



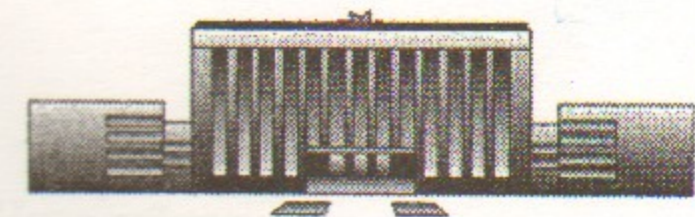
Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера  
СО РАН

*B. 39*  
*1998*

**В.В. Вечеславов**

**ХАОТИЧЕСКИЙ СЛОЙ  
НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСА ПРИ  
КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОМ ВОЗМУЩЕНИИ**

**ИЯФ 98-12**



Новосибирск

# Хаотический слой нелинейного резонанса при квазипериодическом возмущении<sup>1</sup>

В.В. Вечеславов

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера

## Аннотация

Приводятся численные и аналитические свидетельства того факта, что формирование хаотического слоя нелинейного резонанса под воздействием многочастотного возмущения качественно отличается от хорошо изученного к настоящему времени случая одной частоты. Обсуждается описанный в [10] новый эффект – появление в сепаратрисном отображении системы низкочастотных вторичных гармоник и выясняются условия, при которых именно эти гармоники играют главную роль в образовании хаоса. Теоретические значения амплитуд вторичных гармоник сопоставляются с результатами численного счета. Вводятся ДЛТ инварианты первых двух порядков сепаратрисного отображения, позволяющие нарисовать приближенную картину перекрытия резонансов на краю хаотического слоя и получить оценку его размера.

## Chaotic layer of a nonlinear resonance driven by quasiperiodic perturbation

V.V. Vecheslavov

Budker Institute of Nuclear Physics, 630090 Novosibirsk

## Abstract

In the work presented here the numerical and analytical evidences are given of the fact that formation of chaotic layer of a nonlinear resonance under the action of multifrequency perturbation are qualitatively different from the case of single-frequency well studied by now. The new effect of appearance in the separatrix mapping of the system of low frequency secondary harmonics described in Ref.[10] is discussed and the conditions under which just these harmonics play the dominant role in the formation of chaos are found out. Theoretical estimates of the secondary harmonic amplitudes are compared with the results of numerical calculations. DLT invariants of the first two orders of separatrix mapping enabling to produce an approximate picture of resonance overlapping on the edge of chaotic layer and to get its size value are introduced.

© Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера, Россия

<sup>1</sup>Статья в сборник, посвященный семидесятилетию академика Б.В. Чирикова.

## 1 Введение

Фазовое пространство нелинейной гамильтоновой системы с более чем одной степенью свободы в общем случае, как известно, разделено на регулярную и хаотическую компоненты [1,2]. Образование хаотической компоненты движения – динамического хаоса – определяется чрезвычайно сложным и все еще недостаточно изученным механизмом взаимодействия нелинейных резонансов. Многие проблемы образования хаоса приводят к необходимости исследования модели, которую можно интерпретировать как маятник (основной резонанс, вблизи которого выбираются начальные состояния системы), подверженный действию квазипериодических сил [1–4]:

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2} + \cos x + V(x, t), \quad (1)$$

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^N \varepsilon_n \cos(x - \Omega_n t). \quad (2)$$

Амплитуды гармоник возмущения  $V(x, t)$  будем считать малыми  $\varepsilon_n \ll 1$ , а частоты (по отношению к принятой за единицу частоте малых колебаний маятника) высокими  $|\Omega_n| \gg 1$ . Члены суммы (2) также принято называть резонансами. В нашем

случае все они являются возмущающими, но при другом выборе начальных условий каждый из них мог бы стать основным в "своей" области фазового пространства  $p \approx p_{sn} = \Omega_n$ .

При отсутствии возмущения  $V(x, t) = 0$  система (1) является маятником, одна из важных характеристик которого — наличие сепаратрисы (см. Рис.1)

$$x_s(t) = 4 \arctan(e^t), \quad p_s(t) = \pm 2 \sin\left(\frac{x_s}{2}\right), \quad (3)$$

особой траектории, отделяющей колебания фазы (внутри резонанса) от ее вращения (вне резонанса). На самом деле (3) описывает две пространственно совпадающие ветви при  $t \rightarrow +\infty$  и  $t \rightarrow -\infty$ , соответственно. Каждая ветвь представляет собой асимптотическую траекторию с бесконечным периодом движения, которая выходит из положения неустойчивого равновесия (седло) и приходит в него же.

Сколь угодно малое возмущение расщепляет сепаратрису на две пересекающиеся траектории, которые по-прежнему выходят из седла навстречу друг другу, но никогда в него не возвращаются. Этот эффект был качественно описан Пуанкаре еще в прошлом столетии [5]. Как показали количественные исследования Мельникова [6], по порядку величины расщепление (и все, что от него зависит) убывает быстрее любой степени малого параметра возмущения и потому не может быть обнаружено с помощью обычной техники разложения в ряды по этому параметру. В последние годы стали появляться строгие асимптотические оценки этого экспоненциально малого эффекта как для канонических отображений [7], так и для непрерывных гамильтоновых систем [8].

Расщепление сепаратрисы можно охарактеризовать величинами угла пересечения ветвей, фазового объема петли между соседними точками пересечения, максимального расщепления по импульсу. Это локальные атрибуты хаоса, в общем случае по ним нельзя восстановить полную динамику системы вблизи сепаратрисы (см. раздел 3). Вместе с тем, они

определены строго и могут быть вычислены с любой точностью, помогая уловить самые тонкие детали механизма взаимодействия нелинейных резонансов. Отметим в этой связи недавнюю работу [9], где угол расщепления сепаратрисы стандартного отображения найден в огромном диапазоне от 0.1 до  $10^{-208}$  радиана с относительной точностью лучше  $10^{-25}$ , что позволило подтвердить существующую асимптотическую теорию [7] и обнаружить ряд новых эффектов.

Свободные концы ветвей расщепленной сепаратрисы образуют бесконечное число петель неограниченно возрастающей длины [5,6], которые заполняют ограниченную и узкую область вдоль невозмущенной сепаратрисы, образуя так называемый хаотический слой [1-4]. Размер этого слоя является наиболее важной для приложений характеристикой динамического хаоса но, в отличие от угла пересечения, он может быть найден лишь приближенно. Впервые хаос нелинейных колебаний наблюдался, по-видимому, в численных экспериментах [3] и затем привлек к себе внимание многих исследователей (см. например [1,2]).

На Рис.1 приведен эскиз хаотического слоя для системы (1), (2), в котором можно выделить три части в зависимости от характера поведения фазы  $x$  и знака  $p$ . Важно отметить, что в общем случае размеры  $w_{su}$ ,  $w_{sm}$ ,  $w_{sl}$  этих частей могут быть существенно разными по величине; здесь и далее  $w = (p^2/2 + \cos x - 1)$  — безразмерное отклонение от невозмущенной сепаратрисы по энергии. Равенство  $w_{su} = |w_{sm}| = w_{sl}$  достигается только в частном случае симметричного возмущения (2), инвариантного к замене вида  $\Omega_n \rightarrow -\Omega_n$  (см. раздел 2).

