

Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера СО РАН

С.А. Никитин, И.Я. Протопопов

**СКЪЮ-КВАДРУПОЛЬНЫЕ ВАРИАНТЫ КОМПЕНСАЦИИ ВЛИЯНИЯ  
ПРОДОЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ ДЕТЕКТОРА КЕДР НА СВЯЗЬ  
БЕТАТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ В КОЛЛАЙДЕРЕ ВЭПП-4М**

ИЯФ 99-44

Новосибирск  
1999

**Скью-квадрупольные варианты компенсации влияния продольного магнитного поля детектора КЕДР на связь бетатронных колебаний в коллайдере ВЭПП-4М**

*С.А. Никитин, И.Я. Протопопов*

*Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера СО РАН  
630090, Новосибирск, Россия*

**Аннотация**

Предложены и рассмотрены варианты локализации связи бетатронных колебаний на участке детектора КЕДР с продольным магнитным полем в электрон-позитронном коллайдере ВЭПП-4М на основе применения схемы Штеффена с двумя скью-квадрупольными линзами. Рассчитаны размеры пучка и другие параметры, характеризующие качество компенсирующего воздействия, с использованием параметризации Тенга. Показано принципиальное свойство схемы, состоящее в значительном увеличении вертикального размера в месте встречи в зависимости от уровня продольного поля.

**Skew-quadrupole variants of compensation of a detector KEDR longitudinal magnetic field effect on betatron coupling at the VEPP-4M collider**

*S.A. Nikitin and I.Ya. Protopopov*

*Budker Institute of Nuclear Physics SB RAS  
630090, Novosibirsk, Russia*

**Abstract**

Variants of betatron coupling localization at the VEPP-4M magnetic structure section incorporating KEDR detector with a magnetic longitudinal field are proposed and considered on a basis of a Steffen's compensation scheme with two skew-quadrupole lenses. Beam sizes as well as other parameters describing a quality of compensation effect are calculated using Teng's parameterization. Principle feature of the scheme to the effect that a vertical beam size in the interaction point may be considerably increased depending on the longitudinal field value is revealed.

© *Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера СО РАН*

## Введение

Для компенсации связи бетатронных колебаний, вносимой продольным магнитным полем детектора КЕДР, в коллайдере ВЭПП-4М предусмотрено использование двух специальных сверхпроводящих соленоидов. В принципиальном отношении данный способ компенсации связи колебаний, очевидно, наиболее эффективен. Тем не менее, с методической точки зрения представляет интерес рассмотреть альтернативные схемы компенсации, исключающие использование корректирующих соленоидов.

Известны различные способы компенсации влияния продольного магнитного поля с помощью скью-квадрупольных линз (повернутых на  $45^\circ$  магнитных квадрупольных линз). Их условно можно разделить на схемы с “сильным” ( $\chi = N_s L_s / (2HR) \sim 1$ ) и “слабым” ( $\chi \ll 1$ ) продольным полем. Здесь  $\chi$  – параметр, характеризующий угол поворота плоскости бетатронных колебаний на участке с продольным полем величиной  $N_s$  и протяженностью  $L_s$ ;  $HR$  – магнитная жесткость. Главная область применения первой группы – спиновые ротаторы с продольным полем (“сибирские змейки”)[1-4]. Случай КЕДРа относится ко второй группе [5-7], так как на энергии  $E=1$  ГэВ и значении поля в детекторе, например, 0.2 Тесла параметр поля будет  $\chi=0.075$ .

Обычный метод коррекции слабых возмущений, ответственных за связь, состоит в занулении ширины разностного линейного резонанса связи колебаний  $\Delta\nu$ . На ВЭПП-4М с этой целью используется система скью-квадрупольных корректоров, расположенных в полукольцах и в экспериментальном промежутке. В рассматриваемом случае данный метод не позволит эффективно управлять вертикальным размером пучка. Основная причина связана с большой амплитудой вертикальной дисперсионной функции  $D_z$ , возбуждаемой из-за наличия продольного поля ( $\max\{D_z\} \sim D_\chi$ ).

Принцип локализации связи колебаний на отдельном участке ускорителя (при одновременном устранении эффектов связи на большей части кольца) является более радикальным способом по сравнению с методом компенсации линейного резонанса связи. Он нашел естественное применение в схемах спиновых ротаторов с продольным полем. Для случая “слабого” поля соответствующая схема локализации связи колебаний описана в работе Штеффена [7]. Она предельно проста и экономична, так как требует всего два skew- квадрупольных корректора.

Ниже обсуждается возможность применения этой схемы на ВЭПП-4М. Рассчитаны параметры пучка в различных ее вариантах. Особое внимание уделено вертикальному размеру пучка в месте встречи – в центре КЕДРа. В условиях локализации связи на участке, включающем КЕДР, этот параметр может значительно измениться. Последнее обстоятельство нужно учитывать при рассмотрении факторов, влияющих на светимость.

## 1. Схема Штеффена

Данная схема компенсации основана на приближении “тонкого” магнита [7,8], в котором орбитальное преобразование в соленоиде приведено к его центру и имеет вид ( $\chi \ll 1$ ;  $\chi^2/L_s \rightarrow 0$ ):

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ z \\ z' \end{pmatrix}_{out} = M_s \cdot \begin{pmatrix} x \\ x' \\ z \\ z' \end{pmatrix}_{in} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\chi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\chi \\ \chi & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \chi & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ x' \\ z \\ z' \end{pmatrix}_{in}$$

