

33

37

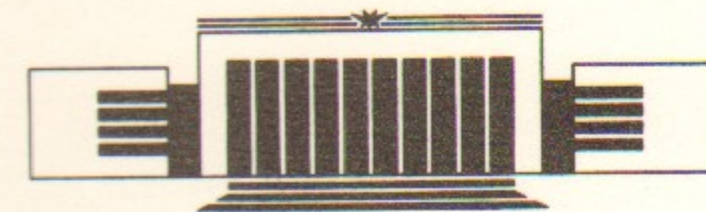


Государственный научный центр  
Российской Федерации  
Институт ядерной физики  
им. Г.И. Будкера

Е.Б. Левичев, В.В. Сажаев

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА  
СЕКСТУПОЛЬНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ  
МАЛЫМ ЧИСЛОМ АЗИМУТАЛЬНЫХ  
ГАРМОНИК

ИЯФ 95-58



НОВОСИБИРСК

# Приближение потенциала секstupольного возмущения малым числом азимутальных гармоник

Е.Б.Левичев, В.В.Сажеев

ГНЦ РФ "Институт ядерной физики им.Г.И.Будкера СО РАН", 630090, Новосибирск, Russia

## Аннотация

Изучение движения частицы в нелинейных магнитных полях и понимание процессов, формирующих фазовое пространство, является важной задачей при получении требуемой динамической апертуры проектируемых специализированных источников синхротронного излучения (СИ), для которых характерны значительные поля секstupольных линз, компенсирующих натуральный хроматизм. В статье на примере накопителя электронов СИБИРЬ-2 исследуется возможность достаточно простого описания одночастичной динамики несколькими значащими гармониками потенциала возмущения. Показано, что величина главных (резонансных) гармоник, задающих в основном поведение системы, определяется натуральным хроматизмом и горизонтальным эмиттансом. Для современных источников СИ, состоящих из ахроматических поворотов и бездисперсионных участков эта величина достаточно слабо зависит от сил и расположения секstupолей, компенсирующих хроматизм. Нелинейное уравнение движения частицы решается аналитически при помощи канонической теории возмущений Ли с учетом нужного числа порядков приближения. Полученное решение является степенным рядом по переменной действия с коэффициентами, зависящими от невозмущенных бетатронных частот и амплитуд азимутальных гармоник. На основе рассмотрения свойств этих коэффициентов делается вывод о границах применения "упрощенного" описания задачи малым числом выделенных гармоник. Сравнение фазового портрета движения, полученного аналитически (для сумм многих гармоник и с несколькими выделенными), с результатами моделирования на ЭВМ показывает хорошее совпадение практически до границы устойчивого движения частицы.

©ГНЦ РФ "Институт ядерной физики им.Г.И.Будкера СО РАН"

## 1 Введение

Специализация магнитной структуры большинства работающих и проектируемых современных источников СИ предполагает во-первых, наличие ахроматических поворотов и бездисперсионных промежутков для постановки сильнополевых излучающих устройств (сверхпроводящих змеек), а во-вторых, минимизацию горизонтального эмиттанса пучка для получения экстремальной яркости излучения [1].

Минимизация эмиттанса приводит к использованию жесткой фокусировки, значительным биениям  $\beta$  - функций и большому натуральному хроматизму. Компенсировать хроматизм приходится сильными секstupольными линзами, которые становятся основными по значимости нелинейностями и определяющим образом влияют на одночастичную динамику, прежде всего, ограничивая область устойчивого движения и уменьшая полезную апертуру. Поэтому в статье на примере накопителя СИБИРЬ-2 (энергия 2.5 ГэВ) изучается динамика ускорителя электронов со специфичной магнитной структурой источника СИ и сильными сосредоточенными секstupолями. Нужно отметить, что наличие в реальной структуре других нелинейностей, вызванных несовершенством ведущего поля или наличием змеек и ондуляторов, хотя и может уменьшить динамическую апертуру, не приводит к появлению принципиально новых эффектов - действие хроматических секstupолей является преобладающим.