Подход Мельникова не дал никаких оценок ширины хаотического слоя и ее связи с величиной расщепления сепаратрис. К настоящему времени этот вопрос удалось полностью решить только для случая одночастотного возмущения в (1) путем построения так называемого "сепаратрисного отобра-

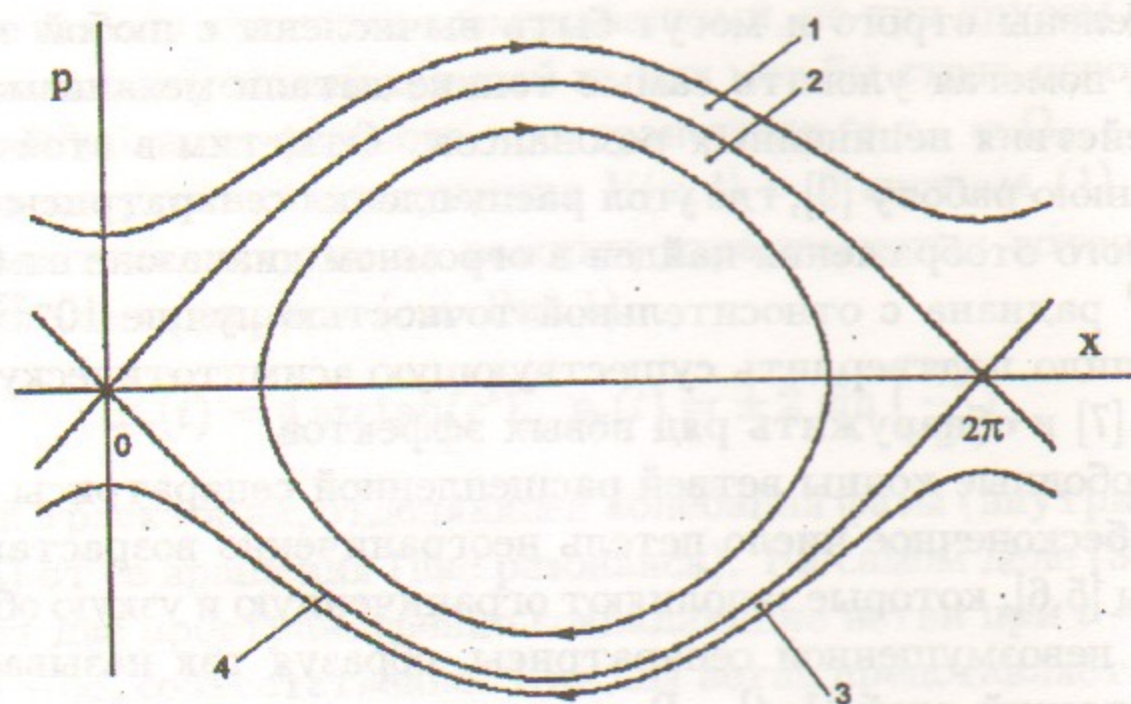


Рис. 1: Эскиз хаотического слоя нелинейного резонанса. 1 – Верхняя часть слоя, вращение фазы  $x$  при  $p > 0$ . 2 – Средняя часть слоя, фаза  $x$  колеблется. 3 – Нижняя часть слоя, вращение фазы  $x$  при  $p < 0$ . 4 – Сепаратриса (3) невозмущенного резонанса.

жения”. Это отображение, впервые введенное в работе [4], приближенно описывает динамическое состояние движущейся вблизи сепаратрисы основного резонанса системы в моменты прохождения ею положения устойчивого равновесия.

Пусть возмущение системы (1) содержит единственную гармонику вида

$$V(x, t) = \varepsilon \cos(mx/2 - \Omega t), \quad (4)$$

где  $m$  – параметр. В этом случае амплитуда  $W_{MA}$  сепаратрисного отображения, описывающего движение в верхней части хаотического слоя, связана соотношением (см. [1])

$$W_{MA}(\Omega > 0) = \varepsilon \Omega A_m(\Omega),$$

$$W_{MA}(\Omega < 0) = W_{MA}(|\Omega|)(-1)^m e^{-\pi|\Omega|}, \quad (5)$$

с интегралами Мельникова–Арнольда

$$A_m(\Omega > 0) = \frac{2\pi}{(m-1)!} \frac{e^{\pi\Omega/2}}{\text{sh}(\pi\Omega)} (2\Omega)^{m-1} [1 + f_m(\Omega)], \quad (6)$$

$$f_1 = f_2 = 0, \quad f_{m+1} = f_m - (1 + f_{m-1})m(m-1)/4\Omega^2.$$

Чириков, с помощью разработанного им критерия перекрытия резонансов и свойств стандартного отображения нашел ширину этой части слоя [1]:

$$w_{su} \approx \Omega W_{MA}(\Omega) \left(1 + \frac{4\xi}{\Omega}\right). \quad (7)$$

Если к возмущению (4) добавить симметричную гармонику  $\varepsilon \cos(mx/2 + \Omega t)$ , то эта формула правильно опишет размеры всех трех частей слоя Рис.1.

Входящий в (7) параметр  $0 \leq \xi \leq 1$  зависит от конкретных условий перекрытия дробных резонансов на краю слоя и его аккуратное определение является трудной задачей [1]. В наиболее популярном случае высокочастотного возмущения  $|\Omega| \gg 1$  необходимости в решении этой задачи не возникает, поскольку величина всей поправки мала. В случае низкой частоты  $|\Omega| \sim 1$  положение кардинально меняется и получение аккуратных оценок ширины слоя требует построения картины взаимного расположения целых и дробных резонансов (см. раздел 4).

Для системы общего вида (1),(2) какие-либо теоретические оценки величин  $w_{su}$ ,  $w_{sm}$ ,  $w_{sl}$  отсутствуют и необходимо проводить прямое их измерение, что может быть выполнено двумя способами. Первый – численное построение траекторий и отыскание минимального периода движения  $T_{min}$  в исследуемой части хаотического слоя. Период движения  $T$  есть интервал времени между соседними моментами  $t_\pi$  прохождения положения устойчивого равновесия  $x = \pi$ , он равен периоду вращения или полупериоду колебаний фазы. Ширина слоя

определяется затем по соотношению  $w_s(T_{min}) = 32 \exp(-T_{min})$  [1].

Второй способ – построение и аналитическое или численное исследование отвечающего за формирование слоя сепаратрисного отображения системы. Этот способ приводит к результату намного быстрее по сравнению с отысканием минимального периода движения, но для его реализации необходимо уметь определять амплитуды всех существенных гармоник сепаратрисного отображения квазипериодической гамильтоновой системы. На этом пути возникли непредвиденные трудности, часть которых еще предстоит преодолеть. Оказалось [10,11], что для многочастотного возмущения (2) механизм формирования хаотического слоя качественно отличается от хорошо изученного к настоящему времени механизма для случая одной частоты. Наиболее важные детали этого механизма, которые обсуждаются в следующем разделе, связаны с возникновением так называемых вторичных гармоник возмущения на комбинациях первичных (явно входящих в (2)) частот. В разделе 3 приводятся численные доказательства того неожиданного факта, что именно эти вторичные возмущения могут играть главную роль в формировании хаоса. Здесь же даются результаты сопоставления численных данных с предложенной в [10] теорией. В разделе 4 вводятся ДЛТ инварианты первого и второго порядков сепаратрисного отображения и кратко обсуждается возможность их использования для построения приближенной картины перекрытия резонансов на краю хаотического слоя и уточнения оценок его размера.

## 2 Сепаратрисное отображение в случае многих частот

Приближенное описание динамики с помощью сепаратрисного отображения предполагает, что взаимодействие основно-

го резонанса с возмущающими происходит только в моменты прохождения траекторией положения устойчивого равновесия  $x = \pi$  и имеет характер толчков. Вся система  $N$  возмущающих резонансов (2) на фазовой плоскости  $(x, p)$  в общем случае может быть разбита на две части:  $N_u$  с  $p_{sn} = \Omega_n > 0$  расположены выше основного резонанса и  $N_l = N - N_u$  с  $p_{sn} = \Omega_n < 0$  ниже его. При высокочастотном возмущении  $|\Omega_n| \gg 1$  траектория в верхней части хаотического слоя (см. Рис.1 и формулу (5)) будет испытывать толчки практически только от "верхних" резонансов, в нижней части только от "нижних", а в средней попеременно от тех и других. Если вновь вернуться к несимметричному возмущению (4), то оно сформирует "однoboкий" хаотический слой:  $|w_{sm}| \approx 2w_{su}$ ,  $w_{sl} \approx 0$ .