Магнитная структура зеркально симметрична относительно места встречи в центре соленоида. Симметрично по обе стороны соленоида помещено по одной “тонкой” скью-линзе. Их положение в структуре и “сила” определяются из условия локализации связи на участке между ними, включающем соленоид. Обозначим через  $M_+$  матрицу преобразования от азимута, где расположен скью квадруполь  $SQ_+$ , до середины левой половинки соленоида. Обозначения для правой половины схемы имеют индекс “-“. Пусть  $\chi = H_s L_s / (4HR)$  относится к половинке соленоида, полная длина которого равна  $L_s$ . Матрица преобразования на участке от  $SQ_+$  до  $SQ_-$  имеет вид

$$M = Q_- \cdot M_- \cdot M_s \cdot L^2 \cdot M_s \cdot M_+ \cdot Q_+$$

Здесь  $L$  – матрица пустого промежутка длиной  $L_s/4$ ;  $M_s$  – матрица половинки соленоида в приближении “тонкого” магнита;  $Q_+$  и  $Q_-$  матрицы “тонких” skew линз, “силы” которых из-за симметрии равны по величине и отличаются знаком:  $g = g_+ = -g_- = G_+ \cdot L_+ / HR$ ;  $G_+$  – градиент в линзе длиной  $L_+$ . Из-за зеркальной симметрии матрицы  $M_+$  и  $M_-$  сопряжены операцией транспозиции вдоль главной диагонали (можно показать, что данное свойство основано на равенстве диагональных элементов в матрице перехода  $2 \times 2$  для произвольного однородного участка магнитной структуры):

$$M_+ = \begin{pmatrix} a_x & b_x & 0 & 0 \\ c_x & d_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_z & b_z \\ 0 & 0 & c_z & d_z \end{pmatrix}; M_- = \begin{pmatrix} d_x & b_x & 0 & 0 \\ c_x & a_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_z & b_z \\ 0 & 0 & c_z & a_z \end{pmatrix}.$$

В рассматриваемом приближении, когда можно пренебречь членами второго порядка по  $\chi$ , диагональные блоки  $2 \times 2$  матрицы  $M$  в соответствии с

принципом локализации связи будут нулевыми, если выполнены следующие условия:

$$g = \frac{2\chi}{b_x d_z - b_z d_x}, \quad (1)$$

$$P = b_x d_z + d_x b_z + \frac{L_s d_x d_z}{2} = 0.$$

Там, где функция азимута  $P(s)$  принимает нулевое значение, и должен быть расположен skew квадруполь, “сила”  $g$  которого определяется через параметр  $\chi$  и элементы матрицы  $M_+$ . По сравнению с [7], где, по-видимому, из практических соображений, пренебрегается пустым промежутком между двумя “тонкими” соленоидами, функция  $P(s)$  дополнена слагаемым, явно зависящим от  $L_s$ . Соответственно изменена формула для силы skew-линз (в [7]  $g=\chi/(b_x d_z)$ ).

В варианте схемы, предложенной в [7] для PETRA,  $\chi=0.008$  на энергии 16 ГэВ. Для предполагаемых условий эксперимента на ВЭПП-4М в области низких энергий (см. пример выше) величина  $\chi$  на порядок больше. Кроме того, параметр краевой фокусировки половинки соленоида  $2\chi^2/L_s$  ( $L_s=250\text{см}$ ) сравнительно не так уж мал, поскольку его обратная величина близка к значениям  $\beta_x$  и  $\beta_z$  функций в линзах L1 и L2 около места встречи ( $\sim 100\text{м}$ ). Это говорит о том, что приближение “тонких” магнитов будет выполняться в нашем случае хуже. Поэтому необходимо не только найти оптимальный по указанным признакам вариант схемы, но и исследовать соответствующие ему характеристики бетатронного движения и параметры пучка без использования предположения о малости возмущений.

## 2. Варианты для ВЭПП-4М

На Рис.1 показано поведение параметра Штеффена  $P(s)$  в экспериментальном промежутке ВЭПП-4М для значения эффективной длины соленоида КЕДРа  $L_s \approx 250\text{см}$ , определенной по расчетному магнитному полю. “Магический” азимут, где  $P=0$ , находится внутри линзы L2. Рассмотрены несколько вариантов с учетом полученной зависимости  $P(s)$ .

В варианте #1 используется штатный skew квадруполь SQ1 (и зеркально симметричный с ним - по другую сторону от места встречи), расположенный между линзами L1 и L2;

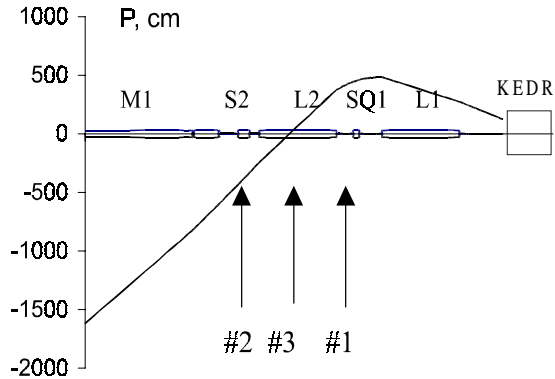
Вариант #2 предполагает размещение skew линз на свободном месте рядом с секступольным корректором S2 в непосредственной близости к L2;

В варианте #3 пара тонких skew-квадруполь помещена внутри линз L2 на “магических” азимутах.

Вариант #4 основан на повороте линз L2 вокруг продольной оси в противоположные стороны на угол  $\eta \ll 1$ .

Таким образом, варианты различаются по азимуту корректора, а оптимизация заключалась в подгонке его силы  $g$ . В варианте #4  $g = G \cdot L \cdot \sin(2\eta) / HR$ , где  $G, L$  градиент и длина линз L2.

В качестве критерия локализации связи выбран один из параметров преобразования Тенга [9], равный косинусу угла “симплектического поворота”  $\phi$ . Согласно приложению А, вне участка локализации величина  $\Omega = \cos\phi$  в



**Рис. 1.** Изменение параметра Штеффена с азимутом на участке экспериментального промежутка вблизи детектора КЕДР. Указано размещение skew-квадрупольного корректора в трех вариантах.

результате подгонки параметров схемы должна быть как можно ближе к единице. На самом участке  $\Omega$  может принимать произвольные значения как больше, так и меньше единицы. При подгонке контролировались ширина резонанса связи  $\Delta\nu$  и остаточные возмущения в виде вертикальной дисперсии ( $D_z$ ) и угла поворота поперечного сечения пучка ( $\Psi$ ). Рассчитаны равновесные размеры пучка по вертикали и горизонтали.

