Сибирское отделение Российской Академии наук
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им.Г.И. Будкера

В.И. Юрченко

К ТЕОРИИ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ I

ИЯФ 99-29

НОВОСИБИРСК
1999

К теории многократного рассеяния I

В.И. Юрченко

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера,
630090, Новосибирск, Россия

Аннотация

Для сечения общего вида в предположении, что угловой размер области многократного рассеяния (диффузионной области) невелик, получено кинетическое уравнение для функции распределения по переменной $q = 2\sin(\vartheta/2)$ и найдены границы его применимости. Ограничений на углы рассеяния не накладывается. Уравнение имеет решение в виде интеграла. Показано, что решение применимо во всем диапазоне углов от 0 до 180^o.

To the theory of the multiple scattering I

V.I. Yurchenko

Budker Institute of Nuclear Physics
630090, Novosibirsk, Russia

Abstract

Under assumption that angles in the multiple scattering region (diffusive region) are not large a transport equation for the distribution function of the variable $q = 2\sin(\vartheta/2)$ is obtained and bounds of its bility are found. The solution of the equation is expressed in an integral form and is applicable for the whole range of scattered angles.

Теория Мольера[1] многократного рассеяния [1,2] является в настоящее время общепринятой и используется в моделировании и расчетах прохождения частиц через вещество (см., например, [3-6]). Теория использует приближение малых углов, сделана замена

$$\sin\vartheta d\vartheta \to \vartheta d\vartheta,$$

и сечение $\sigma(\delta) \sim 1/\delta^4$, δ – угол рассеяния. Найденная в [1,2] функция распределения в области малых углов близка к гауссовой $f(\vartheta) \approx 2\exp(-\vartheta^2/\lambda^2)/\lambda^2$, т. е. описывает диффузию частиц в угловом пространстве из-за многократных столкновений с рассеянием на малые углы, соответствующая область углов в решении с характерным размером λ далее, для краткости, называется диффузионной. Кроме того, в решении можно выделить так называемую область кратного рассеяния, куда частица попадает, если среди многократной последовательности столкновений несколько из них произошло с рассеянием на большие углы, а также предельную область однократного рассеяния, когда имеется одно такое столкновение и функция распределения $f(\vartheta) \sim 1/\vartheta^4$, т.е. следует за угловой зависимостью самого сечения.

В данной работе для сечения общего вида и без привлечения приближения малых углов рассмотрено кинетическое уравнение для функции распределения по переменной

$$q = 2\sin(\vartheta/2). \tag{1}$$

Переменная q определяет передачу импульса, сечение также может быть выражено через аналогичную переменную $\chi = 2\sin(\delta/2)$, кроме того,

$$\sin\vartheta d\vartheta = q dq,$$

что позволяет обобщить результаты, полученные ранее в приближении малых углов. В рамках такого подхода получены решения кинетическо-

[1]Краткое изложение этой теории приведено в разделе 2.

го уравнения для сечений Резерфорда и Мотта. Точность решений проконтролирована, в частности, методом Монте-Карло во всем диапазоне углов.

1 Кинетическое уравнение и его решение

Обозначим через $\vec{i}$ – вектор направления исходных частиц (рис.1), $\sigma(\vec{n}\cdot\vec{n}')d\Omega/2\pi$ – дифференциальное сечение рассеяния частиц с первоначальным направлением $\vec{n}'$ в телесный угол $d\Omega$ по направлению $\vec{n}$, $f(\vec{n}\cdot\vec{i},t)d\Omega/2\pi$ – число частиц в телесном угле $d\Omega$ после прохождения пути t. Исходное кинетическое уравнение

$$\frac{\partial f(\vec{n}\cdot\vec{i},t)}{\partial t} = -Nf(\vec{n}\cdot\vec{i},t)\int\sigma(\vec{n}\cdot\vec{n}')\frac{d\Omega'}{2\pi} + N\int\sigma(\vec{n}\cdot\vec{n}')f(\vec{n}'\cdot\vec{i},t)\frac{d\Omega'}{2\pi}, \qquad (2)$$

где N – число рассеивающих центров в см^3 , $d\Omega'$ соответствует направлению $\vec{n}'$. В уравнении все величины выражены через косинусы углов. Заметим для дальнейшего, что $d\Omega'$ – элемент поверхности единичной сферы, а интегралы в (2) можно считать интегралами по этой поверхности.

Введем векторы

$$\vec{\chi} = \vec{n} - \vec{n}', \quad \vec{q} = \vec{n} - \vec{i}, \quad \vec{q}' = \vec{n}' - \vec{i}$$

и в соответствии с (1) перейдем от переменных δ, ϑ, ϑ' к переменным (рис.1)

$$\chi = 2\sin(\delta/2) = |\vec{n} - \vec{n}'|, \; q = 2\sin(\vartheta/2) = |\vec{n} - \vec{i}|, \; q' = 2\sin(\vartheta'/2) = |\vec{n}' - \vec{i}|. \; (3)$$

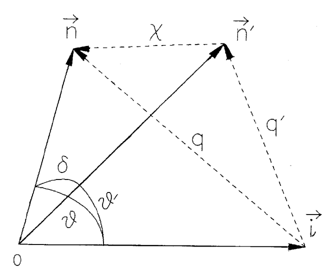

Рис. 1: Геометрическое представление переменных χ, q, q'.

При этом
$$f(\vec{n}\cdot\vec{i},t)\sin\vartheta d\vartheta = f(q,t)qdq,$$
в правой части уравнения будет интеграл от $\sigma(\chi)(f(q')-f(q))$, величины χ, q, q' представляют собой стороны треугольника и $q' = |\vec{q}-\vec{\chi}|$. Для полярной оси Z в направлении $\vec{n}$ $d\Omega' = \chi d\chi d\varphi$ и явная зависимость q' от q,χ,φ имеет вид

$$q'^{\,2} = q^2 - 2(q_\perp\chi_\perp\cos\varphi + q_z\chi_z) + \chi^2,$$

$$\chi_\perp^2 = \chi^2(1-\chi^2/4), \quad \chi_z = \chi^2/2, \quad \text{и} \quad q_\perp^2 = q^2(1-q^2/4), \quad q_z = q^2/2.$$

Получим приближенное кинетическое уравнение, в котором интегрирование проводится по плоской области.

В интеграле $\int\sigma(\chi)f(q')\chi d\chi d\varphi$ существенны две области интегрирования: область малых значений χ и область малых q', т. е. окрестности максимума сечения и максимума функции распределения. Расстояние между центрами этих областей – точками $\vec{n}$, $\vec{i}$, равно q (рис.1). Первая область с размером $\sim(\overline{\chi^2})^{1/2}$,

$$\overline{\chi^2} = \frac{1}{\sigma_t}\int_0^2 \chi^2\sigma(\chi)\chi d\chi\,,$$

σ_t – полное сечение, описывает диффузию частиц возле направления $\vec{n}$. Вторая, диффузионная область решения[2], с размером

$$\lambda \ll 1\,, \tag{4}$$

в которой $f(q')\sim 1/\lambda^2 \gg 1$, – описывает рассеяние частиц, идущих под малыми углами, в направлении $\vec{n}$, в частности, на большие углы. Условие (4) будем считать выполненным. Рассмотрение конкретных случаев показывает, что в противном случае потери энергии частиц в веществе становятся велики и, следовательно, уравнение (2) оказывается не справедливым.