С учетом сказанного сепаратрисное отображение для системы (1), (2) можно записать в следующем общем виде:

$$\bar{w} = w + \begin{cases} \sum_{uk=1}^{K_u} W_{uk} \sin(\Omega_{uk} t_\pi), & \text{если } p > 0, \\ \sum_{lk=1}^{K_l} W_{lk} \sin(\Omega_{lk} t_\pi), & \text{если } p < 0, \end{cases} \quad (8a)$$

$$\bar{t}_\pi = t_\pi + \ln \frac{32}{|w|}, \quad (8b)$$

где  $t_\pi$  - моменты прохождения системой положения устойчивого равновесия  $x = \pi$ . При несоизмеримых частотах эти моменты отсчитываются в шкале непрерывного времени. Если частоты соизмеримы и кратны некоторой опорной частоте  $\Omega_0$ , то соотношение (8b) можно представить в форме [1]:

$$\bar{\tau}_\pi = \tau_\pi + \Omega_0 \ln \frac{32}{|w|}, \quad \tau_\pi = \Omega_0 t_\pi \bmod (2\pi). \quad (9)$$

Уже первые численные эксперименты по измерению амплитуд гармоник отображения (8) показали, что в его спектре присутствуют не только все  $N$  первичных (явно содержащихся в гамильтониане  $H(x, p, t)$ ) частот, но и некоторые их комбинации. Еще более неожиданным оказался тот факт, что ча-

сто гармоники именно этих комбинационных частот (их удобно называть вторичными гармониками) полностью определяют размер хаотического слоя (см. раздел 3), в то время как влияние первичных частот исчезающе мало. По этой причине мы ввели в отображении (8) обозначения  $K_u$  и  $K_l$  для числа членов верхних и нижних сумм, соответственно. В общем случае эти числа могут сильно несовпадать с числами  $N_u$  и  $N_l$  "реальных" верхних и нижних возмущающих резонансов.

В [10] показано, что гармоники комбинационных частот появляются во всех порядках по малому параметру возмущения, начиная со второго. Их необходимо учитывать, поскольку в силу экспоненциальной зависимости от частоты (формулы (5), (6)) даже очень слабые, но низкочастотные возмущения могут играть в образовании динамического хаоса главную роль и фактически полностью определять формирование хаотического слоя (см. раздел 3).

С вычислением вкладов в сепаратрисное отображение (8) от первичных гармоник (2) проблем не возникает поскольку их амплитуды  $\varepsilon_n$  и частоты  $\Omega_n$  заданы. Положение с комбинационными гармониками возмущения осложняется тем, что их амплитуды заранее неизвестны. Строгая теория здесь пока отсутствует, однако общий подход к проблеме обсуждается в работе [10], где исследуется динамика системы (1), (2) вблизи сепаратрисы невозмущенного маятника (3). Там же предложены приближенные аналитические соотношения для амплитуд вторичных (возникающих во втором порядке по параметру возмущения) комбинационных гармоник. Мы ограничимся самым простым нетривиальным случаем двухчастотного возмущения, рассмотрение которого выявляет основные черты, характерные для проблемы в целом.

Допустим, что возмущение системы (1) содержит две высокочастотные первичные гармоники

$$V(x, t) = \varepsilon_1 \cos(x - \Omega_1 t) + \varepsilon_2 \cos(x - \Omega_2 t) \quad (10)$$

и введем обозначения:

$$\Delta\Omega_+ = \Omega_1 + \Omega_2 \quad \Delta\Omega_- = \Omega_2 - \Omega_1.$$

Из результатов работы [10] следует, что в возмущении появятся вторичные гармоники с частотами  $\Delta\Omega_+$ ,  $\Delta\Omega_-$  и мы рассмотрим каждую из них в предположении, что система движется в верхней ( $p > 0$ ) части хаотического слоя в режиме вращения фазы.

Вторичная гармоника возмущения на сумме частот имеет вид:

$$\varepsilon_+ \cos(2x - \Delta\Omega_+ t), \quad \varepsilon_+ = -\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{2} \left[ \frac{1}{\Omega_1^2} + \frac{1}{\Omega_2^2} \right]. \quad (11)$$

Используя формулы (5), (6) можно показать, что она порождает в сепаратрисном отображении (8) гармонику той же частоты  $\Delta\Omega_+$  с амплитудой (5):

$$W_+(\Delta\Omega_+ > 0) = \frac{4\pi}{3} a_+ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left[ \frac{1}{\Omega_1^2} + \frac{1}{\Omega_2^2} \right] \frac{e^{\pi\Delta\Omega_+/2}}{\text{sh}(\pi\Delta\Omega_+)} \Delta\Omega_+^2 (\Delta\Omega_+^2 - 2), \quad (12)$$

$$W_+(\Delta\Omega_+ < 0) = W_+(|\Delta\Omega_+|) e^{-\pi|\Delta\Omega_+|}$$

Учитывая приближенный характер этой формулы, мы ввели в нее дополнительный множитель  $a_+$ , который определяется подгонкой по методу наименьших квадратов к результатам численного счета.

На разности частот возникают две симметричных вторичных гармоники:

$$\varepsilon_- [\cos(x - \Delta\Omega_- t) - \cos(x + \Delta\Omega_- t)], \quad \varepsilon_- = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{4} \left| \left[ \frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega_2^2} \right] \right|. \quad (13)$$

Они порождают в сепаратрисном отображении (8) гармонику частоты  $\Delta\Omega_-$  с амплитудой:

$$W_-(\Delta\Omega_-) = -\pi a_- \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left| \left[ \frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega_2^2} \right] \right| \frac{e^{\pi|\Delta\Omega_-|/2}}{\text{sh}(\pi|\Delta\Omega_-|)} (1 - e^{-\pi|\Delta\Omega_-|}) =$$

$$-\frac{\pi a_- \varepsilon_1 \varepsilon_2}{\operatorname{ch}(\pi \Delta \Omega_- / 2)} \left| \left[ \frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega_2^2} \right] \right|. \quad (14)$$

В эту формулу мы также ввели подгоночный множитель  $a_-$ .

В следующем разделе приводятся данные численной проверки выражений (12), (14) для амплитуд вторичных гармоник и определяются оптимальные значения входящих в них поправочных коэффициентов.

### 3 Численное исследование вторичных гармоник

Для изучения эффектов, связанных с возникновением вторичных гармоник возмущения, проводилось численное построение сепаратрисного отображения (8) во всех частях слоя Рис.1.

Система (1), (2) обладает симметрией вида  $(x, p, t) \leftrightarrow (2\pi - x, p, -t)$ , что позволяет, в частности, ограничиться вычислением одной ветви сепаратрисы вместо двух. Из этой симметрии следует также, что центральная точка пересечения ветвей сепаратрисы  $\mathcal{P}_{fb}(\pi)$  лежит на прямой  $x = \pi$  и, при слабом возмущении, близка к величине  $p_{s,max} = 2$ . Для отыскания угла пересечения сепаратрис  $\gamma_s$  достаточно исследовать малую окрестность этой точки, а для подсчета фазового объема  $A_s$  надо дойти до соседней точки пересечения. Кроме того, знание  $\mathcal{P}_{fb}(\pi)$  необходимо для гарантированного попадания в исследуемую часть хаотического слоя при отыскании амплитуд гармоник сепаратрисного отображения. По этой причине практически всегда поиск величины  $\mathcal{P}_{fb}(\pi)$  оказывался первым этапом вычислений.

