измерения угла α_1 пересечения ветвей сепаратрис целых резонансов в центральной гомоклинической точке, которая для системы (1), (2) всегда лежит на линии $x = 0.5$ (см.[8], где описаны детали и результаты таких измерений для стандартного отображения).

На рис.1 показана полученная численно для системы (1), (2) зависимость $\alpha_1(K)$, которая оказалась знакопеременной и колебательной [7]. Важно подчеркнуть, что она качественно отличается от хорошо изученной к настоящему времени аналогичной зависимости для стандартного отображения (последняя является знакопостоянной и строго монотонной [8]). Это отличие связано с существенно различным динамическим поведением этих двух систем.

Точки $\alpha_1(K) = 0$ на рисунке свидетельствуют об отсутствии расщепления сепаратрис и отвечающие им значения параметра K названы кри-

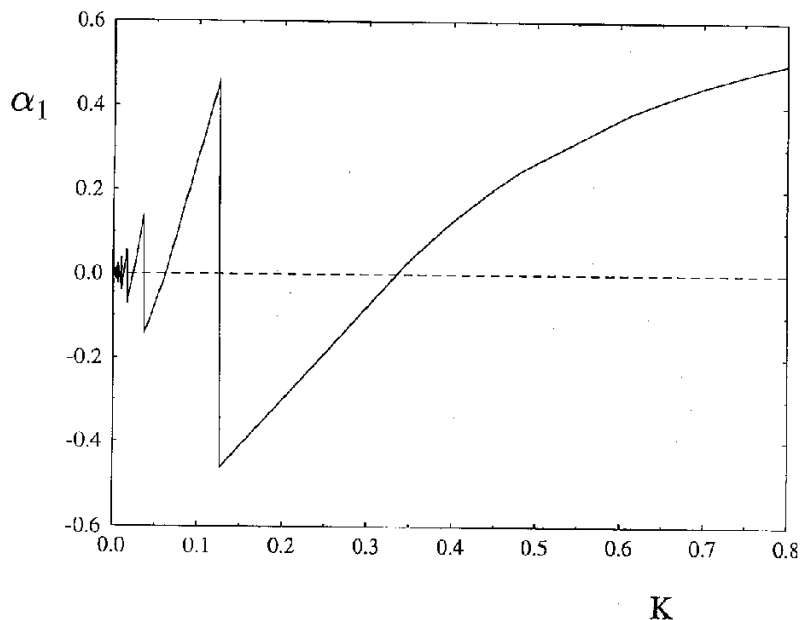


Рис. 1: Зависимость угла α_1 расщепления ветвей сепаратрисы целых резонансов системы (1), (2) от параметра K .

тическими числами. Видно, что эти числа могут быть двух типов: для одних угол проходит через нуль в процессе плавного изменения, для других – скачком. Поскольку при монотонном уменьшении величины параметра элементы этих множеств чередуются, то для них можно ввести сквозную нумерацию $K_{1,m}$, $m = 1, 2, 3, \dots$ (первый индекс указывает на отношение к целому резонансу) и тогда все нечетные числа будут связаны с плавным изменением угла, а четные со скачком.

Тщательный анализ показал, что четные критические числа точно совпадают с элементами указанного в теореме Овсянникова счетного множества и определяются решениями некоторого трансцендентного уравнения при целых значениях входящего в него коэффициента (см. Приложение в [7]). Оказалось, что не входящие в теорему Овсянникова нечетные критические числа также определяются решениями того же самого уравнения, но при полуцелых значениях коэффициента и потому для любого критического числа имеем

$$K_{1,m} = \sin^2(\beta_m/2), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где β_m есть наименьший положительный корень уравнения

$$\sqrt{2} \sin(m\beta/2) = \cos(\beta/2). \quad (5)$$

В частности, точные значения двух первых критических чисел равны $K_{1,1} = 1/3$ и $K_{1,2} = 1/8$. Подчеркнем еще раз, что это множество относится только к целым $Q = 1$ резонансам отображения (1), (2).

Число $K_{1,1} = 1/3$ выделено не только тем, что является самым большим из всех критических чисел. Оказалось, что оно находится на границе двух областей с резко и качественно различным динамическим поведением системы (1), (2). При $K \leq K_{1,1}$ имеет место весьма нетривиальная динамика, о которой рассказывается ниже. Напротив, при $K > K_{1,1}$ система ведет себя очень просто: по мере роста величины параметра K один за другим теряют устойчивость дробные резонансы и связанные с ними островки устойчивости "тонут" в хаотическом море. При $K \approx 0.39$ исчезают резонансы $Q=3$, при $K = 0.5$ – полуцелые резонансы $Q=2$, и, наконец, при $K = 1.0$ целые резонансы. Присутствует ли при $K > 1$ регулярная компонента движения конечной меры – один из открытых вопросов.

Факт существования счетного множества значений параметра K , при которых сепаратрисы целых резонансов не разрушаются несмотря на возмущающее влияние многих других резонансов приводит к неожиданным и важным динамическим последствиям.