На Рис.2б показано распределение параметра  $\Omega$  по азимуту ( $s$ ) для случая без компенсации влияния соленоида КЕДРа с полем 2 кГс на энергии 1ГэВ. На участке соленоида функция  $\Omega(s)$  имеет резкий пик. На основной части

кольца  $\Omega = \text{const} < 1$ . На Рис.2а построена соответствующая азимутальная зависимость вертикальной дисперсии  $D_z$ . Ее амплитуда недопустимо большая, поскольку сравнима с величиной радиальной дисперсии ( $\sim 100$  см). На Рис.2с приведено распределение вертикального размера пучка по кольцу ВЭПП-4М  $\sigma_z = (\sigma_{z\beta}^2 + D_z^2 \sigma_E^2)^{1/2}$  в тех же условиях. Здесь  $\sigma_{z\beta}$  - бетатронный вклад в размер;  $\sigma_E$  - относительный раброс энергии в пучке. Вертикальный размер всюду одного порядка с радиальным, но в месте встречи примерно в десять раз меньше последнего. Ширина разностного резонанса связи рассчитана путем моделирования сближения парциальных частот вертикальных и радиальных бетатронных колебаний за счет изменения градиента поля в полукольцах и составляет  $\Delta\nu \approx 0.05$ .

Характеристики магнитной структуры и пучка в варианте #1 приведены на Рис.3. В результате подгонки силы корректоров SQ1 параметр  $\Omega$  близок к единице на всем кольце, за исключением участка с КЕДРом и скью-линзами, где он больше единицы. При этом ширина резонанса связи занулена ( $< 10^{-4}$ ). Размер пучка по вертикали на кольце уменьшен на порядок по сравнению со случаем без компенсации, т.е. пучок стал плоским. В то же время размер в месте встречи практически не изменился (около 14 мкм) и очень близок к среднему размеру  $\langle \sigma_z \rangle$  в полукольцах. Вертикальная дисперсия уменьшена до приемлемого уровня 5-10 см, который не сказывается заметным образом на результирующем размере пучка. Пучок немного развернут в поперечной плоскости, на разных азимутах по разному (см. Рис.5), но в месте встречи, в силу определенной азимутальной симметрии возмущения, он вытянут строго по горизонтали ( $\sigma_{x*} = 150$  мкм,  $\sigma_{z*} = 14$  мкм).

Необходимый градиент поля в SQ1 составляет  $\pm 39$  Гс/см (длина линзы 10 см) при поле  $H_s = 2$  кГс и энергии 1 ГэВ. Максимально достижимый по источнику питания и конструкции обмотки градиент поля в реальном корректоре 100 - 120 Гс/см. Поэтому технический предел по значению поля КЕДРа в данном варианте равен примерно 6 кГс.

Принципиально вариант #2 мало отличается от варианта #1, так как в том и в другом случае место расположения корректора не совпадает с "магическим" азимутом. Однако в месте встречи вертикальный размер пучка оказывается в полтора раз меньше, чем в #1. Рядом со скью-линзой расположен секступольный корректор хроматизма. Это дает возможность компенсировать вклад в связь колебаний, вызванный вертикальным смещением равновесной орбиты в секступольной линзе, за счет дополнительного корректирующего воздействия скью-линзы.

Вариант #3 есть точная реализация схемы Штеффена. Близок к нему вариант #4 с поворотом линз L2. Компенсация влияния продольного поля детектора с помощью механических поворотов квадрупольных линз,

входящих в мини-бета вставку, применяется на установке CESR [10]. В нашем случае необходимый угол поворота линз L2 дается выражением

$$\eta[\text{град}] \approx 48.4 \cdot \frac{H_S [\text{кГц}]}{L[\text{см}] \cdot E[\text{ГэВ}]}$$

Вид азимутальных зависимостей вертикальной дисперсии, параметров  $\Omega$  и  $\psi$  показан на Рис.4.

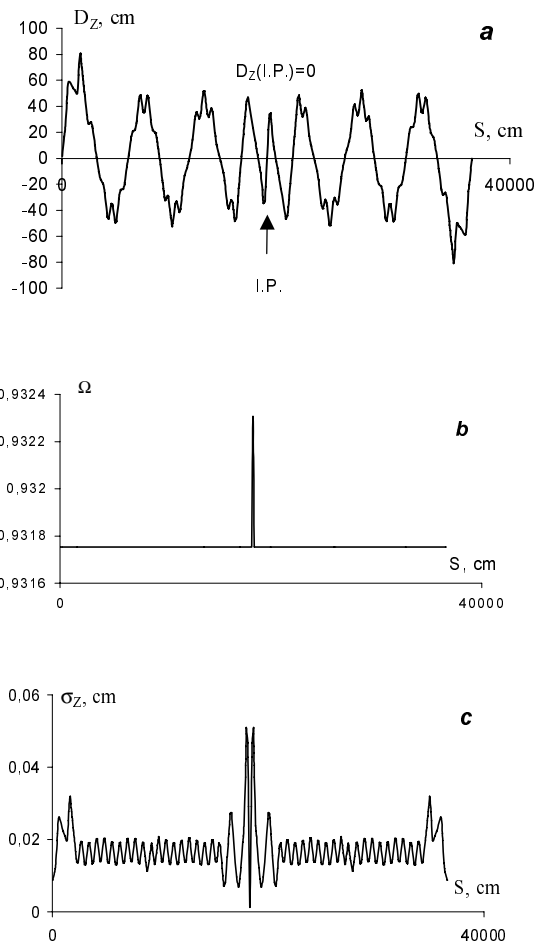
Основные характеристики рассмотренных вариантов для  $H_S=2$  кГц,  $E=1$  ГэВ отражены в таблице 1. Для сравнения приведены данные для случаев без компенсации (б/к) и компенсирующих соленоидов (к.с.). В варианте #4  $\eta=0.74^\circ$  ( $L=131$  см). По уровню остаточных возмущений предпочтительным является вариант с поворотом линз L2. Вариант #2 обеспечивает минимальный по скью-квадрупольным вариантам вертикальный размер в месте встречи, отличающийся от прочих в полтора раза. С технической точки зрения в настоящее время без каких-либо переделок осуществим только вариант #1.

Во всех вариантах значение  $g$ , вычисленное из соотношения (1), отличается от  $g$ , найденного подгонкой, на одинаковый фактор (на 20%).

