

В 36

1996

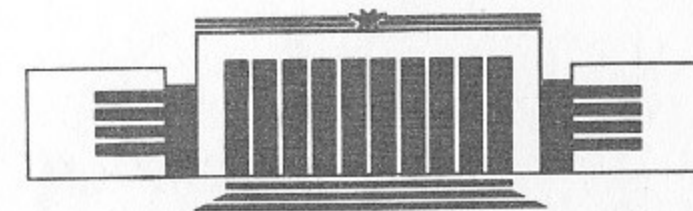
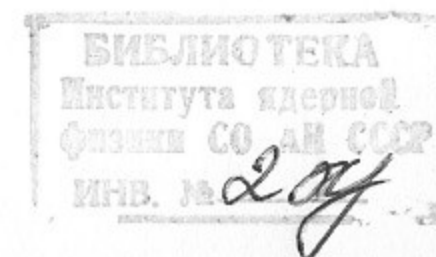


Государственный научный центр  
Российской Федерации  
Институт ядерной физики  
им. Г.И. Будкера

В.В. Вечеславов

ФОРМИРОВАНИЕ ХАОТИЧЕСКОГО СЛОЯ  
НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСА  
ДВУХЧАСТОТНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

ИЯФ 96-24



НОВОСИБИРСК

# Формирование хаотического слоя нелинейного резонанса двухчастотным возмущением

*В.В. Вечеславов*

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН  
630090 Новосибирск, Россия

## Аннотация

На примере маятника с двухчастотным возмущением детально обсуждается описанный в работе [3] новый эффект — появление низкочастотных вторичных гармоник в сепаратрисном отображении системы. Отыскиваются области параметров возмущения, где именно эти гармоники дают основной вклад в формирование хаотического слоя основного резонанса. Приводятся результаты сравнения аналитического и численного методов определения амплитуд вторичных гармоник.

*V.V. Vecheslavov*

## Chaotic layer of a nonlinear resonance driven by two-frequencies perturbation

Budker Institute of Nuclear Physics SB RAS  
630090 Novosibirsk, Russia

## Abstract

Dynamics of the pendulum driven by two different high-frequencies is considered. New phenomenon of the appearance of low frequency secondary harmonics in the separatrix map of the system recently discovered in [3], is studied in details. Regions of perturbation parameters are found where the secondary harmonics give the main contribution in the formation of a chaotic layer near the separatrix.

e-mail: vecheslavov@inp.nsk.su

© Институт ядерной физики  
им. Г.И. Будкера СО РАН, Россия

Многие проблемы взаимодействия нелинейных резонансов и образования динамического хаоса в гамильтоновых системах приводят к необходимости исследования модели, которую можно интерпретировать как маятник (основной резонанс, вблизи которого выбираются начальные состояния системы), подверженный действию квазипериодического в общем случае возмущения [1,2,3]:

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2} + \cos x + V(x, t), \quad (1)$$

$$V(x, t) = \varepsilon_n \cos(a_n x - \Omega_n t), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

здесь  $N$  — полное число возмущающих резонансов и предполагается суммирование по индексу  $n$ . Амплитуды гармоник возмущения  $V(x, t)$  будем считать малыми  $\varepsilon_n \ll 1$ , а частоты (по отношению к принятой за единицу частоте малых колебаний маятника) высокими  $\Omega_n \gg 1$ .

Известно, что под влиянием возмущения сепаратриса основного резонанса разрушается и на ее месте образуется неустойчивая область, получившая название хаотического слоя [4]. Полный размер этой области является весьма важной для приложений характеристикой динамического хаоса [1,2]. Отметим, в частности, что скорость развития универсальной неустойчивости движения в многомерных гамильтоновых системах — диффузия Арнольда — опреде-



ляется квадратом ширины хаотического слоя ведущего резонанса [5].

Прямое измерение этой ширины может быть выполнено двумя способами. Первый – численное интегрирование уравнений движения системы, находящейся внутри исследуемой части (вращения или колебание фазы) хаотического слоя и отыскание минимального периода движения  $T_{min}$  (период движения  $T$  есть интервал времени между соседними моментами  $t_\pi$  прохождения устойчивой фазы  $x = \pi$ ; это либо период вращения, либо полупериод колебания). Ширина слоя определяется затем по соотношению  $w_s(T_{min}) = 32 \exp(-T_{min})$  [1]; здесь и далее  $w = (p^2/2 + \cos x - 1)$  – безразмерное отклонение от невозмущенной сепаратрисы по энергии.