На малом окне рис.2 показана область, которую заняла одна хаотическая траектория при значении параметра системы равного первому четному критическому числу $K = K_{1,2} = 1/8$. Нижняя и верхняя границы этой области весьма близки (это определение будет уточнено в следующем разделе) к вычисленным по точным формулам Овсянникова сепаратрисам целых резонансов [7]. Здесь все противоречит представлениям "обычной" динамики.

Известно, что имеется бесконечно много "нетипичных" гамильтоновых систем, у которых сепаратрисы всех резонансов нерасщеплены. Это так называемые полностью интегрируемые системы, в динамическом поведении которых нет никакого хаоса [2,3]. Поразительной особенностью ситуации на рис.2 является сосуществование сохранившихся сепаратрис двух соседних целых резонансов с областью мощного хаоса, где все инвариантные кривые с самыми устойчивыми иррациональными числами вращения разрушены и хаотические слои всех дробных резонансов открыты.

Главный динамический эффект здесь заключается в том, что сепаратрисы целых резонансов не только не разрушаются и не формируют

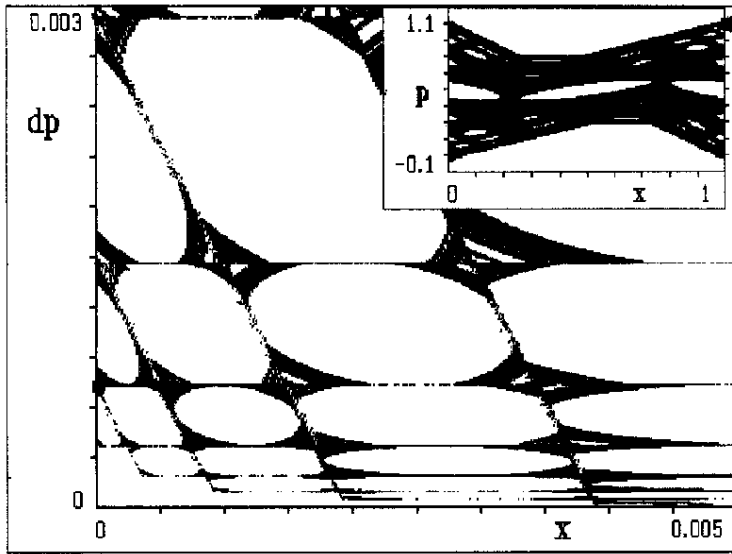


Рис. 2: Параметр системы равен второму критическому числу $K = K_{1,2} = 1/8$. Малое окно: область, занятая одной хаотической траекторией с начальными координатами $x = 0, p = 0.37$. Число итераций отображения равно 10^9 . Большое окно: сильно увеличенная малая область "щели" (по импульсу) между этой траекторией и нижней сепаратрисой целого резонанса (см. текст). Здесь $dp = p - p_s$, где $p(x)$ – импульс траектории и $p_s(x)$ – импульс на сепаратрисе.

хаотический слой, но и образуют устойчивое инвариантное многообразие, не позволяющее другим траекториям себя пересекать. Имея полную протяженность по фазе они, как плотины, разгораживают фазовое пространство на изолированные друг от друга части. Это обстоятельство запрещает глобальный хаос и ограничивает диффузию по импульсу, что исключает, например, неограниченный рост энергии частиц. Выяснение динамической ситуации вблизи такой сепаратрисы является одним из главных вопросов, частичный ответ на который дан в следующем разделе. Уместно заметить, что вдали от критических чисел никаких непродоходимых барьеров, по-видимому, нет и система ведет себя "как обычно". Например, при $K = 0.3$ стартовавшая с начальными условиями $x = 0, p = 0.123$ хаотическая траектория за 10^6 итераций "побывала" в областях семи соседних целых резонансов.

Положение дел с первым нечетным критическим числом выглядит

еще более удивительным. На рис.3, который построен для значения параметра $K = K_{1,1} = 1/3$, показаны сепаратрисы соседних целых резонансов и три хаотические траектории, стартующие внутри дробных резонансов 1:4, 1:2 и 3:4, соответственно. Здесь необходимо сделать замечание, которое относится ко всей нашей работе. Известно, что внутри (режим колебания фазы) любого резонанса имеется область регулярного движения – островок устойчивости и стартующая здесь траектория никогда из этого резонанса не выйдет. Но внутри находится также и хаотическая компонента движения (см. рис.3), принадлежащие которой траектории в