При построении сепаратрисного отображения (8) начальные условия для траекторий выбирались случайным образом из узкого интервала внутри исследуемой части хаотического слоя. Каждая траектория либо совершала предписанное ей число периодов движения, либо прерывалась из-за смены

режима движения. В любом случае запускалась новая случайная траектория и процесс повторялся до тех пор, пока не набиралось заданное число периодов  $M_p$ . Для каждого периода вычислялась средняя энергия  $w$  по формуле [1]:

$$w = 32 \exp(-T). \quad (15)$$

Определяя изменение  $\delta w = \bar{w} - w$  энергии для каждой пары соседних периодов и приписывая его к общему для этих периодов моменту времени  $t_\pi$ , можно построить сепаратрисное отображение (8)  $(\delta w_m, t_{\pi,m})$ ,  $m = 1, 2, \dots, (M_p - 1)$  в шкале непрерывного времени. В случае соизмеримых частот его удобно (но не обязательно) пересчитать по формуле (9) на фазы  $\tau_\pi$  по опорной частоте  $\Omega_0$ . При вычислении периодов  $T$  фиксировался самый короткий из них  $T_{min}$ , что позволяло получить оценку полной ширины исследуемой части хаотического слоя  $w_s = 32 \exp(-T_{min})$  по формуле (15). Как показал опыт, для построения сепаратрисного отображения достаточно просчитать одну-две сотни периодов (с последующей обработкой по методу наименьших квадратов), в то время как для надежного определения  $T_{min}$  нужны тысячи периодов.

Прежде всего, интересно проверить, как согласуются между собой и с теорией [1] результаты всех описанных выше измерений. С этой целью была исследована система (1), (2) с симметричным одночастотным возмущением

$$V(x, t) = \varepsilon_1 \cos(x - \Omega_1 t) + \varepsilon_2 \cos(x - \Omega_2 t), \\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.075, \quad \Omega_1 = 10.0, \quad \Omega_2 = -10.0. \quad (16)$$

Построение сепаратрисного отображения показало во всех частях слоя наличие единственной гармоники с частотой возмущения и амплитудой  $W_s \approx 2.87 \cdot 10^{-5}$ , что очень близко к вычисленной через интеграл Мельникова-Арнольда (формулы (5) и (6),  $m = 2$ ) величине  $W_{MA} \approx 2.84 \cdot 10^{-5}$ . Найденные по минимальному периоду ширины всех частей слоя  $w_s \approx 2.95 \cdot 10^{-4}$

тоже близки к своему теоретическому (см.(7) при  $\xi = 0$ ) значению  $\Omega W_{MA} \approx 2.84 \cdot 10^{-4}$ . Были также найдены угол пересечения ветвей сепаратрисы  $\gamma_s \approx 7.09 \cdot 10^{-5}$ , фазовый объем области между соседними точками пересечения  $\mathcal{A}_s \approx 5.66 \cdot 10^{-6}$ , максимальное расстояние по импульсу  $\Delta \mathcal{P}_{max} \approx 1.44 \cdot 10^{-5}$  (см. раздел 1). Все эти величины дают практически одинаковое ожидаемое значение  $W$  для амплитуды сепаратрисного отображения ( $\mathcal{P}_{fb}(\pi) \approx p_{s,max} = 2$ )

$$W_e \approx \frac{2}{\Omega} \gamma_s \mathcal{P}_{fb}(\pi) \approx \frac{\Omega}{4} \mathcal{P}_{fb}(\pi) \mathcal{A}_s \approx \mathcal{P}_{fb}(\pi) \Delta \mathcal{P}_{max} \approx 2.84 \cdot 10^{-5}, \quad (17)$$

что также находится в хорошем согласии с результатами всех других измерений.

Таким образом, система (1),(16) независимо от режима движения описывается сепаратрисным отображением вида

$$\bar{w} = w + W \sin(\tau_\pi), \quad \bar{\tau}_\pi = \tau_\pi + \Omega \ln \frac{32}{|w|}, \quad (18)$$

где  $W = 2.87 \cdot 10^{-5}$ ,  $\Omega = 10.0$ . Итерации (18) позволили найти ширины слоя, которые для всех трех частей оказались равны  $\approx 3.12 \cdot 10^{-4}$ , что близко к найденной по минимальному периоду величине  $w_s \approx 2.95 \cdot 10^{-4}$ . Все сказанное является еще одним подтверждением правильности развитой в [1] теории для одночастотного возмущения.

Картина оказалась совершенно иной, когда две гармоники возмущения были сделаны несимметричными за счет увеличения частоты верхнего резонанса

$$V(x, t) = \varepsilon_1 \cos(x - \Omega_1 t) + \varepsilon_2 \cos(x - \Omega_2 t), \\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.075, \quad \Omega_0 = 2.0, \quad \Omega_1 = 6\Omega_0 = 12.0, \\ \Omega_2 = -5\Omega_0 = -10.0. \quad (19)$$

Из второй строки этих соотношений видно, что частоты гармоник соизмеримы и опорная частота  $\Omega_0 = 2.0$ . Результаты

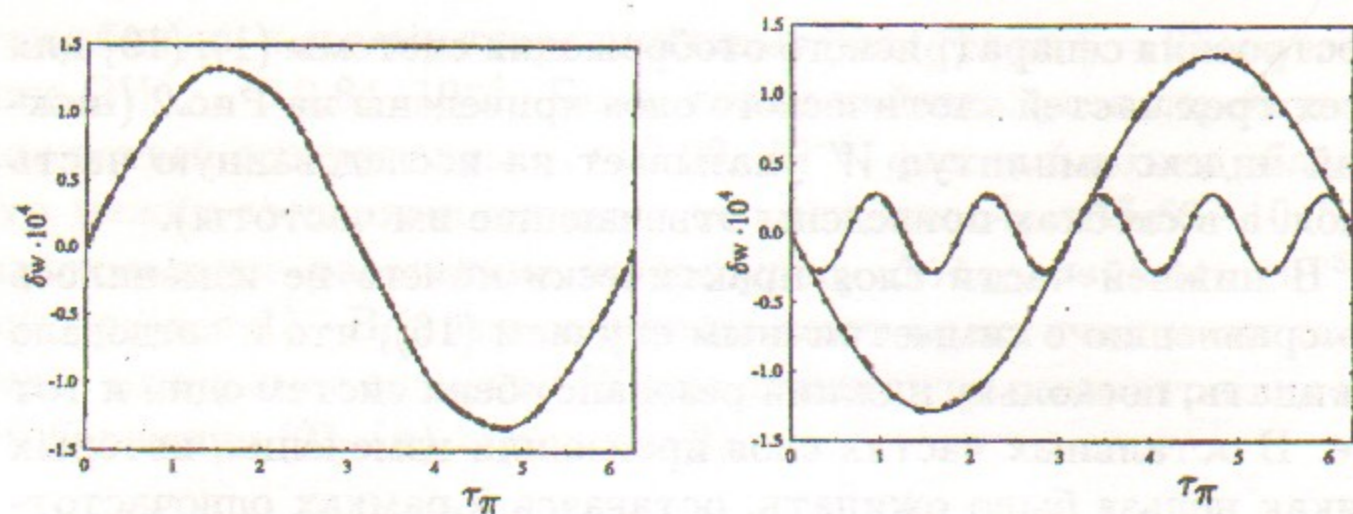
построения сепаратрисного отображения системы (1), (19) для всех трех частей хаотического слоя приведены на Рис.2 (нижний индекс амплитуд  $W$  указывает на исследованную часть слоя, а в скобках приведены отвечающие им частоты).

В нижней части слоя практически ничего не изменилось по сравнению с симметричным случаем (16), что и следовало ожидать, поскольку нижний резонанс обеих систем один и тот же. В остальных частях слоя произошли изменения, которых никак нельзя было ожидать, оставаясь в рамках одночастотной теории.