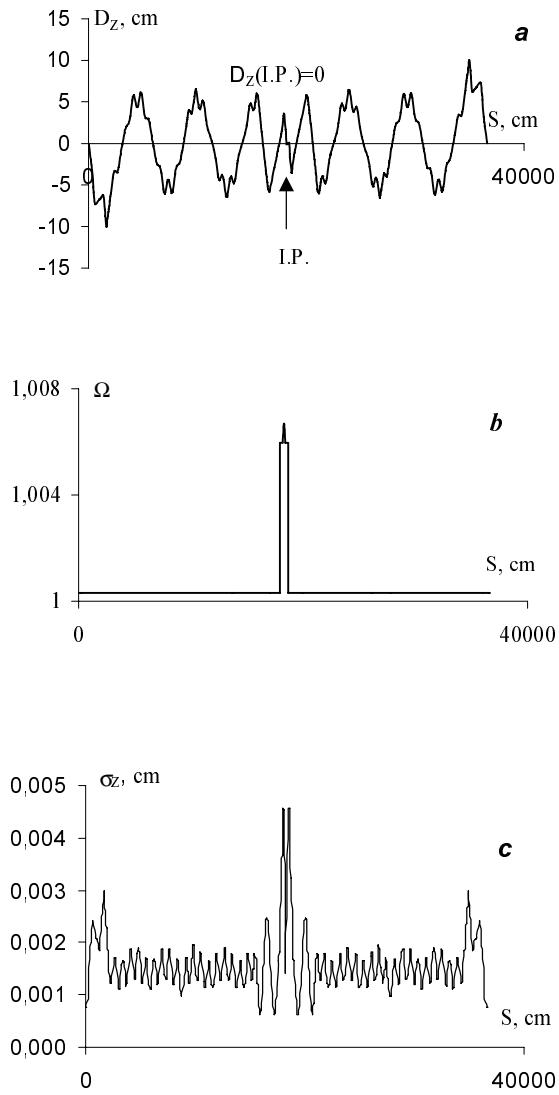
**Таблица 1.** Характеристики вариантов компенсации при  $E=1$  ГэВ,  $H_S=2$  кГц (градиент  $G$  эквивалентной скью-линзы дан для эффективной длины 10 см; размеры пучка рассчитаны без учета эффекта Тушека).

Вариант	$G$ кГц/см	$\Delta v$	$\Sigma_1$ см·рад	$\Sigma_2$ см·рад	$\langle \sigma_z \rangle$ мкм	$\sigma_{z*}$ мкм	$max D_z$ см
б/к	–	0.047	$6.3 \cdot 10^{-7}$	$3.1 \cdot 10^{-7}$	180	13	80
к.с.	–	0	$7.5 \cdot 10^{-7}$	0	0	0	0
#1	0.039	$4 \cdot 10^{-5}$	$7.6 \cdot 10^{-7}$	$1.8 \cdot 10^{-9}$	18	14	10
#2	0.040	$2 \cdot 10^{-4}$	$7.6 \cdot 10^{-7}$	$4.1 \cdot 10^{-9}$	27	10	15
#3	0.036	$7 \cdot 10^{-4}$	$7.6 \cdot 10^{-7}$	$4.1 \cdot 10^{-10}$	5	12	8
#4	0.039	$6 \cdot 10^{-4}$	$7.6 \cdot 10^{-7}$	$5.7 \cdot 10^{-11}$	4	13	6

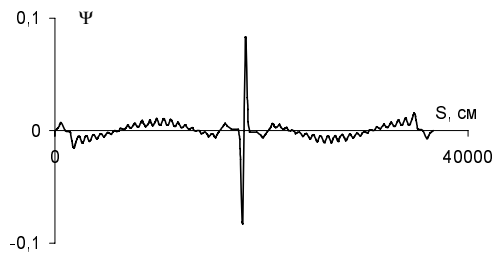
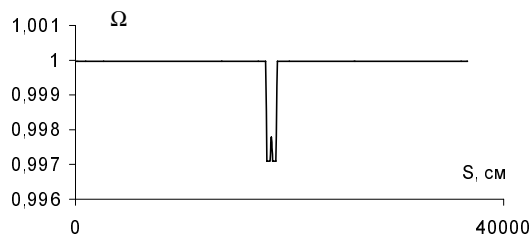
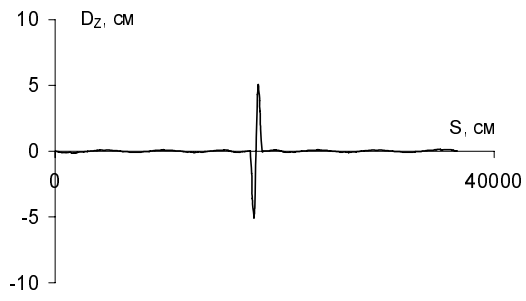




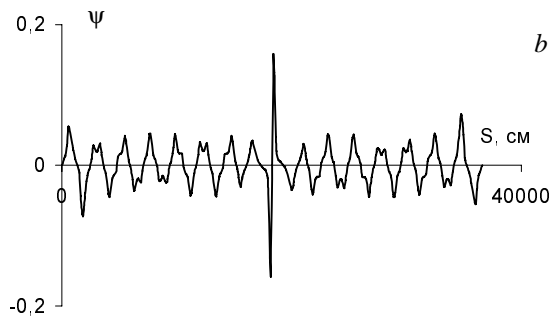
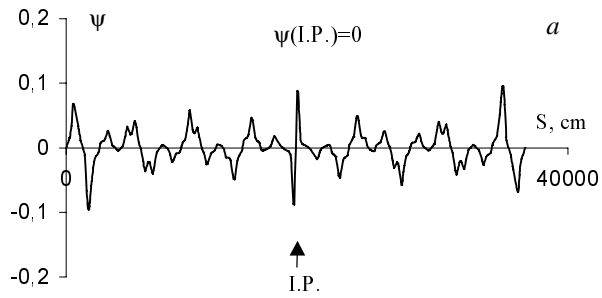
**Рис.2.** Вертикальная дисперсионная функция  $D_z(s)$ , параметр симплектического поворота  $\Omega(s)$  и результирующий вертикальный размер пучка  $\sigma_z(s)$  как функции азимута для случая отсутствия компенсации влияния поля детектора величиной  $H_S=2$  кГс на энергии  $E=1$  ГэВ.



**Рис.3.** Характеристики магнитной структуры и пучка в варианте схемы компенсации #1 с использованием штатных скью-линз SQ1.