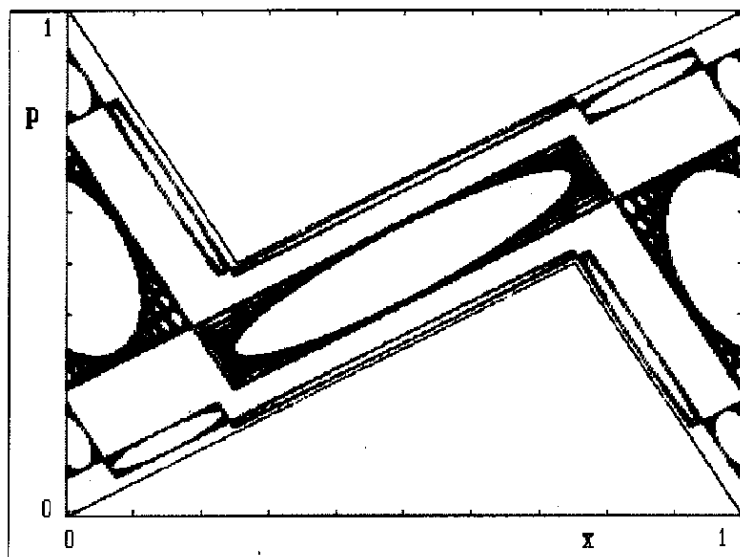


Рис. 3: Параметр системы равен первому критическому числу $K = K_{1,1} = 1/3$. Нижняя и верхняя ломаные – сепаратрисы соседних целых резонансов. Между ними три траектории с начальными координатами, обеспечивающими их попадание в хаотические компоненты движения внутри резонансов (снизу вверх) 1:4, 1:2 и 3:4, соответственно. Число итераций отображения равно 5×10^{10} для каждой траектории.

общем случае могут покидать "свои" резонансы и переходить к другим. Начальные условия выбирались так, чтобы траектории гарантированно оказывались хаотическими, что всегда проверялось по величине и поведению ляпуновского показателя.

На рис.3 показаны всего три траектории, чтобы сделать его понят-

ным. Аналогичные вычисления проводились для резонансов других порядков, но динамическая картина всегда оказывалась качественно одной и той же: хаотическая траектория на протяжении всего времени счета не покидает область того дробного резонанса, внутри которого она стартовала. Картинка со многими резонансами очень хорошо смотрится на экране цветного дисплея, где каждый резонанс представлен своим цветом и эти цвета не смешиваются.

Здесь, как и на рис.2, вся показанная область "заперта" между сепаратрисами соседних целых резонансов. Однако, возникает впечатление, что и каждый отдельно взятый дробный резонанс является устойчивым инвариантным многообразием (наверное, правильнее сказать – устойчивой инвариантной резонансной структурой) с границей, через которую траектории не проходят. Уместен вопрос: что представляет из себя эта граница? По законам "обычной" динамики это должна быть устойчивая инвариантная кривая с иррациональным числом вращения, которая изолирует друг от друга соседние резонансы [1,2,3]. Но после обсуждения ситуации на рис.2 мы вправе предположить, что этой границей может оказаться и неразрушенная сепаратриса самого дробного резонанса.

Ответ на этот и многие другие вопросы потребовал проведения детального анализа дробных резонансов, для чего также измерялась зависимость угла расщепления ветвей сепаратрисы α_Q от параметра системы K . Заметим, что с ростом Q возрастают чисто технические трудности, поэтому к настоящему моменту наиболее полные данные получены только для первых четырех $Q = 2, 3, 4, 5$ дробных резонансов.

Оказалось, что у каждого из этих резонансов есть свое (по-видимому, счетное) множество критических чисел $K_{Q,m}$, $m = 1, 2, 3, \dots$, которое за исключением первого элемента не совпадает с другими подобными множествами (см.таблицу 1 в [7]). И здесь, как и для случая целых резонансов, нечетные критические числа связаны с плавными изменениями угла пересечения ветвей сепаратрис, а четные со скачком.

Из данных работы [7] следует также, что первые критические числа $K_{Q,1}$ дробных резонансов совпадают с первым критическим числом целого резонанса $K_{1,1} = 1/3$. Для проверки этого поразительного факта критическое значение $K_{Q,1}$ всех обследованных резонансов было вычислено с двадцатью пятью верными десятичными знаками и все они оказались тройками. Эти результаты являются, на наш взгляд, убедительными свидетельствами того, что непроницаемыми для других траекторий границами как целых так и дробных резонансов при $K_{1,1} = 1/3$ являются их собственные сепаратрисы (см. рис.3).

3 Динамика вблизи сепаратрисы целого резонанса при $K \approx K_{1,2}$

В этом разделе обсуждается один из основных вопросов – динамическая ситуация вблизи сепаратрисы целого резонанса при подходе к критическому состоянию, в критическом состоянии (см. рис.2) и на выходе из него.

При небольшом отклонении параметра системы K от критической величины $K_{1,2}$ в сторону увеличения сепаратриса начинает пропускать другие траектории, но среднее время (число итераций) T_C прохождения резонанса зависит от величины расстройки $\Delta K = K - K_{1,2} > 0$. В [7] получена эмпирическая зависимость для среднего времени прохождения целого резонанса:

$$\langle T_C \rangle = 135 \left(\frac{K_{1,2}}{K - K_{1,2}} \right)^{1.193} (1 \pm 0.09), \quad K > K_{1,2}. \quad (6)$$

Видно, что по мере приближения к критическому режиму время прохождения неограниченно растет. Подчеркнем, что факт пересечения сепаратрисы целого резонанса еще не означает развитие глобального хаоса. Для возникновения последнего необходимо, чтобы значение параметра K не совпадало ни с одним из критических чисел системы.

