

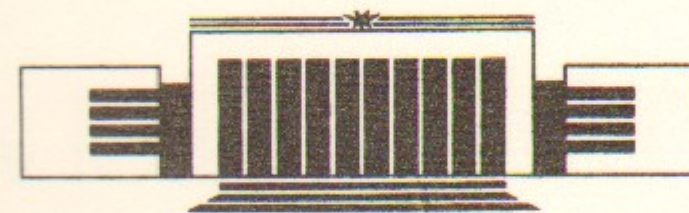


68
Государственный научный центр
Российской Федерации
Институт ядерной физики
им. Г.И. Будкера

Ю.И. Эйдельман, В.Е. Якименко

**СВЯЗАННОЕ ДВИЖЕНИЕ
ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ
В МАГНИТНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ УСКОРИТЕЛЕЙ**

ИЯФ 95-102



НОВОСИБИРСК

Связанное движение заряженной частицы в магнитных элементах ускорителей

Ю.И.Эйдельман, В.Е.Якименко

ГНЦ РФ "Институт ядерной физики
им.Г.И.Будкера СО РАН",
630090, Новосибирск, Russia

Аннотация

Приводится решение задачи о связанном движении заряженной частицы в произвольном магнитном поле, в частности для спиральных магнитов и других "экзотических" конфигураций поля.

© ГНЦ РФ "Институт ядерной физики
им.Г.И.Будкера СО РАН"

1 Введение

Магнитные системы современных ускорителей и накопителей становятся все более изощренными. Это диктуется возросшими требованиями к качеству "приготавливаемых" в них пучков и проявляется в том, что в магнитные системы все чаще включаются элементы, решающие одновременно самые разные задачи по "управлению" параметрами пучков. В частности, вместо элементов со строго разделенными функциями (повороты частиц, их фокусировка, компенсация хроматизма и т.д.) уже используются элементы, совмещающие все эти функции. Для управления поляризацией пучков широко применяются спиральные ондуляторы, так называемые "сибирские змейки" и т.д. Приведем лишь несколько примеров уже вошедших в практику таких "вычурных" элементов: на накопителе ВЭПП-4М [1] в основном элементе периодичности используется поворотный магнит с совмещенной скью-квадрупольной коррекцией; в месте встречи асимметричной В-фабрики (SLAC) разводящие магниты и квадруполь финального фокуса размещены внутри соленоида детектора [2]; на релятивистском коллайдере тяжелых ионов RHIC [3] для управления характером и степенью поляризации пучка предполагается применение "сибирских змеек" и ротаторов, изготовленных на основе спиральных магнитов. Таким образом, необходимо, чтобы и в расчетных программах появилась возможность правильного описания действия таких элементов на орбитальное движение частицы. В настоящей работе рассматривается задача о связанном движении (в горизонтальном и вертикальном направлениях) заряженной частицы в различных "сложных"

элементах, включаемых в магнитную структуру современных ускорителей; при этом оказывается, что решения уравнений движения для столь разных элементов имеют один и тот же вид.

2 Система координат

Движение частицы принято описывать в ускорительной (натуральной) системе координат [4], характеризуемой правой ортонормированной тройкой векторов (так называемый сопровождающий трехгранник орбиты), направленных вдоль *внешней* нормали к траектории (\vec{n}), вдоль бинормали к ней ($\vec{b} = [\vec{\tau}\vec{n}]$) и орта $\vec{\tau}$, направленного непосредственно вдоль траектории. Если векторное уравнение орбиты имеет вид $\vec{r} = \vec{r}_0(s)$, где координата s отсчитывается вдоль траектории, то эти единичные вектора связаны друг с другом следующими соотношениями Серре-Френе:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}_0}{ds}, \quad \frac{d\vec{\tau}}{ds} = -K\vec{n}, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = K\vec{\tau} + \kappa\vec{b}, \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = -\kappa\vec{n},$$

где $K(s)$ — кривизна орбиты, $\kappa(s)$ — ее кручение¹.

Произвольную точку, удаленную от орбиты (будем далее ее называть опорной) на расстояние, меньшее радиуса кривизны K^{-1} , будем характеризовать радиус-вектором \vec{r} (см. рис. 1):

$$\vec{r} = \vec{r}_0(s) + x\vec{n}(s) + y\vec{b}(s)$$

и величины $u^i = x, y, s$ будем при этом рассматривать как криволинейные координаты этой точки. Тогда этим координатам соответствует

¹ Введенный таким образом сопровождающий трехгранник орбиты в настоящее время принято применять практически во всех теоретических исследованиях по ускорительной физике. В монографии [5] в качестве сопровождающего трехгранника выбрана другая правая ортонормированная тройка векторов, включающая *внешнюю* нормаль \vec{n} , касательную $\vec{\tau}$ к траектории и бинормаль $\vec{b} = [\vec{n}\vec{\tau}]$. При этом соотношения Серре-Френе имеют вид $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = -K\vec{n}$, $\frac{d\vec{n}}{ds} = K\vec{\tau} - \kappa\vec{b}$ и $\frac{d\vec{b}}{ds} = \kappa\vec{n}$. Сделанный в данной работе выбор определяется необходимостью проведения "стыковки" с результатами других исследований. Естественно, что конечные результаты не зависят от произвола в выборе системы координат.

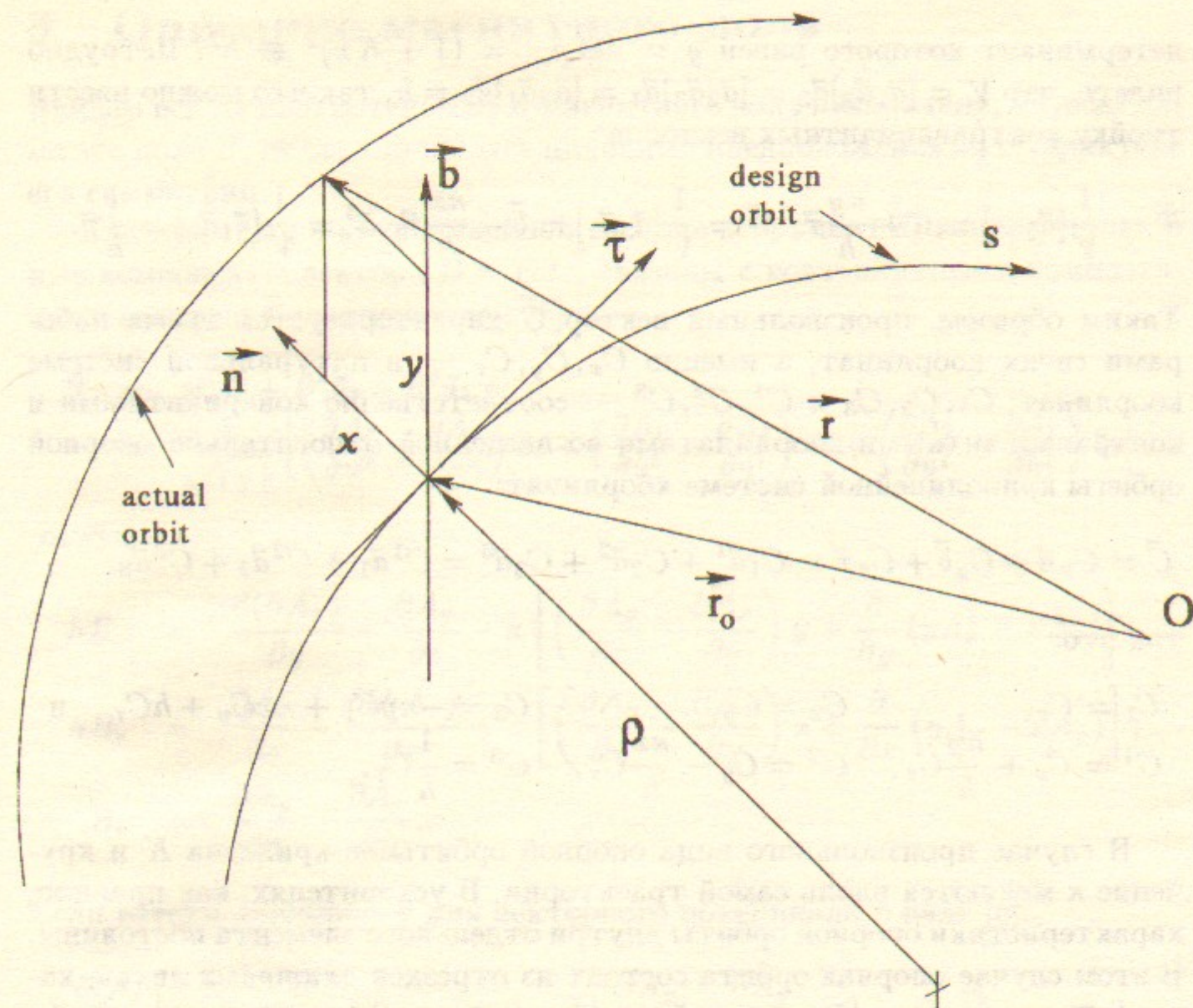


Рис. 1: Натуральная система координат.

тройка, вообще говоря, не ортогональных векторов $\vec{a}_i (i = 1, 2, 3)$, следующим образом выражающихся через $\vec{n}, \vec{b}, \vec{\tau}$ ²:

$$\vec{a}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \vec{n}, \quad \vec{a}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \vec{b}, \quad \vec{a}_3 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} = -\kappa y \vec{n} + \kappa x \vec{b} + (1 + Kx) \vec{\tau}.$$

Соответствующий им метрический тензор g_{ik} имеет вид

$$g_{ik} = \vec{a}_i \vec{a}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\kappa y \\ 0 & 1 & \kappa x \\ -\kappa y & \kappa x & (1 + Kx)^2 + \kappa^2(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

² Отметим, следуя [5], что тройка векторов $\vec{n}, \vec{b}, \vec{\tau}$ не образует истинно координатной системы, то есть малое приращение $d\vec{r}$ не выражается в виде $d\vec{r} = \vec{n}dx + \vec{b}dy + \vec{\tau}ds$.