Второй способ – численный или теоретический анализ отвечающего за формирование слоя так называемого “сепаратрисного отображения”. Это отображение, введенное в работе [4], приближенно описывает динамическое состояние движущейся вблизи сепаратрисы основного резонанса системы в моменты прохождения ею положения устойчивого равновесия и для многочастотного ( $N > 1$ ) возмущения (2) может быть записано в виде [1]:

$$\bar{w} = w + W_l \sin(\Omega_l t_\pi), \quad \bar{t}_\pi = t_\pi + \ln \frac{32}{|\bar{w}|}, \quad l = 1, 2, \dots, L, \quad (3)$$

где  $t_\pi$  – моменты прохождения системой положения устойчивого равновесия  $x = \pi$ ,  $L$  – полное число гармоник и предполагается суммирование по индексу  $l$ . Ширина слоя  $w_s \approx w_{max}$  определяется максимальным отклонением от невозмущенной сепаратрисы по энергии в процессе итераций отображения (3).

Этот способ приводит к желаемому результату значительно (как правило, в сотни раз) быстрее по сравнению с вычислением периодов движения, но для его реализации необходимо уметь вычислять амплитуды всех существенных гармоник сепаратрисного отображения квазипериодической гамильтоновой системы. На этом пути возникли неожиданные трудности: оказалось (подробности в [3]), что для многочастотного ( $N > 1$ ) возмущения (2)

механизм формирования хаотического слоя качественно отличается от хорошо изученного к настоящему времени механизма для случая одной частоты [1].

Численные эксперименты показали, что в спектре отображения (3) в общем случае присутствуют не только все первичные (явно содержащиеся в гамильтониане  $H(x, p, t)$ ) частоты, но и их комбинации и всегда имеет место неравенство  $L > N$  [3]. Гармоники различных комбинационных частот появляются во всех порядках по малому параметру возмущения, начиная со второго. Однако, величины некоторых формально присутствующих в (3) слагаемых могут быть пренебрежимо малы и поэтому на практике, как правило, число существенных гармоник сепаратрисного отображения оказывается невелико.

С вычислением вкладов в сепаратрисное отображение (3) от первичных возмущений (2) проблем не возникает поскольку их амплитуды  $\varepsilon_n$  и частоты  $\Omega_n$  заданы. Напомним, что возмущение вида

$$V(x, t) = \varepsilon \cos(mx/2 - \Omega t), \quad (4)$$

( $m$  – параметр) порождает в сепаратрисном отображении (3) гармонику той же частоты  $\Omega$  с амплитудой

$$W_{MA}(\Omega > 0) = \varepsilon \Omega A_m(\Omega),$$

$$W_{MA}(\Omega < 0) = W_{MA}(|\Omega|)(-1)^m e^{-\pi|\Omega|}, \quad (5)$$

где  $A_m(\Omega)$  интеграл Мельникова-Арнольда [1]. Формула (5) справедлива для любых, в том числе и меньших единицы значений частоты  $|\Omega|$ . Если возмущение не содержит других частот, то теоретическая ширина хаотического слоя определяется простым соотношением:

$$w_{st} \approx \Omega |W_{MA}(\Omega)| \left(1 + \frac{4\xi}{\Omega}\right), \quad (6)$$

где параметр  $0 \leq \xi \leq 1$  зависит от конкретных условий перекрытия резонансов на краю слоя (в частности, от величины амплитуды  $|W_{MA}(\Omega)|$ ) [1]. Из формулы (6) следует, что ее практическое



применение ограничено дополнительным условием  $|\Omega| \gg 1$  и мы будем использовать ее в основном для оценок по порядку величины, принимая  $\xi = 0.5$ .

Положение с комбинационными гармониками возмущения осложняется тем, что их амплитуды заранее неизвестны. Вместе с тем, из-за экспоненциальной зависимости от частоты даже очень слабые, но низкочастотные комбинационные возмущения могут играть в образовании динамического хаоса главную роль и фактически полностью определять формирование хаотического слоя (см. ниже). Строгая теория здесь пока отсутствует, однако общий подход к проблеме и приближенные аналитические соотношения для определения амплитуд вторичных (возникающих во втором порядке) комбинационных гармоник предложены недавно в работе [3]. Ниже приводятся результаты численной проверки этих соотношений и следствий из них, а также показывается их важность для построения сепаратрисных отображений и отыскания размеров хаотических областей многочастотных гамильтоновых систем. В настоящей работе мы ограничимся самым простым нетривиальным случаем двухчастотного возмущения, рассмотрение которого выявляет основные характерные для проблемы в целом черты. Подробное изучение взаимодействия с тремя различными частотами будет проведено отдельно (один из примеров такого рода имеется в [3]).