Так как известно, что для секstupольного потенциала возмущения аналитическое изучение требует учета высоких порядков приближения

(по параметру малости), для построения приближенных фазовых траекторий системы нами был выбран метод канонических преобразований Ли в форме рекуррентных рядов Дебри. Рекуррентные соотношения были запрограммированы на языке алгебраических вычислений REDUCE [2] и позволили получить решения задачи до требуемого порядка.

В нашем случае эти решения являются степенными рядами амплитуд бетатронных колебаний (или переменных действия)  $A_{x,z} \sim \sqrt{J_{x,z}}$ . Коэффициенты рядов сложным образом зависят от невозмущенной частоты колебаний и азимутальных фурье-гармоник секступольного потенциала возмущения, которые можно подразделить на пять типов. С увеличением порядка приближения сложность коэффициентов катастрофически увеличивается, делая невозможным не только их изучение, но и манипулирование с помощью REDUCE. Естественным при этом является желание упростить выражения, выделяя малое количество (идеально - одну) гармоник в каждом из пяти типов. В работе делается попытка такого упрощения, а также изучаются величины амплитуд главных гармоник и их зависимость от основных параметров накопителя.

## 2 Гармоническое представление гамильтониана

Движение частицы в циклическом ускорителе с учетом квадратичной нелинейности магнитного поля подчиняется уравнениям

$$\begin{aligned} x'' + k_x(s)x &= \frac{1}{2}k_2(s)(x^2 - z^2), \\ z'' + k_z(s)z &= -k_2(s)xz, \end{aligned} \quad (1)$$

которые являются каноническими по отношению к переменным  $(x, p_x = dx/ds, z, p_z = dz/ds)$  с гамильтонианом

$$\begin{aligned} H(x, p_x, z, p_z; s) &= \frac{1}{2}(p_x^2 + p_z^2) + \frac{1}{2}(k_x^2(s)x^2 + k_z^2(s)z^2) \\ &+ \frac{1}{6}k_2(s)(x^3 - 3xz^2). \end{aligned} \quad (2)$$

Первые два слагаемых этого гамильтониана отвечают невозмущенной (линейной) задаче, а третье описывает секступольное возмущение. В выражениях (1) и (2) используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} k_x(s) &= 1/\rho(s) - k_z(s) && \text{- горизонтальная фокусировка,} \\ 1/\rho(s) &= B_z(s)/B\rho && \text{- кривизна траектории,} \\ k_z(s) &= \frac{1}{B\rho} \partial B_z(s)/\partial x && \text{- вертикальная фокусировка,} \\ k_2(s) &= \frac{1}{B\rho} \partial^2 B_z(s)/\partial^2 x && \text{- приведенная сила секступоля.} \end{aligned}$$

Перейдем к переменным "угол-действие"  $(\phi_x, J_x, \phi_z, J_z; s)$  при помощи производящей функции [3]

$$F_1(x, z, \phi_x, \phi_z; s) = -\frac{x^2}{2\beta_x(s)}(\text{tg}\Psi_x + \alpha_x(s)) - \frac{z^2}{2\beta_z(s)}(\text{tg}\Psi_z + \alpha_z(s)), \quad (3)$$

где  $\Psi_x = \phi_x + \psi_x - \nu_x \frac{s}{R}$ ,  $\nu_x$  и  $\psi_x = \int_0^s \frac{ds}{\beta(s)}$  - частота и набег фазы бетатронных колебаний,  $\alpha_x(s) = -1/2\beta'_x(s)$  и  $R$  - средний радиус кольца. Аналогично для вертикальной координаты  $z$ . Использование производящей функции такого вида приводит к тому, что в новых переменных невозмущенный гамильтониан оказывается гамильтонианом двумерного осциллятора с частотами колебаний  $\nu_{x,z}/R$ :

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial F_1}{\partial x} = -\frac{x}{\beta_x(s)} \text{tg}\Psi_x, \\ J_x &= -\frac{\partial F_1}{\partial \phi_x} = \frac{x^2}{2\beta_x(s)} \text{csc}^2 \Psi_x, \\ \bar{H} &= H + \frac{\partial F_1}{\partial s} = \frac{1}{R}(\nu_x J_x + \nu_z J_z). \end{aligned} \quad (4)$$