В критическом состоянии (см. рис.2), как отмечалось выше, хаотическая траектория весьма близко подходит к сепаратрисам. Для количественной оценки этой близости фиксировалось минимальное (по импульсу) расстояние между этой траекторией и вычисленными по точным формулам Овсянникова сепаратрисами целых резонансов. Оказалось, что между траекторией и нижней сепаратрисой (назовем ее главной) имеется "цель", минимальная ширина которой $dp_{min} \approx 3 \cdot 10^{-6}$. На большом окне рис.2 показана сильно увеличенная малая ее часть откуда видно, что непосредственно к главной сепаратрисе примыкает область, заполненная дробными резонансами $1 : Q$ относительно высоких порядков, которые располагаются слоями тем ближе к ней, чем больше величина Q (самый нижний еще различимый на этом рисунке резонанс есть $1:23$). Поскольку каждый такой резонанс имеет полную протяженность по фазе, то чтобы попасть в нижний слой, надо пересечь верхний. Для некоторых из резонансов "щели" были найдены ближайшие к величине $K_{1,2} = 1/8$ критические числа. Оказалось, что с ростом порядка резонанса Q его число вращения $1/Q$ и его критическое число K_Q стремятся к числу вращения (нулю) и критическому числу $K_{1,2} = 1/8$ главной се-

паратрисы, причем для любого Q имеет место неравенство $K_Q < K_{1,2}$ (см. таблицу 2 в [7]).

Стремящаяся подойти к главной сепаратрисе хаотическая траектория должна эти резонансы пересечь, затрачивая на прохождение каждого из них определенное время. Прямое измерение времени проникновения траектории из хаотического моря в хаотическую область внутри дробного резонанса высокого порядка технически невозможно. По этой причине была измерена другая величина – среднее время T_E выхода из резонанса хаотической траектории, стартовавшей внутри него [7]:

$$\langle T_E \rangle = 80 e^{0.705 Q} (1 \pm 0.07), \quad (7)$$

Эта формула отражает тот факт, что с ростом величины Q критические числа резонансов щели приближаются (снизу) к значению $K_{1,2} = 1/8$. Как следствие, собственные сепаратрисы этих резонансов становятся все менее и менее "прозрачными" и время выхода из них хаотической траектории неограниченно растет. В критическом состоянии целого резонанса глобальный хаос, разумеется, полностью исключен.

Ситуация, возникающая при выходе из критического состояния (то есть при отклонении параметра системы K от критической величины $K_{1,2}$ в сторону уменьшения) оказалась намного сложнее.

При $K_{1,2} = 0.125 < K < K_{1,3} = 0.06191..$ и вдали от критических чисел глобальный хаос определенно имеет место. Так, например, в интервале $0.1090 \leq K \leq 0.1094$ наблюдалась глобальная диффузия, скорость которой резко спадала при приближении к краям интервала (начальные условия $x = 0, p = 0.37$, число итераций 10^9). Но если плавно уменьшать величину параметра начиная от $K = K_{1,2} = 0.125$, то из приведенного выше неравенства $K_Q < K_{1,2}$ ясно, что резонансы щели будут один за другим последовательно попадать в свои критические режимы и не позволят траектории подходить к главной сепаратрисе на расстояние ближе некоторого dp_{min} . Так, при $K = 0.12499999581..$ (критическое значение для $Q = 15$) минимальное расстояние траектории от сепаратрисы оказалось равно $dp_{min} \approx 4.6 \cdot 10^{-5}$, а при $K = 0.12499993294..$ (критическое значение для $Q = 13$) $dp_{min} \approx 1.8 \cdot 10^{-4}$ при числе итераций отображения 10^{11} в каждом случае.

Глобальный хаос может развиваться только внутри интервалов между соседними критическими числами, где его и следует искать. Однако, реализация этого плана наталкивается на определенные трудности. Во-первых, для этого необходимо знать все критические числа в исследуемом интервале, отыскание которых является сложной и пока еще не решенной окончательно задачей. Во-вторых, вблизи значения $K_{1,2}$ сетка

критических значений K_Q резонансов щели оказывается весьма густой и обеспечить условие "вдали от критических чисел" практически невозможно. Естественно предположить также, что диффузия при этом если и не будет подавлена полностью, то будет существенно ослаблена и для ее измерения может потребоваться недопустимо большое время счета.

Итог всего рассмотрения можно подвести в следующей несколько обобщенной форме. Резонансы высоких порядков формируют перед главной сепаратрисой своего рода "заслон", который "сопротивляется" приближению к ней хаотической траектории. В надкритическом режиме $K > K_{1,2}$ траектории удается пересечь целый резонанс, затрачивая на это тем больше времени, чем ближе K к $K_{1,2}$. При $K = K_{1,2}$ в процессе очень длительной эволюции траектория может подойти к главной сепаратрисе сколь угодно близко, но никогда ее не достигнет. На выходе из критического режима при плавном уменьшении параметра K система будет последовательно проходить через критические состояния резонансов щели и развитие глобального хаоса принципиально возможно лишь внутри интервалов между соседними критическими числами.