**Рис.4.** Характеристики магнитной структуры и пучка в варианте #4 с поворотом линз L2.



**Рис.5.** Азимутальная зависимость угла поворота пучка в поперечном сечении из-за связи колебаний в варианте компенсации #1 при  $H_S=2$  кГц и  $E=1$  ГэВ. *a* - с учетом остаточной вертикальной дисперсии; *b* - без учета вертикальной дисперсии.

### 3. Расчет размеров пучка со связью колебаний

При наличии в синхротроне сильной линейной связи колебаний равновесные поперечные размеры электронного пучка, а также угол его наклона в поперечном сечении к медианной плоскости ( $\Psi$ ) можно находить различными способами [11-13]. В [13] соответствующие формулы получены путем замены переменных по Тенгу-Эдвардсу [9] в кинетических соотношениях, описывающих влияние синхротронного излучения, и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \langle x^2 \rangle &= \sigma_{x\beta}^2 + D_x^2 \sigma_E^2; \\
 \langle z^2 \rangle &= \sigma_{z\beta}^2 + D_z^2 \sigma_E^2; \\
 \langle xz \rangle &= \langle xz \rangle_\beta + D_x D_z \sigma_E^2; \\
 \sigma_{x\beta}^2 &= \beta_1 \Omega^2 \Sigma_1 + (\gamma_2 b^2 + 2\alpha_2 b d + \beta_2 d^2) \Sigma_2; \\
 \sigma_{z\beta}^2 &= \beta_2 \Omega^2 \Sigma_2 + (\gamma_1 b^2 - 2\alpha_1 a b + \beta_1 a^2) \Sigma_1; \\
 \langle xz \rangle_\beta &= \Omega \cdot [(\alpha_1 b - \beta_1 a) \Sigma_1 + (\alpha_2 b + \beta_2 d) \Sigma_2]; \\
 \text{tg } 2\Psi &= 2 \frac{\langle xz \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle z^2 \rangle}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Угловые скобки означают усреднение по амплитудам и фазам колебаний частиц в пучке;  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  величины фазовых объемов для нормализованных по Тенгу переменных;  $\alpha_j, \beta_j$  ( $j=1,2$ ) – обобщенные параметры Твисса;  $\Omega = \cos\varphi$  – параметр симплектического поворота;  $a, b$  и  $d$  – элементы матрицы  $D \cdot \sin\varphi$  (см. приложение А):

$$D \cdot \sin\varphi = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Хотя расчеты проводились с использованием общих формул для равновесных фазовых объемов в нормальных координатах, здесь они опущены ввиду их малой важности в рассматриваемых случаях локализации связи. Действительно, возбуждение бетатронных колебаний квантовыми флуктуациями излучения происходит в поворотных магнитах, т.е. вне участка с продольным полем и скуль-линзами. Вследствие нулевой вертикальной дисперсии в магнитах размеры пучка по обоим направлениям определяются, в основном, радиальным фазовым объемом, величина которого при этом близка к той, что можно рассчитать обычным способом ( $\Sigma_1 \approx \Sigma_X$  и  $\Sigma_2 \ll \Sigma_X$  – см. Таблицу 1).

Для простоты вклад эффекта Тушека не учитывался. Он был принят во внимание лишь для оценки вертикального размера в месте встречи.

В месте встречи ( $\alpha_1=\alpha_2=0$ ) параметр  $|b_*|\sim 10$  см в рассматриваемых случаях много больше  $|d_*|\ll 1$ . В силу симметрии здесь  $D_{Z^*}=0$ . Поэтому размер пучка по вертикали практически полностью определяется величиной  $|b_*|$ :

$$\sigma_{z^*}^2 \approx \beta_{2^*} \Omega^2 \Sigma_2 + b_*^2 \Sigma_1 / \beta_{1^*} \approx b_*^2 \Sigma_X / \beta_{X^*}. \quad (3)$$

Ввиду важности описания поведения размера пучка в месте встречи с изменением параметров схемы компенсации, величины продольного поля и энергии частиц в Приложении **B** дан независимый способ вывода формул для поперечных размеров с использованием параметризации Тенга и метода моментов второго порядка.

Кроме того, полученные из расчетов на основе (2) соотношения легко проверить численно, пользуясь уже указанным свойством локализации связи или прибегая к сравнительно простому моделированию траектории одной частицы (трэкинг).

Первый из этих способов заключается в нахождении вертикального размера в месте встречи по заданному радиальному размеру в скью-линзе SQ на входе в участок локализации связи (общий метод точного решения подобной задачи изложен в [2]). Пусть вне этого участка существуют только радиальные колебания с фазовым объемом  $\Sigma_X$ . Повернутый квадруполь SQ переводит отклонение по X в угол по Z, возбуждая вертикальный фазовый объем (в комбинированном индексе XZ первый символ указывает "затравочные" колебания)

$$\Sigma_{XZ} \approx \frac{\Sigma_X \beta_X \beta_Z}{F^2},$$

где F - фокусное расстояние SQ;  $\beta_X$  и  $\beta_Z$  амплитудные функции в линзе. Соответствующий размер по Z в месте встречи равен

$$\sigma_{XZ^*} \approx \frac{1}{F} \sqrt{\Sigma_X \beta_X \beta_Z \beta_{Z^*}}.$$

Отношение полуосей эллипса, характеризующего поперечное сечение пучка в месте встречи, составит

$$\frac{\sigma_{XZ^*}}{\sigma_{X^*}} \approx \frac{\sqrt{\beta_X \beta_Z}}{F} \sqrt{\frac{\beta_{Z^*}}{\beta_{X^*}}}. \quad (4)$$

Аналогично, для случая, когда вне участка с КЕДРом возбуждены только лишь вертикальные колебания, отношение полуосей соответствующего эллипса равно

$$\frac{\sigma_{ZX^*}}{\sigma_{Z^*}} \approx \frac{\sqrt{\beta_X \beta_Z}}{F} \sqrt{\frac{\beta_{X^*}}{\beta_{Z^*}}}. \quad (5)$$

Площади эллипсов определяются произведениями

$$\sigma_{XZ^*} \sigma_{X^*} = \Sigma_X \sqrt{\beta_X \beta_Z \beta_{X^*} \beta_{Z^*}}$$

