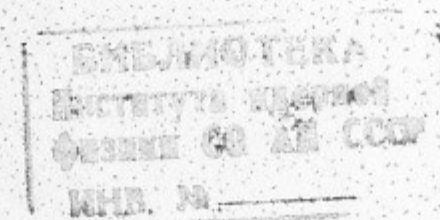




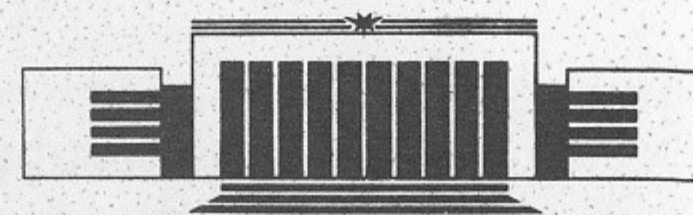
Государственный научный центр  
Российской Федерации  
Институт ядерной физики  
им. Г.И. Будкера

В.А. Киселев, Е.Б. Левичев,  
В.В. Сажаев, В.В. Смалюк

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ  
НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ  
НА НАКОПИТЕЛЕ ВЭПП-4М



ИЯФ 96-69



НОВОСИБИРСК

## Экспериментальное изучение нелинейной динамики на накопителе ВЭПП-4М

*В.А. Киселев, Е.Б. Левичев, В.В. Сажаев, В.В. Смалюк*

Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера СО РАН  
630090 Новосибирск, Россия

### Аннотация

Приведены результаты экспериментального исследования динамики пучка электронов на накопителе ВЭПП-4М в нелинейном магнитном поле. Топология фазового пространства возмущенной системы и зависимость частоты бетатронных колебаний от амплитуды изучались при помощи возбуждения когерентных колебаний пучка коротким импульсом раскачки. Измеренные данные сравниваются с аналитическими оценками и результатами численного моделирования.

### Nonlinear beam dynamics study at VEPP-4M

*V. Kiselev, E. Levichev, V. Sajaev, V. Smaluk*

Budker Institute of Nuclear Physics SB RAS  
630090 Novosibirsk, Russia

### Abstract

Nonlinear dynamics of transverse beam motion has been studied experimentally at the VEPP-4M electron-positron collider. Two aspects of nonlinear beam behaviour described in this paper are the amplitude dependent tune shift and the phase space trajectories near nonlinear resonances. The measurement results are presented and compared with the theoretical prediction.

© Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера СО РАН, Россия

## 1 Введение

Нелинейные поля, присутствующие на орбите циклического ускорителя, могут существенно влиять на динамику пучка приводя к искажению фазовых траекторий частиц, появлению плотной сетки нелинейных резонансов и зависимости частоты бетатронных колебаний от амплитуды, ограничению области устойчивого движения частиц (динамической апертуры).

Для изучения нелинейной динамики на накопителе ВЭПП-4М был проведен ряд экспериментов. Основными задачами, которые при этом ставились, были: исследование особенностей нелинейного движения пучка в ВЭПП-4М, анализ основных источников возмущения, сравнение результатов численного моделирования и аналитических оценок с экспериментом.

Методика измерений основывалась на быстром (за время меньше одного оборота) импульсном возбуждении когерентных колебаний пучка и их наблюдении пооборотно при помощи электростатического датчика положения (пикапа). Изучение массива координат центра тяжести пучка позволяет получить информацию об основных аспектах нелинейной динамики. Измерения проводились при токах пучка электронов порядка нескольких миллиампер;

влияние пространственного заряда (например, зависимость бетатронной частоты от тока) изучалось отдельно и учитывалось при обработке результатов наблюдений.

Для исследования топологии возмущенного фазового пространства был предложен и реализован метод синтеза фазовых траекторий по спектру Фурье когерентных колебаний пучка. Измерения можно проводить одним датчиком, вместо принятых двух. Метод позволяет значительно уменьшить влияние погрешности измерения и ошибок, связанных с шумом. Точность измерений позволяет проводить количественные оценки нелинейных характеристик системы, в частности, амплитуды гармоник возмущения или мощности нелинейного резонанса.

Спектральный анализ массива координат центра тяжести пучка позволяет также изучать нелинейность системы, т.е., зависимость частоты бетатронных колебаний от амплитуды. Исследовалась зависимость нелинейности от невозмущенной (начальной) частоты бетатронных колебаний в области одномерного секступольного резонанса  $3\nu_x = 26$ . Полученные данные позволяют говорить, что полная горизонтальная нелинейность включает в себя октупольную компоненту и секступольную, обусловленную линзами, компенсирующими хроматизм. Последняя демонстрирует характерное "резонансное" поведение при  $\nu_x \simeq 26/3$ .

Экспериментальные результаты сравниваются с аналитическими оценками, полученными при помощи теории возмущений, и с данными численного моделирования движения частицы в магнитной структуре ВЭПП-4М, позволяя судить о возможностях теоретического описания нелинейных явлений в циклических ускорителях. Модель структуры ВЭПП-4М [1] учитывает различные систематические источники нелинейности поля элементов накопителя, описанные ниже.

## 2 Используемая аппаратура и методика измерений

Накопитель ВЭПП-4М (рис.1) предназначен для экспериментов со встречными электрон-позитронными пучками и рассчитан на максимальную энергию  $E = 6$  ГэВ [2]. Накопитель состоит из двух полуколец с магнитной структурой типа *FODO*, и двух длинных прямолинейных промежутков: "технического", где размещаются ускоряющие ВЧ резонаторы и инжекционное оборудование, и "экспериментального", где осуществляется встреча электронного и позитронного пучков. Периметр накопителя равен 366 м. Поведение структурных функций накопителя показано на рис.2.

Экспериментальное изучение нелинейной динамики проводилось при энергии инжекции  $E_0 \simeq 1.8$  ГэВ. Основные параметры накопителя для этой энергии приведены в таблице (1).

Таблица 1: Основные параметры ВЭПП-4М

Энергия	1.8 ГэВ
Периметр	366 м
Период обращения	1.2 мксек
Бетатронная частота	
горизонтальная	8.620
вертикальная	7.560
Коеф.уплотнения орбит	0.017
Натуральный хроматизм	
горизонтальный	-13.6
вертикальный	-20.7
Горизонтальный эмиттанс	35 нм-рад
Разброс энергий в пучке	$8.5 \times 10^{-4}$
Длина сгустка ( $\sigma_s$ )	6 см
Время затухания колебаний	
горизонтальных	35 мс
вертикальных	70 мс
продольных	70 мс

Значительный натуральный хроматизм ВЭПП-4М в сильной степени определяется квадрупольными линзами места встречи ( $\approx 50\%$  по горизонтали и  $\approx 60\%$  по вертикали), где бета-функция максимальна, и компенсируется сосредоточенными секступольными линзами, расположенными здесь же (рис.1). Оставшаяся часть компенсируется специальными коррекциями хроматизма, размещенными в элементах периодичности в полукольцах.