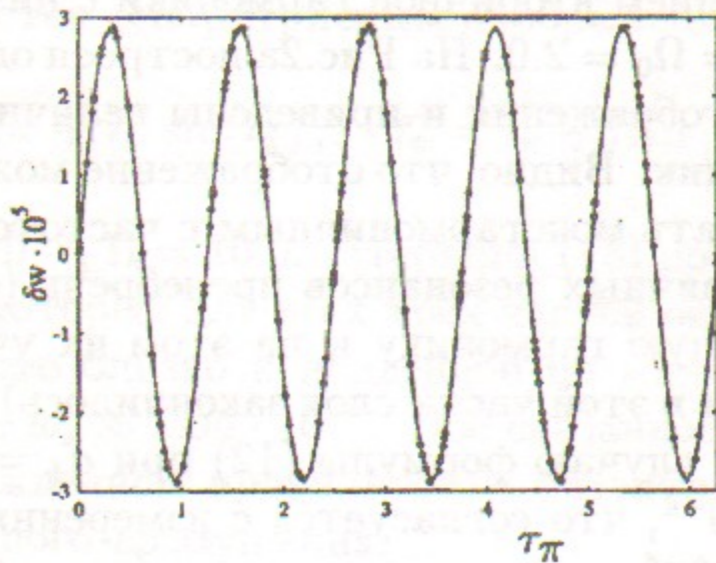
В верхней части полная амплитуда сепаратрисного отображения  $W_u \approx 1.33 \cdot 10^{-4}$  оказалась почти в пять раз выше, чем для симметричного возмущения (16) несмотря на то, что мы увеличили частоту  $\Omega_1$  верхнего резонанса. Это объясняется появлением вторичной гармоники с низкой частотой  $\Delta \Omega_+ = \Omega_1 + \Omega_2 = \Omega_0 = 2.0$ . На Рис.2а построен один период сепаратрисного отображения и приведены величины амплитуд всех трех гармоник. Видно, что отображение можно с хорошей точностью считать моногармоничным с частотой  $\Delta \Omega_+ = 2.0$ , а вкладами первичных резонансов пренебречь (они породили мощную вторичную гармонику и на этом их участие в формировании хаоса в этой части слоя закончилось). Применение к обсуждаемому случаю формулы (12) при  $a_+ = 1$  дает оценку  $W_+ \approx 2.7 \cdot 10^{-4}$ , что согласуется с измеренным значением  $W_u(2.0) \approx 1.32 \cdot 10^{-4}$  по порядку величины (ниже будет найдена экспериментальная поправка  $a_+ \approx 0.473$ , что резко улучшит согласие, см. Рис.3).

В этой части слоя также были найдены локальные характеристики расщепленной сепаратрисы  $\gamma_s$ ,  $\mathcal{A}_s$  и  $\Delta \mathcal{P}_{max}$ . Их обработка по соотношениям (17) показала, что правдоподобный прогноз ожидаемого значения амплитуды сепаратрисного отображения дает только измерение величины фазового объема  $\mathcal{A}_s$ . Однако, как показано в [11], и эта возможность исчезает, если сепаратрисное отображение нельзя даже прибли-





(a) – Верхняя часть слоя. Амплитуды первичных гармоник  $W_u(12.0) \approx 1.91 \cdot 10^{-6}$ ,  $W_u(-10.0) \approx -2.13 \cdot 10^{-7}$ , амплитуда вторичной гармоники  $W_u(2.0) \approx 1.32 \cdot 10^{-4}$ .  
 (b) – Средняя часть слоя. Амплитуда первичной гармоники  $W_m(-10.0) \approx 2.90 \cdot 10^{-5}$ , амплитуда вторичной гармоники  $W_m(2.0) \approx 1.29 \cdot 10^{-4}$ .



(c) – Нижняя часть слоя. Амплитуда первичной гармоники  $W_l(-10.0) \approx 2.87 \cdot 10^{-5}$ , амплитуда вторичной гармоники  $W_l(2.0) \approx 4.59 \cdot 10^{-8}$ .

Рис. 2: Численное интегрирование системы (1) с несимметричным возмущением (19). Жирные точки являются элементами  $(\delta w = \bar{w} - w, \tau_\pi = \Omega_0 t_\pi \bmod(2\pi))$  сепаратрисного отображения (8) с опорной частотой  $\Omega_0 = 2.0$ , а сплошные линии есть результат подгонки наименьшими квадратами.

женно считать одночастотным. По-видимому, в общем случае системы (1),(2) локальные атрибуты хаоса слабо связаны с глобальной динамикой вблизи сепаратрисы.

В средней части слоя очень четко видно влияние двух возмущений: снизу первичного и сверху вторичного с практически совпадающими амплитудами  $W_m(-10.0) \approx W_l(-10.0)$ ,  $W_m(2.0) \approx W_u(2.0)$ .

В итоге сепаратрисное отображение (8) для системы (1),(19) можно записать в виде (8)

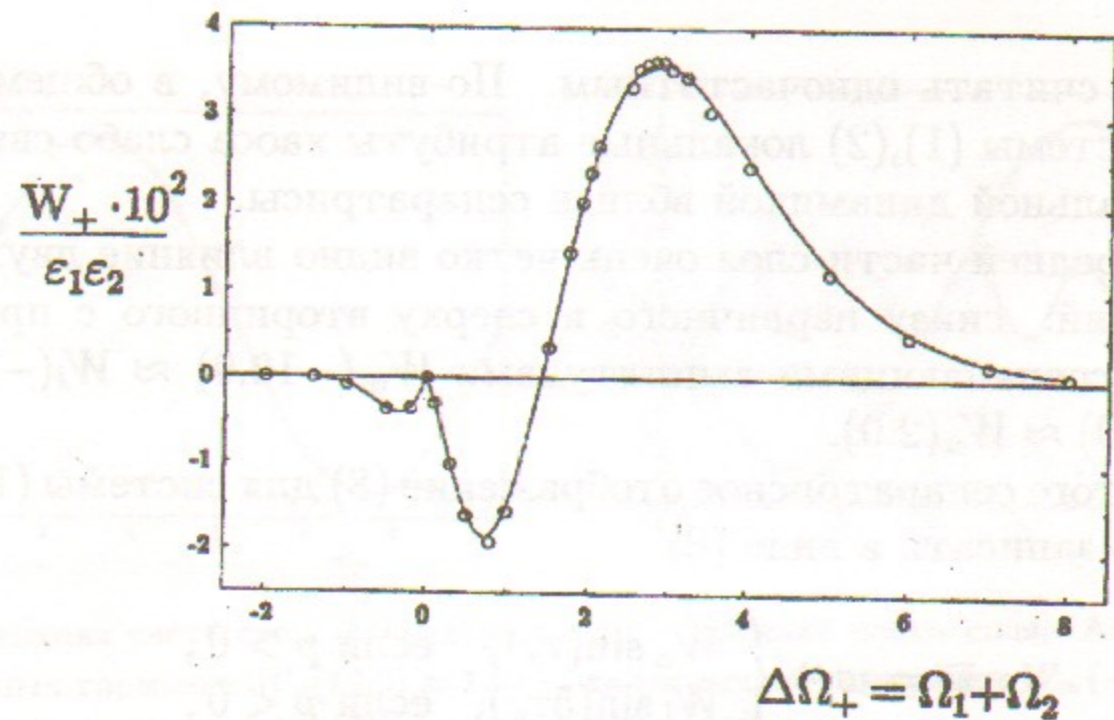
$$\bar{w} = w + \begin{cases} W_u \sin(\tau_\pi), & \text{если } p > 0, \\ W_l \sin(5\tau_\pi), & \text{если } p < 0, \end{cases} \quad (20a)$$