и

$$\sigma_{ZX^*} \sigma_{Z^*} = \Sigma_Z \sqrt{\beta_X \beta_Z \beta_{X^*} \beta_{Z^*}}.$$

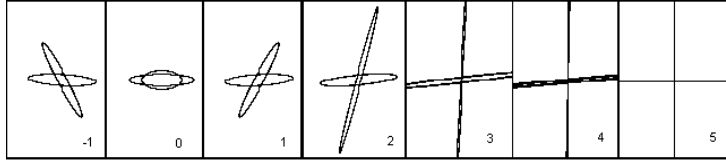
Физически эти эллипсы отвечают двум независимым нормальным модам, имеющим в общем случае эллиптическую поляризацию. Их прямое наблюдение в эксперименте возможно при резонансной раскачке пучка на собственных частотах. Изображение мод в виде последовательности точек положения частицы на плоскости X-Z для данного азимута легко найти моделированием ее многооборотного движения с фиксированными начальными условиями. Для одной из мод в качестве таких условий служит отклонение траектории по X-, а для другой - по Z-направлению на одном из азимутов синхротрона вне участка локализации связи. Эти отклонения траектории определяют собой величины фазовых объемов  $\Sigma_X$  и  $\Sigma_Z$ .

На Рис.6 показаны нормальные моды в разных сечениях ВЭПП-4М, рассчитанные вышеописанным путем при  $\Sigma_X = \Sigma_Z$  для варианта схемы компенсации #4. Эллиптическая мода в центре КЕДРа, наиболее вытянутая по горизонтали, связана с реальной формой сечения пучка. Площади эллипсов в месте встречи равны между собой из-за равенства фазовых объемов в соответствии с приведенными выше оценками. Отношение осей эллипсов по результатам трэкинга  $\sigma_{XZ}/\sigma_{X^*} \approx 0.177$ ,  $\sigma_{ZX}/\sigma_{Z^*} \approx 2.15$ . Оценки по формулам (4) и (5) при  $F=1/g=86$  м (Таблица 1) дают близкие значения с точностью порядка процента. Аналогично, из (2) следует

$$\frac{\sigma_{Z^*}}{\sigma_{X^*}} = \frac{|b_*|}{\beta_{1^*} \Omega_*}.$$

В варианте #4 из Таблицы 1 это выражение для отношения осей эллиптического сечения пучка приводит к значению 0.184 ( $|b_*|=12.6$  см;  $\beta_{1^*} \approx \beta_{X^*} \approx 69$  см).

Таким образом, тремя разными способами получены практически совпадающие результаты по определению геометрических характеристик пучка на участке локализации связи.



**Рис.7.** Вид эллиптически поляризованных нормальных мод поперечных колебаний в варианте компенсации #4 на различных азимутах: 0 - место встречи; -1 и 1 на азимутах -20 и +20 см относительно места встречи; 2 - на азимуте +40 см; 3 - край основного соленоида; 4 - в линзе L1; 5 - в полукольце.

#### 4. Зависимость вертикального размера пучка в месте встречи от параметров компенсационной схемы

Согласно (1) сила корректора полностью определяется величиной поля КЕДРа и меняется прямо пропорционально вместе с ним. Задание необходимого тока в корректирующей обмотке (градиента поля в скью-линзе) при  $H_S = \text{const}$  не зависит от энергии частиц. Используя (3), запишем выражение для вертикального размера в месте встречи в виде

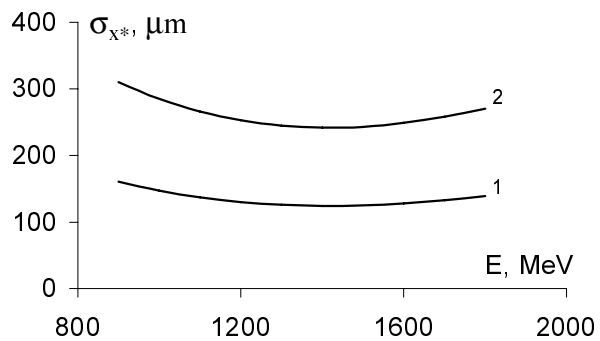
$$\sigma_{Z^*} \approx |b^*| \cdot \sqrt{\frac{\Sigma_X}{\beta_{X^*}}} = |b^*| \cdot \frac{\sigma_{X^*}}{\beta_{X^*}} = \left| \frac{db^*}{dH_S} \cdot H_S \right| \cdot \frac{\sigma_{X^*}(E)}{\beta_{X^*}}. \quad (6)$$

Здесь учтена линейная зависимость коэффициента Тенга  $b^*$  от поля  $H_S$  и нелинейная, в общем случае, зависимость радиального размера  $\sigma_{X^*}$  от энергии частиц  $E$ . На Рис.8 построена расчетная зависимость  $\sigma_{X^*}(E)$  с учетом эффекта многократного внутреннего рассеяния в области низких энергий ВЭПП-4М для типичного тока частиц в сгустке  $\sim 1$  мА. В варианте компенсации #1

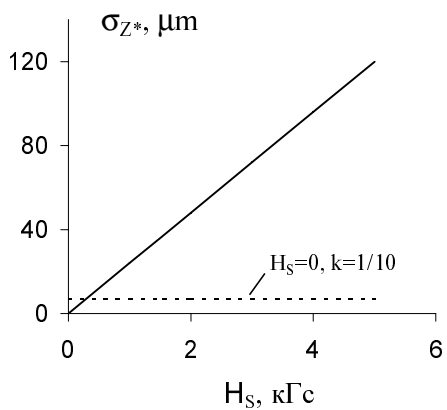
$$\left| \frac{db^*}{dH_S} \right| \approx 7 \text{ см} / \text{кГс}.$$

В других вариантах эта величина меняется прямо пропорционально с размером  $\sigma_{Z^*}$  из таблицы 1. С использованием данного коэффициента и уточненной зависимости  $\sigma_{X^*}(E)$  рассчитана зависимость  $\sigma_{Z^*}$  от поля  $H_S$  при  $E=1.5$  ГэВ (см. Рис.9).





**Рис.8.** Радиальный размер пучка в месте встречи как функция энергии, рассчитанный с учетом эффекта Тушека. 1- бетатронная часть размера; 2- полный размер, включающий вклад энергетической дисперсии.