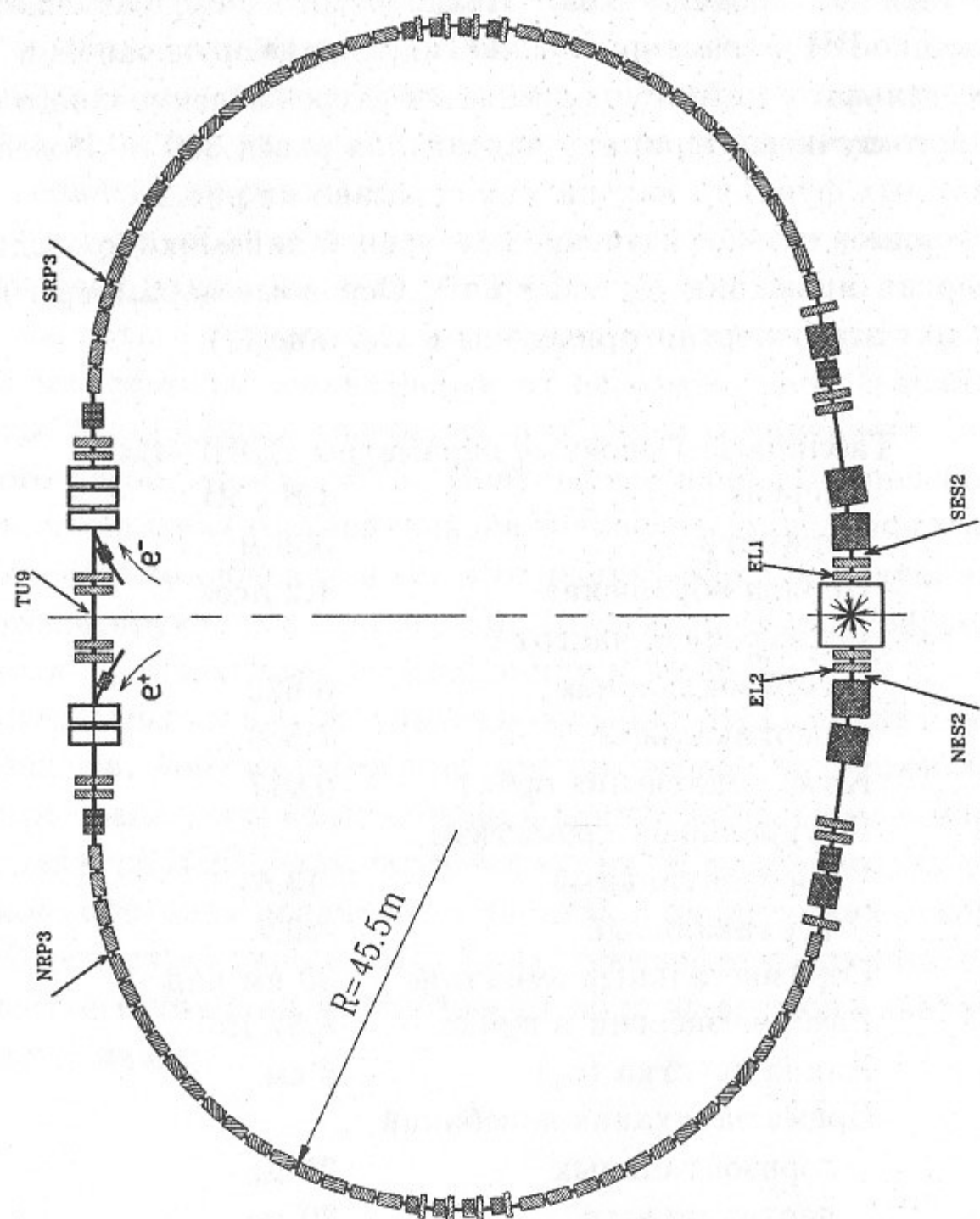


Рис. 1: Общий вид накопителя ВЭПП-4

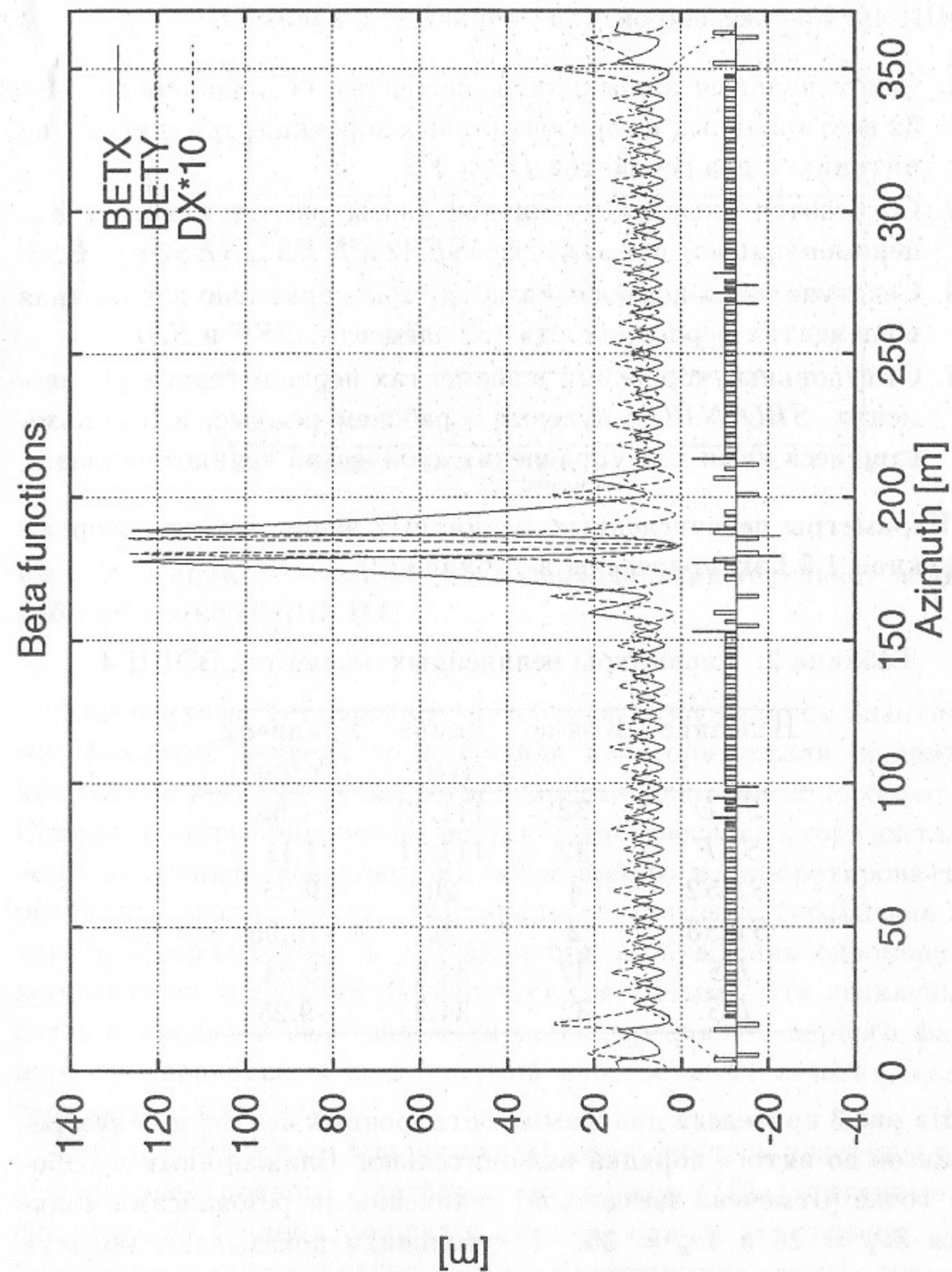


Рис. 2: Структурные функции накопителя ВЭПП-4

Следующие нелинейные элементы использовались в структуре ВЭПП-4М при моделировании нелинейного движения:

1. Секступольные коррекции в элементах периодичности. По 32 вертикальных и горизонтальных коррекций объединены по питанию в два семейства *DS* и *FS*.
2. Сосредоточенные секступольные линзы, расположенные в экспериментальном промежутке: *SES2* и *NES2*, *SES3* и *NES3*.
3. Секступольная компонента поля, конструктивно заложенная в элементах периодичности (32 элемента, *SSF* и *SSD*).
4. Октупольные коррекции в элементах периодичности (32 элемента, *SRO NRO*), нулевые в рабочем режиме, и использовавшиеся нами для управления кубической нелинейностью.

Параметры перечисленных магнитных элементов для энергии инжекции 1.8 ГэВ приведены в таблице (2).

Таблица 2: Параметры нелинейных элементов ВЭПП-4

Название	Кол-во	Длина (см)	Градиент (Гс/см <sup>2</sup> )
<i>SSD</i>	32	111.39	-1.68
<i>SSF</i>	32	111.31	1.11
<i>SES2</i>	4	20	9.25
<i>SES3</i>	2	20	-16.95
<i>FS</i>	32	34.2	5.24
<i>DS</i>	32	34.2	-9.25

На рис.3 приведена диаграмма бетатронных частот и линии резонансов до пятого порядка включительно. Ближайшими к рабочей точке (отмечена звездочкой) нелинейными резонансами являются  $3\nu_x = 26$  и  $4\nu_x = 35$ . Треугольники показывают область бетатронных частот, в которой изучались свойства нелинейного движения пучка.

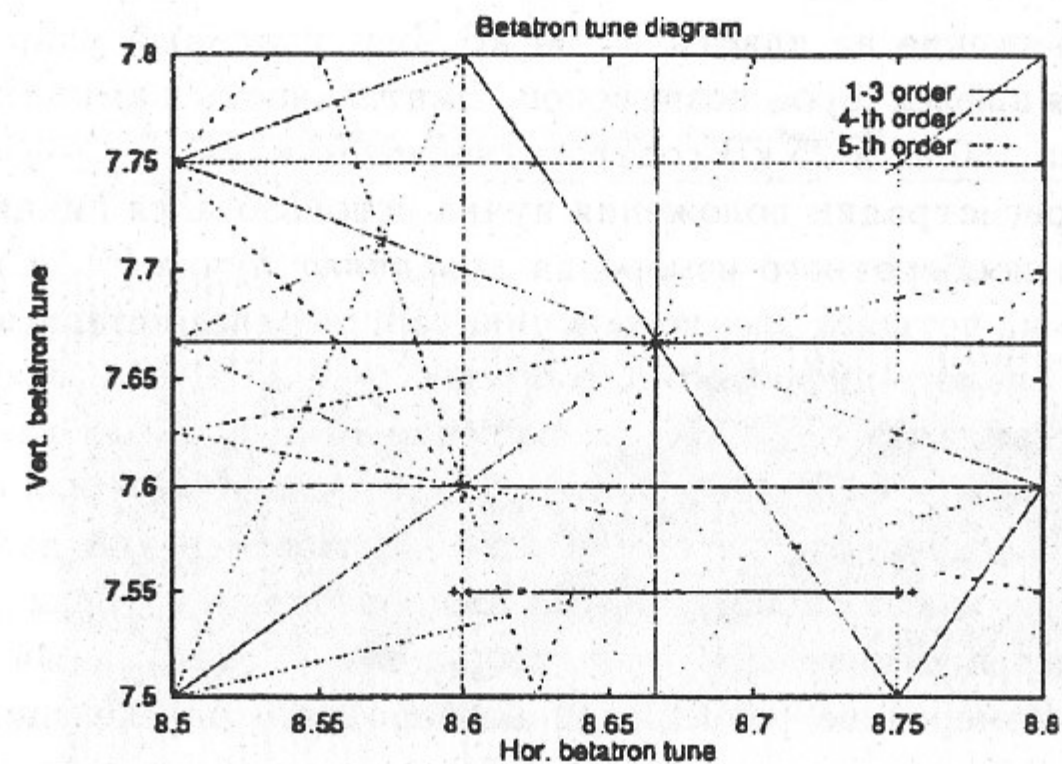


Рис. 3: Линии резонансов (до 5 порядка включительно) вблизи рабочей точки ВЭПП-4М.

Когерентные бетатронные колебания возбуждались пластинами "быстрого" кикера по вертикали или горизонтали, и движение центра инерции пучка регистрировалось пикапом пооборотно. Основная часть приводимых результатов относится к горизонтальному движению, поскольку их более просто интерпретировать и оценивать аналитически. Вертикальное движение (уравнение которого содержит член  $\propto xz$ ) даже при возбуждении одномерных когерентных колебаний оказывается связанным. Эта нелинейная связь приводит к необходимости рассмотрения 4-х мерного фазового пространства, а не двумерной плоскости его сечения, как в горизонтальном случае.

В качестве горизонтального кикера применялись пластины разведения электронного и позитронного пучков *TU9*, запитанные от формирующей линии, управляемой водородным тиратроном. Линия формирует на пластинах импульс напряжения синусоидальной формы (1/2-периода). Длительность импульса 50 нс, максималь-

ное напряжение на пластинах 30 кВ. Вертикальный удар осуществлялся инфлектором позитронов. Длительность и амплитуда его импульса 150 нс и 25 кВ соответственно.

Для регистрации положения пучка использовался пикап *SRP3* системы поворотного измерения координат пучка [6]. Сигнал с каждого из четырех электродов пикапа измерялся независимо при помощи аналого-цифрового преобразователя АЦП-101s, выполненного в стандарте КАМАК (разрешение 10 бит, время измерения 100 нс, емкость ОЗУ 4096 слова) [7], запуск которого был синхронизован с импульсом кикера. После цикла измерений данные из АЦП считываются в память ЭВМ для обработки, которая включает вычисление интенсивности, координат, спектральный анализ и т.д. Измеренное разрешение поворотного определения координаты для токов пучка  $I \simeq 1 \div 5$  мА составляет  $\sigma_x \simeq 100$  мкм,  $\sigma_z \simeq 70$  мкм.

Зависимость амплитуды колебаний от номера оборота, приведенная на рис.4, показывает, что для интересующего нас интервала времени затухание когерентной моды колебаний для горизонтального движения при токах в несколько миллиампер практически отсутствует, позволяя рассматривать пучок как макрочастицу. Для вертикального движения, в противоположность этому, наблюдается достаточно сильное быстрое затухание, обусловленное электромагнитным взаимодействием пучка с инфлектором и пластинами разведения, которое необходимо учитывать при определении амплитуды колебаний.

### 3 Фазовое движение пучка

Для получения фазовых траекторий обычно используются два пикапа, отстоящие по бетатронной фазе на величину, приблизительно равную четверти длины волны колебания [3]. При этом, показания координаты на втором пикапе интерпретируются как угол траектории частицы на первом пикапе, позволяя восстановить фазовое движение в месте размещения первого пикапа. В реализован-