4 Сепаратрисное отображение и интеграл Мельникова - Арнольда для непрерывной системы (3)

Изложенные выше эмпирические факты нуждаются в объяснениях. В первую очередь хотелось бы понять природу механизма, ответственного за колебательный и знакопеременный характер основной зависимости $\alpha_1(K)$ (рис.1). Известно, что проводить численное исследование лучше с отображениями, а аналитическое – с непрерывными системами [2]. По этой причине ниже мы будем работать с гамильтонианом (3) и используем затем полученные результаты в отношении отображения (1), (2).

Сепаратриса $(x_s(\psi), \psi = 2\omega_0 t)$ невозмущенной ($\epsilon = 0$) системы (3) может быть записана в виде:

$$x_s(\psi) = \begin{cases} a e^\psi & \text{если } -\infty < \psi < -\pi/4, \\ (1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \psi)/2 & \text{если } -\pi/4 < \psi < \pi/4, \\ 1 - a e^{-\psi} & \text{если } \pi/4 < \psi < \infty, \end{cases} \quad (8)$$

где обозначено $a = e^{\pi/4}/4$.

Значение гамильтониана на сепаратрисе равно $H_{0,s} = \omega_0^2/4$, а период

движения вблизи нее вычисляется по формуле

$$T_s(w) \approx \frac{1}{2\omega_0} \ln \left(\frac{2e^{\pi/2}}{|w|} \right), \quad (9)$$

здесь и далее $w = H_0/H_{0,s} - 1$ – относительное отклонение от сепаратрисы по энергии. Заметим, что формула (9) имеет сравнительно неплохую точность: даваемые ею значения отклоняются от найденных численно менее чем на 5% в интервале $-0.47 \leq w \leq 1.06$.

Сепаратрисное отображение для системы (3) записывается в виде [1]

$$\bar{w} = w + W \cdot \sin \tau, \quad \bar{\tau} = \tau + \lambda \ln \left(\frac{2e^{\pi/2}}{|\bar{w}|} \right) \pmod{2\pi}, \quad (10)$$

здесь $\lambda = \Omega/(2\omega_0)$ – параметр адиабатичности ($2\omega_0$ – частота колебаний вблизи точки устойчивого равновесия $x = 0.5$, $p = 0$). Входящая в (10) амплитуда W может быть найдена численно (и тогда мы будем писать $W = W_E$) или теоретически ($W = W_T$); сравнение этих зависимостей будет проведено ниже.

Теоретическое значение амплитуды W_T определяется формулой

$$W_T(\lambda) = \pm \max |\bar{w} - w| = \pm \max(\Delta H_0)/H_{0,s} = \frac{16\pi\epsilon}{\omega_0^2} W_{MA}(\lambda), \quad (11)$$

где знак совпадает со знаком ΔH_0 и W_{MA} – интеграл Мельникова-Арнольда (МА-интеграл, см. формулу (12)).

Следуя описанной в [1] методике, будем искать изменение невозмущенной энергии H_0 за полупериод колебаний или период вращения (здесь $\{..\}$ – скобка Пуассона) :

$$\Delta H_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \{H_0, H\} dt = -\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \frac{\partial U}{\partial x} dt.$$

Считая, что система движется достаточно близко к сепаратрисе и вычисляя последнее соотношение при $x = x_s$, $p = p_s = \dot{x}_s = 2\omega_0 dx_s/d\psi$, находим:

$$\Delta H_0 = -4\pi\epsilon \sin \tau_0 \int_{-\infty}^{\infty} [p_s(\psi)/2\omega_0] \sin[2\pi x_s(\psi)] \sin(\lambda \psi) dt.$$

Заметим попутно, что входящий в подынтегральное выражение множитель p_s снимает известную проблему специальной нормировки этого интеграла для подавления его осциллирующей части, поскольку асимптотически стремится к нулю на обоих пределах интегрирования (подробности в разделе 4.4 обзора [1]).

Окончательно МА-интеграл можно записать в виде:

$$W_{MA}(\lambda) = \frac{\max \Delta H_0}{4\pi\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/4} \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \sin \psi\right) \cos \psi \sin(\lambda\psi) d\psi + 2a \int_{\pi/4}^{\infty} e^{-\psi} \sin(2\pi a e^{-\psi}) \sin(\lambda\psi) d\psi. \quad (12)$$

Первое слагаемое в этой формуле описывает вклад от "эллиптического" участка сепаратрисы ($0.25 \leq x_s \leq 0.75$), второе – от остальной части. Оба слагаемых являются колебательными и знакопеременными, их колебания находятся почти в противофазе. Результирующая функция $W_{MA}(\lambda)$ также оказывается знакопеременной и колебательной (см. ниже рис.4). Интересно отметить, что формула (12) допускает весьма простое асимптотическое ($\lambda \gg 1$) представление

$$W_{MA}(\lambda) \approx -1.17 \lambda^{-3.034} \cos\left(\frac{\pi}{4}\lambda\right), \quad (13)$$

среднеквадратичная ошибка которого составляет, например, в интервале $10 \leq \lambda \leq 150$ около 4%, а в интервале $50 \leq \lambda \leq 150$ около 1.3%.