Допустим, что возмущение системы (1) содержит две высокочастотные первичные гармоники

$$V(x, t) = \varepsilon_1 \cos(x - \Omega_1 t) + \varepsilon_2 \cos(x - \Omega_2 t) \quad (7)$$

и введем обозначения:

$$\Delta\Omega_+ = \Omega_1 + \Omega_2 \quad \Delta\Omega_- = \Omega_2 - \Omega_1$$

. Из результатов работы [3] следует, что в возмущении появятся вторичные гармоники с частотами  $\Delta\Omega_+$ ,  $\Delta\Omega_-$  и мы рассмотрим каждую из них в предположении, что система движется в верхней ( $p > 0$ ) части хаотического слоя в режиме вращения фазы.

Вторичная гармоника возмущения на сумме частот имеет вид:

$$\varepsilon_+ \cos(2x - \Delta\Omega_+ t), \quad \varepsilon_+ = -\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{2} \left[ \frac{1}{\Omega_1^2} + \frac{1}{\Omega_2^2} \right]. \quad (8)$$

Она порождает в сепаратрисном отображении (3) гармонику той же частоты с амплитудой (5):

$$W_+(\Delta\Omega_+ > 0) = \frac{4\pi}{3} a_+ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left[ \frac{1}{\Omega_1^2} + \frac{1}{\Omega_2^2} \right] \frac{e^{\pi\Delta\Omega_+/2}}{\text{sh}(\pi\Delta\Omega_+)} \Delta\Omega_+^2 (\Delta\Omega_+^2 - 2), \quad (9)$$

$$W_+(\Delta\Omega_+ < 0) = W_+(|\Delta\Omega_+|) e^{-\pi|\Delta\Omega_+|}$$

Учитывая приближенный характер этой формулы, мы ввели в нее дополнительный множитель  $a_+$ , который определяется подгонкой наименьшими квадратами к результатам численного счета.

Соотношение (9) проверялось путем численного построения сепаратрисного отображения (3) системы (1), (7) в довольно широком диапазоне параметров возмущения (метод счета описан в [3]) и на рис.1 представлены основные результаты. Видно, что формула (9) отлично передает качественное поведение вторичной гармоники на сумме частот, хотя природа подгоночного множителя  $a_+$  неясна. Сравнивая амплитуду этой гармоники с найденной по формуле (5) амплитудой  $W_{MA}(\Omega_1)$  главной первичной гармоники возмущения, можно найти области параметров, где  $W_+(\Delta\Omega_+) \gg W_{MA}(\Omega_1)$  и где именно вторичная гармоника, являясь единственной существенной компонентой сепаратрисного отображения (3), полностью отвечает за формирование хаотического слоя. В частности, для параметров рис.1 имеются две такие области, задаваемые неравенствами  $0.3 \lesssim \Delta\Omega_+ \lesssim 1.3$  и  $\Delta\Omega_+ \gtrsim 1.6$ .

Для выяснения ряда деталей рассмотрим подробнее конкретную ситуацию со следующим набором параметров возмущения (7):

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.075, \quad \Omega_1 = 13.0, \quad \Omega_2 = -10.0. \quad (10)$$

Численное интегрирование системы (1), (7), (10) и спектральный анализ показали, что амплитуда вторичной гармоники