В последних выражениях для простоты было принято, что точка наблюдения является точкой зеркальной симметрии как линейной оптики, так и размещения секступольных линз, и  $\alpha_{x,z} = 0$ . Если теперь ввести азимутальную координату  $\theta = s/R$  то исходный гамильтониан (2) запишется в удобном для дальнейшего использования виде

$$\begin{aligned} H(J_x, \phi_x, J_z, \phi_z; \theta) &= H_0(J_x, J_z) + H_1(J_x, \phi_x, J_z, \phi_z; \theta), \\ H_0 &= \nu_x J_x + \nu_z J_z, \\ H_1 &= f_1(\theta) J_x^{3/2} (\cos 3\Psi_x + 3 \cos \Psi_x) \\ &- 3f_2(\theta) J_x^{1/2} J_z (2 \cos \Psi_x + \cos \Psi_+ + \cos \Psi_-), \end{aligned} \quad (5)$$

здесь  $H_0$  отвечает невозмущенной задаче, а  $H_1$  описывает малое возмущение;  $\Psi_{\pm}$  определяются как:

$$\begin{aligned}\Psi_{\pm} &= \phi_{\pm} + \psi_{\pm} - \nu_{\pm}\theta, \\ \phi_{\pm} &= \phi_x \pm 2\phi_z, \\ \nu_{\pm} &= \nu_x \pm 2\nu_z.\end{aligned}$$

Секступольный потенциал  $f_{1,2}(\theta)$  будем рассматривать в приближении тонких линз:

$$\begin{aligned}f_1(\theta) &= \frac{\sqrt{2}}{12} \sum_k (\beta_x^{3/2} k_2 l)_k \delta(\theta - \theta_k), \\ f_2(\theta) &= \frac{\sqrt{2}}{12} \sum_k (\beta_x^{1/2} \beta_z k_2 l)_k \delta(\theta - \theta_k),\end{aligned}\quad (6)$$

суммирование ведется по  $k$  секступольным линзам с интегральной силой  $(k_2 l)_k$ .

Учитывая, что гамильтониан (5) является периодической функцией азимутальной переменной  $\theta$ , его можно разложить в ряд Фурье ( $j = 1, 3$ ):

$$\begin{aligned}f_1(\theta) \cos j\Psi_x(\phi, \theta) &= \sqrt{8} \sum_m A_{jm} \cos(j\phi_x - m\theta), \\ f_2(\theta) \cos \Psi_x(\phi, \theta) &= \sqrt{8} \sum_m B_{1m} \cos(\phi_x - m\theta), \\ f_2(\theta) \cos j\Psi_{\pm}(\phi, \theta) &= \sqrt{8} \sum_m B_{\pm m} \cos(j\phi_{\pm} - m\theta),\end{aligned}\quad (7)$$

где амплитуды пяти соответствующих гармоник определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}A_{jm} &= \frac{1}{48\pi} \sum_k [(\beta_x^{3/2} k_2 l) \cos(j(\psi_x - \nu_x\theta) + m\theta)]_k, \\ B_{1m} &= \frac{1}{48\pi} \sum_k [(\beta_x^{1/2} \beta_z k_2 l) \cos(\psi_x - \nu_x\theta + m\theta)]_k, \\ B_{\pm m} &= \frac{1}{48\pi} \sum_k [(\beta_x^{1/2} \beta_z k_2 l) \cos(\psi_{\pm} - \nu_{\pm}\theta + m\theta)]_k.\end{aligned}\quad (8)$$

И, подставляя (7) в (5), окончательно получим гамильтониан в гармоническом представлении:

$$\begin{aligned}H &= \nu_x J_x + \nu_z J_z \\ &+ (2J_x)^{3/2} \sum_m [3A_{1m} \cos(\phi_x - m\theta) + A_{3m} \cos(3\phi_x - m\theta)] \\ &- 3(2J_x)^{1/2} 2J_z \sum_m [2B_{1m} \cos(\phi_x - m\theta) \\ &+ B_{+m} \cos(\phi_+ - m\theta) + B_{-m} \cos(\phi_- - m\theta)].\end{aligned}\quad (9)$$

Использование гармонического вида гамильтониана по сравнению с интегральным (замкнутым) выражением представляется нам более удобным по следующей причине: как будет показано далее, все нелинейные эффекты (зависимость частоты колебаний от амплитуды, искажение инвариантных поверхностей, ограничение устойчивой области и т.д.) в конечном счете вызываются выделенными азимутальными гармониками, управляя которыми можно значительно улучшить ситуацию и уменьшить нежелательное влияние нелинейностей.