Прежде чем делать дальнейшие шаги, необходимо вычисленную по формулам (11), (12) теоретическую зависимость W_T сравнить с найденными численно величинами W_E . Поясним, как определялись значения W_E (подробности в [9]). Центральная точка пересечения ветвей сепаратрисы основного резонанса системы (3) лежит на линии $x = 0.5$ и в качестве первого шага на этой линии с высокой точностью отыскивалась ее ордината p_h . Начальные условия для орбит выбирались случайным образом на этой же линии в малой окрестности вокруг p_h гарантированно внутри хаотического слоя. Траектория совершала предписанное ей число периодов движения N (период движения T - интервал времени между соседними моментами прохождения устойчивой фазы $x = 0.5$). Для каждого T вычислялась средняя энергия по формуле

$$w = 2 \exp\left(\frac{\pi}{2} - 2\omega_0 T\right). \quad (14)$$

Определяя изменение энергии $\delta w = \overline{w} - w$ для пары соседних периодов и приписывая его к общему для этих периодов моменту времени t_k можно построить сепаратрисное отображение (10) ($\delta w_k, \tau_k = \Omega t_k \pmod{2\pi}$), $k = 1, 2, \dots, N - 1$ и найти его амплитуду W_E .

На рис.4 представлено сравнение полученной через МА - интеграл (12) теоретической W_T и найденной численно W_E амплитуд сепаратрис-

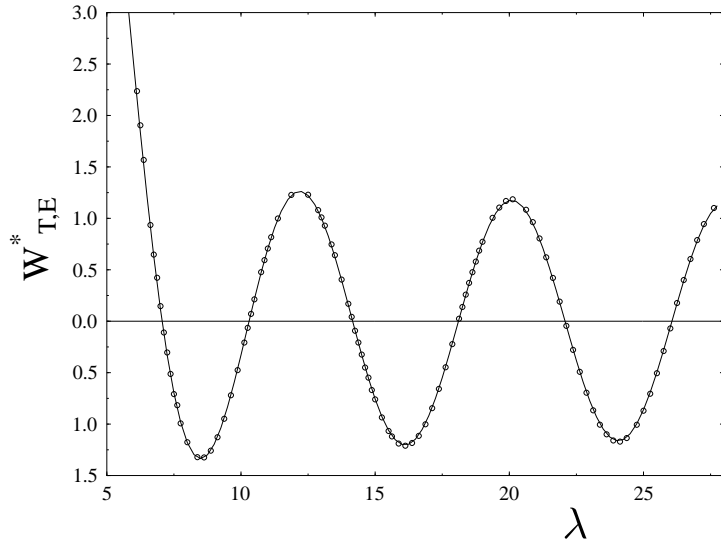


Рис. 4: Сплошная линия – нормированная теоретическая амплитуда W_T^* сепаратрисного отображения (10), кружки – нормированная амплитуда W_E^* , полученная в результате численного построения этого отображения по периодам движения системы.

ного отображения (10). Для обеспечения удобного масштаба сравниваются не сами эти величины, а их нормированные значения:

$$W_T^* = A W_T, \quad W_E^* = A W_E, \quad \text{где} \quad A = \frac{\omega_0^2 \lambda^{3.034}}{16\pi\epsilon}. \quad (15)$$

(показатель степени λ в корректирующем множителе взят из подгоночной формулы (13)). Прекрасное совпадение этих зависимостей позволяет в дальнейшем уверенно использовать формулу (12) для МА - интеграла и считать в (10) $W = W_T$.

Наиболее важной для практики величиной является не амплитуда W сепаратрисного отображения, а полуширина хаотического слоя w_{\max} . Для всех указанных на рис.4 кружками значений амплитуд было выполнено итерирование сепаратрисного отображения и найдены значения w_{\max} . Оказалось, что установленное Чириковым соотношение (формула

(6.8) в [1] между размером слоя w_{max} и амплитудой W

$$w_{max} \approx \lambda |W| \quad (16)$$

весьма неплохо выполняется в нашем случае, причем даже в окрестности нулевых W . При $\lambda > 10$, например, имеет место неравенство $0.94 \leq w_{max}/\lambda |W| \leq 1.3$

Теперь надо показать, что полученные для непрерывной системы (3) результаты можно распространить на отображение (1), (2). Будем называть критическими те значения $\lambda_{1,m}$, $m = 1, 2, \dots$, для которых $W_{MA}(\lambda_{1,m}) = 0$ (первый индекс указывает на отношение к основному резонансу). Поскольку системы (1), (2) и (3) близки, то их критические числа должны быть как-то связаны. Нетрудно заметить, что если перевести непрерывную систему (3) с параметром λ в отображение (1), (2) с параметром K или наоборот, то надо воспользоваться соотношением

$$K = \omega_0^2 = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2.$$

Это равенство позволяет пересчитать критические значения $\lambda_{1,m}$ системы (3) в критические значения параметра отображения. Обозначив результат такого пересчета через K^* , получим

$$K_{1,m}^* = \left(\frac{\pi}{\lambda_{1,m}}\right)^2, \quad m = 1, 2, \dots$$

Эти числа следует сравнить с величинами $K_{1,m}$, вычисленными по формулам (4), (5). Результат такого сравнения хорошо описывается приближенной формулой

$$\frac{K_{1,m}}{K_{1,m}^*} \approx 1 + 0.676 m^{-0.875}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Видно, что в асимптотике ($\lambda \gg 1$) множества $K_{1,m}$ и $K_{1,m}^*$ совпадают, что и оправдывает применение полученных здесь результатов в отношении отображения (1), (2).