детерминант которого равен $g = \det g_{ik} = (1 + Kx)^2 \equiv h^2$. Нетрудно видеть, что $V = [\vec{a}_1 \vec{a}_2] \vec{a}_3 = [\vec{a}_2 \vec{a}_3] \vec{a}_1 = [\vec{a}_3 \vec{a}_1] \vec{a}_2 = h$, так что можно ввести тройку контравариантных векторов

$$\vec{a}^1 = \frac{1}{V} [\vec{a}_2 \vec{a}_3] = \vec{n} + \frac{\kappa y}{h} \vec{\tau}, \quad \vec{a}^2 = \frac{1}{V} [\vec{a}_3 \vec{a}_1] = \vec{b} - \frac{\kappa x}{h} \vec{\tau}, \quad \vec{a}^3 = \frac{1}{V} [\vec{a}_1 \vec{a}_2] = \frac{1}{h} \vec{\tau}.$$

Таким образом, произвольный вектор \vec{C} характеризуется тремя наборами своих координат, а именно C_x, C_y, C_τ — в натуральной системе координат; C_1, C_2, C_3 и C^1, C^2, C^3 — соответственно ковариантными и контравариантными координатами во введенной относительно опорной орбиты криволинейной системе координат:

$$\vec{C} = C_x \vec{n} + C_y \vec{b} + C_\tau \vec{\tau} = C_1 \vec{a}^1 + C_2 \vec{a}^2 + C_3 \vec{a}^3 = C^1 \vec{a}_1 + C^2 \vec{a}_2 + C^3 \vec{a}_3,$$

так что:

$$C_1 = C_x, \quad C_2 = C_y, \quad C_3 = -\kappa y C_x + \kappa x C_y + h C_\tau \quad \text{и} \\ C^1 = C_x + \frac{\kappa y}{h} C_\tau, \quad C^2 = C_y - \frac{\kappa x}{h} C_\tau, \quad C^3 = \frac{1}{h} C_\tau.$$

В случае произвольного вида опорной орбиты ее кривизна K и кручение κ меняются вдоль самой траектории. В ускорителях, как правило, характеристики опорной орбиты внутри отдельного элемента постоянны. В этом случае опорная орбита состоит из отрезков *винтовых линий*, каждая из которых в лабораторной системе описывается параметрическими уравнениями $^3 \vec{r}_0 = (X(s), Y(s), Z(s))$ такими, что

$$X(s) = \frac{K}{K^2 + \kappa^2} \cos s \sqrt{K^2 + \kappa^2}, \\ Y(s) = \frac{K}{K^2 + \kappa^2} \sin s \sqrt{K^2 + \kappa^2}, \\ Z(s) = \frac{\kappa s}{\sqrt{K^2 + \kappa^2}}.$$

Нетрудно убедиться, что при этом радиус винтовой линии равен $\frac{K}{K^2 + \kappa^2}$, ее шаг вдоль z равен $\frac{2\pi\kappa}{K^2 + \kappa^2}$, а соотношения Серре-Френе, естественно, выполняются.

³Эти уравнения определяют *правую* винтовую линию: точка, поднимающаяся вдоль нее по z в сторону наблюдателя, вращается с его точки зрения против часовой стрелки.

3 Описание магнитного поля

Найдем векторный потенциал \vec{A} магнитного поля накопителя, а также само это поле \vec{B} , не ограничиваясь никакими предположениями о характере его симметрии.

Как известно, в криволинейной системе координат \vec{a}_i контравариантные компоненты вектора $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ связаны с ковариантными компонентами вектора \vec{A} соотношением [5]

$$\vec{B} = B^1 \vec{a}_1 + B^2 \vec{a}_2 + B^3 \vec{a}_3 = \\ = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial u^2} - \frac{\partial A_2}{\partial u^3} \right) \vec{a}_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial u^3} - \frac{\partial A_3}{\partial u^1} \right) \vec{a}_2 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial u^1} - \frac{\partial A_1}{\partial u^2} \right) \vec{a}_3 \right],$$

откуда

$$hB_x = \frac{\partial(hA_\tau)}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial s} - \kappa \left[\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) y + \frac{\partial}{\partial y} (yA_x - xA_y) \right], \\ hB_y = \frac{\partial A_x}{\partial s} - \frac{\partial(hA_\tau)}{\partial x} + \kappa \left[\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) x + \frac{\partial}{\partial x} (yA_x - xA_y) \right], \\ B_\tau = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Если ввести калибровку для векторного потенциала в виде [6]:

$$a) \frac{\partial^i A_x}{\partial x^i} \Big|_{x,y=0} = \frac{\partial^i A_y}{\partial y^i} \Big|_{x,y=0} = 0, \quad b) \frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial x} = 0, \quad c) \vec{A} \Big|_{x,y=0} = 0,$$

то можно получить следующий результат ⁴ для разложения векторного потенциала в ряд по x, y вблизи опорной орбиты:

$$A_x = -\frac{1}{2} \sum_{i,k=0} \frac{\partial^{i+k} B_\tau}{\partial x^i \partial y^k} \Big|_{x,y=0} \frac{x^i}{i!} \frac{y^{k+1}}{(k+1)!}, \\ A_y = \frac{1}{2} \sum_{i,k=0} \frac{\partial^{i+k} B_\tau}{\partial x^i \partial y^k} \Big|_{x,y=0} \frac{x^{i+1}}{(i+1)!} \frac{y^k}{k!}, \\ hA_\tau = -\sum_{i=1} \left[\frac{\partial^{i-1}(hB_y)}{\partial x^{i-1}} \Big|_{x,y=0} \frac{x^i}{i!} - \frac{\partial^{i-1}(B_x)}{\partial y^{i-1}} \Big|_{x,y=0} \frac{y^i}{i!} \right] -$$

⁴Он уже был получен ранее В.Н. Литвиненко и Е.А. Переведенцевым, но, к сожалению, не был ими опубликован.

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \sum_{i,k=1} \left[\frac{\partial^{i-1+k}(hB_y)}{\partial x^{i-1} \partial y^k} \Big|_{x,y=0} - \frac{\partial^{i+k-1}(hB_x)}{\partial x^i \partial y^{k-1}} \Big|_{x,y=0} \right] \frac{x^i}{i!} \frac{y^k}{k!} - \\
& - \frac{\kappa}{2} \left[\sum_{i,k=1} \frac{\partial^{i+k-1} B_\tau}{\partial x^i \partial y^{k-1}} \Big|_{x,y=0} \frac{x^i}{i!} \frac{y^{k+1}}{(k+1)!} + \right. \\
& \left. + \sum_{i,k=1} \frac{\partial^{i-1+k} B_\tau}{\partial x^{i-1} \partial y^k} \Big|_{x,y=0} \frac{x^{i+1}}{(i+1)!} \frac{y^k}{k!} \right].
\end{aligned}$$

Видно, что потенциал выражен только через параметры $K(s)$, $\kappa(s)$ орбиты, а также через значения поля и его производных, вычисленных на опорной орбите, которые, в силу уравнений Максвелла $\text{div} \vec{B} = \text{rot} \vec{B} = 0$, связаны друг с другом определенными соотношениями. Введем общепринятые параметры, характеризующие конфигурацию магнитного поля ускорителя, учтя при этом, что в настоящей работе рассматривается только линейное орбитальное движение. Это означает, что можно ограничиться только следующими характеристиками магнитного поля:

$$\begin{aligned}
B_{0i} &\equiv \frac{e}{E_0} B_{0i}, \quad \text{где } i = x, y, \tau; \\
g &= \frac{e}{E_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} \Big|_{x,y=0} = \frac{e}{E_0} \frac{\partial B_x}{\partial y} \Big|_{x,y=0}, \quad q = \frac{e}{2E_0} \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) \Big|_{x,y=0}
\end{aligned}$$

Остальные производные компонент поля могут быть выражены только через эти параметры (штрихом обозначается дифференцирование по s):

$$\begin{aligned}
\frac{e}{E_0} \frac{\partial B_x}{\partial x} \Big|_{x,y=0} &= q - \frac{1}{2} (B'_{0\tau} + \kappa B_{0x}), \\
\frac{e}{E_0} \frac{\partial B_y}{\partial y} \Big|_{x,y=0} &= -q - \frac{1}{2} (B'_{0\tau} + \kappa B_{0x}), \\
\frac{e}{E_0} \frac{\partial B_\tau}{\partial x} \Big|_{x,y=0} &= -\kappa B_{0\tau} + B'_{0x} - \kappa B_{0y}, \\
\frac{e}{E_0} \frac{\partial B_\tau}{\partial y} \Big|_{x,y=0} &= B'_{0y} + \kappa B_{0x}.
\end{aligned}$$

Теперь можно выписать значения компонент векторов поля:

$$B_x = B_{0x} + \left[q - \frac{1}{2} (B'_{0\tau} + \kappa B_{0x}) \right] x + gy + \dots,$$

$$\begin{aligned}
B_y &= B_{0y} + gx - \left[q + \frac{1}{2} (B'_{0\tau} + \kappa B_{0x}) \right] y + \dots, \\
B_\tau &= B_{0\tau} + (-\kappa B_{0\tau} + B'_{0x} - \kappa B_{0y})x + (B'_{0y} + \kappa B_{0x})y + \dots
\end{aligned}$$

и его векторного потенциала (умноженного на $\frac{e}{E_0}$; далее будет видно, что в настоящей работе достаточно ограничиться только линейными по x, y членами в A_x и A_y и квадратичными членами в A_τ):

$$\begin{aligned}
\frac{e}{E_0} A_x &= -\frac{1}{2} B_{0\tau} y + \dots, \quad \frac{e}{E_0} A_y = \frac{1}{2} B_{0\tau} x + \dots, \\
h \frac{e}{E_0} A_\tau &= -B_{0y} x + B_{0x} y - \frac{1}{2} (\kappa B_{0y} + g) x^2 + \dots \\
&\quad + \frac{1}{2} g y^2 + (q + \frac{1}{2} \kappa B_{0x}) xy + \dots
\end{aligned} \tag{1}$$

Используем полученные значения векторного потенциала для нахождения уравнений движения частицы в поле накопителя.