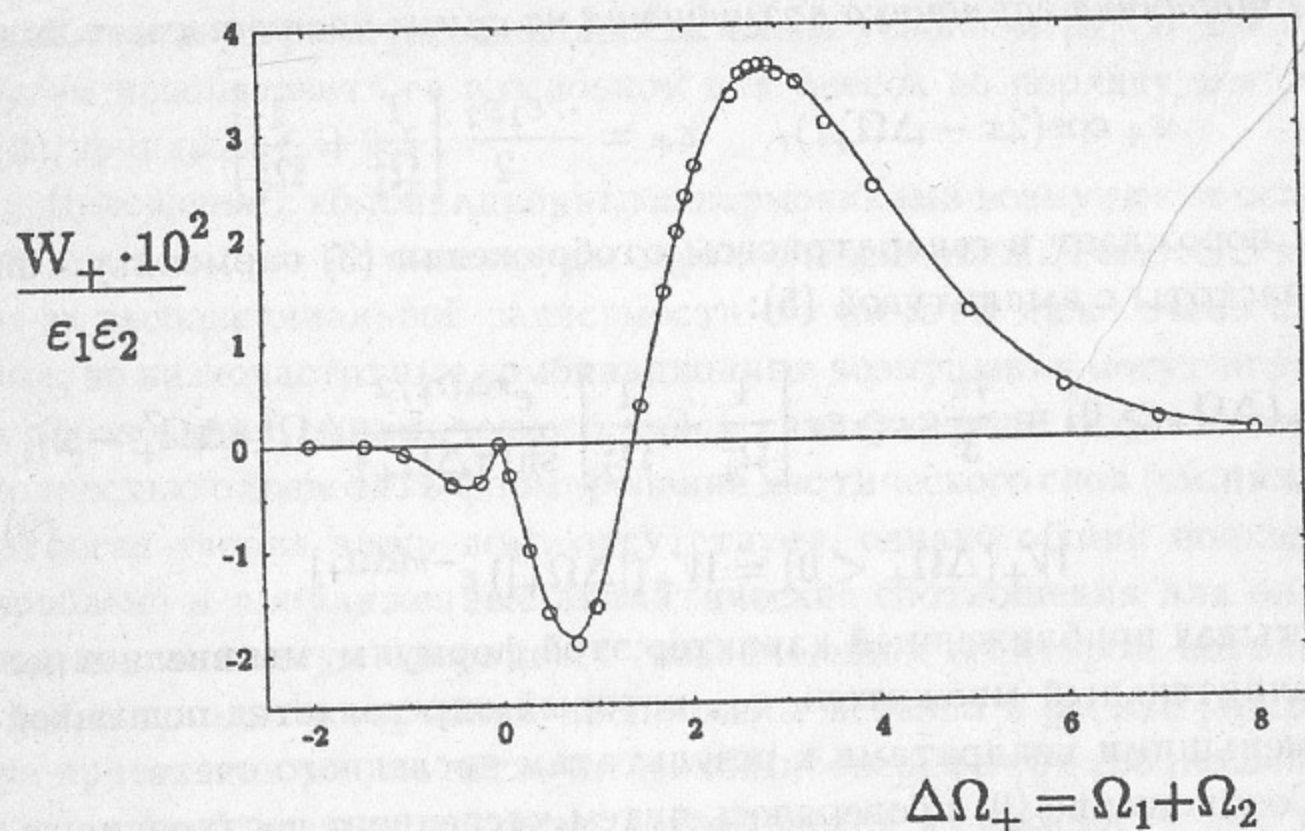


Рис. 1: Приведенная амплитуда вторичной гармоники частоты  $\Delta\Omega_+$  сепаратрисного отображения (3). Возмущение имеет вид (7) с параметрами:  $\Omega_1 = var$ ;  $\Omega_2 = -10.0 = const$ ;  $0.01 \leq \epsilon_1 = \epsilon_2 \leq 0.5$ . Кружками представлены результаты численного интегрирования системы (1) при движении в верхней ( $p > 0$ ) части хаотического слоя в режиме вращения фазы. Сплошная линия построена по формуле (9) при значении подгоночного множителя  $a_+ = 0.473$ .

сепаратрисного отображения частоты  $\Delta\Omega_+ = 3.0$  равна  $W_+(3.0) \approx 2.01 \cdot 10^{-4}$  (см.рис.1), в то время как вклад от гармоник первичных частот составил менее четверти процента этой величины (теоретические амплитуды (5) первичных гармоник в исследуемой части слоя  $W_{MA}(13.0) \approx 4.31 \cdot 10^{-7}$  и  $W_{MA}(-10.0) \approx -6.45 \cdot 10^{-19}$ ). Таким образом, гамильтоновой системе (1), (7), (10) отвечает практически одночастотное сепаратрисное отображение вида

$$\bar{w} = w + W_+ \sin(\tau_\pi), \quad \bar{\tau}_\pi = \tau_\pi + \Delta\Omega_+ \ln \frac{32}{|\bar{w}|},$$

$$W_+ = 2.01 \cdot 10^{-4}, \quad \Delta\Omega_+ = 3.0, \quad (11)$$

где введена новая переменная  $\tau_\pi = \Delta\Omega_+ t_\pi \bmod (2\pi)$ .