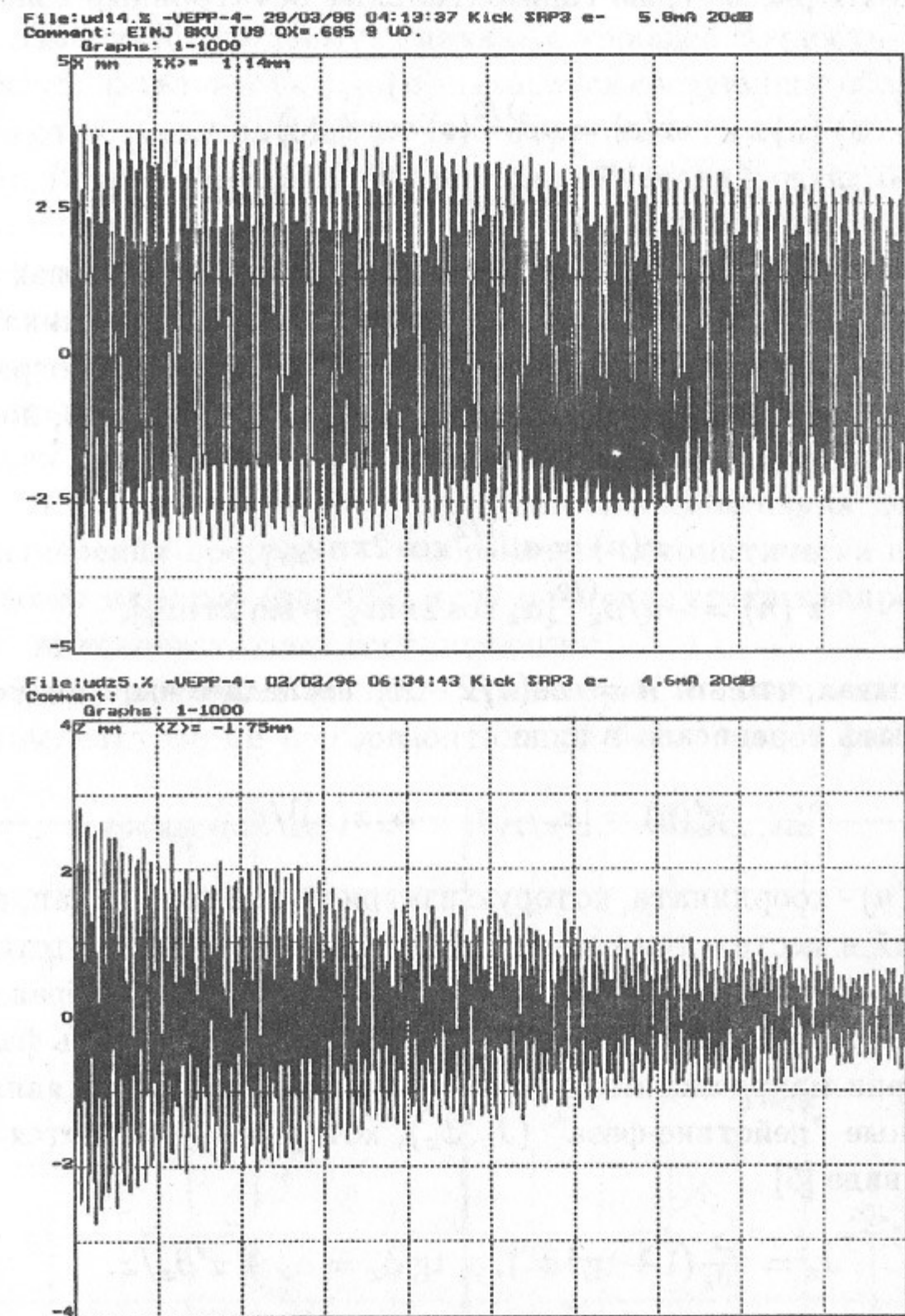


Рис. 4: Амплитуда первых 1000 оборотов пучка по горизонтали (слева) и по вертикали (справа).

ном нами методе используется только один пикап. Для пояснения сути метода рассмотрим горизонтальные бетатронные колебания [4]

$$\begin{aligned} x(s) &= a\beta_x^{1/2}(s) \cos \psi_x(s), \\ x'(s) &= -a/\beta_x^{1/2}(s)[\alpha_x(s) \cos \psi_x(s) + \sin \psi_x(s)], \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\alpha_x = -1/2\beta'_x(s)$ , а  $\beta_x(s)$  и  $\psi(s)$  - амплитудная и фазовая функции бетатронных колебаний. На определенном азимуте пикапа бетатронная фаза через  $n$  оборотов меняется на  $2\pi n\nu_x$  (без ограничения общности считаем, что начальная фаза равна нулю), поэтому значения координаты и угла будут равны

$$\begin{aligned} x(n) &= a\beta_x^{1/2} \cos 2\pi n\nu_x, \\ x'(n) &= -a/\beta_x^{1/2}[\alpha_x \cos 2\pi n\nu_x + \sin 2\pi n\nu_x]. \end{aligned} \quad (2)$$

Учитывая, что  $\sin A = \cos(\pi/2 - A)$ , последнее выражение в (2) может быть переписано в виде

$$x'(n) = [x_{\pi/2}(n) - \alpha_x x(n)]/\beta_x, \quad (3)$$

где  $x_{\pi/2}(n)$  - координата, которую измерил бы второй пикап, расположенный в месте с теми же  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$ , что и у первого, и отстоящий от него по бетатронной фазе на  $\pi/2$ . Таким образом, выбрав из измеренного массива  $x(n)$  массив  $x_{\pi/2}(n)$ , можно построить фазовые траектории макрочастицы. Весьма удобными для этого являются переменные "действие-фаза" ( $J_x, \phi_x$ ), которые выражаются через  $(x, x')$  в виде [5]

$$J_x = \frac{x^2}{2\beta_x}(1 + \text{tg}^2 \phi_x), \quad \text{tg} \phi_x = \alpha_x + x'\beta_x/x. \quad (4)$$

Подставляя в эти выражения (2) получим

$$J_x(n) = (x_{\pi/2}^2(n) + x^2(n))/2\beta_x, \quad \text{tg} \phi_x(n) = x_{\pi/2}(n)/x(n), \quad (5)$$

Удобство использования именно таких канонически сопряженных переменных для одного пикапа состоит в том, что теперь  $\alpha_x$

не входит в выражения (т.е., фазовые траектории демонстрируют "чистое" искажение обусловленное только возмущением), а  $\beta_x$  легко измеряется на азимуте пикапа с хорошей точностью.

Последовательность  $x_{\pi/2}(n)$  находится следующим образом: (1) измеряются значения координат центра тяжести  $x(n)$  (до 4096 значений), (2) при помощи БПФ находится средний сдвиг бетатронной фазы для одного оборота (с учетом нелинейности), (3) каждому элементу массива  $x(n)$  ставится в соответствие элемент того же массива  $x(k)$ , для которого значение нецелой части бетатронной фазы отличается от исходной на  $\pi/2$  с некоторой заданной точностью, (4) для получившихся двух массивов с помощью нескольких гармоник синтезируются значения фазовых переменных  $X(n)$ ,  $X'(n) = X_{\pi/2}(n)/\beta_x$ . Для уменьшения влияния погрешностей измерения программа отображения автоматически выбирает гармоники надежно (на 30%) превышающие среднеквадратичный "шум" высокочастотных составляющих.

На рис.5 показаны фазовые траектории, полученные по двум пикапам, отстоящим по горизонтальной бетатронной фазе на  $\pi/2$ .

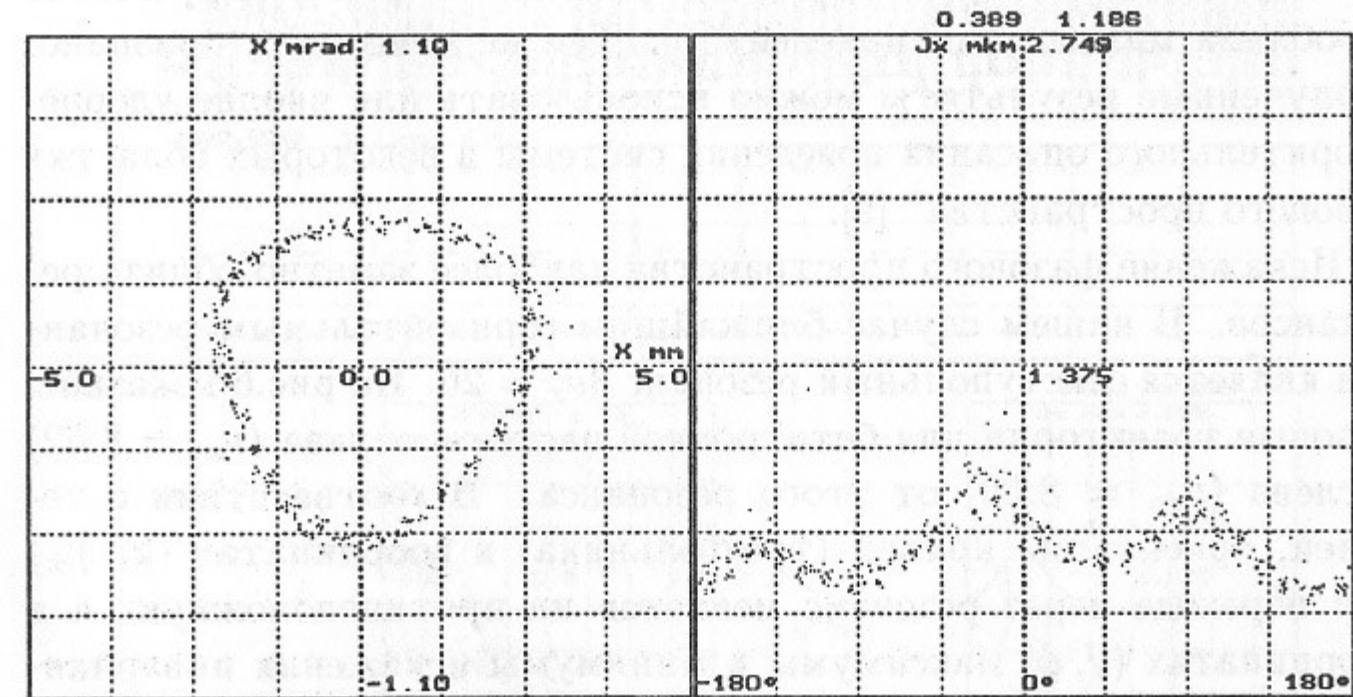


Рис. 5: Фазовые траектории, измеренные по двум пикапам без дополнительной обработки.

Прямое сравнение с результатами, приведенными ниже (например, рис.7) демонстрирует преимущество использования гармонического разложения.

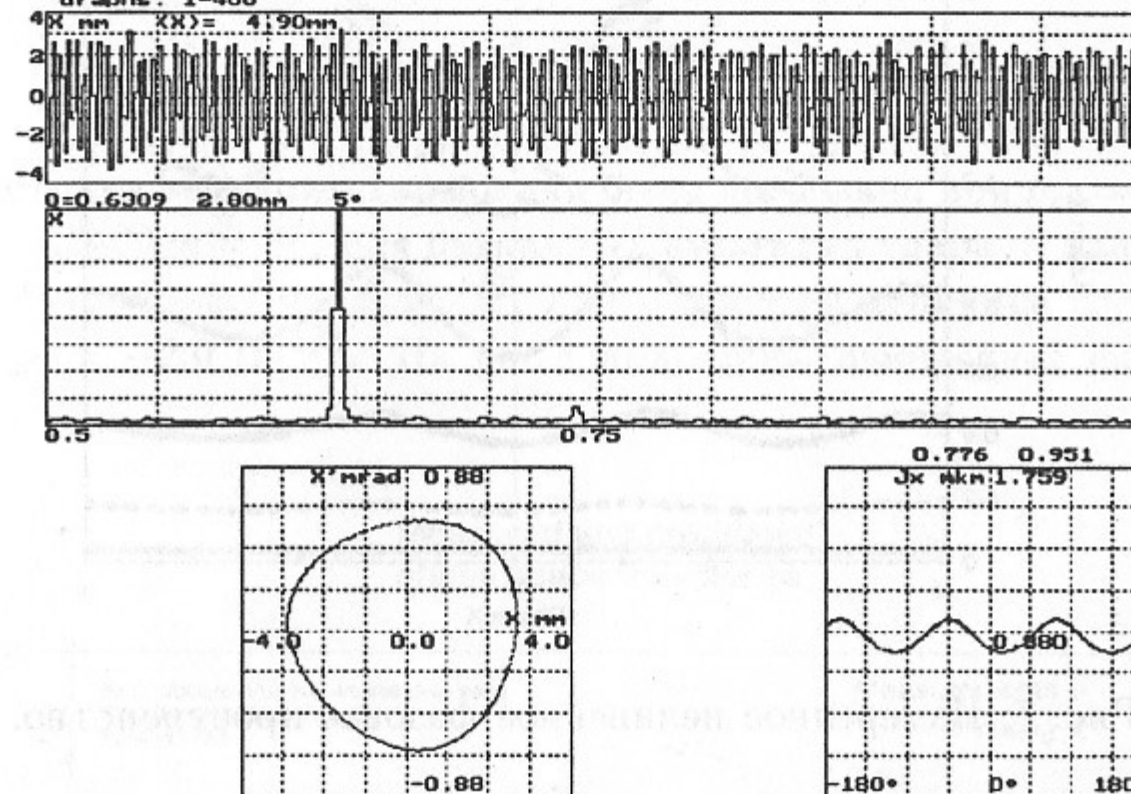
Поскольку вклад основных гармоник, вносимых возмущением, приводит к изменению координаты на величину, порядка 0.1 мм и менее, для повышения точности мы пользовались накоплением серии координатных массивов, усредняя шум. Среднеквадратичное значение спектральной плотности шума для 10-кратного накопления уменьшалось (в зависимости от тока пучка) с 10-20  $\mu\text{м}$  до 4-6  $\mu\text{м}$ . Тем самым, при интегральном разрешении пикапа  $\sim 100\mu\text{м}$  дифференциальное разрешение отдельных гармоник движения получалось значительно лучше.