4 Гамильтониан и уравнения движения

Как известно [7], в отсутствие электрического поля лагранжиан, описывающий движение заряженной частицы (масса m и заряд e) в магнитном поле с векторным потенциалом \vec{A} , имеет вид

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \vec{v} \vec{A},$$

где $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ - вектор скорости частицы. Во введенной криволинейной системе координат x, y, s , используя соотношения Серре-Френе, имеем

$$\begin{aligned}
v^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{s}^2 (h^2 + \kappa^2 x^2 + \kappa^2 y^2) - 2\kappa \dot{s} (y\dot{x} - x\dot{y}), \\
\vec{v} \vec{A} &= \dot{x} A_x + \dot{y} A_y + \dot{s} (-\kappa y A_x + \kappa x A_y + h A_\tau)
\end{aligned}$$

и тогда лагранжиан принимает вид

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x, y, s, \dot{x}, \dot{s}, \dot{y}; t) &= - \\
& - mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{s}^2 (h^2 + \kappa^2 x^2 + \kappa^2 y^2) - 2\kappa \dot{s} (y\dot{x} - x\dot{y})}{c^2}} + \\
& + \frac{e}{c} [\dot{x} A_x + \dot{y} A_y + \dot{s} (-\kappa y A_x + \kappa x A_y + h A_\tau)].
\end{aligned}$$

Из этого лагранжиана следуют уравнения для канонически сопряженных импульсов p_x , p_y и p_s (удобно при этом использовать релятивистский фактор $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$):

$$p_x \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\gamma(\dot{x} - \kappa y \dot{s}) + \frac{e}{c} A_x,$$

$$p_y \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\gamma(\dot{y} + \kappa x \dot{s}) + \frac{e}{c} A_y,$$

$$p_s \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} = m\gamma [\dot{s}(h^2 - \kappa^2 x^2 + \kappa^2 y^2) + \kappa(x\dot{y} - y\dot{x})] + \frac{e}{c} (-\kappa y A_x + \kappa x A_y + h A_\tau).$$

Эта система уравнений может быть легко решена относительно \dot{x} , \dot{y} и \dot{s} :

$$\dot{x} = \frac{1}{m\gamma h^2} \left[h^2 \left(p_x - \frac{e}{c} A_x \right) + \kappa y \left(p_s - h \frac{e}{c} A_\tau \right) + \kappa^2 y (y p_x - x p_y) \right],$$

$$\dot{y} = \frac{1}{m\gamma h^2} \left[h^2 \left(p_y - \frac{e}{c} A_y \right) - \kappa x \left(p_s - h \frac{e}{c} A_\tau \right) - \kappa^2 x (y p_x - x p_y) \right],$$

$$\dot{s} = \frac{1}{m\gamma h^2} \left[p_s - \frac{e}{c} A_\tau + \kappa (y p_x - x p_y) \right]$$

и тогда нетрудно найти выражение для гамильтониана:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, y, s, p_x, p_y, p_s; t) &\equiv \dot{x} p_x + \dot{y} p_y + \dot{s} p_s - \mathcal{L} = \gamma m c^2 = \\ &= c \left\{ m^2 c^2 + \left(p_x - \frac{e}{c} A_x \right)^2 + \left(p_y - \frac{e}{c} A_y \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{h^2} \left[p_s - h \frac{e}{c} A_\tau - \kappa (y p_x - x p_y) \right]^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Следуя [5] и [8], можно показать, что после соответствующих преобразований⁵ гамильтониан примет такой вид:

$$\mathcal{H}(x, y, \sigma, p_x, p_y, p_\sigma; s) = 1 + p_\sigma -$$

⁵Последовательность этих преобразований такова:

- переход к азимуту s (вместо времени t) в качестве независимой переменной приводит к тому, что вместо пары (s, p_s) новыми канонически сопряженными координатой и импульсом становятся соответственно t и $-\mathcal{H}$, а гамильтониан $\mathcal{H}(x, y, s, p_x, p_y, p_s; t)$ переходит в $\mathcal{K} = -p_s(x, y, t, p_x, p_y, -\mathcal{H}; s)$;
- переход в новом гамильтониане \mathcal{K} от полной энергии частицы $E = \mathcal{H}$ к ее относительному отклонению $\frac{E - E_0}{E_0}$ (E_0 — энергия частицы на равновесной орбите) позволяет перейти от канонических пар переменных (x, p_x) , (y, p_y) ,

$$\begin{aligned} &-h \sqrt{(1 + p_\sigma)^2 - \left(\frac{m c^2}{E_0} \right)^2 - \left(p_x - \frac{e}{E_0} A_x \right)^2 - \left(p_y - \frac{e}{E_0} A_y \right)^2} - \\ &-h \frac{e}{E_0} A_\tau - \kappa (x p_y - y p_x). \end{aligned}$$

Используя найденное ранее выражение (1) для векторного потенциала магнитного поля через его параметры, получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\approx -Kx + \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} - p_x \frac{e A_x}{E_0} - p_y \frac{e A_y}{E_0} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{e A_x}{E_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{e A_y}{E_0} \right)^2 - h \frac{e A_\tau}{E_0} - K p_\sigma x - \kappa (x p_y - y p_x) \approx \\ &\approx (-K + B_{0y})x - B_{0x}y + \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + \\ &+ \left(g + K B_{0y} + \frac{1}{4} B_{0\tau}^2 \right) \frac{x^2}{2} + \left(-g + \frac{1}{4} B_{0\tau}^2 \right) \frac{y^2}{2} - \\ &- \left(q + \frac{1}{2} K B_{0x} \right) xy - \left(\kappa + \frac{1}{2} B_{0\tau} \right) (x p_y - y p_x) - K p_\sigma x. \end{aligned}$$

Удобно ввести следующие величины:

$$\begin{aligned} g_x &= g + K B_{0y} - \kappa^2 - \kappa B_{0\tau}, & g_y &= -(g + \kappa^2 + \kappa B_{0\tau}); \\ r &= B_{0\tau} + 2\kappa, & \tilde{q} &= q + \frac{1}{2} K B_{0x}, \\ \Delta B_x &= B_{0x}, & \Delta B_y &= K - B_{0y} \end{aligned}$$

($t, -\mathcal{H}$) к переменным $(x, \bar{p}_x \equiv \frac{c}{E_0} p_x)$, $(y, \bar{p}_y \equiv \frac{c}{E_0} p_y)$, $(-ct, \bar{p}_\sigma \equiv \frac{\mathcal{H} - E_0}{E_0})$, а гамильтониан $\mathcal{K}(x, y, t, p_x, p_y, -\mathcal{H}; s)$ переходит в безразмерное выражение $\bar{\mathcal{K}} = \frac{c}{E_0} \mathcal{K}(x, y, t, \bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_\sigma; s)$;

- переход от координаты $t(s)$ к переменной $\sigma = s - ct(s)$, описывающей продольное отклонение частицы с энергией E от положения частицы с равновесной энергией E_0 , позволяет осуществить с помощью производящей функции $F_3(x, y, \sigma, \bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_\sigma; s) = -x \bar{p}_x - y \bar{p}_y - \sigma \bar{p}_\sigma + s \bar{p}_\sigma + s$ каноническое преобразование от гамильтониана $\bar{\mathcal{K}}(x, y, t, \bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_\sigma; s)$ к гамильтониану $\tilde{\mathcal{K}}(x, y, \sigma, \bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_\sigma; s) = 1 + \bar{p}_\sigma + \bar{\mathcal{K}}$, который и является искомым выражением и далее вновь обозначается как \mathcal{H} , при этом для безразмерных обобщенных импульсов \bar{p}_x , \bar{p}_y , \bar{p}_σ вновь, для простоты записи, используются обозначения просто p_x , p_y и p_σ .

и тогда гамильтониан переписывается в виде ⁶

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -\Delta B_y x - \Delta B_x y + \\ & + \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + \left(g_x + \frac{r^2}{4}\right) \frac{x^2}{2} + \left(g_y + \frac{r^2}{4}\right) \frac{y^2}{2} - \\ & - \tilde{q}xy - \frac{r}{2}(xp_y - yp_x) - Kp_\sigma x. \end{aligned}$$

Учтем теперь влияние на движение частицы ее синхротронного излучения, генерируемого при ее движении в магнитном поле. В этом случае необходимо [9] к гамильтониану \mathcal{H} добавить слагаемое $CK^2\sigma$, где $C = \frac{2}{3}r_e\gamma_0^3$. Здесь r_e — классический радиус электрона, а γ_0 — релятивистский фактор для частицы с равновесной энергией E_0 . Естественно, что синхротронное излучение приводит к уменьшению энергии частицы. Компенсация потерь осуществляется электрическими полями резонаторов, размещаемых в каком-либо месте орбиты. Мы, однако, не будем включать в рассмотрение эти электрические поля, считая, что энергия частицы после каждого оборота "автоматически" восстанавливается до исходного значения E .

Таким образом, гамильтониан имеет следующий окончательный вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -\Delta B_y x - \Delta B_x y + CK^2\sigma + \\ & + \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + \left(g_x + \frac{r^2}{4}\right) \frac{x^2}{2} + \left(g_y + \frac{r^2}{4}\right) \frac{y^2}{2} - \\ & - \tilde{q}xy - \frac{r}{2}(xp_y - yp_x) - Kp_\sigma x. \end{aligned}$$

Из этого гамильтониана нетрудно записать уравнения связанного движения заряженной частицы:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = p_x + \frac{r}{2}y, & p'_x &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = \Delta B_y - \left(g_x + \frac{r^2}{4}\right)x + \tilde{q}y + \frac{r}{2}p_y + Kp_\sigma; \\ y' &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} = p_y - \frac{r}{2}x, & p'_y &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = \Delta B_x - \left(g_y + \frac{r^2}{4}\right)y + \tilde{q}x - \frac{r}{2}p_x; \\ \sigma' &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\sigma} = -Kx, & p'_\sigma &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma} = -CK^2. \end{aligned}$$

⁶Следует отметить, что в [5] вкрались две опечатки: в выражении для g_x (ф-ла 2-15) неверный знак у слагаемого $\propto \kappa B_\theta$ и, как нетрудно убедиться, в выражении для гамильтониана (ф-ла 5-9) неверный знак у слагаемого, которое $\propto \frac{\partial B_x}{\partial x} - \frac{\partial B_z}{\partial z}$ ($\propto \tilde{q}$ в наших обозначениях).

Уравнения движения могут быть также представлены в традиционной матричной форме:

$$Z'_i = M_{ik}Z_k + B_i$$

с соответствующим видом матрицы M и вектора \vec{B} . Далее решение этих уравнений находится без использования такого представления.

5 Решение уравнений движения

Уравнения движения, как нетрудно видеть, "расщепляются" на две системы уравнений для продольного (σ) и поперечного (x, y) движений. Уравнение для p_σ интегрируется сразу и его решение имеет вид

$$p_\sigma(s) = p_{\sigma 0} - CK^2s,$$

а продольное движение, описываемое уравнением $\sigma' = -Kx$, полностью определяется решением уравнений для поперечного движения, которое и будет найдено ниже.