$$\bar{\tau}_\pi = \tau_\pi + \Delta\Omega_+ \ln \frac{32}{|w|}, \quad (20b)$$

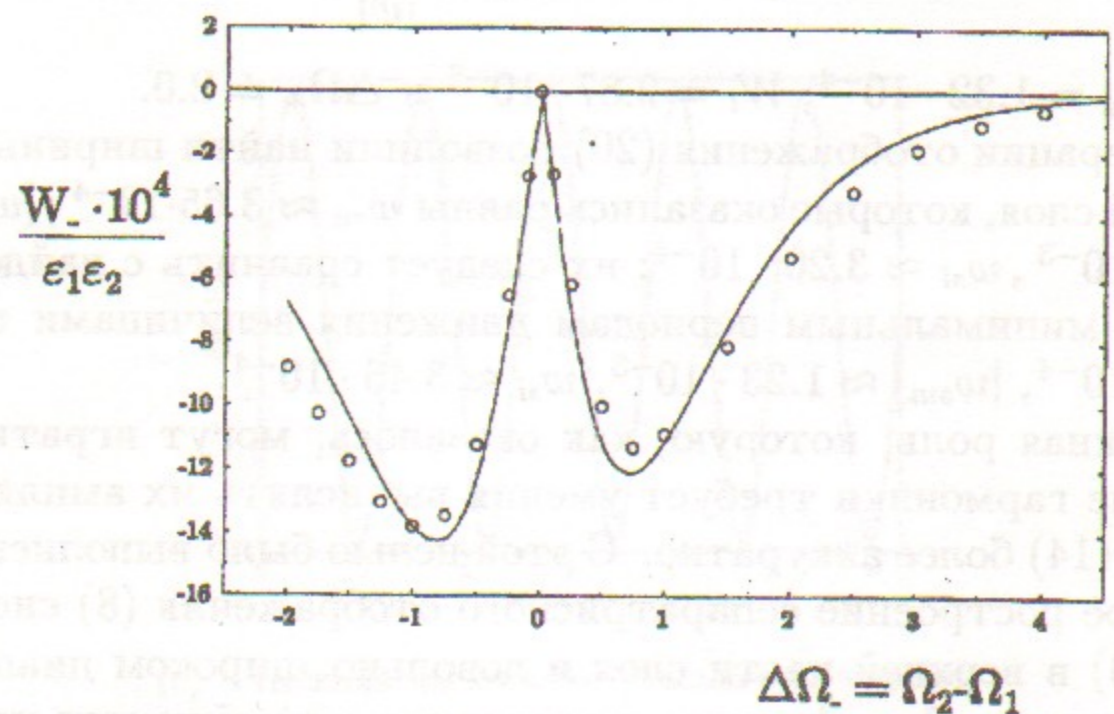
где  $W_u = 1.32 \cdot 10^{-4}$ ,  $W_l = 2.87 \cdot 10^{-5}$  и  $\Delta\Omega_+ = 2.0$ .

Итерации отображения (20) позволили найти ширины всех частей слоя, которые оказались равны  $w_{su} \approx 3.65 \cdot 10^{-4}$ ,  $|w_{sm}| \approx 1.20 \cdot 10^{-3}$ ,  $w_{sl} \approx 3.20 \cdot 10^{-4}$ ; их следует сравнить с найденными по минимальным периодам движения величинами  $w_{su} \approx 4.16 \cdot 10^{-4}$ ,  $|w_{sm}| \approx 1.23 \cdot 10^{-3}$ ,  $w_{sl} \approx 3.46 \cdot 10^{-4}$ .

Важная роль, которую, как оказалось, могут играть вторичные гармоники требует умения вычислять их амплитуды (12) и (14) более аккуратно. С этой целью было выполнено численное построение сепаратрисного отображения (8) системы (1),(10) в верхней части слоя и довольно широком диапазоне параметров. Результаты, относящиеся к комбинации на сумме частот приведены на Рис.3а. Видно, что формула (12) отлично передает качественное поведение этой гармоники, хотя природа подгоночного множителя  $a_+$  неясна. Сравнивая амплитуду  $W_+$  с найденной по формуле (5) амплитудой  $W_{MA}(\Omega_1)$  главной первичной гармоники возмущения можно найти области параметров, где  $W_+(\Delta\Omega_+) \gg W_{MA}(\Omega_1)$  и где именно вторичная гармоника, являясь единственной существенной ком-



(a) – Гармоника на сумме первичных частот  $\Delta\Omega_+$ . Сплошная линия построена по формуле (12) при значении подгоночного множителя  $a_+ = 0.473$ .



(b) – Гармоника на разности первичных частот  $\Delta\Omega_-$ . Сплошная линия построена по формуле (14) при значении подгоночного множителя  $a_- = 1.35$ .

Рис. 3: Приведенная амплитуда вторичной гармоники сепаратрисного отображения (8). Возмущение имеет вид (10) с параметрами:  $\Omega_1 = \text{var}$ ;  $\Omega_2 = -10.0 = \text{const}$ ;  $0.01 \leq \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \leq 0.5$ . Кружками представлены результаты численного интегрирования системы (1), (10) при движении в верхней ( $p > 0$ ) части хаотического слоя в режиме вращения фазы.

понтентой сепаратрисного отображения (8), полностью отвечает за формирование исследуемой части хаотического слоя. В частности, для параметров Рис.3а имеются две такие области, задаваемые неравенствами  $0.3 \lesssim \Delta\Omega_+ \lesssim 1.3$  и  $\Delta\Omega_+ \gtrsim 1.6$ .

Результаты численного счета для комбинации на разности частот и их сравнение с формулой (14) даны на Рис.3б. Качественное поведение передано хуже, чем для случая суммы частот, но и здесь можно выделить область  $W_-(\Delta\Omega_-) \gg W_{MA}(\Omega_1)$ , где вторичная гармоника полностью определяет размер хаотического слоя. Для параметров Рис.3б эта область определяется неравенством  $\Delta\Omega_- \gtrsim 0.5$ .

Из рассмотренных выше ситуаций может возникнуть впечатление, что гармоники комбинационных частот всегда работают только на усиление хаоса. Опровергающий пример имеется в [11]: к возмущению (2) всегда можно добавить два высокочастотных слагаемых и с помощью соотношений (12) или (14) подобрать их параметры так, чтобы порожденная ими вторичная гармоника "убила" главного организатора хаоса.

#### 4 ДЛТ инварианты сепаратрисного отображения

Ограничимся рассмотрением движения в верхней части слоя (вращение фазы при  $p > 0$ ) и допустим, как в примере системы (1),(19), что за его формирование практически полностью отвечает вторичная гармоника. Сепаратрисное отображение в этом случае запишется в привычном для одночастотной теории виде (18) с той существенной особенностью, что саму частоту  $\Omega$  уже никак нельзя считать высокой (см. Рис.1,2). Это обстоятельство практически исключает возможность применения простой и важной формулы (7) и для определения ширины слоя требуется дополнительная информация о перекрытии резонансов на краю слоя.

Приближенная картина расположения резонансов может быть получена без вычисления траекторий движения, если известны так называемые инварианты этих резонансов (см. например [12]), построение которых для сепаратрисного отображения (18) обсуждается ниже.