**Рис.9.** Зависимость вертикального размера в месте встречи от величины поля детектора в варианте компенсации #1 ( $E=1.5$  ГэВ). Пунктиром показан уровень для случая без поля с коэффициентом связи колебаний  $k=1/10$ .

Для сравнения пунктиром на Рис.9 показан уровень  $\sigma_{z*}$ , определяемый при  $H_S=0$  слабой связью колебаний, при которой отношение вертикального и горизонтального размеров в полукольцах ( $\beta_x \approx \beta_z$ ) составляет  $k=1/10$ .

Таким образом, повышая поле в детекторе в условиях локализации связи скуль-линзами, можно в значительной мере увеличить вертикальный размер в месте встречи, оставляя неизменным размер по горизонтали. Чтобы выяснить, можно ли при этом сохранить или поднять светимость за счет увеличения тока в пучках, необходимо провести соответствующие эксперименты и численное моделирование эффектов встречи. Особенностью рассмотренного способа управления поперечным размером в сравнении с известным методом "раздувания" пучка с помощью магнитных вигглеров является то, что он не приводит к изменению энергетического разброса частиц и радиального эмиттанса.

### **Заключение**

Предложены и рассмотрены варианты локализации связи бетатронных колебаний на участке детектора КЕДР с продольным магнитным полем в электрон-позитронном коллайдере ВЭПП-4М на основе применения схемы Штеффена с двумя скуль-квадрупольными линзами. Рассчитаны размеры пучка и другие параметры, характеризующие качество компенсирующего воздействия, с использованием параметризации Тенга. Показано принципиальное свойство схемы, состоящее в значительном увеличении вертикального размера в месте встречи в зависимости от уровня продольного поля.

Авторы благодарят Г.М.Тумайкина и Ю.А.Тихонова за полезные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Я.С.Дербенев, А.М.Кондратенко, Препринт ИЯФ 72-68 (1976); ЖЭТФ, 64, 1918 (1973).
2. С.А.Никитин, Е.Л.Салдин, Препринт ИЯФ 81-19 (1981); Internal Report DESY L-Trans-290, April 1984.
3. А.А.Жоленц, В.Н.Литвиненко, Препринт ИЯФ 81-80 (1981).
4. S.A.Nikitin, NIMA 378 (1996), 495-498.
5. P.J.Bryant, CERN ISR-MA/75-26 (1975).
6. G.Guignard, LEP-70/75 (1978).
7. K.Steffen, Internal Report DESY HERA 82/11 (1982).
8. G.Ripken, K.Steffen and A.Wrulich, DESY M-VM 82/ (1982).
9. D.A.Edwards & L.C.Teng, IEEE, Trans. Nucl. Sci. NS-20, No.3, p.885.
10. А.В.Темныкх (private communication at the HEACC'98).
11. A.W.Chao, SLAC-PUB-2143, June 1978, (A).
12. В.Н.Литвиненко, Е.А.Переведенцев, Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц (Дубна, 1978), т.II, с.285.
13. А.А.Жоленц, Препринт ИЯФ 78-51 (1978).
14. V.A.Kiselev, S.A.Nikitin & I.Ya.Protopopov, HEACC'98 (XVII Int. Conf. on High Energy Accelerators, Dubna, 1998), p.103.

Параметры Тенга

Периодически зависящая от азимута “однооборотная” матрица 4x4 T(s), удовлетворяющая известному условию симплектичности  $T^T \cdot S \cdot T = S$  (индекс “Т” – транспонирование; матрица S есть 4x4 версия матрицы 2x2 того же обозначения, выписанной ниже) на произвольном азимуте циклического ускорителя со связью колебаний может быть приведена к матрице U с нулевыми диагональными блоками с помощью “поворотной” матрицы R [9]:

$$U = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = R^{-1} \cdot T \cdot R,$$

$$R = \begin{vmatrix} I \cos \varphi & D^{-1} \sin \varphi \\ -D \sin \varphi & I \cos \varphi \end{vmatrix}.$$

Здесь A, B и D - 2x2 унимодулярные матрицы, причем, A и B записываются в форме Куранта-Снайдера:

$$A, B = I \cos \mu_{1,2} + J_{1,2} \sin \mu_{1,2};$$

$$J_{1,2} = \begin{vmatrix} \alpha_{1,2} & \beta_{1,2} \\ -\gamma_{1,2} & -\alpha_{1,2} \end{vmatrix}.$$

Набеги фаз  $\mu_{1,2}$  связаны обычным путем с собственными числами матрицы U (=собственным числам матрицы T вследствие подобия матриц). В нормализованном фазовом пространстве величины  $\alpha_{1,2}$ ,  $\beta_{1,2}$ ,  $\gamma_{1,2} = (1 + \alpha_{1,2}^2) / \beta$  выполняют роль параметров Твисса, как в системах без связи колебаний. Если определить T в виде

$$T = \begin{vmatrix} M & n \\ m & N \end{vmatrix},$$

то имеем известные соотношения

$$D = -\frac{m + Sn^T S^T}{(\cos \mu_1 - \cos \mu_2) \sin 2\varphi}, \quad S = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\cos \mu_1 - \cos \mu_2 = Sp(M - N) \left\{ \frac{1}{4} + \frac{2|m| + Sp(nm)}{[Sp(M - N)]^2} \right\}^{1/2},$$

$$\cos 2\varphi = \frac{Sp(M - N)}{2(\cos \mu_1 - \cos \mu_2)} = \frac{Sp(M - N)}{Sp(A - B)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4} + \frac{2|m| + Sp(nm)}{[Sp(M - N)]^2} \right\}^{-1/2}.$$

Из последнего следует, что  $\cos 2\varphi = 1$ , если связь полностью отсутствует ( $A$  совпадает с  $M$ , а  $B$  с  $N$ ). Действительно,  $\cos 2\varphi$  равен отношению разности шпуров блочных матриц  $2 \times 2$ , расположенных на главной диагонали “однооборотной” матрицы перехода  $4 \times 4$ , к удвоенной разности косинусов набега фаз нормальных мод бетатронных колебаний. Очевидно, что в ускорителе без связи колебаний эта величина тождественно равна единице, т.к. нормальные колебания совпадают с обычными взаимно ортогональными модами. Удобно использовать параметр  $\Omega = \cos \varphi > 0$ . Чем ближе друг к другу исходные парциальные бетатронные частоты, определяемые настройкой фокусировки в отсутствии связи колебаний, тем заметнее будет отличие  $\Omega$  от единицы при наличии связи.