Далее будем рассматривать элемент магнитной системы, на всей длине которого параметры магнитного поля постоянны. На входном крае элемента все параметры поля изменяются от нуля до их значений внутри элемента; на выходном крае происходит их обратное изменение. Таким образом, для элемента производные по s всех параметров поля равны нулю, в то время как для краев элемента эти производные принципиально не нулевые. Поэтому рассмотрим уравнения движения и их решение для собственно элемента и его краев отдельно.

5.1 Элемент (центральная часть)

Итак, для элемента производные по s всех параметров поля равны нулю. Систему 4-х дифференциальных уравнений первого порядка для переменных x, y, p_x, p_y легко свести к уравнению четвертого порядка для одной какой-либо переменной, например x (ясно, что решение этого уравнения определяет вид решения для остальных переменных в силу связывающих их соотношений):

$$\begin{aligned} x^{iv} + (g_x + g_y + r^2)x'' + (g_x g_y - \tilde{q}^2)x &= \\ = g_y \Delta B_y - \tilde{q} \Delta B_x + g_y K (p_{\sigma 0} - CK^2s). \end{aligned}$$

Ищем решение этого уравнения в виде

$$x = \sum_{i=1}^4 A_i e^{\alpha_i s} + \frac{q \Delta B_x + g_y K (p_{\sigma 0} - CK^2 s)}{g_x g_y - \tilde{q}^2}, \quad (2)$$

тогда все α_i должны удовлетворять уравнению

$$\alpha^4 + (g_x + g_y + r^2)\alpha^2 + (g_x g_y - \tilde{q}^2) = 0.$$

Его корни очевидны:

$$\alpha_{I,II}^2 = \frac{-(g_x + g_y + r^2) \pm \sqrt{(g_x + g_y + r^2)^2 - 4(g_x g_y - \tilde{q}^2)}}{2}$$

и связаны друг с другом соотношениями Виетта: $\alpha_I^2 + \alpha_{II}^2 = -(g_x + g_y + r^2)$ и $\alpha_I^2 \alpha_{II}^2 = g_x g_y - \tilde{q}^2$. Таким образом, имеем: $\alpha_{1,2} = \pm \alpha_I$ и $\alpha_{3,4} = \pm \alpha_{II}$, так что осталось найти константы A_i . Они определяются начальными условиями, то есть значениями x_0, y_0, p_{x0}, p_{y0} на входе в элемент. Поэтому далее необходимы выражения для переменных y, p_x и p_y только через x и его производные. Эти выражения находятся после простых преобразований и имеют следующий вид:

$$p_x = \frac{r^2 x''' - \tilde{q} r x'' + [2\tilde{q}^2 + r^2(g_x + 2g_y + r^2)] x' - \tilde{q} r (g_x + r^2) x}{2(\tilde{q}^2 + g_y r^2)} + \frac{\tilde{q} K (p_{\sigma 0} - CK^2 s) + r^2 \Delta B_x + \tilde{q} \Delta B_y + r CK^3}{2(\tilde{q}^2 + g_y r^2)},$$

$$y = \frac{-r x''' + \tilde{q} x'' - r(g_x + r^2) x' + \tilde{q}(g_x + r^2) x}{\tilde{q}^2 + g_y r^2} - \frac{\tilde{q} K (p_{\sigma 0} - CK^2 s) + r^2 \Delta B_x + \tilde{q} \Delta B_y + r CK^3}{(\tilde{q}^2 + g_y r^2)},$$

$$p_y = \frac{2\tilde{q} x''' + 2r g_y x'' + 2\tilde{q}(g_x + r^2) x' + r(2g_x g_y + g_y r^2 - \tilde{q}^2) x}{2(\tilde{q}^2 + g_y r^2)} - \frac{r g_y K (p_{\sigma 0} - CK^2 s) - r(\tilde{q} \Delta B_x - g_y \Delta B_y) - \tilde{q} CK^3}{\tilde{q}^2 + g_y r^2}.$$

Подстановка в эти формулы выражения (2) дает при $s = 0$ систему уравнений для констант A_i . Искомое решение уравнений движения находится далее подстановкой найденных констант A_i в выражения для x, p_x, y, p_y . Это решение для элемента длины L включает в себя экспоненты вида

$e^{\pm \alpha_I L}$ и $e^{\pm \alpha_{II} L}$, то есть оно выражается, в конечном счете, через гиперболические функции аргументов $\alpha_I L$ и $\alpha_{II} L$. Однако ясно, что эти выражения будут совершенно необозримы ввиду своей громоздкости. Кроме того, они включают в себя некую "смесь" гиперболических и тригонометрических функций, так как одна из пар решений уравнения для α , как правило, комплексна (для магнитов, квадрупольных линз и т.п.). Наконец, эти выражения крайне "неприспособлены" к непосредственным вычислениям: необходим анализ, какие α комплексны, а какие нет; в случае, когда $\alpha_I^2 = \alpha_{II}^2$ (довольно распространенная ситуация для магнита без скью-секступольной обмотки и для которого при этом $g_x = g_y$), необходимо "вручную" раскрывать неопределенности типа "ноль на ноль", которые в этом случае присутствуют во всех выражениях. Если же воспользоваться введенными в [10] \mathcal{D} -функциями (их определения и некоторые свойства приведены в приложении), то формулы для x, p_x, y, p_y существенно упрощаются, перестают зависеть от того, действительны или комплексны $\alpha_{I,II}$, а "нехорошие" знаменатели просто исчезают. Представим результат в традиционной матричной форме ⁷:

$$Z_i = A_{ij} Z_{j0} + B_i,$$

где ненулевые элементы матрицы A равны (аргументы \mathcal{D} -функций α_I, α_{II} и L для простоты записи опущены):

⁷Понятно, что при "протаскивании" орбитального вектора через последовательно расположенные элементы кольца столбцовый вектор \vec{B} будет "накапливаться". После обхода по всему периметру ускорителя этот накопившийся вектор \vec{B}_Σ определяет ненулевую замкнутую орбиту, компоненты орбитального вектора $\vec{Z}_{орб}$ которой на азимуте s определяются как решение уравнения $T \vec{Z}_{орб} + \vec{B}_\Sigma = \vec{Z}_{орб}$, где T — матрица однооборотного орбитального преобразования для этого азимута.

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{r}{2} \tilde{q} D_3 + \left(g_y + \frac{r^2}{2} \right) D_2 + D_0, & A_{12} &= D_1 + g_y D_3, \\
A_{13} &= \tilde{q} D_2 + \frac{r}{2} (D_1 - g_y D_3), & A_{14} &= \tilde{q} D_3 + r D_2, \\
A_{16} &= K (D_2 + g_y D_4); \\
A_{21} &= \left(\tilde{q}^2 - g_x g_y - \frac{r^2}{4} g_x \right) D_3 - \left(g_x + \frac{r^2}{4} \right) D_1, & A_{22} &= D_0 - \frac{r}{2} \tilde{q} D_3 + \left(g_y + \frac{r^2}{2} \right) D_2, \\
A_{23} &= \tilde{q} \left(D_1 + \frac{r^2}{4} D_3 \right) - \frac{r}{4} (2g_x + 2g_y + r^2) D_2, & A_{24} &= \tilde{q} D_2 + \frac{r}{2} (D_1 - g_x D_3), \\
A_{26} &= K \left[\left(g_y + \frac{r^2}{2} \right) D_3 + D_1 - \frac{r \tilde{q}}{2} D_4 \right]; \\
A_{31} &= \tilde{q} D_2 - \frac{r}{2} (D_1 - g_x D_3), & A_{32} &= \tilde{q} D_3 - r D_2, \\
A_{33} &= -\frac{r}{2} \tilde{q} D_3 + \left(g_x + \frac{r^2}{2} \right) D_2 + D_0, & A_{34} &= D_1 + g_x D_3, \\
A_{36} &= K (\tilde{q} D_4 - r D_3); \\
A_{41} &= \tilde{q} \left(D_1 + \frac{r^2}{4} D_3 \right) + \frac{r}{4} (2g_x + 2g_y + r^2) D_2, & A_{42} &= \tilde{q} D_2 - \frac{r}{2} (D_1 - g_y D_3), \\
A_{43} &= \left(\tilde{q}^2 - g_x g_y - \frac{r^2}{4} g_y \right) D_3 - \left(g_y + \frac{r^2}{4} \right) D_1, & A_{44} &= D_0 + \frac{r}{2} \tilde{q} D_3 + \left(g_x + \frac{r^2}{2} \right) D_2, \\
A_{46} &= K \left[\tilde{q} D_3 + \frac{r}{2} (g_y D_4 - D_2) \right]; \\
A_{51} &= -K \left[\left(g_y + \frac{r^2}{2} \right) D_3 + D_1 + \frac{r \tilde{q}}{2} D_4 \right], & A_{52} &= -K (D_2 + g_y D_4), \\
A_{53} &= -K \left[\tilde{q} D_3 + \frac{r}{2} (D_2 - g_y D_4) \right], & A_{54} &= -K (\tilde{q} D_4 + r D_3), \\
A_{55} &= 1, & A_{56} &= -K^2 (g_y D_5 + D_3), & A_{66} &= 1.
\end{aligned}$$

Аналогично могут быть записаны компоненты вектора \vec{B} :

$$\begin{aligned}
B_1 &= -CK^3 (g_y D_5 + D_3) - \Delta B_x (\tilde{q} D_4 + r D_3) + \Delta B_y (g_y D_4 + D_2), \\
B_2 &= -CK^3 \left[-\frac{\tilde{q} r}{2} D_5 + \left(g_y + \frac{r^2}{2} \right) D_4 + D_2 \right] + \\
&\quad + \Delta B_x \left(\frac{r g_x}{2} D_4 - \tilde{q} D_3 \right) + \Delta B_y \left[-\frac{r \tilde{q}}{2} D_4 + \left(g_y + \frac{r^2}{2} \right) D_3 \right], \\
B_3 &= -CK^3 (\tilde{q} D_5 - r D_4) - \Delta B_x (g_x D_4 + D_2) + \Delta B_y (\tilde{q} D_4 - r D_3), \\
B_4 &= -CK^3 \left(\frac{r g_y}{2} D_5 + \tilde{q} D_4 - \frac{r}{2} D_3 \right) - \\
&\quad - \Delta B_x \left[\frac{r \tilde{q}}{2} D_4 + \left(g_x + \frac{r^2}{2} \right) D_3 + D_1 \right] + \Delta B_y \left(\frac{r g_y}{2} D_4 + \tilde{q} D_3 - \frac{r}{2} D_2 \right), \\
B_5 &= CK^4 (g_y D_6 + D_4) + K \Delta B_x (\tilde{q} D_5 + r D_4) - K \Delta B_y (g_y D_5 + D_3), \\
B_6 &= -CK^2 L.
\end{aligned}$$

Естественно, что для конкретных (не столь "вычурных") элементов матрица A и вектор \vec{B} будут существенно упроститься (см. далее конкретные примеры).