Отображение (18) является частным случаем так называемого явного отображения поворота [2]

$$\bar{J} = J - \varepsilon \frac{dQ(\theta)}{d\theta}, \quad \bar{\theta} = \theta + 2\pi\omega(\bar{J}), \quad (21)$$

в котором  $J, \theta, \omega(J)$  – переменные действие – угол и частота невозмущенного движения;  $\varepsilon$  – малый параметр; возмущение  $Q(\theta + 2\pi) = Q(\theta)$  содержит конечное число гармоник. В этих обозначениях для сепаратрисного отображения (18) следует принять

$$Q(\theta) = \cos(\theta), \quad \omega(J) = \frac{\Omega}{2\pi} \ln \frac{32}{|J|}. \quad (22)$$

Другому важному частному случаю – стандартному отображению Чирикова – отвечает выбор

$$Q(\theta) = \cos(\theta), \quad \omega(J) = J. \quad (23)$$

Напомним, что картины расположения целых ( $\omega_r(J_n) = n$  – целое число) резонансов на фазовой плоскости ( $J, \theta$ ) у систем (22) и (23) различны. Для сепаратрисного отображения расстояние между резонансами  $\Delta J_n = J_{n+1} - J_n$  зависит от  $J_n$ , а для стандартного отображения нет (отсюда второе его название – однородная модель [1]). Если для сепаратрисного отображения выполнены условия

$$\Delta J_n \ll J_n, \quad \Omega \gg 1, \quad (24)$$

то локально (в окрестности резонанса  $J_n$ ) сепаратрисное отображение переходит в стандартное (факт, установленный и использованный в [1] при выводе формулы (7)).

Техника построения инвариантов для отображения (21) подробно обсуждается в работе [12], где используется предложенный Дуннетом, Лейнгом и Тейлором метод глобального устранения резонансных знаменателей [13]. Интегралом  $m$ -го порядка оказывается ступенчатая функция, обычная производная которой вдоль истинных траекторий движения равна нулю, а величина скачков первого рода имеет порядок  $\varepsilon^{m+1}$ .

В [12] построены инварианты первых трех порядков стандартного отображения для целого ( $\omega_r = n$  – целое число) и первых двух дробных ( $\omega_r = n + 1/2, \omega_r = n \pm 1/3$ ) резонансов, соответственно. Потенциальные функции  $Q(\theta) = \cos(\theta)$  сепаратрисного (22) и стандартного (23) отображений совпадают, что позволяет переписать эти инварианты в форме, одинаково пригодной для обеих отображений. Ограничиваясь первыми двумя инвариантами, получим (штрих означает производную по  $J$ ):

$$S_1(J, \theta) = f_1(J) + \frac{\varepsilon}{2} \frac{f_1'(J)}{\sin(\pi\omega(J))} \cos(\theta - \pi\omega(J)), \quad (25)$$

$$S_2(J, \theta) = f_2(J) + \frac{\varepsilon}{2} \frac{f_2'(J)}{\sin(\pi\omega(J))} \cos(\theta - \pi\omega(J)) +$$

$$\frac{\varepsilon^2}{16} \frac{f_2''(J) \sin(2\pi\omega(J)) - 2\pi f_2' \omega'(J)}{\sin^2(\pi\omega(J)) \sin(2\pi\omega(J))} \cos(2\theta - 2\pi\omega(J)). \quad (26)$$

В выражения (25), (26) входят неизвестные функции  $f_1(J), f_2(J)$  (ДЛТ инварианты нулевого порядка). Согласно методу ДЛТ, ими следует распорядиться так, чтобы устранить все резонансные знаменатели. В нашем случае естественно принять [12]:

$$f_1'(J) = \sin(\pi\omega(J)), \quad f_2'(J) = \sin^2(\pi\omega(J)) \sin(2\pi\omega(J)). \quad (27)$$

При  $\omega = J$  и  $\varepsilon = K/2\pi$  формулы (25), (26) совпадают с формулами (3.4), (3.5) работы [12]. Полезно заметить, что если для

сепаратрисного отображения (22) выполнены условия (24), то его инварианты переходят в инварианты стандартного отображения (23).

Используя выражения (22),(25),(26),(27) и возвращаясь а прежним переменным  $(J, \theta) \rightarrow (w, \tau)$ , получаем ДЛТ инварианты целого и полуцелого резонансов сепаратрисного отображения (18):

$$S_1(y(w), \tau) = e^{-y} \left[ \sin \left( \frac{\Omega y}{2} \right) + \frac{\Omega}{2} \cos \left( \frac{\Omega y}{2} \right) \right] + \frac{W}{64} \left[ 1 + \frac{\Omega^2}{4} \right] \cos \left( \tau - \frac{\Omega y}{2} \right), \quad (28)$$

$$S_2(y(w), \tau) = \frac{16e^{-y}}{1 + \Omega^2} [\sin(\Omega y) + \Omega \cos(\Omega y)] - \frac{8e^{-y}}{1 + 4\Omega^2} [\sin(2\Omega y) + 2\Omega \cos(2\Omega y)] + \frac{W}{2} \sin \left( \frac{\Omega y}{2} \right) \sin(\Omega y) \cos \left( \tau - \frac{\Omega y}{2} \right) - \frac{\Omega W^2 e^y}{256} \cos(\Omega y) \cos(2\tau - \Omega y). \quad (29)$$

В этих выражения фигурирует функция

$$y(w) = 2\pi \frac{\omega(w)}{\Omega} = \ln \left( \frac{32}{|w|} \right), \quad (30)$$

введение которой не только упрощает запись, но и заметно повышает устойчивость вычислений при отслеживании линий уровня инвариантов.

На Рис.4 для сепаратрисного отображения (18) с параметрами

$$W = 9.1 \cdot 10^{-5}, \quad \Omega = 3.0 \quad (31)$$

сравниваются картинка взаимного расположения целого ( $\omega_r = 6$ ) и полуцелого ( $\omega_r = 5.5$ ) резонансов, полученные численно и с помощью ДЛТ инвариантов (28),(29) и между ними обнаруживается неплохое соответствие. Величина  $\Omega = 3.0$  в (31)