Мы столкнулись с одной из характерных для многочастотных возмущений ситуаций: непрерывная гамильтонова система (1), (7), (10) не содержит в явном виде частоту  $\Delta\Omega_+ = 3.0$ , а в отвечающем этой системе сепаратрисном отображении (11) фактически отсутствуют гармоники первичных частот  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  (они породили мощную вторичную гармонику и на этом их участие в формировании хаоса закончилось). Спектры этих конструкций совершенно различны и тем не менее они правильно определяют главную характеристику исследуемой части хаотического слоя – его ширину.

В этом примере хаос образуется так, как будто бы первичных гармоник вообще нет, а есть одна вторичная. Что произойдет, если мы на самом деле заменим исходное двухчастотное возмущение (7), (10) на одночастотное с параметрами вторичной гармоники? Для ответа рассмотрим вновь систему (1) с возмущением точно того вида (8), какой имеет вторичная гармоника:

$$V(x, t) = \epsilon \cos(2x - \Omega t), \quad \epsilon = 2.11 \cdot 10^{-5} \quad \Omega = \Delta\Omega_+ = 3.0. \quad (12)$$

Амплитуда возмущения  $\epsilon$  в (12) с помощью формулы (5) подобрана так, чтобы движение системы (1), (12) в верхней вращательной части хаотического слоя описывалось тем же самым сепаратрисным отображением (11).

Таким образом, имеются две различные гамильтоновы системы (1), (7), (10) и (1), (12), которым отвечает одно и то же сепаратрисное отображение (11). Определение ширины слоя по минимальному периоду дает для обеих систем одно и то же значение  $w_s(T_{min}) \approx 1.30 \cdot 10^{-3}$ , что разумно согласуется с величиной  $w_s \approx w_{max} \approx 1.45 \cdot 10^{-3}$ , найденной итерациями общего для них отображения (11). Поскольку обе системы формируют вращательные слои ( $p > 0$ ) части слоя одинаковой ширины, то в этом смысле



их следует признать эквивалентными, хотя в любой другой области фазового пространства (и в других частях слоя) эти две динамические модели могут не иметь ничего общего. Наличие этой эквивалентности и доказывает, на наш взгляд, что вторичные (а в общем случае и более высокие комбинационные) гармоники – реальные объекты, активно участвующие в образовании динамического хаоса.

На разности частот возникают две симметричных вторичных гармоники :

$$\varepsilon_- [\cos(x - \Delta\Omega_- t) - \cos(x + \Delta\Omega_- t)], \quad \varepsilon_- = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{4} \left| \left[ \frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega_2^2} \right] \right|. \quad (13)$$

Они порождают в сепаратрисном отображении (3) гармонику частоты  $\Delta\Omega_-$  с амплитудой:

$$W_-(\Delta\Omega_-) = -\pi a_- \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left| \left[ \frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega_2^2} \right] \right| \frac{e^{\pi|\Delta\Omega_-|/2}}{\text{sh}(\pi|\Delta\Omega_-|)} (1 - e^{-\pi|\Delta\Omega_-|}) =$$

$$-\frac{\pi a_- \varepsilon_1 \varepsilon_2}{\text{ch}(\pi\Delta\Omega_-/2)} \left| \left[ \frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega_2^2} \right] \right|. \quad (14)$$

И в эту формулу мы также ввели подгоночный множитель  $a_-$ .

Результаты численного счета и их сравнение с формулой (14) даны на рис.2. Качественное поведение передано несколько хуже, чем для случая суммы частот, но и здесь можно выделить область  $W_-(\Delta\Omega_-) \gg W_{MA}(\Omega_1), W_{MA}(\Omega_2)$ , где вторичная гармоника определяет размер хаотического слоя. Для параметров рис.2 эта область определяется неравенством  $\Delta\Omega_- = \Omega_2 - \Omega_1 \geq 0.5$ .