Выбор знака  $\Omega$  связан с выбором положительного знака перед квадратным корнем в выражениях для  $(\cos \mu_1 - \cos \mu_2)$  и  $\cos 2\varphi$ , поэтому, формально,  $-\pi/4 < \varphi < \pi/4$ . Вводимое таким образом знаковое соответствие между  $(\cos \mu_1 - \cos \mu_2)$  и  $Sp(M - N)$  помогает в идентификации нормальных мод при вычислениях. Необходимо отметить одно интересное свойство, не указанное в оригинальной работе [9]. В зависимости от особенностей магнитной структуры величины  $\cos 2\varphi$  и  $\Omega$  могут быть меньше ( $\varphi$  - действительный угол) или больше единицы (угол  $\varphi$  мнимый). Последнее, однако, не приводит к появлению мнимых выражений при вычислении матриц  $A, B$  и связанных с ними обобщенных параметров Твисса. Поскольку

$$A = M - D^{-1} m \cdot tg \varphi,$$

$$B = N + D \cdot n \cdot tg \varphi,$$

то мнимость исчезает в результате перемножения  $D \propto 1/\sin 2\varphi$  и  $tg \varphi$ . В последних двух формулах нет зависимости от знака  $\Omega$ , т.к. они содержат  $\Omega^2$ . Сам по себе угол  $\varphi$  не имеет физического смысла с учетом имеющейся для него возможности принимать мнимые значения.

Первая степень  $\Omega$  входит в выражения для декрементов радиационного затухания [13]. Это значит, что при использовании преобразования Тенга в кинетических соотношениях выбор знака  $\cos\varphi$  не носит произвольный характер. Знак  $\Omega$  должен быть всегда положительным, что можно доказать методом от противного. По определению, матрица  $R$  производит преобразование вектора  $Y=(x,x',z,z')$  в вектор  $V=RY$ . Если допустить  $\Omega=\cos\varphi=-[(1+\cos 2\varphi)/2]^{1/2}<0$ , то в предельном переходе  $\cos 2\varphi \rightarrow 1$  (случай отсутствия связи) вектор  $V$  будет стремиться к  $-Y$ , т.е.  $Y$  меняет знак, что недопустимо.

### Приложение В

#### Упрощенный вывод формул для размеров пучка

Независимым путем найдем общий вид (2), не прибегая к явному использованию функции распределения. Пусть  $V=(u,u',v,v')$  - вектор нормализованных орбитальных переменных, связанный с исходным вектором  $X=(x,x',z,z')$  преобразованием Тенга:  $X=RV$ . Дисперсии компонент тензора  $X_i X_j$  (моменты второго порядка функции распределения) запишем как:

$$\langle x^2 \rangle \approx \Omega^2 \langle u^2 \rangle + d^2 \langle v^2 \rangle + b^2 \langle v'^2 \rangle - 2bd \langle v'v \rangle,$$

$$\langle z^2 \rangle \approx \Omega^2 \langle v^2 \rangle + a^2 \langle u^2 \rangle + b^2 \langle u'^2 \rangle + 2ab \langle u'u \rangle,$$

$$\langle xz \rangle \approx \Omega \left[ -a \langle u^2 \rangle + d \langle v^2 \rangle + b^2 \langle v'^2 \rangle - b(\langle v'v \rangle + \langle u'u \rangle) \right]$$

Перекрестные члены типа  $\langle uv \rangle$  и  $\langle u'v' \rangle$  отброшены, так как в большинстве практических случаев из-за разницы собственных частот  $Q_1$  и  $Q_2$  фазовое расхождение между модами за характерное время релаксации  $\tau$  (время радиационного затухания в единицах периода обращения) достаточно велико:  $|Q_1 - Q_2| \cdot \tau > 1$ . (В случае "круглого пучка", вырожденного по собственным частотам, влияние перекрестных членов может оказаться не мало. В [13] функция распределения по нормализованным координатам используется в виде произведения функций, относящихся к отдельным модам, и поэтому корреляция мод в принципе не предусмотрена.)

Параметризация Тенга-Эдвардса приводит к полному разделению переменных, при котором энергия колебаний каждой моды сохраняется. Используя выражение для энергии в обычной Курант-Снайдеровской форме

через обобщенные параметры Твисса, найдем, что, как и в случае ортогональных координат,

$$\begin{aligned}
 \langle u^2 \rangle &= \beta_1 \Sigma_1, \\
 \langle v^2 \rangle &= \beta_2 \Sigma_2, \\
 \langle u'^2 \rangle &= \gamma_1 \Sigma_1, \\
 \langle v'^2 \rangle &= \gamma_2 \Sigma_2, \\
 \langle u'u \rangle &= -\alpha_1 \Sigma_1, \\
 \langle v'v \rangle &= -\alpha_2 \Sigma_2, \\
 \Sigma_1 &= \frac{1}{2} \langle C_1^2 \rangle, \\
 C_1^2 &= \frac{1}{\beta_1} [u^2 + (\beta_1 u' + \alpha_1 u)^2], \\
 \Sigma_2 &= \frac{1}{2} \langle C_2^2 \rangle, \\
 C_2^2 &= \frac{1}{\beta_2} [v^2 + (\beta_2 v' + \alpha_2 v)^2].
 \end{aligned}$$

Величины  $\Sigma_j$  ( $j=1,2$ ) играют роль равновесных фазовых объемов, а коэффициенты  $C_j$  – амплитуд нормальных колебаний, записываемых как  $C_j \cdot \sqrt{\beta_j} \cdot \cos \Phi_j$ . Очевидно, что отброшенные корреляционные члены будут пропорциональны величине  $(\Sigma_1 \cdot \Sigma_2)^{1/2} \cos \phi$ , где  $\phi(s)$  – разность фаз нормальных мод с близкими частотами, определяемая начальными условиями их возбуждения квантовыми флуктуациями на данном азимуте  $s$ . Нетрудно видеть, что из полученных соотношений следуют формулы (2).