Можно считать, что сформулированная в предыдущем разделе цель частично достигнута: периодическое прохождение амплитуды сепаратрисного отображения W_T через нуль (и отсутствие в этих точках расщепления сепаратрис) "обеспечивает" МА-интеграл. Стала понятной и причина этого явления, связанная с тем, что на "эллиптическом" и "гиперболическом" участках сепаратрисы изменение энергии имеет разный знак.

5 Обобщение модели

Представленная выше динамика оказывается, на наш взгляд, весьма нетривиальной. Возникает естественный вопрос: не является ли порождающая ее функция (2) чем-то уникальным и не исчезнут ли все необычные динамические эффекты при малом "шевелении" этой конструкции? Для поиска ответа на этот вопрос мы рассмотрим в этом коротком разделе модель несимметричной пилы, введя в (2) параметр перекоса s

$$f(x, s) = \begin{cases} 4x/(1+4s), & \text{если } 0 \leq x \leq 0.25 + s, \\ (2-4x)/(1-4s), & \text{если } 0.25 + s \leq x \leq 0.75 - s, \\ 4(x-1)/(1+4s), & \text{если } 0.75 - s \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (19)$$

Параметр s может изменяться в интервале $-0.25 \leq s \leq 0.25$ и при $s = 0$ мы возвращаемся к симметричной модели (2).

В крайних точках указанного интервала двухзубая пила вырождается в однозубую, которая интенсивно исследовалась ранее и в динамике которой нет ничего необычного (см., например, [10]). Главная цель данного раздела – понять основные детали этого перехода. Мы воспользуемся установленной выше эквивалентностью непрерывного и дискретного описаний и проследим эволюцию МА-интеграла при изменении параметра s .

При $s \neq 0$ "эллиптический" и "гиперболический" участки периода пилы оказываются неравными и движение на них описывается разными частотами ω_1 и ω_2 , соответственно:

$$\omega_1 = \omega_0/\sqrt{1-4s}, \quad \omega_2 = \omega_0/\sqrt{1+4s}. \quad (20)$$

Это обстоятельство не позволяет ввести переменную типа $\psi = 2\omega_0 t$ предыдущего раздела и приходится в качестве независимой переменной использовать время t . Продолжительность T_{sm} движения по сепаратрисе от точки устойчивого равновесия $x = 0.5$ до точки излома $x = 0.75 - s$ определяется формулой

$$T_{sm} = \frac{1}{2\omega_1} \arcsin \sqrt{\frac{1-4s}{2}}. \quad (21)$$

Сепаратриса $x_s(t)$ невозмущенной системы (3) запишется в виде:

$$x_s(t, s) = \begin{cases} a_s e^{2\omega_2 t} & \text{если } -\infty < t < -T_{sm}, \\ (1 + \sqrt{\frac{1-4s}{2}} \sin 2\omega_1 t)/2 & \text{если } -T_{sm} < t < T_{sm}, \\ 1 - a_s e^{-2\omega_2 t} & \text{если } T_{sm} < t < \infty, \end{cases} \quad (22)$$

где обозначено $a_s = (1 + 4s) e^{2\omega_2 T_{sm}} / 4$.

МА - интеграл задается формулой

$$\begin{aligned}
 W_{MA}(\lambda, s) = & \\
 & 2\omega_1 \sqrt{\frac{1-4s}{2}} \int_0^{T_{sm}} \sin\left(\pi \sqrt{\frac{1-4s}{2}} \sin 2\omega_1 t\right) \cos(2\omega_1 t) \sin(\Omega t) dt \\
 & + 4\omega_2 a_s \int_{T_{sm}}^{\infty} e^{-2\omega_2 t} \sin(2\pi a_s e^{-2\omega_2 t}) \sin(\Omega t) dt. \quad (23)
 \end{aligned}$$

С помощью этой формулы удалось исследовать весь интервал изменения параметра s и выяснилась следующая картина. Всюду внутри этого интервала сохраняется знакопеременный и колебательный характер МА-интеграла и, следовательно, множество критических чисел. При этом, однако, полупериод колебаний Λ_0 (расстояние по λ между соседними нулями МА-интеграла) неограниченно растет (см. рис.5). В предельных точках ($s = \pm 0,25$) первый нуль МА-интеграла уходит в бесконечность и восстанавливается "обычная" динамика [10].