Из рассмотренных выше ситуаций может возникнуть впечатление, что комбинационные частоты работают только на усиление хаоса. Наш последний пример показывает, что это не так. Пусть возмущение (2) системы (1) содержит единственную гармонику:

$$V(x, t) = \varepsilon_1 \cos(2x - \Omega_1 t), \quad \varepsilon_1 = 2.0 \cdot 10^{-5}, \quad \Omega_1 = 4.0. \quad (15)$$

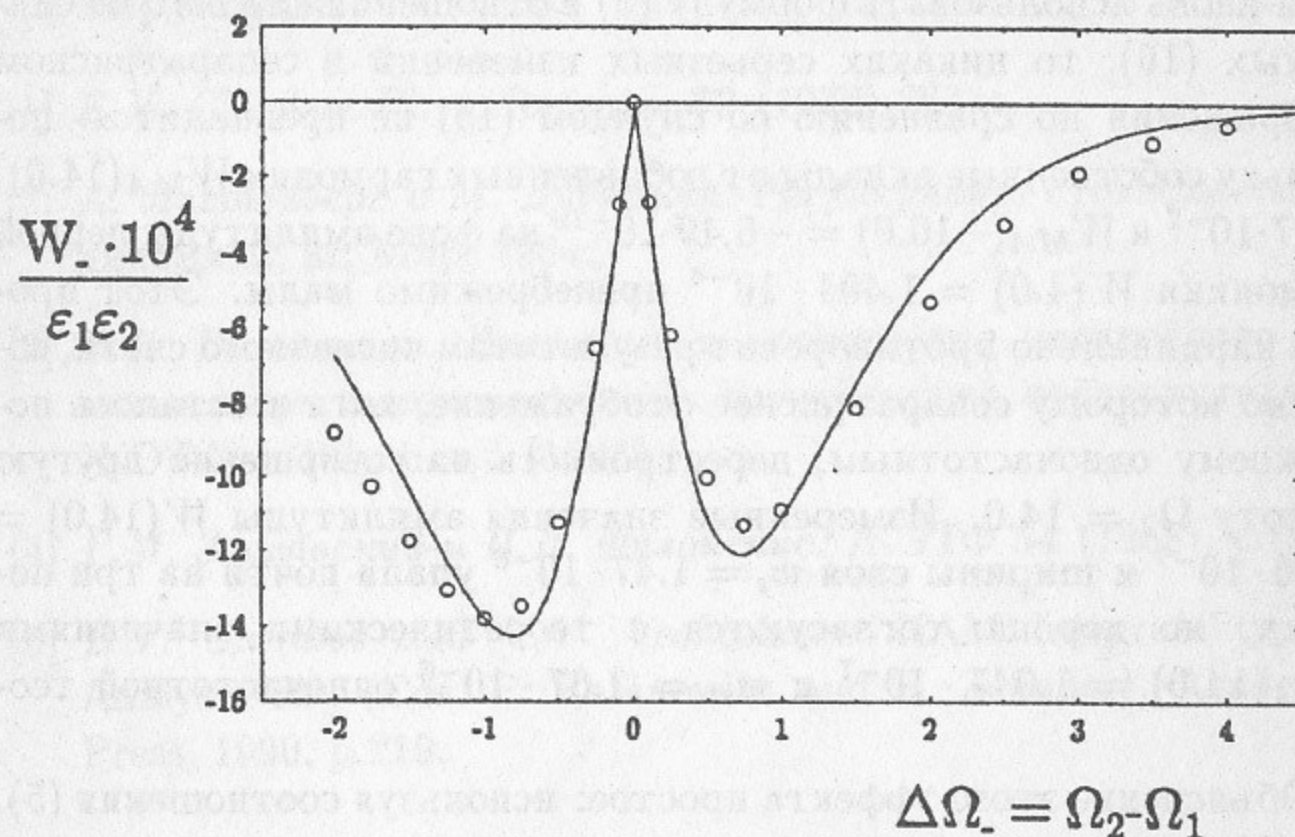


Рис. 2: Приведенная амплитуда вторичной гармоники частоты  $\Delta\Omega_-$  сепаратрисного отображения (3). Возмущение имеет вид (7) с параметрами:  $\Omega_1 = 14.0 = const$ ;  $\Omega_2 = var$ ;  $0.01 \leq \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \leq 0.5$ . Кружками представлены результаты численного интегрирования системы (1) при движении в верхней ( $p > 0$ ) части хаотического слоя в режиме вращения фазы. Сплошная линия построена по формуле (14) при значении подгоночного множителя  $a_- = 1.35$ .