Впервые гармоническое представление гамильтониана (9) и решение двумерной задачи до второго порядка было, по-видимому, получено в [6]. Альтернативный формализм с замкнутым видом гамильтониана представлен, например, в [4], где основные характеристики движения частицы во втором порядке с учетом квадратичной нелинейности поля выражаются через т.н. пять "функций возмущения", введенных в [5]. Функции возмущения характеризуют искажение фазового эллипса частицы в зависимости от азимута. Они могут быть выражены через азимутальные гармоники потенциала возмущения и являются частным видом (второй порядок) рядов решения, приводимых ниже.

### 3 Используемая модель

Для проверки аналитических выражений и оценок мы будем пользоваться численным моделированием. В качестве модели мы рассмотрим структуру специализированного источника СИ СИБИРЬ-2 [7] с оптимизированным эмиттансом, как наиболее знакомую авторам.

Нами также изучались другие современные источники СИ (такие как ELETTRA, APS, RIKEN и т.д. [8]) и, поскольку результаты изучения вполне соответствуют выводам, полученным в данной работе, для иллюстраций мы в основном ограничимся только случаем СИБИРИ-2.

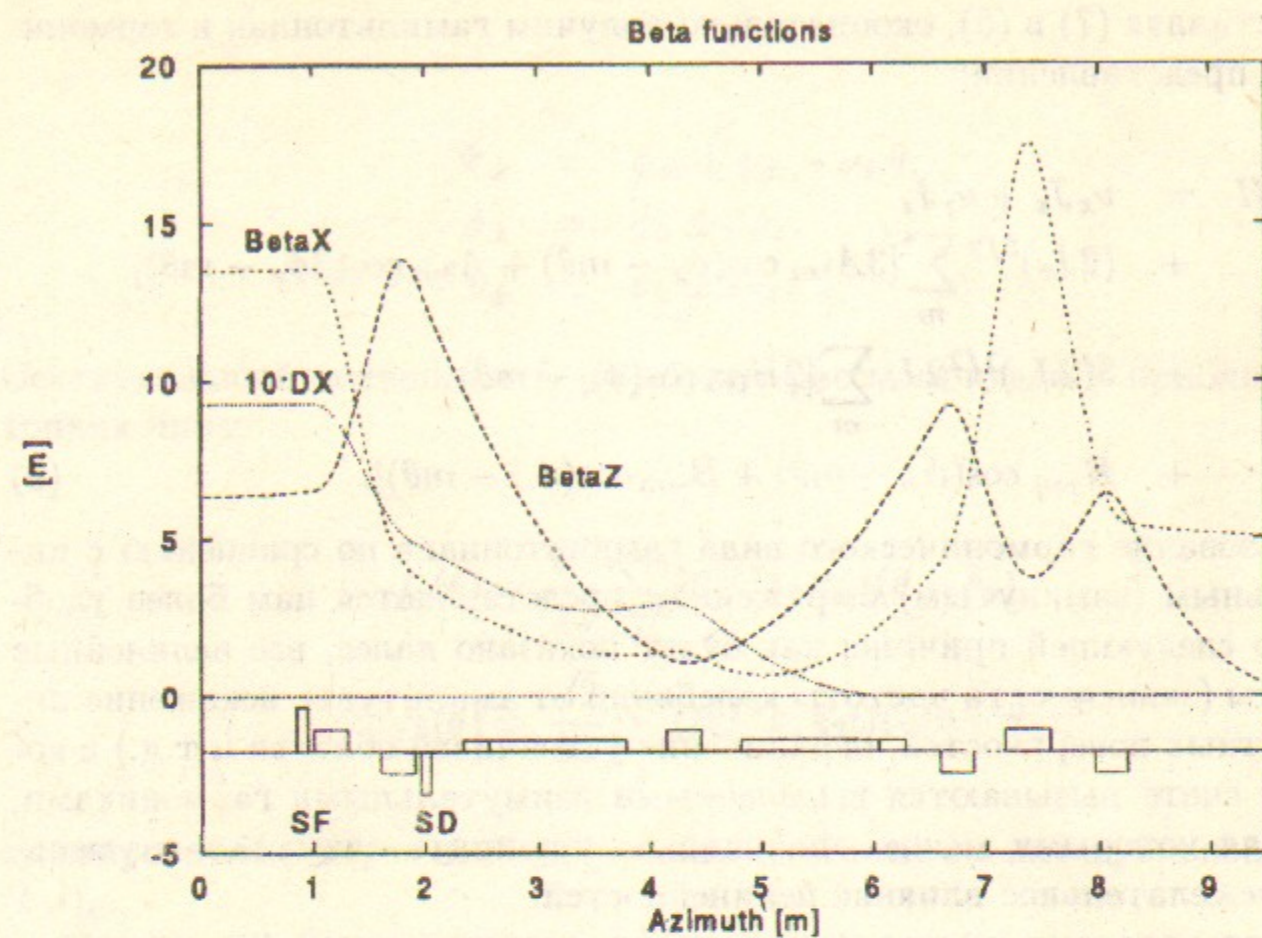


Рис. 1: Структурные функции СИБИРИ-2.

На рис.1 показаны структурные функции и расположение магнитных элементов для 1/2 ячейки периодичности СИБИРИ-2. Точки начала и конца ячейки являются точками зеркальной симметрии. Основные относящиеся к делу параметры приводятся в таблице:

Энергия (ГэВ)	2.5
Длина (м)	124.128
Число периодов	6
$\nu_x, \nu_z$	1.294, 1.116
$\xi_x, \xi_z$	-3.99, -3.98
$\epsilon_x$ (пм)	76
$\beta_{x0}$ (м)	14.0
$\beta_{z0}$ (м)	7.0
$\eta_{x0}$ (м)	0.9

Здесь бетатронные частоты  $\nu_{x,z}$  и натуральный хроматизм  $\xi_{x,z}$  даны в расчете на одну ячейку периодичности, а структурные функции, помеченные индексом 0, относятся к азимуту, где в дальнейшем будут

приводятся фазовые портреты движения; для рис.1 это соответствует началу структуры.