По сути, предложенный метод является аналогом решения нелинейных уравнений движения с помощью теории возмущений, когда результат приближенно представляется гармоническим рядом. Как известно, такие ряды являются асимптотическими и описание свойств гамильтоновой системы с их помощью сопряжено с определенными трудностями. В частности, в случае близости к резонансу одной из гармоник, сходимость таких рядов нарушается (проблема малых знаменателей) [8]. Тем не менее, как признано, "полученные результаты можно использовать для вполне удовлетворительного описания поведения системы в некоторых областях фазового пространства" [9].

Искажение фазового пространства наиболее заметно вблизи резонансов. В нашем случае ближайшим горизонтальным резонансом является секступольный резонанс  $3\nu_x = 26$ . На рис.6 показаны фазовые траектории для бетатронной частоты справа ( $\nu_{x0} = 8.62$ ) и слева ( $\nu_{x0} = 8.69$ ) от этого резонанса. В соответствии с теорией, ориентация кривой (треугольника) в координатах  $(x, p_x)$  при переходе через резонанс меняется на противоположную, а в координатах  $(J, \phi)$  максимумы и минимумы искажения инварианта действия меняются местами.

Рис.7 демонстрирует фазовые кривые в переменных  $(J, \phi)$  при невозмущенной частоте  $\nu_{x0} = 8.619$  и изменяемой амплитуде колебаний. С увеличением амплитуды (величины возмущения), глу-

File:ud02.X -UEPP-4- 25/01/96 22:21:24 Kick SRP3 e- 3.0nA 20dB  
Comment: NIN 11 KU  
Graphs: 1-400



File:ud07.X -UEPP-4- 19/01/96 01:48:36 Kick SRP3 e- 4.7nA 20dB  
Comment: NINJ QX +.084 QZ -.046 TU9=15KU  
Graphs: 1-200

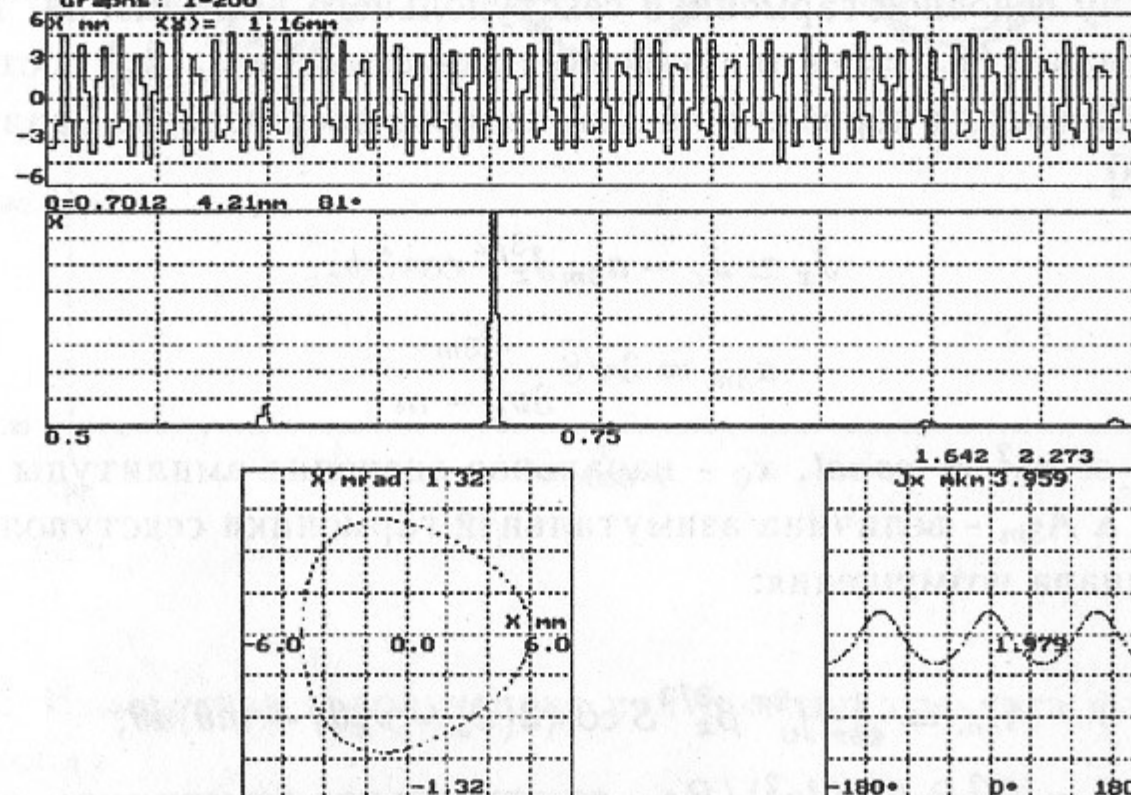


Рис. 6: Фазовое движение справа и слева от резонанса  $3\nu_x = 26$ .



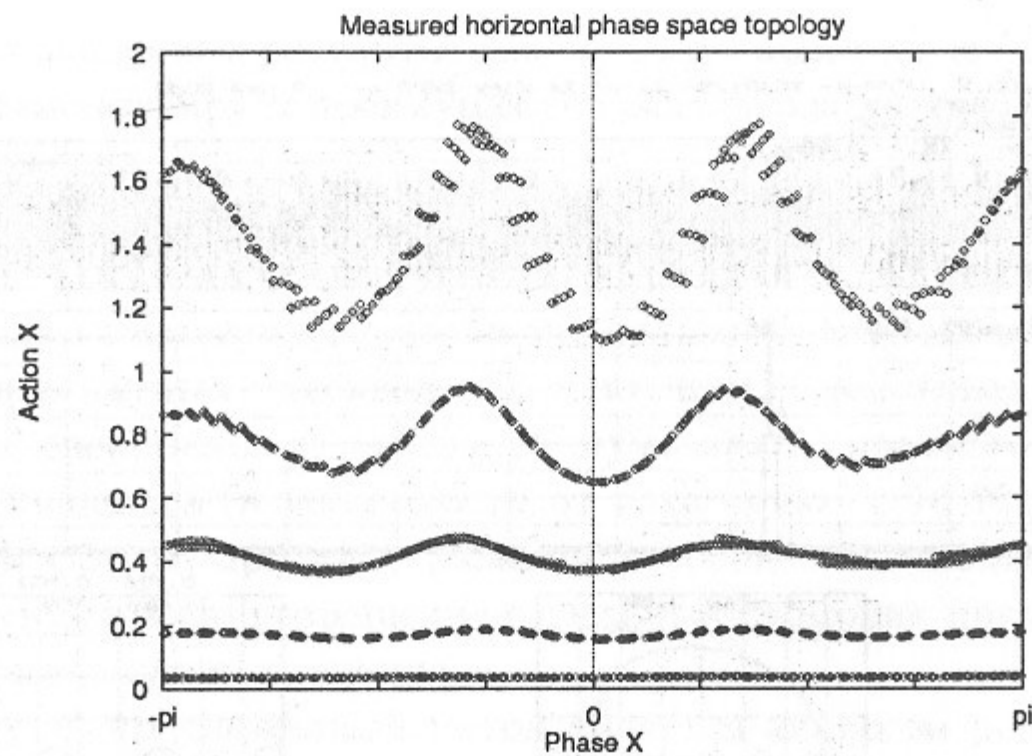


Рис. 7: Измеренное нелинейное фазовое пространство.

бина модуляции фазовой кривой увеличивается, позволяя оценить величину основной гармоники секступольного возмущения. Вблизи резонанса  $3\nu_{x0} = m$  для описания зависимости  $J_x(\phi_x)$  достаточно приближения первого порядка, которое дает неявное уравнение вида [8]

$$\bar{J}_x \simeq J_x - a_{3m} J_x^{3/2} \cos 3\phi_x, \quad (6)$$

$$a_{3m} = 3\sqrt{8} \frac{A_{3m}}{3\nu_x - m},$$

где  $\bar{J}_x \propto x_0^2 = const$ ,  $x_0$  - начальное значение амплитуды колебаний, а  $A_{3m}$  - величина азимутальной гармоники секступольного потенциала возмущения:

$$A_{3m} = \frac{1}{48\pi} \int_0^{2\pi} \beta_x^{3/2} \mathcal{S} \cos(3(\psi_x - \nu_x \theta) + m\theta) d\theta, \quad (7)$$

где  $\mathcal{S}(s) = (d^2 B_z(s)/dx^2)/B\rho$  - секступольное возмущение, а  $B\rho$  - магнитная жесткость. Зная начальное значение координаты частицы  $x_0$  в месте размещения пикапа и  $A_{3m}$ , с помощью (6) можно построить соответствующую фазовую траекторию частицы. И

наоборот, из измеренной траектории можно найти величину гармоники возмущения, которая оценивается из (6) как

$$a_{3m} \simeq (J_{max} - J_{min}) / (J_{max}^{3/2} + J_{min}^{3/2}). \quad (8)$$

Такая оценка величины гармоники была проделана при  $\nu_{x0} = 8.623$  и  $\nu_{z0} = 7.540$  ( $m = 26$ ) для различных амплитуд удара, и дала значение  $A_{326} = -3.1 \pm 1.0 \text{ м}^{-1/2}$ , при расчетной величине согласно (7)  $A_{326} = -2.0 \text{ м}^{-1/2}$ . На рис.8 приведены измеренная фазовая