С учётом этого, при $q \ll 1$ точки, представленные векторами $\vec{i}$, $\vec{n}$, $\vec{n'}$, ввиду малости χ, q, q', можно считать расположенными в плоскости,

[2]Здесь и далее заранее предполагается, что большая часть столкновений происходит с рассеянием на малые углы и это приводит к диффузионному размытию исходного пучка частиц в угловой области с размером $\sim\lambda$.

касательной к сферической поверхности в точке $\vec{n}$. Введем на плоскости цилиндрическую систему координат с центром в точке $\vec{n}$. Элемент поверхности $d\Omega' = \chi d\chi d\varphi = d\vec{\chi}$ и

$$\frac{\partial f(q,t)}{\partial t} = N\int \sigma(\chi)[\,f(|\vec{q}-\vec{\chi}|,t) - f(q,t)\,]\frac{d\vec{\chi}}{2\pi}. \qquad (5)$$

Это кинетическое уравнение, в котором аргументы определены в соответствии с (3), а вектор $\vec{q}$ лежит в плоскости интегрирования, будем считать исходным. Рассматриваемое приближение заключается в переходе в уравнении (2) к плоской поверхности или, что то же, к $q'^{\,2} = q^2 - 2q\chi\cos\varphi + \chi^2$. Приближение малых углов, состоящее в замене $\chi, q \to \delta, \vartheta$, не используется и, как показывает дальнейшее рассмотрение, оказывается излишним. Область определения $f(q)$ примем бесконечной, что возможно, т.к. с условием (4) при достаточно больших q будет $f(q) \ll 1$.

Интегрируя (5) по $d\vec{q}$, получим условие нормировки, а умножая на q^2 и интегрируя по $d\vec{q}$ с заменой $q^2 d\vec{q} \to (q'^2 + 2\vec{q}\,'\cdot\vec{\chi} + \chi^2)d\vec{q}\,'$ в первом слагаемом справа, получим $\overline{q^2}$:

$$\int\limits_0^\infty f(q)q\,dq = 1, \quad \overline{q^2} = \int\limits_0^\infty f(q)q^3\,dq = Nt\sigma_t\overline{\chi^2}.$$

Для уравнения (2) эти интегралы имеют вид (см. раздел 2)

$$\int\limits_0^2 f(q)q\,dq = 1, \quad \overline{q^2} = \int\limits_0^2 f(q)q^3\,dq = 2(1 - e^{-Q_1}), \quad Q_1 = \frac{1}{2}Nt\sigma_t\overline{\chi^2}. \qquad (6)$$

Пусть теперь существенные области интегрирования достаточно удалены друг от друга, $q > \lambda$, и возможность перехода к уравнению (5) не столь очевидна. Оценим ошибку правой части при переходе от (2) к (5). Считаем, что $f(q')$ достаточно плавно меняется в первой области, а $\sigma(\chi)$ – во второй. В первой области с точностью до χ^2 $f(q') \approx f(q) + \chi\partial f/\partial\chi + \frac{1}{2}\chi^2\partial^2 f/\partial\chi^2$. После интегрирования по $d\Omega' = \chi d\chi d\varphi$ получим вклад в правую часть (2)

$$\frac{1}{4}N\sigma_t\overline{\chi^2}(\hat{L} + \hat{l})f(q), \quad \hat{L} = \frac{1}{q}\,\frac{\partial}{\partial q}\,q\,\frac{\partial}{\partial q}, \quad \hat{l} = -\frac{1}{q}\,\frac{\partial}{\partial q}\,\frac{q^3}{4}\,\frac{\partial}{\partial q}\,.$$

Отметим попутно, что получающееся в этом приближении (приближение Фоккера-Планка, см., например, [7]) диффузионное уравнение приводит к тем же интегралам (6), что и уравнение (2), но при этом теряется определяемый конкретной зависимостью $\sigma = \sigma(\chi)$ физический результат — области кратного и однократного рассеяния в решении.

Во второй области, сделав точно так же разложение $\sigma(\chi) = \sigma(|\vec{q} - \vec{q}\,'|)$ с точностью до q'^2 и интегрируя по $d\Omega' = q'dq'd\varphi$, получим вклад

$$N\sigma(q) + \frac{1}{4}N\overline{q^2}(\hat{L} + \hat{l})\sigma(q).$$

В аналогичных приближениях для уравнения (5) отсутствуют слагаемые с $\hat{l}$, которые и дают искомую оценку. Это обосновывает возможность применения уравнения (5) во всей угловой области. Во-первых, с условием (4) частицы появляются в области $q \gg \lambda$ вследствие рассеяния на большие углы. В этой области влиянием диффузии (слагаемые с $\hat{L}, \hat{l}$) можно пренебречь и оба уравнения для числа частиц в интервале dq на пути t дают

$$f(q,t)qdq \approx Nt\sigma(q)qdq\,,$$

что соответствует вероятности однократного рассеяния. Во-вторых, с уменьшением q отличие правых частей уменьшается (из-за множителя $q^2/4$ в операторе $\hat{l}$ по сравнению с $\hat{L}$) и при $q \sim \lambda$ становится малым. Для $\sigma(q) \sim q^{-4}$, например, $\hat{l}\sigma(q) = -\frac{1}{8}q^2\hat{L}\sigma(q)$.

С учетом $f(q) \approx Nt\sigma(q)$, $\overline{q^2} \approx Nt\sigma_t\overline{\chi^2} = 2Q_1$, ошибка правой части оценивается, как $-NQ_1\hat{l}\sigma(q)$, что приводит к погрешности в решении $\delta f(q) \sim -N\hat{l}\sigma(q)\int\limits_0^t Q_1 dt = -\frac{1}{4}\overline{q^2}Nt\hat{l}\sigma(q)$. Полагая $\overline{q^2} \sim \lambda^2$, получим

$$\delta f(q) \sim \frac{\lambda^2}{4}\,\frac{1}{q}\,\frac{\partial}{\partial q}\,\frac{q^3}{4}\,\frac{\partial}{\partial q}\,f(q)\,.$$

В области, где $f(q)$ убывает быстрее $1/q^2$, величина δf положительна. В случае сечения Резерфорда $f(q) \sim q^{-4}$ и $\delta f/f \sim \lambda^2/2$. Верхняя граница значений λ определяется допустимой погрешностью. При

$$\xi = \delta f/f \sim \lambda^2/2 < 5\%, \quad \lambda_{max} \sim 0.3.$$

Для оценки δf при $q < \lambda$ воспользуемся условием нормировки :

$$\int\limits_0^{q_0} f(q)qdq = 1 - \int\limits_{q_0}^{\infty} f(q)qdq \sim 1, \quad \int\limits_0^{q_0}\delta f(q)qdq = -\int\limits_{q_0}^{\infty}\delta f(q)qdq \sim \frac{\lambda^2}{4}\left[\frac{q^3}{4}\,\frac{\partial f}{\partial q}\right]_{q=q_0}.$$

Здесь $q_0 \sim \lambda$ – значение q, при котором погрешность δf меняет знак, в последнем интеграле использована приведенная выше формула для δf.