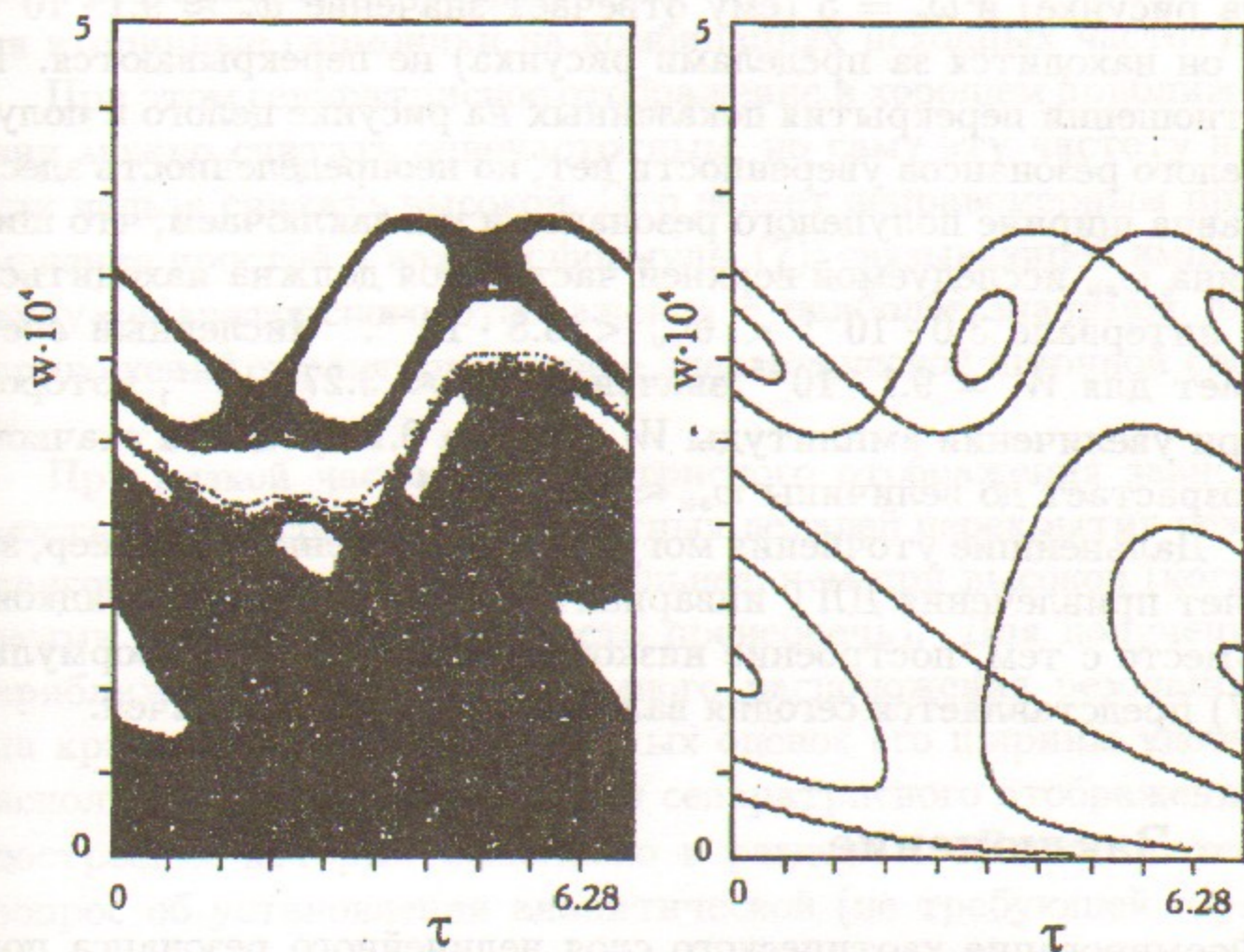


Рис. 4: Сепаратрисное отображение (18) с параметрами  $W = 9.1 \cdot 10^{-5}$ ,  $\Omega = 3.0$ . Слева - результаты численного счета двух хаотических траекторий, стартующих в окрестности целого ( $\omega_r = 6$ ) и полуцелого ( $\omega_r = 5.5$ ) резонансов. Справа - линии уровней ДЛТ инвариантов этих резонансов, построенные по формулам (28) и (29).

отвечает примерно максимально сильной вторичной гармонике (см. Рис.3а).

С помощью критерия перекрытия резонансов Чирикова [1] и взаимного расположения инвариантов в правой части Рис.4 можно уверенно сказать, что целые резонансы  $\omega_r = 6$  (нижний на рисунке) и  $\omega_r = 5$  (ему отвечает значение  $w_r \approx 9.1 \cdot 10^{-4}$  и он находится за пределами рисунка) не перекрываются. В отношении перекрытия показанных на рисунке целого и полуцелого резонансов уверенности нет, но неопределенность здесь равна ширине полуцелого резонанса и мы заключаем, что ширина  $w_{su}$  исследуемой верхней части слоя должна находиться в интервале  $3.0 \cdot 10^{-4} < w_{su} < 3.8 \cdot 10^{-4}$ . Численный счет дает для  $W = 9.1 \cdot 10^{-5}$  значение  $w_{su} \approx 3.27 \cdot 10^{-4}$ , которое при увеличении амплитуды  $W$  всего на 0.2 процента скачком возрастает до величины  $w_{su} \approx 3.88 \cdot 10^{-4}$ .

Дальнейшие уточнения могут быть получены, например, за счет привлечения ДЛТ инвариантов более высоких порядков. Вместе с тем, построение низкочастотного аналога формулы (7) представляется сегодня важной, но трудной задачей.

## 5 Заключение

Формирование хаотического слоя нелинейного резонанса под воздействием нескольких слабых высокочастотных возмущающих резонансов с различными частотами качественно отличается от хорошо изученного к настоящему времени случая одночастотного возмущения. В спектре сепаратрисного отображения системы помимо первичных, явно присутствующих в возмущении частот появляются также (начиная со второго порядка по параметру малости) различные их комбинации. Экспоненциальная зависимость амплитуд сепаратрисного отображения от частоты (5), (6) приводит к тому, что даже очень слабые, но низкочастотные вторичные возмущения могут играть в образовании динамического хаоса главную

роль, тогда как вклады первичных возмущений оказываются исчезающе малы (см. раздел 3). Возникающая при этом ситуация выглядит несколько парадоксально: хаотический слой основного резонанса определяется не его взаимодействием с возмущающими резонансами, а взаимодействием возмущающих резонансов друг с другом (продуктом которого и являются вторичные гармоники на комбинациях исходных частот).

При этом сепаратрисное отображение в хорошем приближении можно считать одночастотным, но саму эту частоту никак нельзя считать высокой. Это делает неправомерным применение простой и важной формулы (7), связывающей амплитуду сепаратрисного отображения с наиболее значимой для приложений характеристикой – энергетической шириной слоя  $w_s$ .

При низкой частоте сепаратрисного отображения зависимость параметра  $w_s$  от конкретных деталей перекрытия резонансов проявляется намного сильнее, чем при высокой (когда этими деталями можно просто пренебречь). Для получения приближенной картины взаимного расположения резонансов на краю слоя и более аккуратных оценок его ширины удобно использовать ДЛТ инварианты сепаратрисного отображения, построение которых выполнено в разделе 4. Вместе с тем, вопрос об установлении аналитической (не требующей обращения к численному эксперименту) зависимости ширины слоя от амплитуды низкочастотного сепаратрисного отображения следует признать открытым.

### Благодарность.

Автор глубоко благодарен Судьбе за возможность на протяжении многих лет быть в команде Б.В.Чирикова, участвовать в проводимых им исследованиях, широко пользоваться его научной поддержкой и советами.

## Литература

- [1] *B.V. Chirikov*. Phys. Reports **52**, 263 (1979).
- [2] *A. Lichtenberg and M. Lieberman*. Regular and Chaotic Dynamics, Springer (1992).
- [3] *N.N. Filonenko, R.Z. Sagdeev and G.M. Zaslavsky*. Nuclear Fusion **7**, 253 (1967).
- [4] *Г.М. Заславский, Н.Н. Филоненко*. ЖЭТФ **54**, 1590 (1968).
- [5] *A. Poincaré*. Les methodes nouvelles de la mecanique celeste, Paris (1892), п.226  
*А. Пуанкаре*. Избранные труды, Наука, Москва (1971), т.1, с.728.
- [6] *В.К. Мельников*. ДАН **148**, 1257 (1963); Труды Моск. мат. общества **12**, 3 (1963).
- [7] *V.G. Gelfreich, V.F. Lazutkin and N.V. Svanidze*. Physica D **71**, 82 (1994).
- [8] *V.G. Gelfreich*. Reference System for Splitting of Separatrices, preprint 163, Universidad de Barcelona, 1990.
- [9] *В.В. Вечеславов, Б.В. Чуриков*. Прецизионное измерение расщепления сепаратрисы нелинейного резонанса. Препринт ИЯФ СО РАН 98-3, Новосибирск, 1998.
- [10] *В.В. Вечеславов* ЖЭТФ **109**, 2208 (1996).
- [11] *В.В. Вечеславов*. ПЖЭТФ **63**, 989 (1996).
- [12] *В.В. Вечеславов*. ЖТФ **58**, 20 (1988).
- [13] *D.A. Dunnet, E.W. Laing, J.B.J. Taylor*. Math. Phys. **9**, 1819 (1968).

*V.V. Vecheslavov*

**Хаотический слой нелинейного резонанса  
при квазипериодическом возмущении**

*V.V. Vecheslavov*

**Chaotic layer of a nonlinear resonance  
driven by quasiperiodic perturbation**

ИЯФ 98-12

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев

Работа поступила 27.02. 1998 г.

Сдано в набор 5.03.1998 г.

Подписано в печать 5.03.1998 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1.7 печ.л., 1.4 уч.-изд.л.

Тираж 80 экз. Бесплатно. Заказ № 12

Обработано на IBM PC и отпечатано на  
ротапринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН,  
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.