Применение формул (5), (6) дает для амплитуды сепаратрисной гармоники и ширины исследуемой части (вращение фазы при  $p > 0$ ) хаотического слоя значения  $W_{MA}(4.0) = 1.402 \cdot 10^{-4}$  и  $w_{st} = 8.43 \cdot 10^{-4}$  соответственно, что вполне согласуется с результатами численного счета  $W(4.0) = 1.404 \cdot 10^{-4}$  и  $w_s = 8.62 \cdot 10^{-4}$ . Добавим к возмущению (15) еще две гармоники, после чего оно примет вид:

$$V(x, t) = \varepsilon_1 \cos(2x - \Omega_1 t) + \varepsilon_2 \cos(x - \Omega_2 t) + \varepsilon_3 \cos(x - \Omega_3 t),$$

$$\varepsilon_1 = 2.0 \cdot 10^{-5}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0.075549, \quad \Omega_1 = 4.0,$$

$$\Omega_2 = 14.0 \quad \Omega_3 = -10.0, \quad (16)$$



Если вновь использовать формулу (5) в отношении каждого из слагаемых (16), то никаких серьезных изменений в сепаратрисном отображении по сравнению со случаем (15) не предвидится, поскольку собственные вклады от добавленных гармоник  $W_{MA}(14.0) = 1.047 \cdot 10^{-7}$  и  $W_{MA}(-10.0) = -6.49 \cdot 10^{-19}$  на фоне амплитуды первой гармоники  $W(4.0) = 1.404 \cdot 10^{-4}$  пренебрежимо малы. Этот прогноз кардинально противоречит результатам численного счета, согласно которому сепаратрисное отображение, хотя и осталось по-прежнему одночастотным, перестроилось на совершенно другую частоту  $\Omega_2 = 14.0$ . Измеренные значения амплитуды  $W(14.0) = 1.046 \cdot 10^{-7}$  и ширины слоя  $w_s = 1.47 \cdot 10^{-6}$  упали почти на три порядка, но хорошо согласуются с теоретическими значениями  $W_{MA}(14.0) = 1.047 \cdot 10^{-7}$  и  $w_{st} = 1.67 \cdot 10^{-6}$  одночастотной теории.

Объяснение этого эффекта простое: используя соотношения (5), (8), (9), мы настроили параметры второго и третьего слагаемых в (16) так, чтобы возникающая на сумме их частот  $\Delta\Omega = \Omega_2 + \Omega_3 = \Omega_1$  вторичная гармоника полностью "убила" первичное (на первый взгляд – главное) возмущение частоты  $\Omega_1$ . В результате основная роль в формировании исследуемой части хаотического слоя досталась второй (на первый взгляд – несущественной) гармонике возмущения самой высокой частоты  $\Omega_2 = 14.0$ .

Автор благодарен Б.В.Чирикову за обсуждения и советы. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 95-01047).

## Литература

- [1] *B.V. Chirikov*. Phys. Reports, **52** (1979) 263.
- [2] *А. Лихтенберг и М. Либерман*. Регулярная и стохастическая динамика, М: Мир, 1984.
- [3] *В.В. Вечеславов*. Движение в окрестности нелинейного резонанса при высокочастотных возмущениях, предварительно: ЖЭТФ, т.109, вып.5 (1996).
- [4] *Г.М. Заславский и Н.Н. Филоненко*. ЖЭТФ **54** (1968), с.1590.
- [5] *B.V. Chirikov and V.V. Vecheslavov*. KAM Integrability, in: Analysis etc, (Eds. P. Rabinowitz and E. Zehnder), Academic Press, 1990, p.219.



*В.В. Вечеславов*

**Формирование хаотического слоя  
нелинейного резонанса  
двухчастотным возмущением**

*V.V. Vecheslavov*

**Chaotic layer of a nonlinear resonance  
driven by two-frequencies perturbation**

ИЯФ 96-24

Ответственный за выпуск С.Г. Попов

Работа поступила 18.04. 1996 г.

---

Сдано в набор 19.04.1996 г.

Подписано в печать 19.04.1996 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 0.7 печ.л., 0.6 уч.-изд.л.

Тираж 170 экз. Бесплатно. Заказ № 24

---

Обработано на IBM PC и отпечатано на  
роталпринте ГНЦ РФ "ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН",  
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.