Полагая при значении q меньшем или порядка λ функцию распределения близкой к гауссовой $f(q)\approx 2\exp(-q^2/\lambda^2)/\lambda^2$, получим $\delta f(q_0)=0$ при

$$q_0=\sqrt{2}\lambda.$$

С учетом этого для диффузионной области найдем

$$\int\limits_0^{q_0}\delta f(q)qdq\Bigg/\int\limits_0^{q_0}f(q)qdq\sim \frac{\delta f}{f}\sim\frac{\lambda^2}{4}\left[\frac{q^3}{4}\frac{\partial f}{\partial q}\right]_{q=q_0}\sim -c\,\frac{\lambda^2}{2},$$

где $c=2/e^2\approx 0.3$ – числовой коэффициент.

В итоге приходим к заключению, что при $q>\lambda$ относительная погрешность $\xi(q)\sim\lambda^2/2$ и слабо зависит от q, при $q\sim\lambda$ меняет знак, а при $q<\lambda$ $\xi(q)\sim -0.3\lambda^2/2$. По поводу границ применимости отметим еще, что для уравнения (2) $\overline{q^2}\approx 2Q_1-Q_1^2$, т. е. уравнение (5) дает завышенное значение $\overline{q^2}$ с относительной погрешностью $\sim\lambda^2/4$.

Таким образом, при вполне допустимых ограничениях уравнение справедливо для всех углов. С бесконечной областью определения его решение осуществляется методом Фурье-Бесселя [2]. При $f(q,0)=\delta(1-\cos\vartheta)=\delta(q)/q$

$$f(q,t)=\int\limits_0^\infty\eta d\eta J_0(\eta q)\exp(-Q(\eta)),\qquad(7)$$

$$Q(\eta)=Nt\int\limits_0^\infty\sigma(\chi)\chi d\chi[1-J_0(\eta\chi)].$$

С условием (4) можно оставить, например, в сечении Резерфорда зависимость $\sigma(\chi)\sim 1/\chi^4$ при $\chi>2$. Это уменьшает число частиц в диффузионной области из-за их рассеяния в область $\chi>2$, что приводит к дополнительному уменьшению нормировочного интеграла $I_{norm}=\int\limits_0^2 f(q)qdq$, равному 1 при бесконечном верхнем пределе. Эти эффекты, однако, достаточно малы и могут быть учтены корректировкой числа частиц в диффузионной области.

Отметим в заключение, что приближение малых углов (формула Мольера) получается заменой в (7) χ,q на δ,ϑ. Общий характер сечения в этом случае утрачивается.

2 Сечение Резерфорда

Для сечения Резерфорда

$$\sigma_R(\chi) = 2s^2\kappa(\chi)/\chi^4,$$

где $s^2 = 4\pi e^4 z^2 Z(Z+1)/(pv)^2$, p – импульс, v – скорость рассеиваемой частицы с зарядом z, множитель $\kappa(\chi)$ учитывает атомный формфактор, обрезающий сечение на малых углах, можно использовать теорию Мольера ввиду совпадения формулы для $\sigma_R(\chi)$ и решения (7) с их приближениями для малых углов. Ниже дано её краткое изложение в интерпретации, соответствующей результатам раздела 1.

Исходными параметрами в этой теории являются угол обрезания χ_a и $\chi_c^2 = Nts^2$. Угол обрезания [8] $\chi_a^2 = \chi_0^2(1.13 + 3.76(Zze^2/\hbar v)^2)$, где $\chi_0 = \hbar/pa = \hbar/(p\,0.885 a_0 Z^{-1/3})$, a – радиус атома Ферми, a_0 – радиус Бора. Величине χ_c^2 можно придать смысл вероятности рассеяния частицы на угол $\vartheta > 60^o$ $(q > 1)$, т.к. для больших углов

$$\int_1^\infty f(q)q\,dq \approx Nt\int_1^\infty \sigma_R(q)q\,dq = \chi_c^2.$$

Детали зависимости $\sigma_R = \sigma_R(\chi)$ на малых углах не рассматриваются, обрезание сечения учитывается посредством [1,2]

$$\int_0^k \kappa(\chi)d\chi/\chi = \ln(k/\chi_a) - \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \kappa(k) = 1 \quad \text{при} \quad k \gg \chi_a\,.$$

Такой подход возможен, если

$$\lambda \gg \chi_a\,. \tag{8}$$

Разбивая интеграл для Q на два $\int_0^k + \int_k^\infty$, где $\chi_a \ll k \ll \delta q$, и считая интервал δq аргумента в решении малым, $\delta q \ll \lambda$, можно ограничиться в Фурье-разложении значениями $\eta < 1/\delta q$, т.е. обрезать верхний предел в (7) величиной $1/\delta q \ll 1/\chi_a$. Тогда $k\eta \ll 1$, и, полагая в первом интеграле $1 - J_o(\eta\chi) \approx \frac{1}{4}\eta^2\chi^2$, во втором $\kappa(\chi) = 1$, получим приближение [2]

$$Q_R(\eta) = \frac{1}{4}\chi_c^2\eta^2[\,b - \ln(\frac{1}{4}\chi_c^2\eta^2)]\,, \tag{9}$$

$$b = \ln(\chi_c^2/\chi_a^{'2}), \quad \ln\chi_a' = \ln\chi_a - \frac{1}{2} + C, \quad C = 0.577, \quad \chi_a^{'2} = 1.167\chi_a^2\,,$$

которое приводится к виду

$$Q_R(\eta) = \frac{u^2}{4}[\,1 - \frac{1}{B}\ln\frac{u^2}{4}\,], \quad u^2 = B\chi_c^2\eta^2\,,$$

при $B - \ln B = b$.

В пренебрежении вторым слагаемым в скобках получим гауссово распределение частиц в диффузионной области

$$f(q,t) = 2\exp(-q^2/\lambda^2)/\lambda^2$$

со среднеквадратичным значением

$$\lambda = \chi_c\sqrt{B}$$

величины q. Из $B = \ln(\lambda^2/\chi_a^{'2})$, условия (8) и уравнения для B с необходимостью следует[3]

$$B \gg 1 \quad \text{и} \quad \chi_a \ll \chi_c \ll \lambda \ll 1\,,$$

где цепочка неравенств дополнена условием (4). Т.к. $\sigma_t \approx s^2/\chi_a^2$, среднее число столкновений $Nt\sigma_t \approx \chi_c^2/\chi_a^2 \gg 1$.