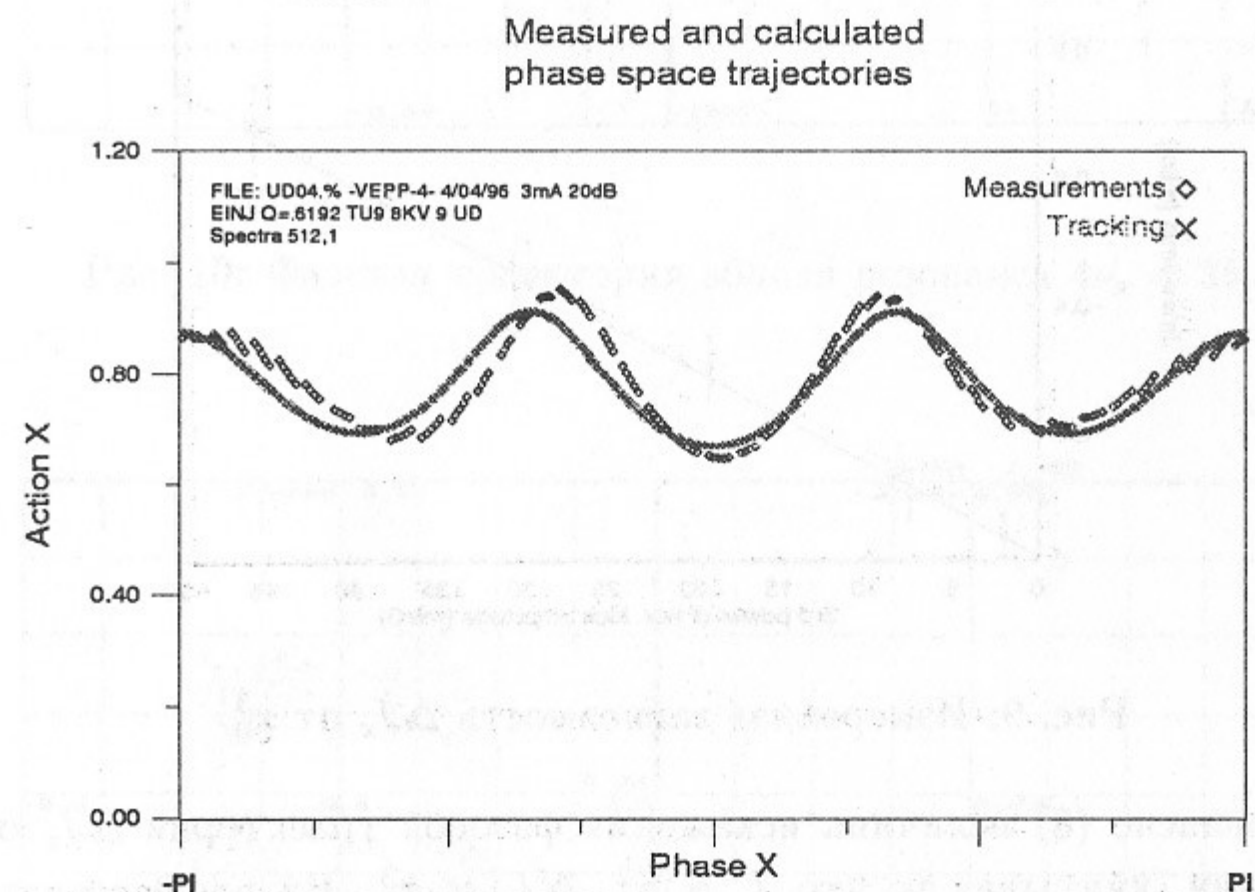


Рис. 8: Измеренная и полученная при помощи трекинга фазовая траектория.

траектория (с накоплением 9 массивов и гармоническим синтезом) и полученная численным моделированием. Совпадение можно считать весьма удовлетворительным.

Глубина модуляции переменной действия и, следовательно, величина гармоники легко управляется силой секступольных линз *SES2* и *NES2* (при этом, для компенсации хроматизма соответственно меняются токи секступольных коррекций в полукольцах). Так, уменьшение тока в обмотках этих секступольных линз в два раза приводит к уменьшению гармоники до  $A_{326} = -1.0 \text{ м}^{-1/2}$ . Однако резкое уменьшение глубины модуляции переменной действия ухудшает точность измерения главной гармоники.

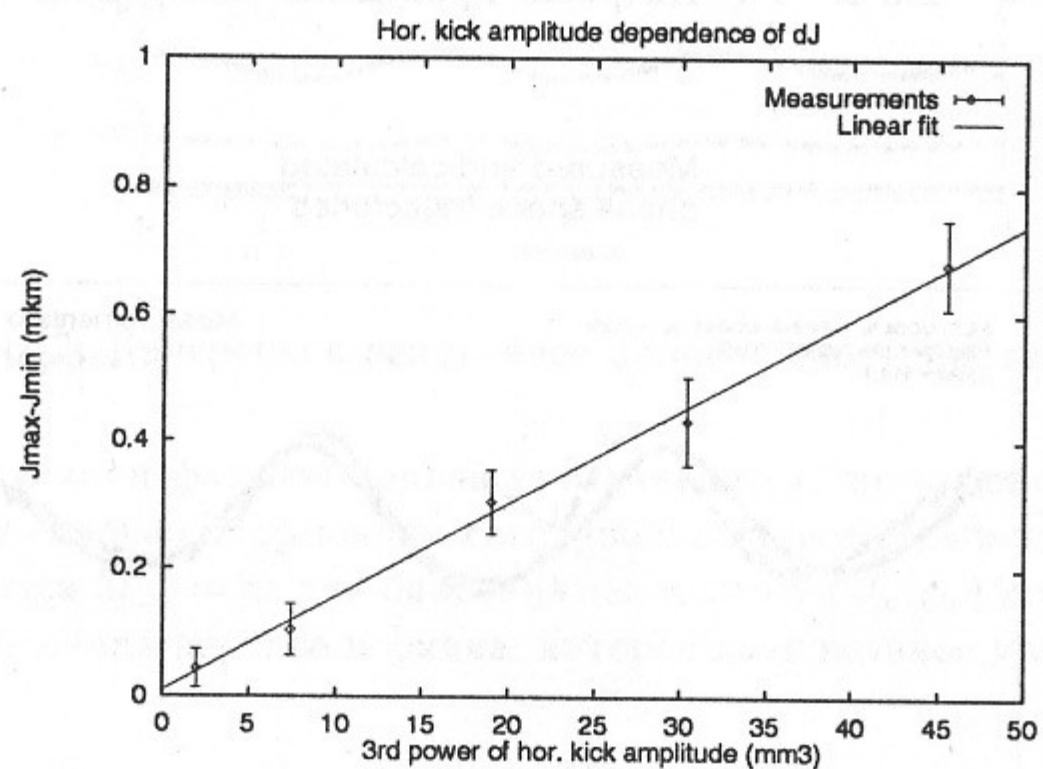


Рис. 9: Измеренная зависимость  $\Delta J_x$  от  $x_0^3$ .

Согласно (8) величина искажения фазовой траектории  $\Delta J_x \propto J_0^{3/2}$  или, учитывая то что  $J_x \propto x_0^2$ ,  $\Delta J_x \propto x_0^3$ . На рис.9 показана зависимость  $\Delta J_x$  от  $x_0^3$ , демонстрирующая хорошее согласие с приведенной выше оценкой.

Другим горизонтальным резонансом вблизи выбранной рабочей точки бетатронных частот является резонанс  $4\nu_x = 35$ . Он возбуждается либо кубической нелинейностью магнитного поля (октупольной составляющей), либо, во втором порядке, секступольным возмущением. Чувствительность метода измерений позволила зафиксировать его влияние на топологию фазового пространства. На

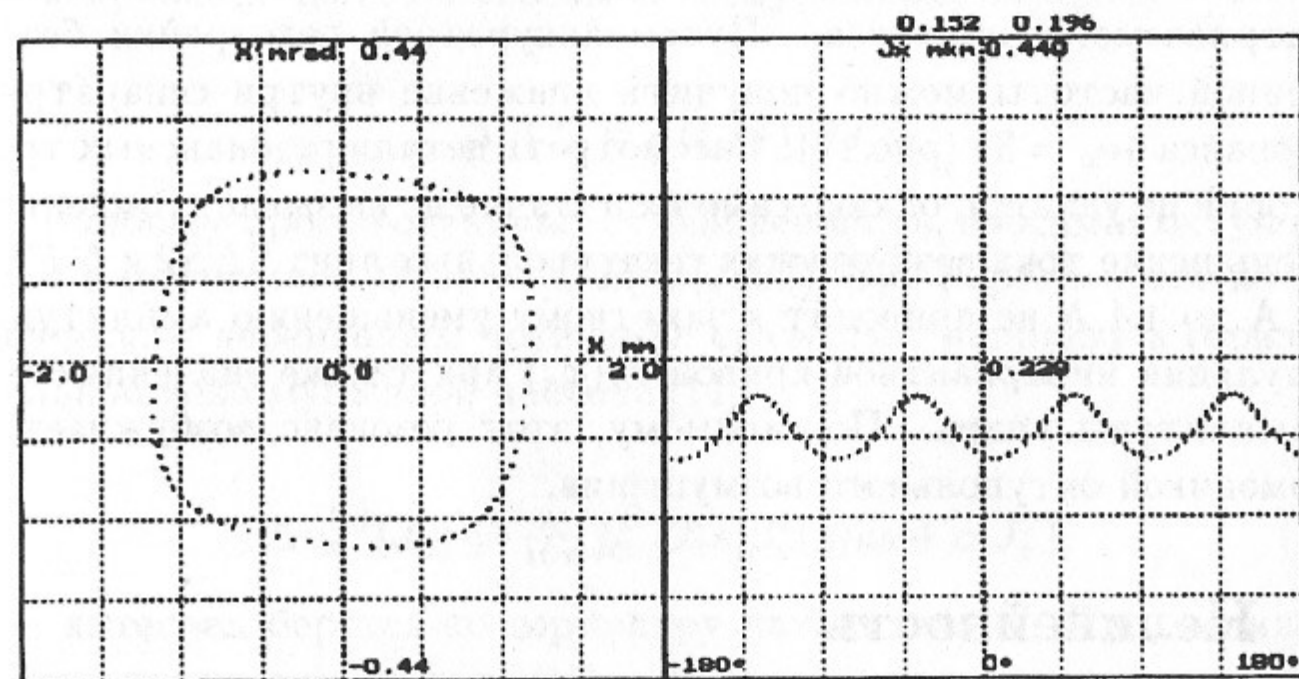


Рис. 10: Фазовая траектория вблизи резонанса  $4\nu_x = 35$ .

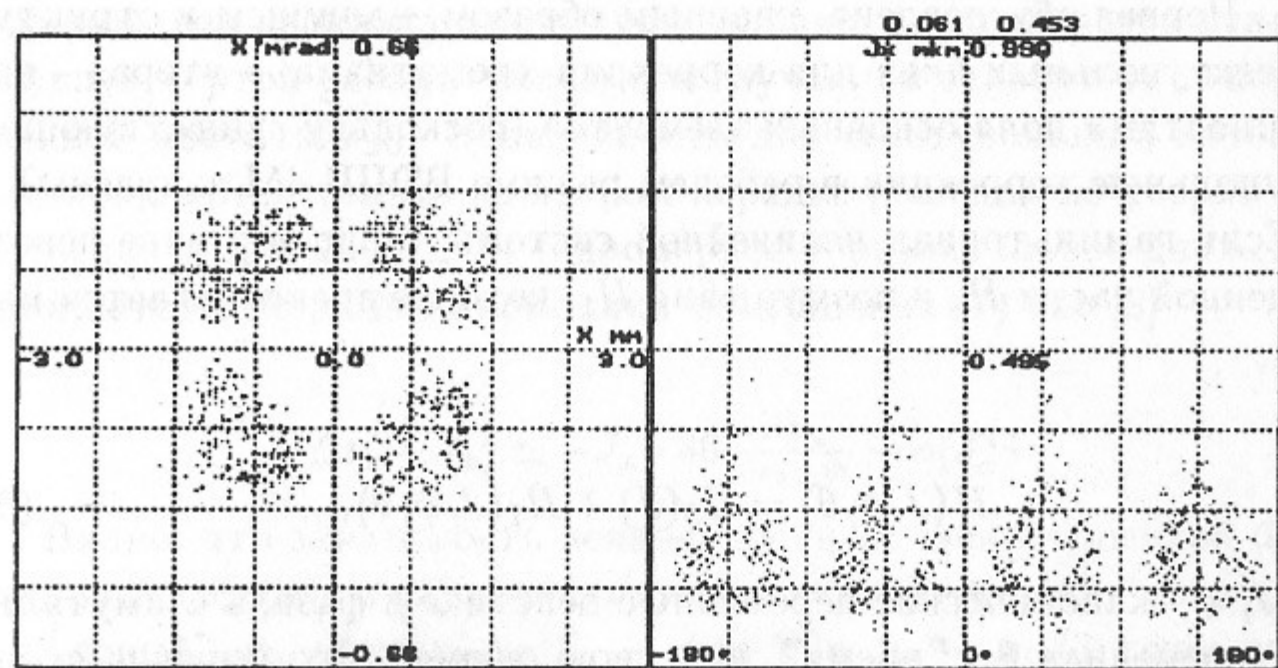


Рис. 11: Фазовая траектория пучка на резонансе  $4\nu_x = 35$ . Рисунок сделан без использования гармонического синтеза.