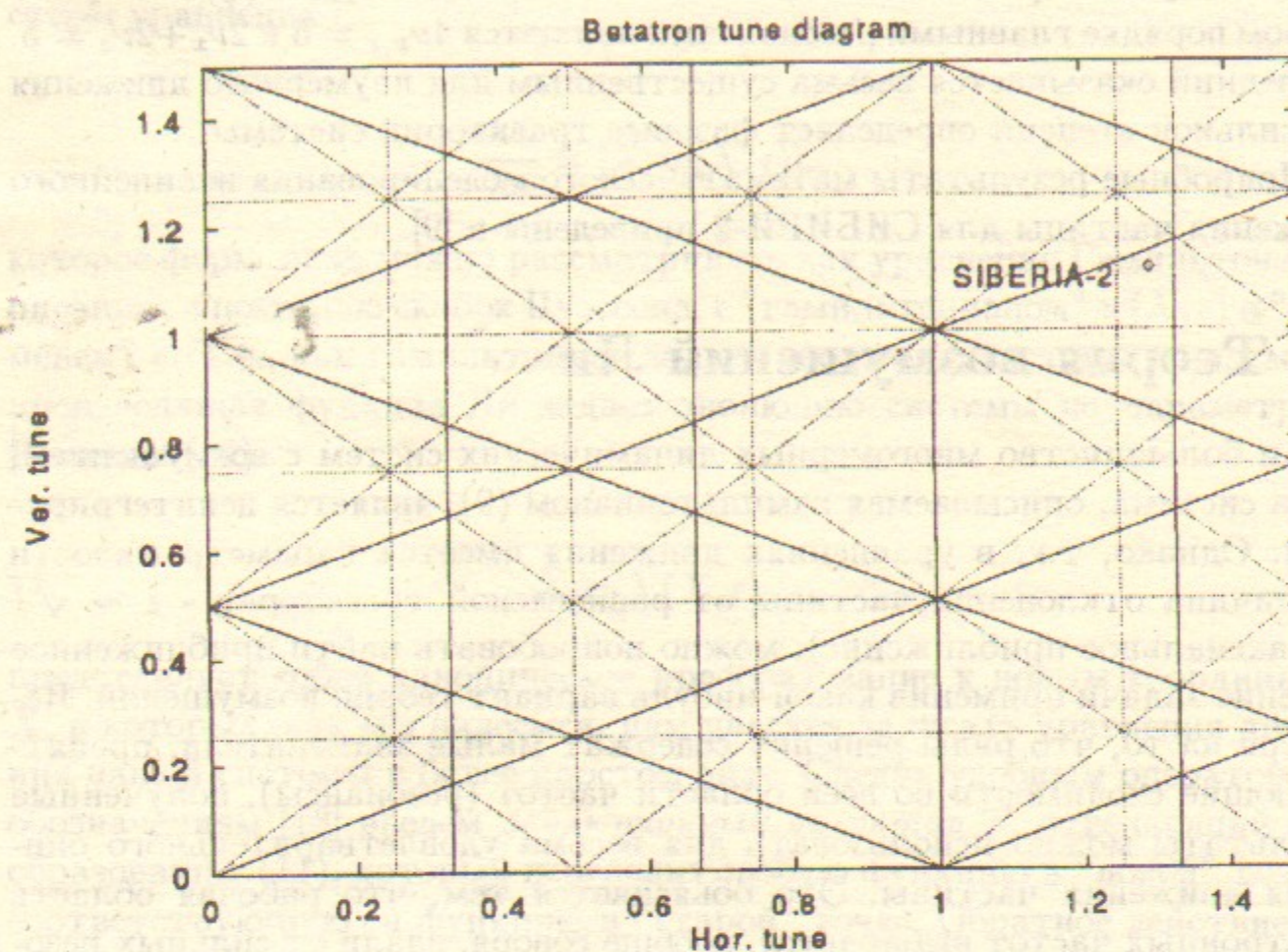


Рис. 2: Диаграмма частот (сплошные линии – первый порядок приближения, штрихованные линии – второй порядок приближения).

Важной характеристикой нелинейной системы является невозмущенная частота колебаний. На рис.2 приведено положение рабочей точки СИБИРИ-2 на диаграмме частот (для одной ячейки периодичности). Здесь же показаны линии секступольных резонансов первого и второго порядков приближения.

Следует сделать замечание относительно используемых терминов. Как известно (и как будет показано ниже), каждый следующий порядок приближения решения дает новый порядок резонансов (где порядок резонанса  $k_x \nu_x + k_z \nu_z = m$  определяется обычным образом:  $N = |k_x| + |k_z|$ ). Например, основные секступольные резонансы имеют порядок  $N = 1, 3$ , во втором порядке приближения появляются резонансы порядка  $N = 2, 4$  и т.д. Поэтому далее нужно отличать порядок резонанса от порядка приближения, в котором он появляется. Номера ближайших основных

секступольных резонансов для рассматриваемой модели:  $\nu_x = 1$ ,  $3\nu_x = 4$ ,  $\nu_x + 2\nu_z = 3$ ,  $\nu_x - 2\nu_z = -1$ . Соответственно, основные гармоники, которые нужно принимать во внимание:  $A_{11}$ ,  $A_{34}$ ,  $B_{11}$ ,  $B_{+3}$ ,  $B_{-1}$ . Во втором порядке главными резонансами являются  $4\nu_{x,z} = 5$  и  $2\nu_x + 2\nu_z = 5$ . Последний оказывается весьма существенным для двумерного движения и в сильной степени определяет фазовые траектории системы.

Подробные результаты математического моделирования нелинейного движения частицы для СИБИРИ-2 приведены в [9].