Сделаем замечание относительно величины λ. Уравнение для B можно заменить уравнением $\lambda^2 = \chi_c^2\ln(\lambda^2/\chi_a^{'2})$ или (с разбиением интеграла, как при получении формулы (9))

$$\lambda^2 = Nt\int_0^{\alpha\lambda}\chi^2\sigma_R(\chi)\chi d\chi, \quad \alpha = e^{1-C} = 1.53\,,$$

что отличается от формулы для $\overline{q^2}$ обрезанием сечения (верхнего предела в интеграле) при $\chi = \alpha\lambda$. Как видно, с увеличением пройденного частицей пути t и сопутствующем увеличении λ в диффузионный процесс вовлекаются столкновения со всё большими углами, диапазон углов в сечении, вносящий вклад в диффузию, растет пропорционально λ. Это в некоторой степени поясняет смысл уравнения для B и показывает, что имеющиеся рекомендации по обрезанию верхнего предела величиной $\sim\hbar/pr_N$, определяемой ядерным формфактором [9] (r_N – радиус

[3]При $B > 1$ значение B можно найти методом последовательных приближений $B^{(n)} = b + \ln B^{(n-1)}$. Для $B^{(0)} = 1$, например, $B^{(3)} = b + \ln(b + \ln b) \approx b + (1 + 1/b)\ln b$. Возможное уточнение $\tilde{B} = b + 1/(2b^2) + (1 + 0.958/b)\ln b$ дает при $b > 2.6\,(B > 4)$ значение B с погрешностью $< 1.4\cdot10^{-2}\%$, а формула $B = b + \ln\tilde{B}$ – с погрешностью $< 2\cdot10^{-3}\%$.

ядра), верны для $\overline{q^2}$, т.е. для оценок. Для размера диффузионной области предпочтительнее формулы Мольера, т.к. в практических случаях $\alpha\lambda \ll \hbar/pr_{_N}$.

Представляя экспоненту $\exp(-Q_{_R}(\eta))$ и решение (7) в виде ряда по степеням $1/B$, получаем [1,2]:

$$f_{_R}(q) \approx \frac{1}{\lambda^2}[\,2\exp(-X^2) + B^{-1}f^{(1)}(X) + B^{-2}f^{(2)}(X)\,], \quad X = q/\lambda, \quad (10)$$

где

$$f^{(n)}(X) = \frac{1}{n!}\int_0^\infty u du J_0(Xu)\exp\left(-\frac{u^2}{4}\right)\left[\frac{u^2}{4}\ln\frac{u^2}{4}\right]^n$$

универсальные (т.е. зависящие только от X) функции. Формулы и таблицы для обычно используемых в расчетах функций $f^{(1)}, f^{(2)}$ приведены в [2]. При $q \gg \lambda$ слагаемое с

$$f^{(1)}(X) = 2\exp(-z)(z-1)[\,\overline{Ei}(z) - \ln z\,] - 2(1 - 2\exp(-z)), \quad z = X^2\,,$$

дает основной вклад, $f^{(1)}(X) \approx 2/X^4$ и

$$f_{_R}(q) \approx 2\chi_c^2/q^4\,. \quad (11)$$

С учетом $\int\limits_0^\infty \xi d\xi f^{(n)}(\xi) = 0$ при $n \geq 1$ [1] нормировочный интеграл

$$I_{norm} = 1 - \exp(-4/\lambda^2) - B^{-1}F^{(1)}(2/\lambda) - B^{-2}F^{(2)}(2/\lambda)\,,$$

где $F^{(n)}(X) = \int\limits_X^\infty \xi d\xi f^{(n)}(\xi)$ и при $X \gg 1$ $F^{(1)} \approx X^{-2}$, $F^{(2)} \approx 2X^{-4}\ln X^2$. Его отличие от 1 мало ($\sim \lambda^2/4B$) и может быть устранено поправочным множителем к диффузионной части решения.

Отметим, что формулы (9),(10) получены здесь только с учетом условия (8), условие (4) обеспечивает справедливость решения (7). При невыполнении (8) число столкновений становится небольшим, доля нерассеянных частиц $\exp(-Nt\sigma_t)$ в решении – значительной, и понятия области многократного рассеяния и её размера λ теряют смысл. Решение (7) остается справедливым, т.к. в области малых углов ($q \ll 1$) переход к плоской области интегрирования всегда возможен, а при достаточно больших значениях q уравнения (2),(5) дают близкие результаты.

Другой подход состоит в точном решении уравнения (2) в виде ряда

$$f(\vartheta, t) = \sum \frac{2l+1}{2} P_l(\cos\vartheta)\exp(-Q_l(t))\,, \quad (12)$$

$$Q_l(t) = \int_0^\pi N t \sigma(\delta) \sin\delta d\delta (1 - P_l(\cos\delta)),$$

где P_l – полиномы Лежандра, $f(\vartheta, 0) = \delta(1-\cos\vartheta)$. (Отсюда следуют приведенные выше формулы (6)). Для сечения Резерфорда [10,2]

$$Q_l \approx \frac{1}{2}\chi_c^2 \eta_l^2 [\,\ln(2/\chi_a) + \frac{1}{2} - S_l\,], \quad S_l = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1-P_l(x)}{1-x} dx = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k}. \quad (13)$$

$$\eta_l = \sqrt{l(l+1)}.$$

Приведем ряд (12),(13) к интегральному виду. (В приближении малых углов вопрос рассматривался в [2]). Учитывая, что представление $P_l(\cos\vartheta)$ в виде гипергеометрической функции дает ряд по степеням q^2, а для малых углов $P_l(\cos\vartheta) \approx 1 - \eta_l^2 q^2/4$, сделаем замену $P_l(\cos\vartheta) \to J_0(\eta_l q)$, с которой разложение $J_0(\eta_l q)$ для малых углов будет тем же. Заметим теперь, что для ряда (12) возможно преобразование

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} g_l = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2}(g_{l+1} + g_l)\Delta_l, \quad \Delta_l = X_{l+1} - X_l, \quad X_l = \eta_l^2\,.$$

Каждое слагаемое в сумме справа — аппроксимация интеграла от $g(X)$ на участке (X_l, X_{l+1}) формулой трапеций, т.е. ряд приводится к интегралу $\frac{1}{2}\int_0^\infty g(X)dX = \int_0^\infty g(\eta)\eta d\eta$.

Таким образом, с использованием

$$\vartheta \to q, \quad \delta \to \chi\,, \quad \sqrt{l(l+1)} \to \eta\,, \quad P_l(\cos\vartheta) \to J_0(\eta q),$$

получаем общее соответствие между рядом (12) и интегралом (7), что находит подтверждение в частном случае сечения Резерфорда, т.к. учетом $S_l \approx \ln\eta_l + C + \frac{1}{6}\eta_l^{-2} + \ldots$,

$$Q_l \approx \frac{1}{2}\chi_c^2 \eta_l^2 [\,\ln(2/\chi_a) + \frac{1}{2} - C - \ln\eta_l\,],$$

т.е. получаем формулу (9). Это использовано в следующем разделе в случае сечения Мотта (частиц со спином 1/2).