5.2 Край элемента

Как уже указывалось выше, производные по s всех параметров поля для краев элемента не равны нулю. Эти производные описывают "скачки" соответствующих параметров при входе в элемент и выходе из него. Можно показать [11], что эти скачки следует учитывать только при рассмотрении нелинейного орбитального движения. В линейном приближении, однако, следует также принимать во внимание так называемую краевую фокусировку [12], возникающую если край элемента не ортогонален опорной орбите (см. рис. 2). В этом случае краевая фокусировка описывается матрицей

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\Delta K \tan \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\Delta K \tan \alpha & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}, \text{ где } \Delta K = \begin{cases} K & \text{на входе,} \\ -K & \text{на выходе} \end{cases}$$

и α — угол между плоскостью края магнита и радиус-вектором из центра кривизны орбиты в точку ее пересечения с плоскостью края.

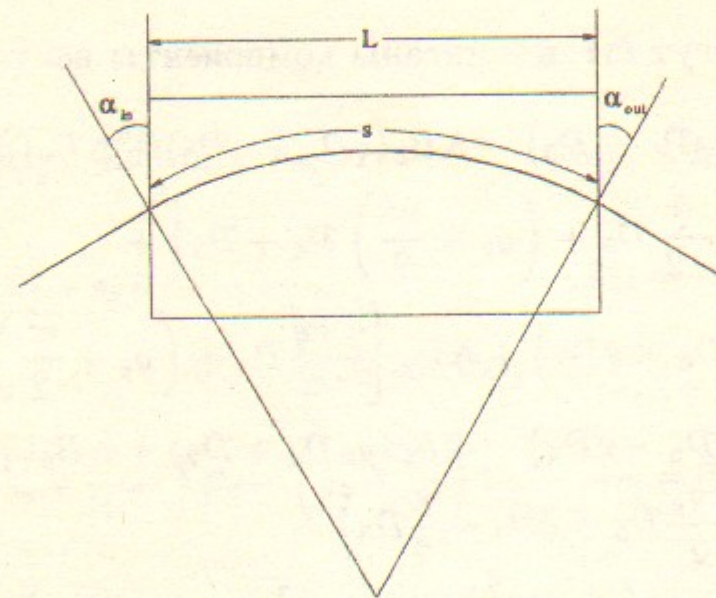


Рис. 2: Геометрия магнита (к краевой фокусировке).

Необходимо также сделать следующее важное замечание. Сопровождающий трехгранник орбиты движется вдоль опорной траектории и, следовательно, при наличии у нее кручения к тому же вращается относительно лабораторной системы координат вокруг продольной оси \vec{z} . Это означает, что на выходе из элемента длины L , опорная орбита в котором представляет собой винтовую линию с кривизной K и кручением κ , натуральная система координат оказывается повернутой на угол $\varphi = L\sqrt{K^2 + \kappa^2} \equiv kL$ против часовой стрелки (если смотреть с выхода элемента) относительно своего "стартового" положения на входе в этот и следующий элементы⁸. Этот поворот, очевидно, описывается следующей матрицей (аргументы \mathcal{P} -функций суть k и L):

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos kL & 0 & \sin kL & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos kL & 0 & \sin kL & 0 & 0 \\ -\sin kL & 0 & \cos kL & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin kL & 0 & \cos kL & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

⁸Подчеркнем, что этот вывод справедлив только при $\kappa \neq 0$, так как только в этом случае геометрическая длина элемента L связана с длиной траектории s в этом элементе соотношением $L = \frac{\kappa s}{\sqrt{K^2 + \kappa^2}} = \frac{\kappa s}{k}$.

$$= \begin{pmatrix} \mathcal{P}_0 & 0 & k\mathcal{P}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{P}_0 & 0 & k\mathcal{P}_1 & 0 & 0 \\ -k\mathcal{P}_1 & 0 & \mathcal{P}_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k\mathcal{P}_1 & 0 & \mathcal{P}_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

После выхода из такого элемента необходимо "вернуть" натуральную систему координат в исходное положение, повернув ее по часовой стрелке вокруг оси \vec{z} на угол φ , то есть умножить на \mathcal{R}^{-1} матрицу "пройденного" элемента.

5.3 Некоторые примеры

Рассмотрим в качестве примеров случаи движения частицы в квадрупольной линзе ($K = \kappa = 0$; магнитная ось элемента⁹ — прямая линия), обычном синхротронном магните ($K \neq 0, \kappa = 0$; магнитная ось — дуга окружности радиуса K^{-1}) и спиральном магните ($K, \kappa \neq 0$; магнитная ось — винтовая линия).

Квадрупольная линза

Она характеризуется тем, что все параметры ее магнитного поля, кроме градиента g , равны нулю; поэтому матрица \mathcal{A} орбитального движения значительно упрощается (это, в частности, проявляется в том, что вместо \mathcal{D} — можно использовать более простые \mathcal{P} -функции) и принимает следующий вид ($g_x = -g_y = g$):

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_0(g_x, L) & \mathcal{P}_1(g_x, L) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -g_x \mathcal{P}_1(g_x, L) & \mathcal{P}_0(g_x, L) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{P}_0(g_y, L) & \mathcal{P}_1(g_y, L) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g_y \mathcal{P}_1(g_y, L) & \mathcal{P}_0(g_y, L) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

и $\vec{B} = 0$. Опорная орбита совпадает с магнитной осью линзы, так что ориентация натуральной системы координат не изменяется при прохождении частицы через линзу.

Синхротронный поворотный магнит

⁹Относительно этой оси определяется разложение магнитного поля.

Для него имеем $B_{0y}, K, g \neq 0$, а $\kappa = B_{0x} = B_{0z} = q = 0$, так что $r = \tilde{q} = 0$ и $g_x = g + KB_{0y}$, $g_y = -g$. В этом случае связь движений по x и y исчезает, $\alpha_{I,II}^2$ переходят в g_x и g_y соответственно и тогда матрица A принимает такой вид:

$$A = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_0(g_x, L) & \mathcal{P}_1(g_x, L) & 0 & 0 & 0 & K\mathcal{P}_2(g_x, L) \\ -g_x\mathcal{P}_1(g_x, L) & \mathcal{P}_0(g_x, L) & 0 & 0 & 0 & K\mathcal{P}_1(g_x, L) \\ 0 & 0 & \mathcal{P}_0(g_y, L) & \mathcal{P}_1(g_y, L) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g_y\mathcal{P}_1(g_y, L) & \mathcal{P}_0(g_y, L) & 0 & 0 \\ -K\mathcal{P}_1(g_x, L) & -K\mathcal{P}_2(g_x, L) & 0 & 0 & 1 & -K^2\mathcal{P}_3(g_x, L) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а вектор \vec{B} в этом случае равен

$$B^T = (-CK^3\mathcal{P}_3(g_x, L), -CK^3\mathcal{P}_2(g_x, L), 0, 0, CK^4\mathcal{P}_4(g_x, L), -CK^2L).$$

Опорная орбита представляет собой дугу окружности радиуса K^{-1} и в случае, если $K = B_{0y}$ (напомним, что магнитное поле нормировано на величину $\frac{E_0}{e}$ и оно имеет ту же размерность, что и K), совпадает с магнитной осью; поэтому сопровождающий трехгранник орбиты одинаково ориентирован на входе и выходе из магнита и нет необходимости в каких-либо его "поворотах".

Спиральный магнит

Рассмотрим сначала предельный случай, для которого только κ , $B_{0y} \neq 0$, так что $g_x = g_y = -\kappa^2$, $r = 2\kappa$, $\Delta = B_{0y}$ и, следовательно, $\alpha_I^2 = \alpha_{II}^2 = -\kappa^2$. Магнитная ось в этом случае просто прямая линия, а матрица орбитального движения существенно упрощается (в частности, $k = \sqrt{K^2 + \kappa^2} \rightarrow \kappa$) и принимает следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_0(\kappa, L) & L\mathcal{P}_0(\kappa, L) & \kappa\mathcal{P}_1(\kappa, L) & \kappa L\mathcal{P}_1(\kappa, L) & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{P}_0(\kappa, L) & 0 & \kappa\mathcal{P}_1(\kappa, L) & 0 & 0 \\ -\kappa\mathcal{P}_1(\kappa, L) & -\kappa L\mathcal{P}_1(\kappa, L) & \mathcal{P}_0(\kappa, L) & L\mathcal{P}_0(\kappa, L) & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa\mathcal{P}_1(\kappa, L) & 0 & \mathcal{P}_0(\kappa, L) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Нетрудно видеть, что эта матрица соответствует произведению матрицы \mathcal{R} поворота на угол κL против часовой стрелки и матрицы дрейфового промежутка длины L (эти матрицы коммутируют и последовательность их перемножения не играет роли). Это подтверждает сделанный ранее вывод о необходимости "возвращения" угловой ориентации натуральной

системы координат после прохождения элемента, траектория в котором характеризуется кручением.

В рассматриваемом случае вектор \vec{B} равен (аргументы \mathcal{P} -функций суть κ и L)

$$B^T = B_{0y} \left(\mathcal{P}_2 - L\mathcal{P}_1, \frac{1}{2}(L\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1), -\kappa(L\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_3), \kappa\mathcal{P}_2, 0, 0 \right).$$

и определяет отклонение орбиты в этом элементе от опорной (совпадающей, конечно, с магнитной осью). Естественно, что необходимо "распространить" возврат ориентации натуральной системы координат после прохождения этого элемента и на вектор \vec{B} .