рис.10 показаны характерные инвариантные кривые вблизи рассматриваемого резонанса. Путем аккуратной подстройки бетатронной частоты можно получить движение внутри сепаратрис резонанса  $4\nu_x = 35$  (рис.11). Рассмотреть детали резонансных траекторий не удастся, однако само их наличие не вызывает сомнений. Уменьшение тока возбуждения секступольных линз *SES2* и *NES2* с 8 А до 4.4 А не приводит к заметному уменьшению амплитуды модуляции инвариантной кривой  $J_x(\phi_x)$  при тех же значениях  $\nu_{x0}$  и амплитуды удара. По-видимому, этот резонанс возбуждается гармоникой октупольного возмущения.

#### 4 Нелинейность

Нелинейность, т.е., зависимость частоты бетатронных колебаний от амплитуды, является важной характеристикой возмущенной гамильтоновой системы. Основными источниками нелинейности в ускорителе заряженных частиц следует ожидать мультипольные компоненты поля низших порядков: секступольную и октупольную. Первая обусловлена, главным образом, наличием в структуре секступольных линз для коррекции хроматизма, а вторая - погрешностями поля основных элементов (поскольку существующие октупольные коррекции в рабочем режиме ВЭПП-4М занулены).

Если гамильтониан нелинейной системы записан в виде невозмущенной части  $H_0$  и возмущения  $H_1$ , которое предполагается малым,

$$H(J, \phi, \theta) = H_0(J) + H_1(J, \phi, \theta), \quad (9)$$

где  $J, \phi$  - канонические переменные действие и фаза, а азимутальная переменная  $\theta$  - "время", и, в свою очередь, возмущение представимо в виде суммы двух слагаемых, постоянного и переменного по циклическим переменным:

$$H_1(J, \phi, \theta) = \bar{H}_1(J) + \tilde{H}_1(J, \phi, \theta), \quad (10)$$

то поправка к частоте, вносимая возмущением, определяется как

$$\Delta\nu(J) = d\bar{H}_1(J)/dJ, \quad (11)$$

Наиболее просто оценивается нелинейность, вносимая октупольным возмущением  $O(s) = (d^3B_z(s)/dx^3)/B\rho$ . Усредненный по циклическим переменным потенциал сразу дает поправку к горизонтальной невозмущенной частоте [11]:

$$\Delta\nu_x^{(o)}(J_x) = \frac{J_x}{16\pi} \int_0^C O(s)\beta_x^2(s)ds + o(J_x^2), \quad (12)$$

где интеграл берется по периметру накопителя  $C$ . Т.е., нелинейность, вносимая октупольной компонентой поля, определяется нулевой азимутальной гармоникой разложения Фурье соответствующего потенциала, пропорциональна квадрату амплитуды колебаний ( $J_x \propto a_x^2$ ) и не зависит от невозмущенной бетатронной частоты.

Для секступольного возмущения  $S(s)$  сдвиг частоты также пропорционален квадрату амплитуды, однако, и это является отличительной чертой рассматриваемого случая, он зависит от невозмущенной частоты  $\nu_{x0}$ . Нелинейность для секступольного потенциала появляется только во втором порядке решения по теории возмущения и для  $3\nu_{x0} \simeq m$  (одномерное горизонтальное движение) запишется с помощью гармоники возмущения (7) как [8]

$$\Delta\nu_x^{(s)}(J_x) \simeq -J_x \cdot 36 \frac{A_{3m}^2}{3\nu_x - m} + o(J_x^2). \quad (13)$$

Видно, что зависимость нелинейности от невозмущенной бетатронной частоты в случае секступольного возмущения носит "резонансный" характер:  $\Delta\nu^{(s)} \rightarrow \pm\infty$  при  $\nu_x \rightarrow m/3$ ; знак выбирается в зависимости от того, слева или справа мы подходим к резонансу.

Нелинейность движения частиц в накопителе ВЭПП-4М изучалась при помощи импульсного возбуждения когерентных колебаний пучка и регистрации их пооборотно на пикапе *SRP3*. Для

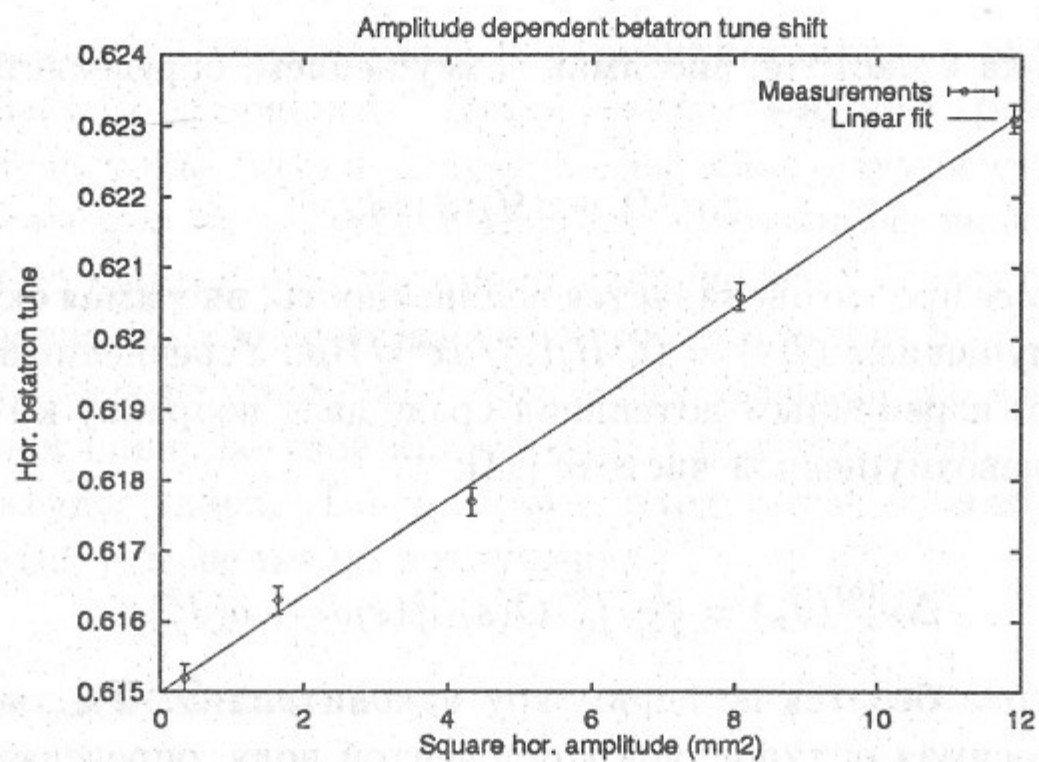


Рис. 12: Характерная зависимость частоты колебаний от амплитуды удара.

различных значений напряжения на пластинах кикера частота бетатронных колебаний вычислялась по массиву 1024 значений координат, в то время, как координата центра тяжести пучка  $a_x$ ,  $a_z$  определялась по первым 30 оборотам, чтобы избежать влияния затухания. Точность измерения бетатронной частоты была на уровне  $\delta\nu \sim 2 \times 10^{-4}$ . Зависимость  $\Delta\nu_x(a_x^2)$ , приведенная на рис.12 позволяет определить невозмущенную частоту  $\nu_{x0}$  и нелинейность  $d\nu_x/da_x^2$ . Разброс измеренных значений ( $\delta X/X_0 \simeq 7\%$ ) определялся стабильностью удара кикера.

Предварительно была измерена зависимость частоты бетатронных колебаний от тока пучка, ее величина для ВЭПП-4М равна  $\Delta\nu_x = -3 \times 10^{-4} \text{ мА}^{-1}$ ;  $\Delta\nu_z = -1.3 \times 10^{-3} \text{ мА}^{-1}$ . При изучении нелинейности эти значения учитывались как поправка к частоте при изменении тока (особенно для вертикального движения), однако, как правило, в одной серии измерений ток пучка менялся на достаточно небольшую величину (не более 0.3 мА).

Выражения для зависимости частоты колебаний от амплитуды,

обобщенные на случай двумерного движения и для октупольного, и для секступольного возмущения (с точностью до второго порядка малости) имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta\nu_x(a_x, a_z) &= C_{11}a_x^2 + C_{12}a_z^2, \\ \Delta\nu_z(a_x, a_z) &= C_{21}a_x^2 + C_{22}a_z^2, \end{aligned} \quad (14)$$

где коэффициенты  $C_{nm}$  зависят от соответствующего потенциала возмущения. Выражение для  $C_{11}$  для октупольного и секступольного возмущения находятся из (12) и (13) при помощи перехода  $J_x \rightarrow a_x^2$ . Аналогичные выражения могут быть получены для остальных коэффициентов. Т.к. нам известно квадратичное возмущение магнитного поля ВЭПП-4М (согласно исследованию фазовых траекторий, определяющими в нем являются секступольные линзы места встречи), мы можем оценить соответствующий вклад в нелинейность бетатронной частоты либо аналитически, либо численным моделированием. В таблице 3 приведены измеренные значения коэффициентов  $C_{nm}$  (куда входит и октупольная и секступольная составляющие) и рассчитанные для секступольного потенциала численным моделированием.

Таблица 3: Коэффициенты нелинейности для ВЭПП-4М

$C_{nm} \times 10^4$	Расчет	Измерения
$C_{11}, \text{ мм}^{-2}$	0.1	9.0
$C_{12}, \text{ мм}^{-2}$	-0.6	-1.0
$C_{21}, \text{ мм}^{-2}$	-1.9	-4.0
$C_{22}, \text{ мм}^{-2}$	-0.6	-1.0

Азимутальное распределение октупольного потенциала нам неизвестно, поэтому мы не можем сделать такие же оценки, как в предыдущем случае. Однако, пользуясь тем, что секступольная составляющая зависит от  $\nu_{x0}$ , можно попытаться разделить оба