3 Сечение Мотта

Для сечения

$$\sigma_{_M}(\chi) = \sigma_{_R}(\chi)\left(1 - \frac{1}{4}\beta^2\chi^2\right), \quad \beta = v/c\,,$$

величину $Q(\eta)$ в (7) представим в виде $Q_{_M}(\eta) = Q_{_R}(\eta) + \delta Q(\eta)$, где

$$\delta Q(\eta) = Nt\int\limits_0^\infty \delta\sigma(\chi)\chi d\chi[\,1 - J_0(\eta\chi)\,], \quad \delta\sigma(\chi) = -\frac{1}{2}s^2\beta^2\chi^{-2}.$$

Интеграл расходится, если не обрезать $\delta\sigma(\chi)$ при $\chi = 2$. Для решения в виде ряда такой проблемы не возникает и вместо (13) имеем

$$Q_l \approx \frac{1}{2}\chi_c^2\eta_l^2\left[\,\ln(2/\chi_a) + 1/2 - S_l\,\right] + \delta Q_l\,, \quad \delta Q_l = -\frac{1}{2}\chi_c^2\beta^2 S_l\,. \qquad (14)$$

Т.е. имеем ряд (12), (14) для сечения Мотта. Полагая $S_l \approx \ln\eta_l + C$, приведем его к интегральному виду (см. раздел 2). Отметим, что получающееся при этом значение $\delta Q(\eta) = -\frac{1}{2}\chi_c^2\beta^2(\ln\eta + C)$ может быть найдено посредством

$$\delta Q(\eta) = Nt\,\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_\varepsilon^2 \delta\sigma(\chi)\chi d\chi - \int\limits_\varepsilon^\infty \delta\sigma(\chi)J_0(\eta\chi)\chi d\chi\right),$$

т.е. с обрезанием только первого интеграла. Такое приближение оказывается достаточным для рассматриваемого случая.

После замен $u = \lambda\eta$, $X = q/\lambda$, получим

$$f_{_M}(q) = \frac{1}{\lambda^2}\int\limits_0^\infty u du J_0(Xu)\exp\left(-\frac{u^2}{4}\right)\cdot\exp\left(\frac{u^2}{4B}\ln\frac{u^2}{4} - \delta Q(u)\right),$$

$$\delta Q(u) = -\frac{1}{2}\chi_c^2\beta^2\left(a + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{4}u^2\right), \quad a = \ln\frac{2}{\lambda} + C.$$

При этом мы имеем ввиду, что в данном случае поправка к сечению Резерфорда много меньше последнего при $\chi \le \lambda$ и сравнима с ним при $\chi \sim 1$, т.е. существенна в области больших углов. Поэтому достаточно найти лишь поправку к функции $f^{(1)}$ в (10), которая дает основной вклад на больших углах, а изменением величины λ и, следовательно, параметра B из-за изменения сечения можно пренебречь.

Оставим в разложении второй экспоненты под интегралом слагаемые до второго порядка по $1/B$ включительно. По $\delta Q(u)$ оставим слагаемое первого порядка, пренебрегая слагаемыми с произведениями $\delta Q(u)$ на степени $1/B$. Получим

$$f_{M}(q) = f_{R}(q) + \frac{1}{2B}\beta^2\psi(X), \tag{15}$$

$$\psi(X) = \exp(-X^2)[\, 2a + \ln X^2 - \overline{Ei}(X^2)\,]. \tag{16}$$

Формула (16) следует из

$$\psi(X) = \int_0^\infty u du J_0(Xu) \exp\left(-\frac{u^2}{4}\right)\left(a + \frac{1}{2}\ln\frac{u^2}{4}\right).$$

Первое слагаемое в скобках дает $2a\exp(-X^2)$. Оставшийся интеграл $I(X)$ дифференцируем по X. После $dJ_0(Xu)/dX = (u/X)dJ_0(Xu)/du$ и интегрирования по частям придем к уравнению $d(X^2I(X))/d(X^2) = f^{(1)}(X)/2 - \exp(-X^2)$, решая которое получим в итоге формулу (16).

Обращает внимание, что в диффузионной области, как и ожидалось, вклад второго слагаемого в (15) $\sim B^{-1}\ln(1/\lambda)$ достаточно мал. Слагаемое с $f^{(1)}$, например, дает вклад $\sim B^{-1}\lambda^{-2}$. Основной вклад приходится на область однократного рассеяния. В этой области в первом порядке малости по χ_c^2

$$f_{M}(q) \approx 2\chi_c^2\left(1 - \frac{1}{4}\beta^2q^2\right)/q^4. \tag{17}$$

4 Метод Монте-Карло

Точность решений (10) и (15),(16) контролировалась с помощью суммирования соответствующих рядов (формулы (12),(13),(14)), а для сечения Резерфорда также решением уравнения (2) методом Монте-Карло с сечением в виде [2,8]

$$\sigma_{R}(\chi) = 2s^2/\left(\chi^2 + \chi_a^2\right)$$

Полное сечение $\sigma_t = (s/\chi_a)^2/(1+\chi_a^2/4)$.

В методе Монте-Карло для получения с нужной статистической точностью функции распределения $f(q)$ необходимо набрать достаточное число событий, в которых определяется случайный угол ϑ после прохождения частицей пути t. Прямой способ состоит в разыгрыше числа столкновений n на пути t по распределению Пуассона со средним

$$\overline{n} = Nt\sigma_t$$

и разыгрыше в каждом столкновении угла рассеяния δ с вычислением нового значения ϑ до тех пор, пока не будут исчерпаны все столкновения.

Для расчета δ генерируется случайное значение F интеграла от функции распределения величины $\chi = 2\sin(\delta/2)$

$$F(\chi) = 2\chi_a^2 \left(1 + \chi_a^2/\chi_g^2\right) \int_{\chi}^{\chi_g} \chi d\chi / \left(\chi^2 + \chi_a^2\right)^2, \quad \chi_g = 2, \quad 0 \le F \le 1, \quad (18)$$

после чего из $F = F(\chi) = (1 - \chi^2/\chi_g^2)/(1 - \chi^2/\chi_a^2)$ имеем

$$\chi = 2\sin\frac{\delta}{2} = \chi_a \sqrt{(1-F)/(F + \chi_a^2/\chi_g^2)}.$$

Новое значение угла ϑ можно определить, например, из

$$q = 2\sin\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\nu},$$

где ν – случайный азимутальный угол, величины r_1, r_2 определяются по значению угла ϑ до столкновения

$$r_1 = 2\cos\frac{\delta}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}, \quad r_2 = 2\sin\frac{\delta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}.$$

Такой способ достаточно эффективен для определения $f(q)$ в диффузионной области. В однократной области, где вероятность обнаружения частицы мала, получение нужной точности затруднительно. Для определения $f(q)$ во всей области можно поступить следующим образом. Разобьем область χ на интервалы (χ_{i-1}, χ_i), $i = 1, \ldots, N$, $\chi_0 = 0$, $\chi_N = 2$, а события на взаимоисключающие классы с условиями отбора : в i-м классе 1) нет столкновений с $\chi > \chi_i$, 2) имеется хотя бы одно столкновение со значением χ в i-м интервале. К 1-му классу отнесем события, для которых выполнено только условие 1). Функция распределения при этом

$$f(q) = \sum W_i f_i(q),$$

где $f_i(q)$ – функция распределения для класса с номером i, W_i – вероятность появления событий этого класса. Формулы для W_i и функций распределения по числу столкновений в классах приведены в Приложении. С разбиением на классы возможно получение гистограммы для $f(q)$

с близким к равномерному заполнением ее каналов по числу событий. При накоплении в каналах величин

$$h = \sum W_i m_i / M_i, \quad S^2 = \sum m_i (W_i / M_i)^2,$$

где M_i – число разыгранных событий i-го класса, m_i – число событий i-го класса, попавших в канал, S^2 – дисперсия h, попадание очередного события из класса i в канал приводит к добавлению к h величины W_i/M_i, а к S^2 – W_i^2/M_i^2. Т.е. достаточно копить две гистограммы. Величина m_i/M_i соответствует $f_i(q)$. Нормировка h и S на цену канала дает $f(q)$ и ее статистическую ошибку.