Перейдем к рассмотрению собственно спирального магнита. Для него $K = B_{0y} \neq 0$ и $\kappa \neq 0$, так что $g_x = -\kappa^2 + K^2$, $g_y = -\kappa^2$ и $r = 2\kappa$. Магнитная ось представляет собой винтовую линию, а матрица орбитального движения упрощается:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \mathcal{D}_0 + \kappa^2\mathcal{D}_2 & A_{12} &= \mathcal{D}_1 - \kappa^2\mathcal{D}_3 \\ A_{13} &= \kappa(\mathcal{D}_1 + \kappa^2\mathcal{D}_3) & A_{14} &= 2\kappa\mathcal{D}_2 \\ A_{15} &= 0 & A_{16} &= K(\mathcal{D}_2 - \kappa^2\mathcal{D}_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{21} &= -K^2\mathcal{D}_1 & A_{22} &= \mathcal{D}_0 + \kappa^2\mathcal{D}_2 \\ A_{23} &= -\kappa K^2\mathcal{D}_2 & A_{24} &= \kappa(\mathcal{D}_1 - g_x\mathcal{D}_3) \\ A_{25} &= 0 & A_{26} &= K(\mathcal{D}_1 + \kappa^2\mathcal{D}_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{31} &= -\kappa(\mathcal{D}_1 - g_x\mathcal{D}_3) & A_{32} &= -2\kappa\mathcal{D}_2 \\ A_{33} &= \mathcal{D}_0 + \kappa^2\mathcal{D}_2 & A_{34} &= \mathcal{D}_1 + g_x\mathcal{D}_3 \\ A_{35} &= 0 & A_{36} &= -2\kappa K\mathcal{D}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{41} &= \kappa K^2\mathcal{D}_2 & A_{42} &= -\kappa(\mathcal{D}_1 + \kappa^2\mathcal{D}_3) \\ A_{43} &= \kappa^2 K^2\mathcal{D}_3 & A_{44} &= \mathcal{D}_0 + \kappa^2\mathcal{D}_2 \\ A_{45} &= 0 & A_{46} &= -\kappa K(\mathcal{D}_2 + \kappa^2\mathcal{D}_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{51} &= -K(\mathcal{D}_1 + \kappa^2\mathcal{D}_3) & A_{52} &= -K(\mathcal{D}_2 - \kappa^2\mathcal{D}_4) \\ A_{53} &= -\kappa K(\mathcal{D}_2 + \kappa^2\mathcal{D}_4) & A_{54} &= -2\kappa K\mathcal{D}_3 \\ A_{55} &= 1 & A_{56} &= -K^2(\mathcal{D}_3 - \kappa^2\mathcal{D}_5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{61} &= 0 & A_{62} &= 0 \\ A_{63} &= 0 & A_{64} &= 0 \\ A_{65} &= 0 & A_{66} &= 1. \end{aligned}$$

Аргументы всех \mathcal{D} -функций суть α_I, α_{II} и L , причем

$$\alpha_{I,II}^2 = \frac{-(2\kappa^2 + K^2) \pm \sqrt{K^4 + 8\kappa^2 K^2}}{2}$$

В рассматриваемом случае ($K \neq 0$ и $\Delta B_y = 0$) вектор \vec{B} принимает такой вид:

$$\vec{B}^T = -CK^2 \left(K(\mathcal{D}_3 - \kappa^2 \mathcal{D}_5), K(\mathcal{D}_2 + \kappa^2 \mathcal{D}_4), -2\kappa K \mathcal{D}_4, \right. \\ \left. -\kappa K(\mathcal{D}_3 + \kappa^2 \mathcal{D}_5), -K^2(\mathcal{D}_4 - \kappa^2 \mathcal{D}_6), L \right).$$

Для высокоэнергетических частиц параметры спиральных магнитов обычно таковы, что $K \ll \kappa$. В этом случае $g_x \approx g_y = -\kappa^2$ и $\alpha_{I,II}$ являются чисто мнимыми величинами:

$$\alpha_{I,II} = iQ_{1,2}, \quad \text{где} \quad Q_{1,2} \approx \sqrt{\kappa^2 + K^2} \left(1 \mp \frac{K}{\sqrt{2}\kappa} - \frac{K^2}{2\kappa^2} \right).$$

Тогда нетрудно найти представление для всех \mathcal{D} -функций, входящих в орбитальную матрицу \mathcal{A} , через тригонометрические функции аргументов $Q_{1,2}L$. Это позволяет сравнить полученный результат с найденной Курантом [13] матрицей \mathcal{K} для спирального магнита в частном случае, если его длина такова, что $\sqrt{\kappa^2 + K^2}L = 2\pi m$ (спиральный магнит с поворотом в нем поля на угол, кратный 360°). Нетрудно заметить, что матрица \mathcal{K} содержит только суммы (разности) косинусов или синусов аргументов $\lambda_{1,2}L$, где "частоты" $\lambda_{1,2}$ в наших обозначениях имеют следующий вид:

$$\lambda_{1,2} = \kappa \left(\frac{K}{\sqrt{2}\kappa} \pm \frac{K^2}{2\kappa^2} \right), \quad \text{так что} \quad Q_{1,2} \approx \sqrt{\kappa^2 + K^2} (1 \mp \lambda_{1,2})$$

и при этом "частота" $\lambda_0 \approx \frac{K}{\sqrt{2}}$. Поэтому можно следующим образом преобразовать функции \mathcal{D} (их представление через гиперболические приведено в приложении):

$$\mathcal{D}_0 = \frac{\alpha_1^2 \cosh \alpha_1 L - \alpha_2^2 \cosh \alpha_2 L}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} = \frac{\alpha_1^2 \cos Q_1 L - \alpha_2^2 \cos Q_2 L}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} \approx \\ \approx \frac{\left(\kappa^2 + \sqrt{2}\kappa K + \frac{K^2}{2} \right) \cos(\sqrt{\kappa^2 + K^2} + \lambda_2)L}{2\sqrt{2}\kappa K} -$$

$$- \frac{\left(\kappa^2 - \sqrt{2}\kappa K + \frac{K^2}{2} \right) \cos(\sqrt{\kappa^2 + K^2} - \lambda_1)L}{2\sqrt{2}\kappa K} = \\ = \frac{\left(\kappa^2 + \sqrt{2}\kappa K + \frac{K^2}{2} \right) \cos \lambda_2 L - \left(\kappa^2 - \sqrt{2}\kappa K + \frac{K^2}{2} \right) \cos \lambda_1 L}{2\sqrt{2}\kappa K}.$$

Аналогично получаем, что

$$\mathcal{D}_2 = \frac{\cosh \alpha_1 L - \cosh \alpha_2 L}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} = \frac{\cos Q_1 L - \cos Q_2 L}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} = \dots = \frac{\cos \lambda_1 L - \cos \lambda_2 L}{2\sqrt{2}\kappa K},$$

так что

$$\mathcal{A}_{11} = \mathcal{A}_{22} \approx \mathcal{A}_{33} = \mathcal{A}_{44} = \mathcal{D}_0 + \kappa^2 \mathcal{D}_2 = \dots = \\ = \frac{\cos \lambda_1 L + \cos \lambda_2 L}{2} = \mathcal{K}_{11} = \mathcal{K}_{22} = \mathcal{K}_{33} = \mathcal{K}_{44}$$

и

$$\mathcal{A}_{41} = -\mathcal{A}_{23} = K^2 \mathcal{A}_{14} = -K^2 \mathcal{A}_{32} = 2\kappa K^2 \mathcal{D}_2 = \\ = \lambda_0 (\cos \lambda_1 L - \cos \lambda_2 L) = \mathcal{K}_{41} = -\mathcal{K}_{23} = \lambda_0^2 \mathcal{K}_{14} = -\lambda_0^2 \mathcal{K}_{32}.$$

Совершенно аналогично показывается соответствие остальных элементов матрицы \mathcal{K} элементам \mathcal{A} , так что 4×4 часть матрицы \mathcal{A} переходит в матрицу \mathcal{K} . Отметим, что ее элементы, выражающиеся через разности тригонометрических функций очень близких друг к другу значений аргументов, будут находиться с плохой численной точностью при использовании их явного представления. Вычисление же этих выражений с помощью их представления через \mathcal{D} -функции существенно повышает точность результатов.

6 Приложение: \mathcal{P} - и \mathcal{D} -функции

Приведем определения и краткую сводку свойств функций, использованных в настоящей работе. Более полный перечень можно найти в [10] и последующих публикациях.

Напомним сначала формулы, связывающие введенные функции с обычными гиперболическими, откуда однозначно видно, почему такие функции удобно использовать в рассматриваемой задаче — именно через них строятся решения уравнений движения заряженной частицы в

магнитных полях элементов ускорителей и накопителей¹⁰:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0(Q, s) &= \cosh Qs, \\ \mathcal{P}_1(Q, s) &= \frac{\sinh Qs}{Q} = s \left(\frac{\sinh Qs}{Qs} \right), \\ \mathcal{P}_2(Q, s) &= \frac{1 - \cosh Qs}{Q^2} = s^2 \left(\frac{1 - \cosh Qs}{(Qs)^2} \right), \\ \mathcal{P}_3(Q, s) &= \frac{s - \frac{\sinh Qs}{Q}}{Q^2} = s^3 \left(\frac{1 - \frac{\sinh Qs}{Qs}}{(Qs)^2} \right) \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Аналогично:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0(Q_1, Q_2, s) &= \frac{Q_1^2 \cosh Q_1 s - Q_2^2 \cosh Q_2 s}{Q_1^2 - Q_2^2}, \\ \mathcal{D}_1(Q_1, Q_2, s) &= \frac{Q_1 \sinh Q_1 s - Q_2 \sinh Q_2 s}{Q_1^2 - Q_2^2}, \\ \mathcal{D}_2(Q_1, Q_2, s) &= \frac{-\cosh Q_1 s + \cosh Q_2 s}{Q_1^2 - Q_2^2}, \\ \mathcal{D}_3(Q_1, Q_2, s) &= \frac{-\frac{\sinh Q_1 s}{Q_1} + \frac{\sinh Q_2 s}{Q_2}}{Q_1^2 - Q_2^2} \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Перейдем к формальному определению \mathcal{P} - и \mathcal{D} -функций. Для этого рассмотрим одиночные и двойные ряды следующего вида:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i(Q, s) &= s^i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(Q^2 s^2)^j}{(2j+i)!} \quad \text{и} \\ \mathcal{D}_i(Q_1, Q_2, s) &= s^i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+i)!} \sum_{k=0}^j (Q_1^2 s^2)^{j-k} (Q_2^2 s^2)^k \end{aligned}$$

¹⁰В цитируемой статье \mathcal{P} - и \mathcal{D} -функции определялись так, чтобы быть максимально "похожими" на тригонометрические функции. В последствии оказалось более удобным определить их подобно гиперболическим функциям. С этим могут оказаться связаны некоторые разночтения формул в настоящей и цитируемой работах. Практика использования \mathcal{P} - и \mathcal{D} -функций подтверждает большее удобство приводимых ниже определений и связанных с ними формул.