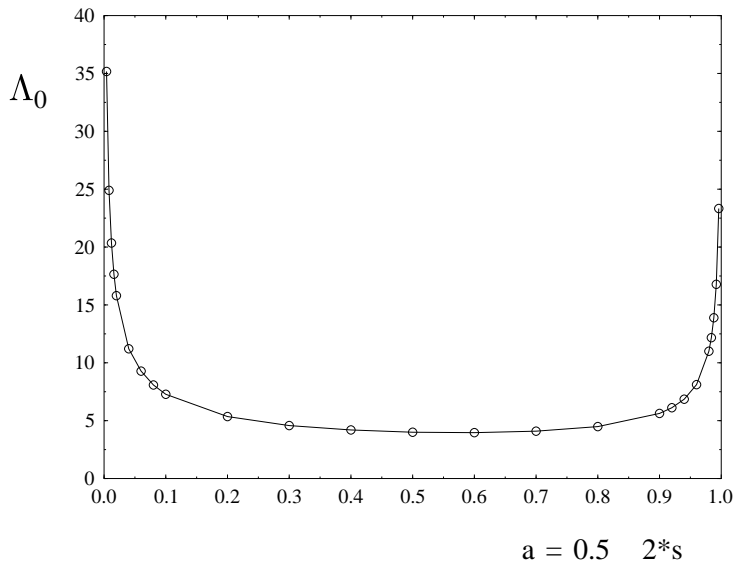


Рис. 5: Зависимость расстояния по λ между соседними нулями МА-интеграла (23) от параметра перекоса пилы s .

6 Заключение

Детальное исследование отображения (1), (2) только началось и рано делать какие-либо окончательные выводы, но уже сейчас вырисовывается следующая очень непростая динамическая картина.

С каждым резонансом из счетного множества всех резонансов этой системы связано свое счетное множество критических значений параметра K , при которых угол α_Q пересечения ветвей сепаратрисы проходит через нуль, что свидетельствует об отсутствии расщепления. Сепаратриса такого резонанса (независимо от его порядка Q) имеет полную протяженность по фазе и является непроходимым барьером для других траекторий, что исключает возможность глобального хаоса и ограничивает диффузию по импульсу.

Изложенные выше факты свидетельствуют о том, что замена в стандартном отображении синуса на пилу порождает качественно другую, новую динамику, которая не вписывается в рамки существующих сегодня представлений. Напомним еще раз, что в "обычной" динамике с ростом параметра K переход от хаотического слоя к хаотическому морю изучен достаточно хорошо и объясняется разрушением инвариантных кривых с иррациональными числами вращения [4,5]. Для рассмотренного случая эти представления очевидно не подходят, поскольку основные динамические эффекты связаны с резонансами, числа вращения которых строго рациональны.

Отображение (1), (2) и непрерывная система (3) заслуживают, по нашему мнению, дальнейшего изучения и хотелось бы отметить несколько наиболее важных проблем.

В разделе 3 описана динамика подхода к критическому режиму и выходу из него для целого резонанса. Является ли этот сценарий типичным и справедлив ли он в отношении дробных резонансов – открытый вопрос.

При отходе от критического значения параметра сепаратриса любого резонанса расщепляется и начинает пропускать другие траектории. Выяснение тонких деталей этого процесса является, по-видимому, одной из главных и интригующих проблем.

Необходимо продолжить исследование механизма, отвечающего за колебательный и знакопеременный характер зависимости $\alpha_1(K)$ (рис.1) (которая в основном и определяет необычную динамику) и провести аналогичное исследование в отношении дробных резонансов

Безусловный интерес представляет также изучение глобальной диффузии при $K \leq 1/3$ с учетом того факта, что на любом критическом числе любого резонанса эта диффузия ограничена. Решение этой задачи

зависит, по-видимому, от того, как устроено и что из себя представляет множество всех критических чисел.

В разделе 4 показано, что необычная динамика сохраняется при значительных изменениях формы пилы. Важно подчеркнуть, что эта ситуация имеет место до тех пор, пока в силе присутствуют две особенности и исчезает, когда они сливаются в одну. Это замечание, которое может стать ключом к отысканию или построению новых систем с нестандартным поведением, принадлежит Чирикову.

Вполне возможно, что в ходе поиска ответов на поставленные и многие другие вопросы будет получена информация, которая позволит существенно уточнить некоторые представления современной теории нелинейных гамильтоновых систем.

Благодарность.

Автор глубоко благодарен Б.В.Чирикову за многочисленные обсуждения и советы. Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 97-01-00865).

Список литературы

- [1] B.V. Chirikov, Phys.Reports **52**, 263 (1979).
- [2] A. Lichtenberg and M. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics*, Springer (1992).
- [3] Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев, *Введение в нелинейную физику*, Наука, Москва (1988).
- [4] R.S. MacKay, J.D. Meiss, I.C. Percival, Physica D, **13**, 55 (1984).
- [5] J. Green, J. Math. Phys., **20**, 1183 (1979).
- [6] Л.В. Овсянников, Частное сообщение, май 1999.
- [7] В.В. Вечеславов, *Динамика пилообразного отображения: 1. Новые численные результаты*. Препринт ИЯФ 2000-27, Новосибирск, 2000. E-print nlin.CD/0005048 .
- [8] В.В. Вечеславов, Б.В. Чириков, ЖЭТФ, **114**, 1516 (1998); В.В. Вечеславов, ЖЭТФ, **116**, вып.1(7) (1999).
- [9] В.В. Вечеславов, ЖЭТФ, **109**, 2208 (1996).
- [10] I. Dana, N.W. Murray, and I.C. Percival, Phys. Rev. Lett. **62**, 233 (1989).