5 Обсуждение

Отметим, прежде всего, что формулы (11),(17) дают правильные вероятности редких столкновений $f(q)qdq \approx Nt\sigma(q)qdq$, т.е. полученные решения пригодны во всей области углов. На рис.2 показано сравнение ре-

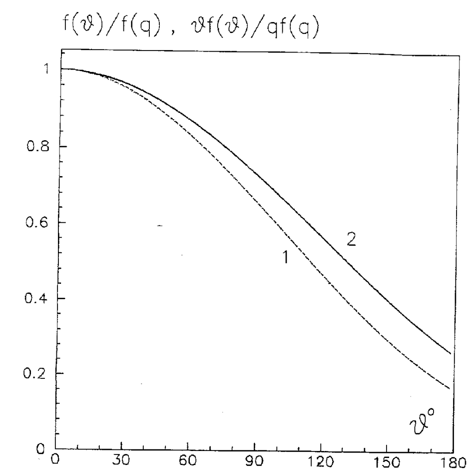

Рис. 2: Зависимость отношений 1 – $f(\vartheta)/f(q)$, 2 – $\vartheta f(\vartheta)/qf(q)$ от угла ϑ для сечения Резерфорда. Кривые рассчитаны для вариантов 1-3 таблицы 1 и для этих вариантов на рисунке неразличимы.

шения (10) с приближением малых углов для сечения Резерфорда. Различие становится заметным для больших углов, когда, в соответствии с

(11), отношения $f(\vartheta)/f(q) \approx (q/\vartheta)^4$, $\vartheta f(\vartheta)/q f(q) \approx (q/\vartheta)^3$ и достигают предельных значений $(2/\pi)^4$, $(2/\pi)^3$, соответственно, при $\vartheta = 180^o$. Для сечения Мотта подобное сравнение не имеет смысла, т.к. в приближении малых углов сечение становится отрицательным при $\vartheta > 120^o/\beta^2$.

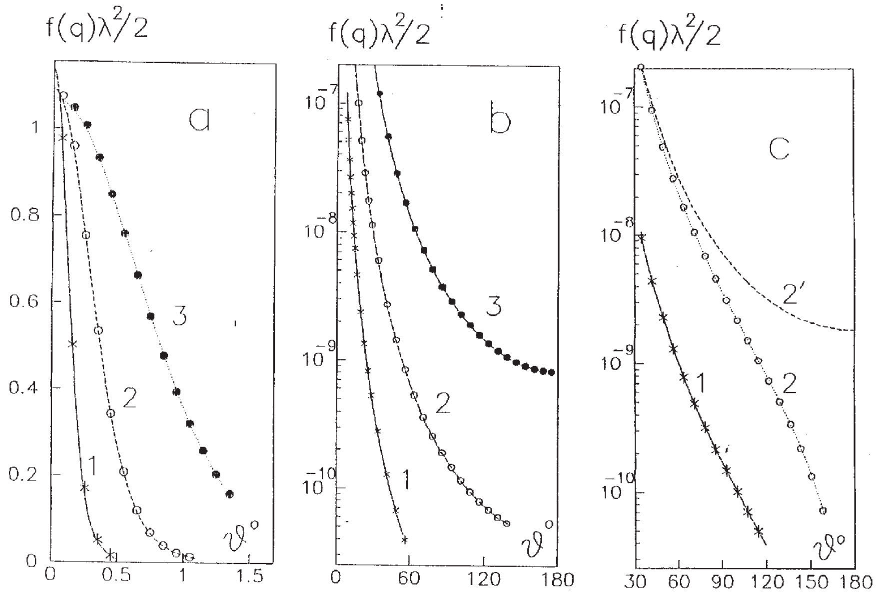

Рис. 3: Зависимость $f(q)\lambda^2/2$ от угла ϑ. a,b: кривые 1-3 – $f(q)$ по формуле (10) для вариантов 1-3 таблицы 1, точки – расчеты Монте-Карло. c: кривые 1,2 – $f(q)$ по формулам (15), (16) для вариантов 1,2 таблицы 2, точки – ряд (12), (14). Кривая 2′ получена с $\psi(X)$=0.

Сравнение полученных решений с более точными результатами представлено на рис.3,4 и в таблицах 1,2. Рис.3a,b показывает согласие решения (10) с полученным в методе Монте-карло решением во всем диапазоне углов. Рис.3c – согласие решения(15),(16) с рядом (12),(14), а также отличие (15),(16) от решения (10) в области больших углов. В таблице 1 приведены данные для рассеяния π-мезонов на золоте ($Z = 79$, $A = 196.97$, ρ – плотность). $\xi_{\max}$, $\xi(0)$, $\xi(2)$ – максимальное и краевые значения относительного отклонения $\xi(q) = [\,f(q) - f_{G.S.}(q)\,]/f_{G.S.}(q)$ в интервале $0 \le q \le 2$. Здесь f – решение (10), $f_{G.S.}$ – решение (12),(13) Гоудсмита и Сандерсона. Характер зависимости $\xi = \xi(q)$ при достаточно больших B

(кривая 3 на рис.4 при $q \sim \lambda$ меняет знак) и значение $\xi(2)$ согласуется с оценками раздела 1. Максимальное значение $\xi_{\max}$ приходится на кратную область $q/\lambda \sim 2$. Значения $\xi(0)$, $\xi_{\max}$ с уменьшением λ вначале убывают, затем начинают возрастать. Последнее, как и характер кривых 1,2 на рис.4, объясняется недостаточным числом членов разложения в (10) при небольших значениях B. В этом случае в области многократного рассеяния погрешность решения (10) оценивается как $\xi(0) \sim f^{(3)}(0)/2B^3$, т. е. порядка первого отброшенного слагаемого, $f^{(3)}(0) = 5.94$. В кратной области ошибка больше и, поскольку

Таблица 1. Сечение Резерфорда. π-мезоны.
$E_{kin} = 50$ МэВ, $\chi_a = 2.77 \cdot 10^{-4}$.