и при этом

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i(0, s) &= \mathcal{D}_i(0, 0, s) = \frac{s^i}{i!} \\ \text{и} \\ \mathcal{P}_i(Q, 0) &= \mathcal{D}_i(Q_1, Q_2, 0) = \begin{cases} 1 \text{ при } i = 0; \\ 0 \text{ при } i \neq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что \mathcal{D} -функции симметричны относительно аргументов Q_1 и Q_2 , а также переходят в соответствующие \mathcal{P} -функции, если какой-либо из них равен нулю:

$$\mathcal{D}_i(Q_1, Q_2, s) = \mathcal{D}_i(Q_2, Q_1, s) \quad \text{и} \quad \mathcal{D}_i(Q, 0, s) = \mathcal{P}_i(Q, s). \quad (4)$$

Для нас важны связывающие их следующие рекуррентные соотношения¹¹:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{i+2}(Q, s) &= \frac{1}{Q^2} \left[\mathcal{P}_i(Q, s) - \frac{s^i}{i!} \right], \quad \text{и обратно} \\ \mathcal{P}_i(Q, s) &= \left[\frac{s^i}{i!} + Q^2 \mathcal{P}_{i+2}(Q, s) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Еще более полезными оказываются соотношения, связывающие произвольную \mathcal{P} -функцию с четным (нечетным) индексом только через \mathcal{P}_0 (\mathcal{P}_1):

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{2i}(Q, s) &= \frac{1}{Q^{2i}} \left[\mathcal{P}_0(Q, s) - \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(Qs)^{2k}}{(2k)!} \right] \quad \text{и} \\ \mathcal{P}_{2i+1}(Q, s) &= \frac{1}{Q^{2i}} \left[\mathcal{P}_1(Q, s) - s \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(Qs)^{2k}}{(2k+1)!} \right]. \end{aligned}$$

Для \mathcal{D} -функций имеем аналогично:

$$\mathcal{D}_{i+2}(Q_1, Q_2, s) = \frac{\mathcal{D}_i(Q_1, Q_2, s) - \mathcal{P}_i(Q_2, s)}{Q_1^2} = \frac{\mathcal{D}_i(Q_1, Q_2, s) - \mathcal{P}_i(Q_1, s)}{Q_2^2}$$

¹¹Эти соотношения очень полезны в практических вычислениях, т.к. они позволяют найти все \mathcal{P}_i -функции по простым алгебраическим соотношениям после того, как с помощью рядов найдены только \mathcal{P}_i с максимальными четным и нечетным значениями индексов. Отметим также, что эти ряды сходятся очень быстро, что определяется обычно малыми значениями аргумента QL при расчетах для реальных элементов.

и обратно:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_i(Q_1, Q_2, s) &= \mathcal{P}_i(Q_2, s) + Q_1^2 \mathcal{D}_{i+2}(Q_1, Q_2, s) = \\ &= \mathcal{P}_i(Q_1, s) + Q_2^2 \mathcal{D}_{i+2}(Q_1, Q_2, s). \end{aligned} \quad (6)$$

Приведем формулы, выражающие \mathcal{D} -функции только через \mathcal{P} -:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_i(Q_1, Q_2, s) &= \frac{Q_1^2 \mathcal{P}_i(Q_1, s) - Q_2^2 \mathcal{P}_i(Q_2, s)}{Q_1^2 - Q_2^2}, \\ \mathcal{D}_{i+2}(Q_1, Q_2, s) &= \frac{\mathcal{P}_i(Q_1, s) - \mathcal{P}_i(Q_2, s)}{Q_1^2 - Q_2^2} \end{aligned}$$

и, в частности,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0(Q, Q, s) &= \mathcal{P}_0(Q, s) + \frac{1}{2} Q^2 s \mathcal{P}_1(Q, s) \quad \text{и} \\ \mathcal{D}_i(Q, Q, s) &= \frac{1}{2} [s \mathcal{P}_{i-1}(Q, s) + (2-i) \mathcal{P}_i(Q, s)] \quad \text{для } i \geq 1. \end{aligned}$$

Следующие соотношения демонстрируют важное свойство дифференцирования рассматриваемых функций:

$$\frac{d\mathcal{P}_i(Q, s)}{ds} = \mathcal{P}_{i-1}(Q, s) \quad \text{и} \quad \frac{d\mathcal{D}_i(Q_1, Q_2, s)}{ds} = \mathcal{D}_{i-1}(Q_1, Q_2, s)$$

и, обратно, их интегрирования:

$$\begin{aligned} \int_0^s \mathcal{P}_i(Q, x) dx &= \mathcal{P}_{i+1}(Q, s) \quad \text{и} \\ \int_0^s \mathcal{D}_i(Q_1, Q_2, x) dx &= \mathcal{D}_{i+1}(Q_1, Q_2, s). \end{aligned}$$

В более общем случае имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^s x^j \mathcal{P}_i(Q, x) dx &= j! \sum_{k=0}^j \frac{(-1)^k}{(j-k)!} s^{j-k} \mathcal{P}_{i+k+1}(Q, s), \\ \int_0^s x^j \mathcal{D}_i(Q_1, Q_2, x) dx &= j! \sum_{k=0}^j \frac{(-1)^k}{(j-k)!} s^{j-k} \mathcal{D}_{i+k+1}(Q_1, Q_2, s). \end{aligned}$$

Более общие формулы, связывающие \mathcal{D} -функции с гиперболическими и очень полезные в последующих приложениях имеют следующий вид

(эти формулы справедливы для всех $k \geq 0$ и легко доказываются):

$$\begin{aligned} \frac{Q_2^{2k} \cosh Q_1 s - Q_1^{2k} \cosh Q_2 s}{Q_1^2 - Q_2^2} &= \\ &= Q_1^{2k} Q_2^{2k} \mathcal{D}_{2k+2} + \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^j (Q_1 Q_2 s)^{2j-2}}{(2j-2)!} \sum_{i=0}^{k-j} (Q_1^2)^{k-j-i} (Q_2^2)^i, \\ \frac{Q_2^{2k+1} \sinh Q_1 s - Q_1^{2k+1} \sinh Q_2 s}{Q_1^2 - Q_2^2} &= \\ &= Q_1^{2k+1} Q_2^{2k+1} \mathcal{D}_{2k+3} + \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^j (Q_1 Q_2 s)^{2j-1}}{(2j-1)!} \sum_{i=0}^{k-j} (Q_1^2)^{k-j-i} (Q_2^2)^i. \end{aligned}$$

Некоторым соотношениям для \mathcal{D} - и \mathcal{P} -функций можно дать наглядную геометрическую интерпретацию.

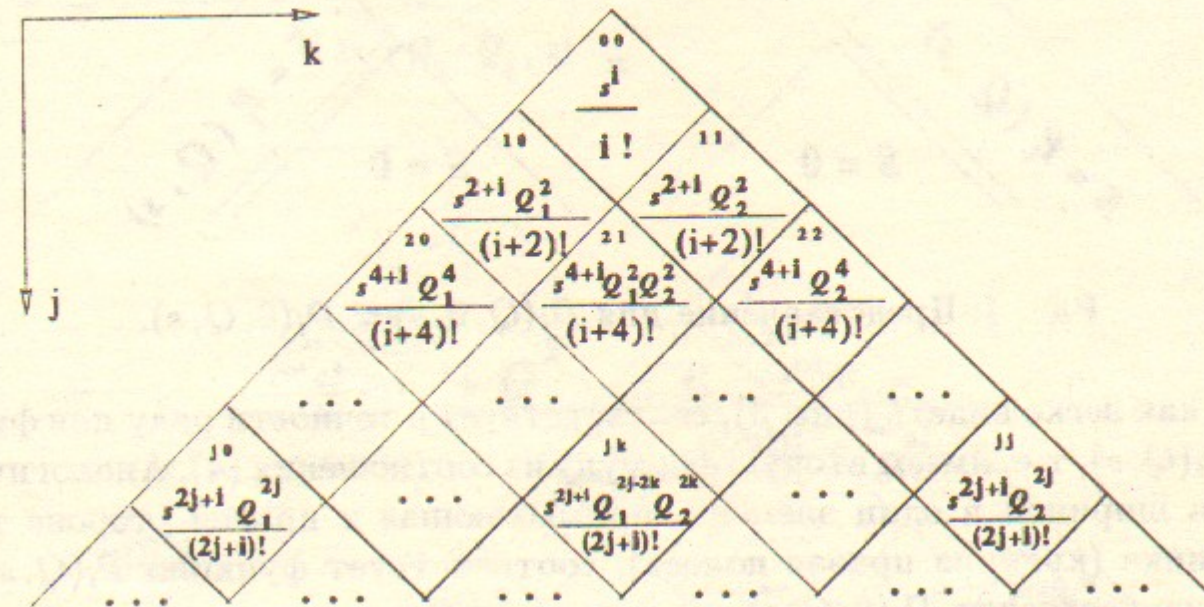


Рис. 3: Представление для \mathcal{D}_i .

Функции \mathcal{D}_i поставим в соответствие треугольник, построенный из "элементов" аналогично треугольнику Паскаля. Положение элемента в треугольнике будем характеризовать номером ряда j , отсчитываемым от вершины треугольника, и местом в этом ряду k , отсчитываемым от левой стороны (рис. 3). Нетрудно видеть, что в j -том ряду треугольника расположено $j+1$ элементов, а количество рядов бесконечно. Каждому элементу (j, k) припишем "площадь" $S_{j,k}^{(i)} = \frac{s^i}{(2j+i)!} (Q_1^2 s^2)^{j-k} (Q_2^2 s^2)^k$. Тогда суммирование двойного ряда при определении \mathcal{D}_i есть просто вычисление общей площади треугольника.

Нетрудно видеть, что при $Q_1 = Q_2 = 0$ площади всех элементов, кроме $(0, 0)$, находящегося в вершине треугольника, зануляются и тем самым подтверждается выражение для $\mathcal{D}_i(0, 0, s)$. Аналогично, при $s = 0$ зануляются площади всех элементов, включая также и вершинный, если только $i \neq 0$; в последнем случае его площадь равна 1, т.е. получили формулу (4).