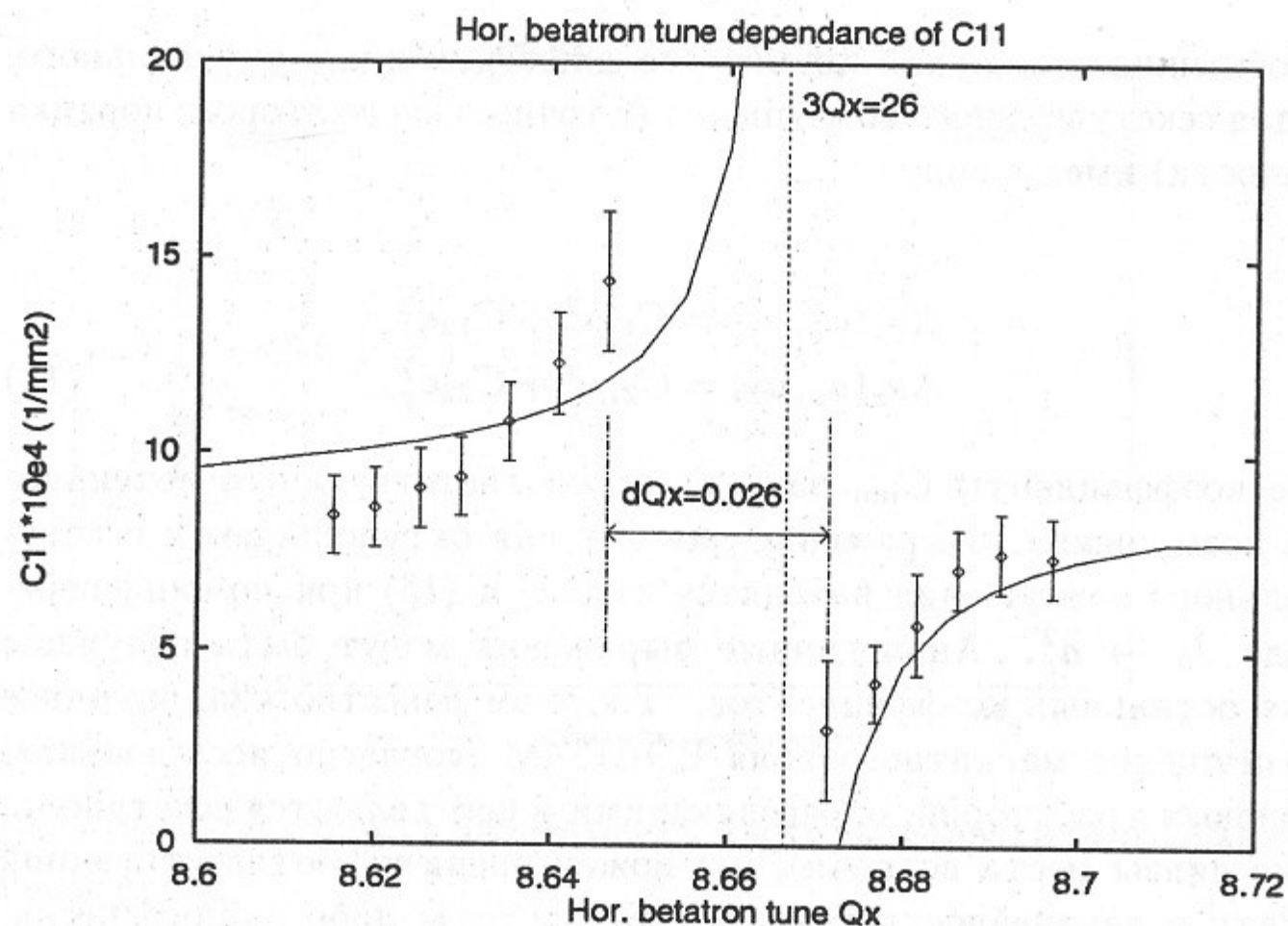


Рис. 13: Измеренная зависимость нелинейности  $d\nu_x/da_x^2$  от рабочей точки. Сплошной линией изображено расчетное поведение нелинейности для секступольного потенциала, смещенное на  $8 \cdot 10^{-4} \text{ мм}^{-2}$  вверх.

слагаемых. К необходимости более подробного изучения нелинейности приводит и серьезное различие между измеренным и расчетным значением  $C_{11}$ .

На рис.13 показана зависимость горизонтальной нелинейности от положения исходной рабочей точки. Чтобы добиться совпадения с расчетной кривой, приведенной здесь же, последнюю нужно сместить относительно нуля на величину  $\approx 8 \times 10^{-4} \text{ мм}^{-2}$ . Смещение, которое можно трактовать как октупольный вклад, не зависит от невозмущенной частоты  $\nu_{x0}$ . Снижение тока секступольных линз места встречи  $SES2$  и  $NES2$  приблизительно в два раза (при компенсации хроматизма коррекциями в полукольцах) приводит, что уже отмечалось ранее, к уменьшению гармоника

$A_{326}$  и, соответственно, секступольной составляющей сдвига частоты, как показано на рис.14. Кроме того, при этом уменьшается и ширина резонанса  $3\nu_x = 26$ , которая определялась как разница значений бетатронных частот (справа и слева от резонанса), при которых время жизни пучка падает до  $\tau = 300 - 400$  сек из-за уменьшения области устойчивого движения частиц  $\sim 5\sigma_x$ . Определенная таким образом ширина запрещенной зоны в исходном режиме  $\Delta_n u_x \approx 0.026$ , а в "слабом" -  $\Delta_n u_x \approx 0.015$ .

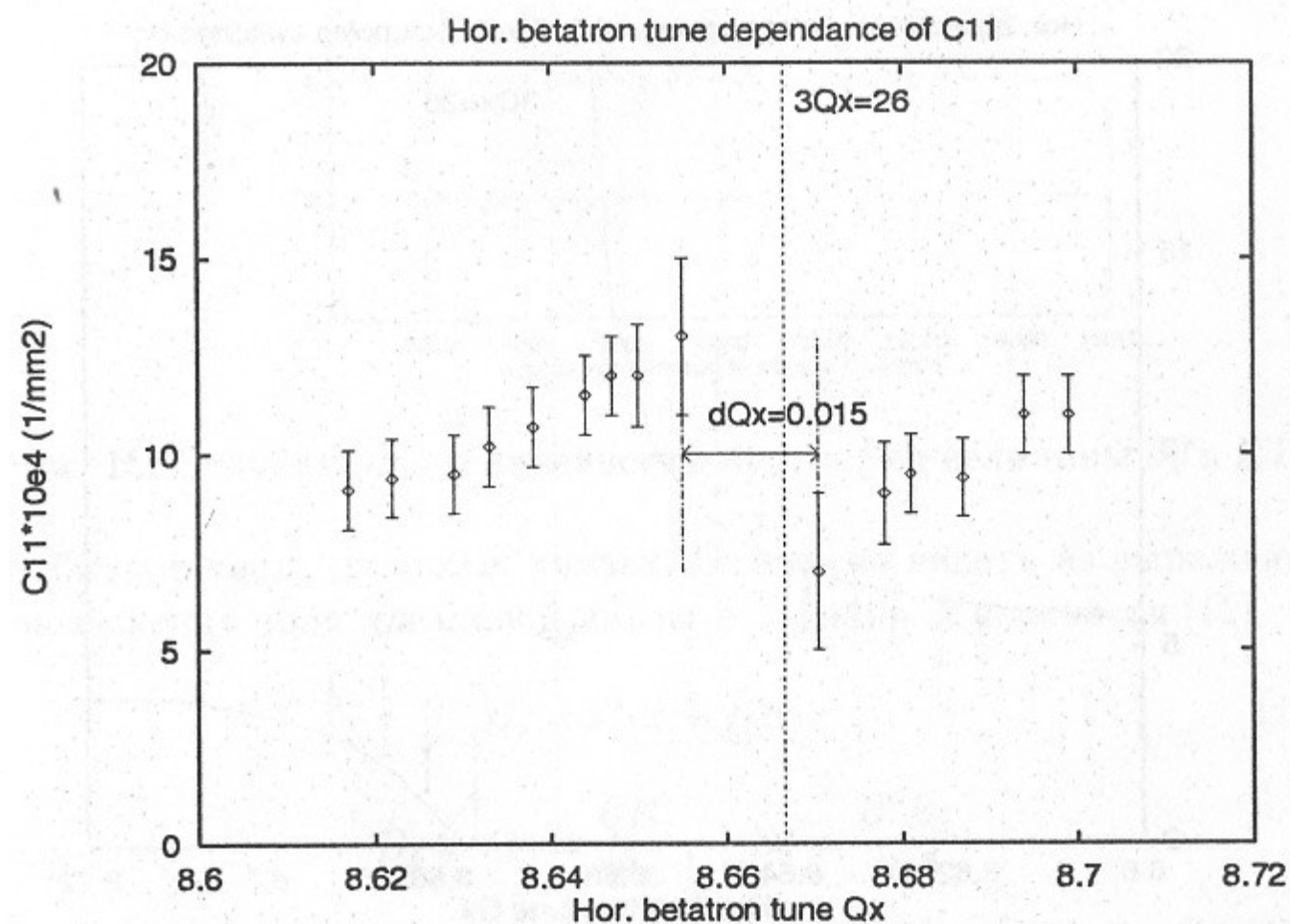


Рис. 14: Измеренная зависимость нелинейности  $d\nu_x/da_x^2$  от рабочей точки при уменьшенном токе возбуждения секступольных линз  $SES2$  и  $NES2$ . Видно уменьшение ширины резонанса  $3\nu_x = 26$  по сравнению с предыдущим рисунком.

С другой стороны, введение октупольной коррекции  $SRO = NRO = -0.5 \text{ А}$  (ранее зануленной), напротив, приводит к уменьшению октупольной составляющей, не меняя секступольного характера зависимости от невозмущенной частоты  $\nu_{x0}$  (рис.15).

К сожалению, трудно выявить конкретный источник октупольной нелинейности, которая может определяться краевыми полями квадрупольных линз, погрешностями их изготовления, или смещением в них замкнутой орбиты. Как было показано в [10], краевые поля квадрупольных линз (особенно линз финального фокуса) могут быть источником достаточно сильной кубической нелинейности. Однако, оцененный нами коэффициент  $C_{11}$  из-за краев линз ВЭПП-4М оказался на порядок меньше измеренного.

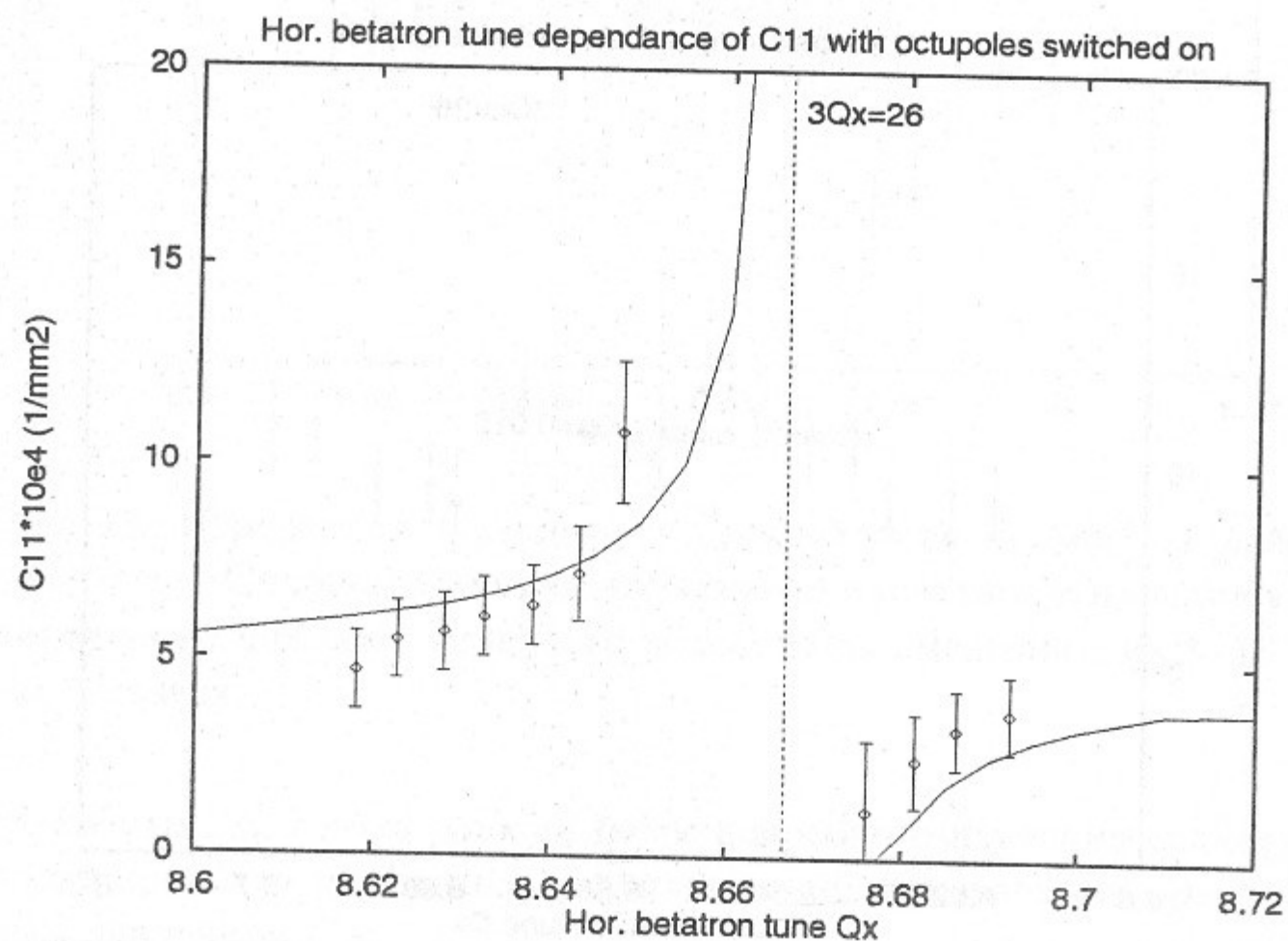


Рис. 15: Измеренная зависимость нелинейности  $dv_x/da_x^2$  от рабочей точки при включенных октуполях. Сплошной линией изображено расчетное поведение нелинейности для секступольного потенциала, смещенное на  $4 \cdot 10^{-3} \text{ мм}^{-2}$  вверх.