N^o	ρt г/см^2	λ	B	$\overline{n}$	$\xi(0)$ %	$\xi_{\max}$ %	$\xi(2)$ %
1	0.00375	$3.51 \cdot 10^{-3}$	4.93	32.7	-5.38	5.52	-
2	0.015	$8.14 \cdot 10^{-3}$	6.61	131	-1.63	2.68	0.01
3	0.060	$1.81 \cdot 10^{-2}$	8.21	523	-0.76	1.59	0.03
4	0.24	$3.96 \cdot 10^{-2}$	9.77	$2.09 \cdot 10^3$	-0.43	1.11	0.12
5	0.4	$5.26 \cdot 10^{-2}$	10.34	$3.49 \cdot 10^3$	-0.35	1.06	0.25
6	2	0.127	12.11	$1.74 \cdot 10^4$	-0.35	1.74	1.01
7	4	0.185	12.86	$3.49 \cdot 10^4$	-0.47	3.17	2.06
8	10	0.304	13.85	$8.71 \cdot 10^4$	-0.93	8.63	5.24
9	40	0.640	15.34	$3.49 \cdot 10^5$	-3.57	50.7	38.6

здесь значение $f^{(0)}$ мало, а $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $f^{(3)}$ одного порядка, $\xi_{\max} \sim 1/B^2$. Полагая в однократной области $\xi \sim \lambda^2/2$, найдем, что $\xi(0) > \lambda^2/2$ при $\lambda^2 < 5.94/B^3$ или $\chi_c^2 < 5.94/B^4$, т.е. практически во всех встречающихся конкретных задачах решение в однократной области будет точнее.

Из таблицы видно, что примерное значение верхнего предела на размер диффузионной области $\lambda_{\max} \sim 0.3$. Отметим, что при $\lambda = 0.3$ нормировочный интеграл равен 0.998, а отклонение среднеквадратичного значения q в интервале $0 \leq q \leq 2$ от полученного по формуле (6) меньше 1%. С уменьшением λ точность этих величин возрастает.

Таблица 2. Сечение Мотта. Электроны.
$E_{kin} = 15$ МэВ, $\chi_a = 6.89 \cdot 10^{-4}$.

N^o	ρt г/см^2	λ	B	$\overline{n}$	$\xi(0)$ %	ξ_{max} %	$\xi(1)$ %
1	0.00375	$9.10{\cdot}10^{-3}$	5.01	34.8	-4.99	5.25	-
2	0.015	$2.10{\cdot}10^{-2}$	6.68	139	-1.57	2.61	0.06
3	0.030	$3.15{\cdot}10^{-2}$	7.49	278	-1.05	2.00	0.12
4	0.06	$4.68{\cdot}10^{-2}$	8.28	556	-0.75	1.61	0.23
5	0.12	$6.93{\cdot}10^{-2}$	9.06	$1.11{\cdot}10^3$	-0.58	1.43	0.44
6	0.24	0.102	9.84	$2.23{\cdot}10^3$	-0.50	1.51	0.90
7	0.4	0.135	10.41	$3.71{\cdot}10^3$	-0.49	1.86	1.57
8	1	0.224	11.42	$9.28{\cdot}10^3$	-0.66	4.04	4.04
9	2	0.328	12.17	$1.86{\cdot}10^4$	-1.07	8.66	8.66
10	4	0.477	12.93	$3.71{\cdot}10^4$	-1.99	16.8	16.8

Приближения (9),(13) имеют ограничения, т.к. получены при условии $\eta, l \ll 1/\chi_a$. Ряд (12) должен быть обрезан при $l < \eta_m \sim 1/\chi_a$, η_m – значение η, при котором величина $Q(\eta)$ принимает максимальное значение Q_m, иначе он расходится. С приближением (9) и бесконечным верхним пределом расходится и интеграл (7). Значение $\exp(-Q_m)$ должно быть малым. В диффузионной области, например, нужно, чтобы соответствующий η_m член разложения в (12) был мал, по сравнению с $f(0) \approx 2/\lambda^2$. Для вариантов 1-3 таблицы 1 $\log_{10}[\,(2\eta_m+1)\exp(-Q(\eta_m)/2f(0)\,]$ принимает значения -6.1, -19, -72, соответственно. При $q < 4\lambda$ согласие (12),(13) с методом Монте-Карло для варианта 1 еще удовлетворительное (рис.4). Это приводит к ориентировочному нижнему пределу

$$\lambda_{min}/\chi_a \sim 10,$$

но ряд не обеспечивает достаточной точности в однократной области, где $f(q)$ мало (в методе Монте-Карло для этого варианта получен верхний предел $\xi(2) < 1\%$).

Данные для рассеяния на алюминии с сечением Мотта приведены в таблице 2, где ξ – относительное отклонение (15),(16) от ряда (12),(14)

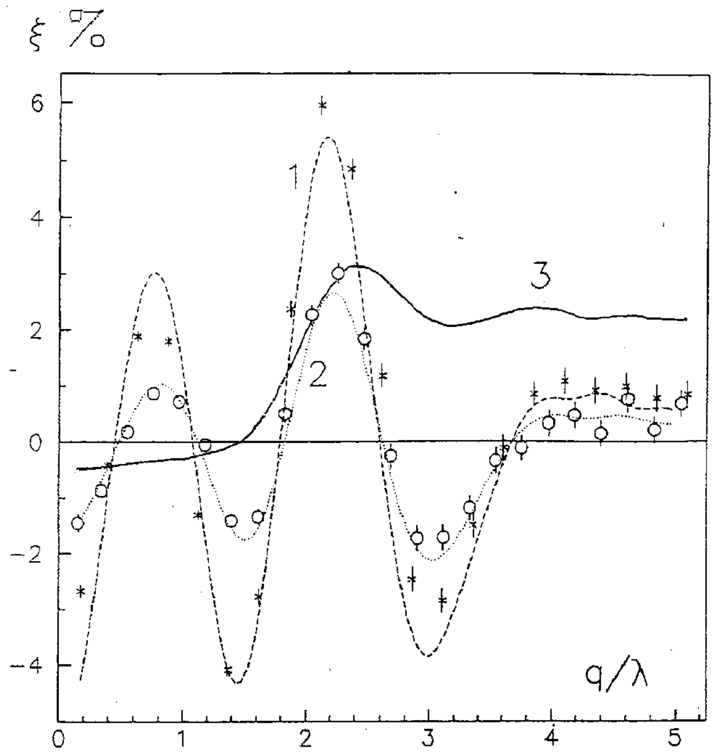

Рис. 4: Зависимость $\xi = \xi(q/\lambda)$. Кривые 1,2,3 – относительное отклонение $f(q)$ по формуле (10) от ряда (12), (13) для вариантов 1,2,7 таблицы 1, точки – отклонение от расчетов Монте-Карло для вариантов 1, 2.

в интервале $0 \le q \le 1$, и приводят к тем же результатам. (Сравнение при $q = 2$ здесь, ввиду очень малого значения $f(2)$ и приближенного характера решений, практически невозможно).

Отметим еще, что в рассмотренных примерах при $\lambda \sim \lambda_{\max}$ потери энергии частицами в веществе велики, т.е. при соответствующем ограничении пути частицы в веществе условие $\lambda < \lambda_{\max}$ будет выполняться.