Свойство (4) симметрии \mathcal{D} -функции относительно аргументов Q_1 и Q_2 следует из того, что при перестановке этих аргументов элементы в каждой строке треугольника просто меняются местами в соответствии с правилом $(j, k) \iff (j, j - k)$.

Пусть теперь один из аргументов, например второй, равен нулю. Тогда занулятся площади всех элементов, кроме "полосы" шириной в один элемент, примыкающей к левой стороне треугольника. Площадь этой по-

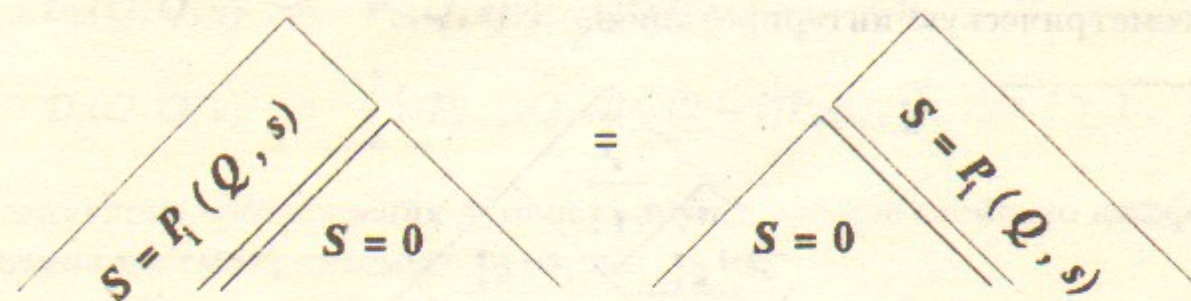
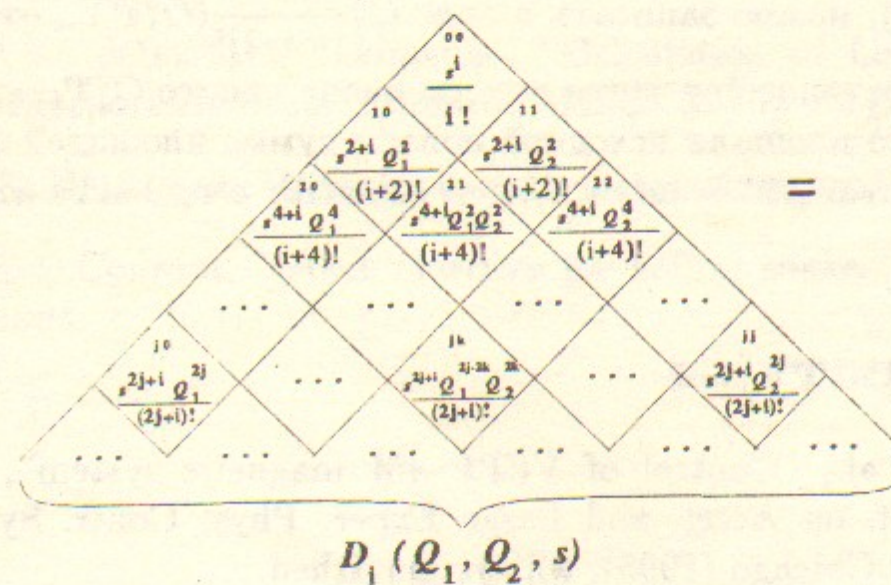


Рис. 4: Представление для $\mathcal{D}_i(Q, 0, s) = \mathcal{D}_i(0, Q, s)$.

лосы, как легко видеть (рис. 3), соответствует в точности ряду для функции $\mathcal{P}_i(Q, s)$, т.е. имеем вторую формулу из соотношения (4). Аналогично, полоса шириной в один элемент, примыкающая к правой стороне треугольника (крайняя правая полоса), соответствует функции $\mathcal{P}_i(Q, s)$, в которую переходит $\mathcal{D}_i(0, Q, s)$.

"Отделим" крайнюю левую полосу от треугольника. Оставшийся треугольник характеризуется тем, что площади всех его элементов пропорциональны $Q_2^2 s^2$, а вся их нумерация "сдвигается на единицу вниз": $(j, k) \rightarrow (j - 1, k - 1)$. При этом площадь каждого элемента (рис. 5) можно записать в виде $Q_2^2 \frac{s^{i+2}}{[2j + (i + 2)]!} (Q_1^2 s^2)^{j-k} (Q_2^2 s^2)^k$, откуда видно, что площадь оставшегося треугольника равна просто $Q_2^2 \mathcal{D}_{i+2}$; следовательно, равенство площади исходного треугольника сумме площадей отделенной полосы и оставшегося треугольника означает в точности первое соотношение из (7). Естественно, справедливо аналогичное соотношение, связывающее площади крайней правой полосы ($\mathcal{P}_i(Q_2, s)$) и оставшегося треугольника ($Q_1^2 \mathcal{D}_{i+2}$) - вторая формула из (7).



$\mathcal{D}_i(Q_1, Q_2, s)$

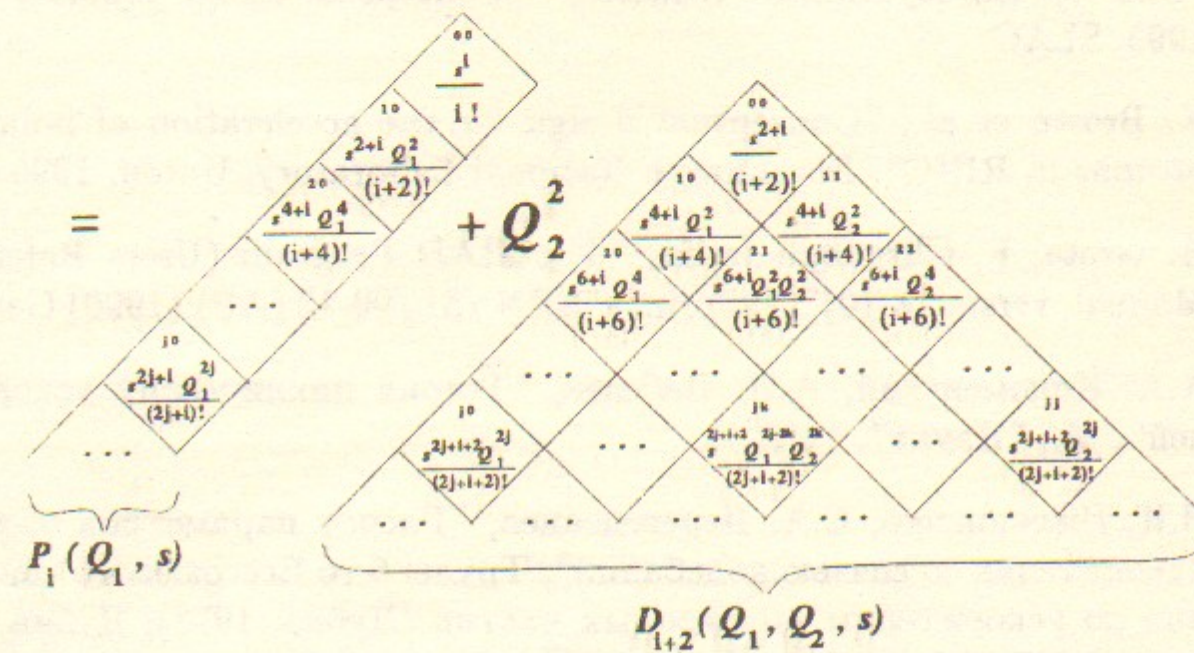


Рис. 5: Представление для $\mathcal{D}_i(Q_1, Q_2, s) = \mathcal{P}_i(Q_1, s) + Q_2^2 \mathcal{D}_{i+2}(Q_1, Q_2, s)$.

Рассмотрим теперь крайнюю левую полосу саму по себе. Если от нее "отделить" вершинный элемент с площадью $\frac{s^i}{i!}$, то площади оставшихся элементов пропорциональны $Q_1^2 s^2$, а вся их нумерация "сдвигается на единицу вниз": $(0, k) \rightarrow (0, k-1)$. При этом площадь элемента, находящегося на позиции $(0, k)$, можно записать в виде $Q_1^2 \frac{s^{i+2}}{(i+2)!} (Q_1^2 s^2)^k$, откуда видно, что площадь оставшейся части полосы равна просто $Q_1^2 \mathcal{P}_{i+2}$; следовательно, равенство площади исходной полосы сумме площадей отделенного элемента и оставшейся части полосы означает в точности второе соотношение из (5).

Список литературы

- [1] S.E. Karnaev et al., "Control of VEPP-4M magnetic system", talk on 4-th Int. Conf. on Accel. and Large Exper. Phys. Contr. System (ICALEPCS-95), Chicago (1995), will be published.
- [2] "PEP-II. An asymmetric B factory", Conceptual design report", June 1993, SLAC.
- [3] K. Brown et al., "Conceptual design for the acceleration of polarized protons in RHIC", Brookhaven National Laboratory, Upton, 1995.
- [4] H. Grote, F. Christoph Iselin, "The MAD Program (Users Reference Manual, version 8.10)", Preprint CERN /SL/90-13 (AP) (1990) Geneva.
- [5] А.А. Коломенский, А.П. Лебедев, "Теория циклических ускорителей", М., "Наука", 1962.
- [6] В.Н. Литвиненко, Е.А. Переведенцев, "Расчет параметров пучка в накопителях со связью колебаний", Труды 6-го Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц (Дубна, 1978); Дубна, том 2, стр. 285-288, 1979.
- [7] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, "Теория поля", М., "Наука", 1973.
- [8] G.Ripken, "Non-linear canonical equations of coupled synchro-betatron motion and their solution within the framework of a non-linear 6-dimensional (symplectic) tracking program for ultra-relativistic protons", Preprint DESY 85-084 (1985) Hamburg.

- [9] H.Mais, G.Ripken, "Theory of coupled synchro-betatron oscillations (I)", Preprint DESY M-82-05 (1982) Hamburg.
- [10] Yu.Eidelman, V.Yakimenko, "Calculation of orbital and spin Lie operators", Part. Accel., 50 (1995) 261.
- [11] Yu.Eidelman, V.Yakimenko, "Calculation of Lie operators for beam transport elements", Preprint CERN SL/93-52 (AP) (1993) Geneva.
- [12] К. Штеффен, "Оптика пучков высокой энергии", М., "Мир", 1969.
- [13] E.D.Courant, "Orbit matrices for helical snakes", Note RHIC/AP/47, 1994.