Предполагая, что значительный вклад в октупольную компоненту нелинейности должны вносить линзы финального фокуса  $EL1$  и  $EL2$ , мы измерили зависимость  $C_{11}$  от величины бета-функции в этих линзах. В соответствии с (12) эта зависимость

носит квадратичный характер (рис.16). Кроме того, октупольная составляющая  $dv_x/da_x^2$  должна зависеть от искажения замкнутой

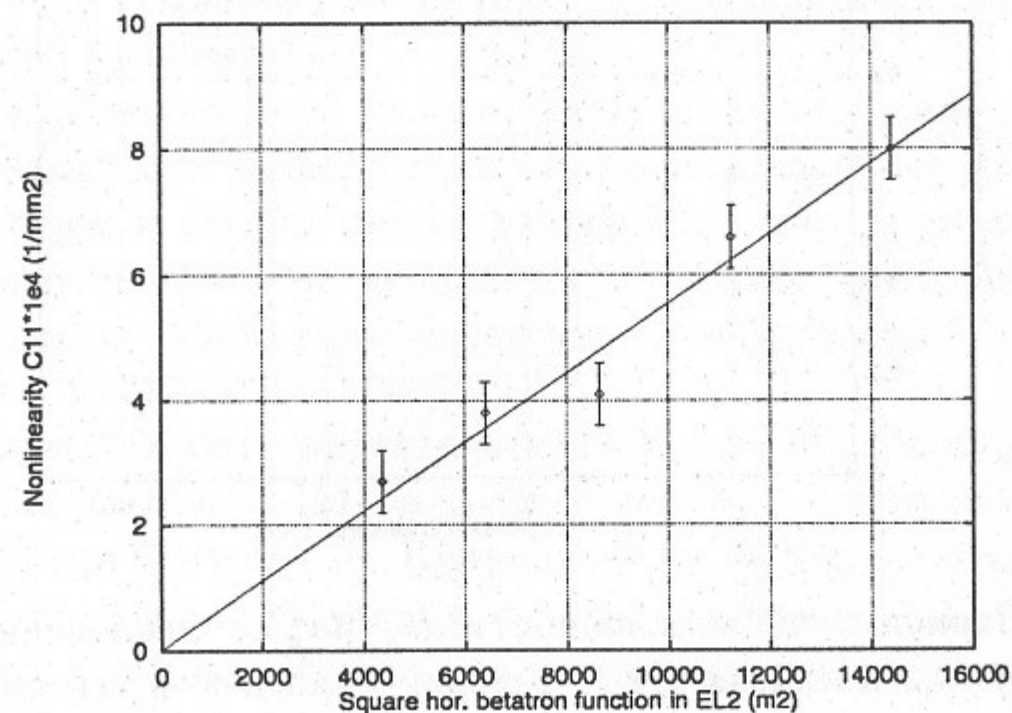


Рис. 16: Зависимость нелинейности  $dv_x/da_x^2$  от величины  $\beta_x$  в  $EL2$ .

орбиты в квадрупольных линзах. Это легко видеть из выражения разложения поля идеальной линзы в медианной плоскости [12]

$$B_z = B_1 x + \frac{1}{5!} B_5 x^5, \quad (15)$$

$$B_1 = G_0 = \frac{\partial B_z}{\partial x}, \quad B_5 = \frac{\partial^5 B_z}{\partial x^5}.$$

Вводя в рассмотрение искажение замкнутой орбиты  $x_{co}$  и проводя разложение поля на этой новой орбите, можно получить зависимость октупольной компоненты от величины смещения замкнутой орбиты:

$$O \propto B_5 x_{co}^2. \quad (16)$$

Действительно, измеренная нелинейность, как функция величины локального смещения орбиты  $x_{co}$  в линзах  $EL1$  и  $EL2$  (рис.17), имеет характерный вид параболы.

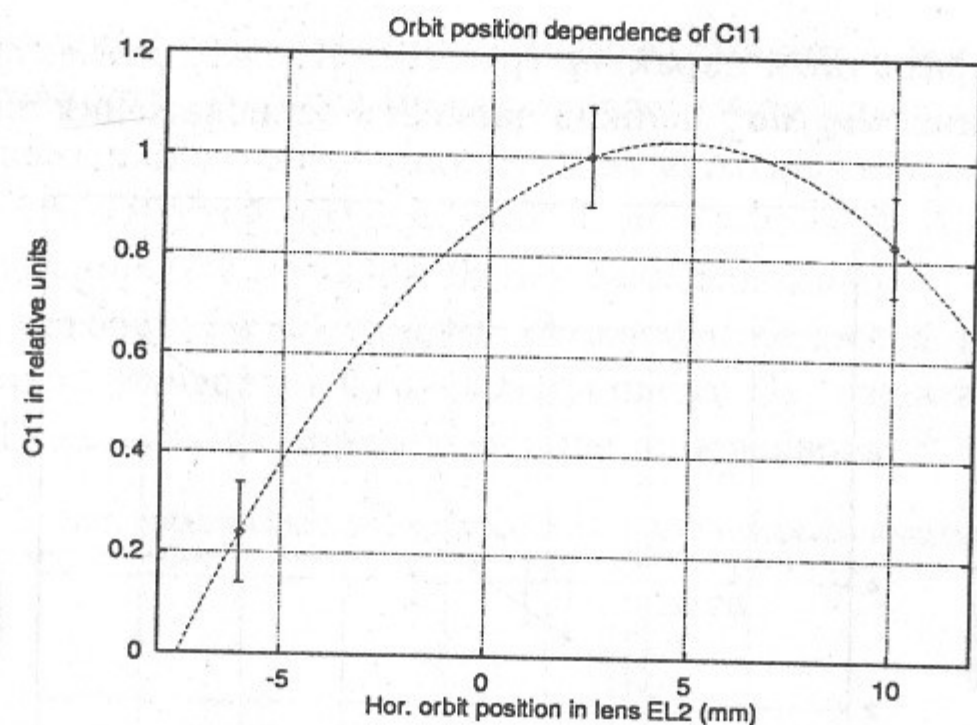


Рис. 17: Зависимость нелинейности  $d\nu_x/da_x^2$  от отклонения равновесной орбиты в линзах  $EL2$ . График приведен в относительных единицах, за единицу принят исходный режим.

## 5 Выводы и заключения

На накопителе ВЭПП-4М было проведено изучение некоторых аспектов нелинейной динамики: искажения фазовых траекторий и зависимости частоты бетатронных колебаний от амплитуды. Изучение проводилось при помощи возбуждения когерентных колебаний пучка быстрой импульсной раскачкой и их регистрации системой поворотных измерений. Данная техника является экспериментальным аналогом трекинга, широко используемого для изучения одночастичной нелинейной динамики, позволяя проверять измеренные результаты численным моделированием или аналитическими оценками. Последние показывают достаточно хорошее совпадение с результатами измерений.

Реализованный метод гармонического синтеза фазовых траекторий на основе измерений одного пикапа позволяет не только изучать топологию фазового пространства, но и, благодаря высокой чувствительности, проводить численные оценки нелинейных ха-

рактеристик системы на основе экспериментальных результатов. Проведенные измерения позволили разделить вклад октупольной и секступольной компонент магнитного поля в зависимость частоты бетатронных колебаний от амплитуды.

Мы предполагаем, что следующий этап исследования нелинейных эффектов на ВЭПП-4М будет включать изучение динамической апертуры и увеличение ее размеров за счет подавления ведущих азимутальных секступольных гармоник. На возможность этого указывает показанное выше уменьшение ширины (мощности) резонанса  $3\nu_x = 26$ .

Авторы выражают признательность И.Я.Протопопову, начальнику комплекса ВЭПП-4М, за предоставленную возможность проведения экспериментов, Г.Н. Кулипанову, В.Н. Корчуганову и В.Е. Якименко за чтение рукописи и ценные замечания, А.С. Калинину за многочисленные обсуждения метода гармонического синтеза фазовых траекторий, Н.А. Винокурову за полезные дискуссии по кинематическим эффектам, возникающим при возбуждении когерентных бетатронных колебаний.

## Литература

- [1] И.Я.Протопопов. Частное сообщение.
- [2] В.В.Анашин и др. Состояние работ на накопителе ВЭПП-4М. Труды XIII Совещания по ускорителям заряженных частиц, т.1, с.369, Дубна 1993.
- [3] P.L.Morton et al. A diagnostic for dynamic aperture.- SLAC-PUB-3627, April 1985.
- [4] E.Courant and H.Snyder, Ann.of Phys., 3, 1-48 (1958).
- [5] A.Ando. Distortion of beam emittance with nonlinear magnetic fields. Particle Accelerator 15 (1984), p.177.
- [6] А.С.Калинин, Е.А.Симонов, В.В.Смалюк, Д.И.Шатилов. Компьютерное управление и обработка данных в системе диа-

гностики пучков на комплексе ВЭПП-4. Труды XIV Сопещания по ускорителям заряженных частиц, Протвино, 1994.

- [7] А.М.Батраков и др. Принципы построения и метрологического обеспечения цифровых регистраторов формы импульса сигналов.- Автометрия, 1986, N4, с.50-63.
- [8] Е.Б.Левичев, В.В.Сажаев. Приближение потенциала секступольного возмущения малым числом азимутальных гармоник. Препринт ИЯФ 95-58, 1995.
- [9] А.Лихтенберг и М.Либерман. Регулярная и стохастическая динамика. М., "Мир", 1984, с.90.
- [10] E.Forest et al. Sources of amplitude-dependent tune shift in the PEP-II design and their compensation with octupoles. Proc.of EPAC'94, London, 1994, v.2, pp.1033-1035.
- [11] R.A.Bech, R.Belbeoch and G.Gendreau. Shifts in Betatron Frequencies Due to Energy Spread, Betatron Amplitudes and Closed Orbit Excursions. Proc. of the Conf. on High-Energy Accelerators, Cambridge (1967), A-63.
- [12] К.Штеффен. Оптика пучков высоких энергий. "Мир", М., 1969.

*В.А. Киселев, Е.Б. Левичев,  
В.В. Сажаев, В.В. Смалюк*

**Экспериментальное изучение нелинейной  
динамики на накопителе ВЭПП-4М**

*V. Kiselev, E. Levichev,  
V. Sajaev, V. Smaluk*

**Nonlinear beam dynamics study at VEPP-4M**

ИЯФ 96-69

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев  
Работа поступила 2.10.1996 г.

---

Сдано в набор 11.10.1996 г.

Подписано в печать 11.10.1996 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1.7 печ.л., 1.4 уч.-изд.л.

Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ N° 69

---

Обработано на IBM PC и отпечатано на  
ротапринте ГНЦ РФ "ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН",  
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.