6 Заключение

Проведенное рассмотрение показывает, что исходным для построения теории является положение о малости размера диффузионной области λ. Необходимости в приближении малых углов не возникает. Для практически интересных значений λ найденное в работе для сечения общего вида и без ограничения на углы рассеяния кинетическое уравнение применимо во всей области углов, причем результаты, полученные в приближении малых углов, обобщаются просто: заменой ϑ на $q = 2\sin(\vartheta/2)$.

В широкой области практических значений λ полученные решения в однократной области оказались существенно точнее, чем в кратной области и области многократного рассеяния. Т.е. необходимо уточнение ряда (10) для этих областей. (Здесь мы не касаемся отдельного вопроса о точности величины χ_a, одинаково важного для всех рассмотренных решений. Отметим только, что в однократной области решение определяется в основном параметром χ_c^2).

Работа содержит общий результат — кинетическое уравнение, имеющее решение в виде интеграла, обобщение результатов, полученных ранее в приближении малых углов (сечение Резерфорда), и новый результат: функцию распределения для частиц со спином 1/2 (сечение Мотта). Получена основа для учета ядерного формфактора и поглощения частиц в ядре. Результаты могут найти применение для учета многократного рассеяния при пошаговом проведении частиц через детектор (моделирование), когда траектория представляется в виде ломаной и на каждом малом перемещении учитываются все процессы взаимодействия.

Приложение

Обозначим через P_i вероятность попадания величины χ в отдельном столкновении в интервал $(0, \chi_i)$, через m_i, n_i, $n - m_i - n_i$ число столкновений в событии со значением χ в интервалах $(0, \chi_{i-1})$, (χ_{i-1}, χ_i), $(\chi_i, 2)$, соответственно, при общем их числе n. Вероятность получить такое событиие определяется полиномиальным распределением и равна

$$\frac{n!}{m_i!n_i!(n-m_i-n_i)!} P_{i-1}^{m_i} p_i^{n_i} (1 - P_i)^{n-m_i-n_i}, \quad p_i = P_i - P_{i-1}.$$

Вероятность получить событие i-го класса с числом столкновений n, n_i есть (полагаем в этой формуле $n - m_i - n_i = 0$, исключаем случай $n_i = 0$ и учитываем, что значение n в событиях распределено по Пуассону со средним значением $\overline{n}$)

$$\omega_i(n, n_i) = e^{-\overline{n}} \frac{\overline{n}^n}{n!} \frac{n!}{(n - n_i)!n_i!} P_{i-1}^{n-n_i}(p_i^{n_i} - \delta_{on_i}), \quad (i \neq 1)$$

δ_{on_i} – символ Кронекера. Точно так же вероятность получить событие 1-го класса с числом столкновений n

$$\omega_1(n) = e^{-\overline{n}} \frac{1}{n!} (\overline{n} P_1)^n.$$

Полная вероятность W_i найти событие в i-м классе получается суммированием этих формул по n, n_i . При суммированиии по n_i преобразуем $P_{i-1}^{n-n_i} p_i^{n_i} = P_i^n a^{n-n_i} b_i^{n_i}$, $(a + b = 1)$, и, учитывая, что сумма вероятностей в биномиальном распределении равна 1, получим

$$\sum_{n_i} \omega_i(n, n_i) = e^{-\overline{n}} \frac{\overline{n}^n}{n!} (P_i^n - P_{i-1}^n), \quad i \neq 1.$$

После суммирования по n, с учетом равенства 1 суммы вероятностей в распределении Пуассона, получаем

$$W_1 = \exp(-\overline{n}(1 - P_1)), \quad W_i = \exp(-\overline{n}(1-P_i)) - \exp(-\overline{n}(1-P_{i-1})), \quad i \neq 1.$$

Т.к. $1 - P_i = F_i = F(\chi_i)$, $F(\chi_i)$ определено формулой (18) при $\chi_g = 2$, окончательно получим

$$W_1 = \exp(-\overline{n} F_1), \quad W_i = \exp(-\overline{n} F_i) - \exp(-\overline{n} F_{i-1}), \quad i = 2, ..., N.$$

Отметим, что $F_N = 0$, следовательно, $\sum W_i = 1$, т.е. разбиение на классы охватывает всю совокупность событий.

Число столкновений в событиях 1-го класса, как показывает формула для $\omega_1(n)$, нормированная на 1 (деленная на W_1), распределено по Пуассону со средним $\overline{n}(1-F_1)$. В этом классе значения χ в столкновениях разыгрываются в интервале $(0,\chi_i)$ в соответствии с формулой (18), в которой $\chi_g = \chi_i$. Для остальных классов число столкновений в событии определим как $n = m_i + n_i$. Переходя в формуле для $\omega(n,n_i)$ к переменным m_i, n_i, получим, что вероятность появления в i-ом классе значений m_i, n_i пропорциональна произведению двух множителей

$$\sim \frac{a^{m_i}}{m_i!}\left(\frac{b^{n_i}}{n_i!} - \delta_{on_i}\right) \sim e^{-a}\,\frac{a^{m_i}}{m_i!}\left(e^{-b}\,\frac{b^{n_i}}{n_i!} - e^{-b}\,\delta_{on_i}\right),\ a = \overline{n}P_{i-1},\ b = \overline{n}p_i.$$

Т.е. m_i распределено по Пуассону со средним $\overline{n}(1-F_{i-1})$, а n_i по Пуассону со средним $\overline{n}(F_{i-1}-F_i)$ и исключением случая $n_i = 0$. После розыгрыша m_i, n_i разыгрываются n столкновений, среди которых случайно и равномерно разыгрываются n_i столкновений с попаданием χ в интервал (χ_{i-1},χ). В остальных m_i столкновениях значения χ разыгрываются в интервале $(0,\chi_{i-1})$.

Литература

[1] *G. Moliere.* Z. Naturforsch., **3a**, 78 (1948).

[2] *H. A. Bethe.* Phys. Rev., **89**, 256 (1953).

[3] *А.Д. Букин, В. Н. Иванченко, М. Ю. Лельчук и др.* Препринт ИЯФ СО АН СССР 84-33 (1984).

[4] *А.Д. Букин, Н.А. Грозина, М.С. Дубровин и др.* Препринт ИЯФ СО АН СССР 94-20 (1994).

[5] *R. Brun, F. Bruyant, M. Maire, et al.* GEANT3, CERN preprint DD/EE/84-1, Geneve (1987).

[6] *Н.Ф. Шульга, С.Н. Фомин.* ЖЭТФ **113**, 58, (1998).

[7] *В.Г. Левич, Ю.А. Вдовин, В.А. Мямлин.* Курс теоретической физики, т.II, Наука, Москва (1971).

[8] *G. Moliere, Z. Naturforsch.* **2a**, 133 (1947).

[9] *Б. Росси, К. Грейзен.* Взаимодействие космических лучей с веществом, ИЛ, Москва (1948).
B. Rossi, K. Greisen. Revies of Modern Physics, **13**, 240 (1941).

[10] *S.A. Goudsmit and J. L. Saunderson.* Phys. Rev., **57**, 24 and **58**, 36 (1940).