## 4 Теория возмущений Ли

Как и большинство многомерных динамических систем с возмущением, наша система, описываемая гамильтонианом (9), является неинтегрируемой. Однако, т.к. в уравнениях движения имеется параметр малости - величина отклонения частицы от равновесной траектории -  $\epsilon \sim \sqrt{J}$  (параксиальное приближение), можно попробовать найти приближенное решение задачи применив какой-нибудь вариант теории возмущений. Несмотря на то, что ряды решения содержат малые знаменатели, препятствующие сходимости во всей области частот (резонансы), полученные результаты можно использовать для весьма удовлетворительного описания движения частицы. Это объясняется тем, что рабочая область бетатронных частот выбирается, вообще говоря, вдали от сильных резонансов.

Так как в первом порядке приближенное решение в нашем случае квадратичной нелинейности дает нулевой результат, для получения представления о фазовых траекториях необходимо провести вычисления во втором и более высоких порядках. Классическая теория возмущений Пуанкаре-Цайпеля [10] не является оптимальной для таких вычислений, поскольку она имеет дело с производящими функциями смешанных переменных, и "распутывание" старых и новых переменных после каждого шага становится все более сложным по мере увеличения порядка приближения.

В связи с этим весьма привлекательной кажется теория преобразований Ли, в которой функции смешанных переменных не возникают, а все члены рядов решения получаются путем последовательного применения единственной операции — скобок Пуассона, что делает эту теорию канонической (для рассматриваемого порядка). В этой главе мы кратко приведем основные результаты теории возмущений Ли, познакомим с используемыми далее терминами и обозначениями и получим конкретные

выражения, удобные для программирования на REDUCE. Более подробное изложение метода Ли можно найти в [10] или в [11].

Отправной точкой метода является введение производящей функции Ли  $w(X, \epsilon)$ , где  $X$  - вектор обобщенных импульсов и координат, посредством уравнения

$$\frac{dX}{d\epsilon} = [X, w(X, \epsilon)], \quad (10)$$

которое формально можно рассматривать как уравнение Гамильтона, записанное с помощью скобок Пуассона, с "гамильтонианом"  $w(X, \epsilon)$  и "временем"  $\epsilon$ . Т.е., как гамильтониан задает эволюцию системы во времени, производящая функция Ли задает эволюцию системы по параметру  $\epsilon$ . Решение (10)

$$\bar{X} = \bar{X}(X, \epsilon) \quad (11)$$

представляет собой каноническое преобразование к новым координатам  $\bar{X}$ , в которых, как мы надеемся, нам удастся записать уравнения движения нашей системы в более простом виде. Следуя удобным операторным обозначениям [13] введем эволюционный оператор  $\hat{T}$ , отвечающий преобразованию (11), который переводит любую функцию в "новой" точке в соответствующую ей функцию в "старой" точке. Обратное действие выполняет обратный оператор  $\hat{T}^{-1}$ . Польза этих операторов заключается в том, что если мы найдем решение преобразованной к более простому виду гамильтониана системы, то применяя к нему эволюционные операторы сразу получим решение в исходных координатах. Для нахождения явного вида  $\hat{T}$  вводится дополнительный оператор, отвечающий скобкам Пуассона  $\hat{L} = [w, \cdot]$ . На основе вышесказанного в [11] и [13] были получены следующие уравнения, полностью описывающие преобразования Ли. Операторное уравнение для  $\hat{T}$  имеет вид

$$\frac{d\hat{T}}{d\epsilon} = -\hat{T}\hat{L}, \quad (12)$$

и допускает формальное решение

$$\hat{T} = \exp\left[-\int \hat{L}(\epsilon)d\epsilon\right]. \quad (13)$$

А связь старого  $H$  и нового  $\bar{H}$  гамильтонианов для неавтономной системы подчиняется уравнению

$$\bar{H} = \hat{T}^{-1} \left[ H + \int_0^\epsilon \hat{T}(\epsilon') \frac{\partial w(\epsilon')}{\partial t} d\epsilon' \right]. \quad (14)$$

Для получения явных рекуррентных уравнений, позволяющих найти вид всех необходимых функций (рядов Дебри) разложим  $\hat{T}$ ,  $w$ ,  $\hat{L}$ ,  $H$  и  $\bar{H}$  в ряд по степеням параметра малости  $\epsilon$ :

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n w_{n+1}, \quad \hat{L} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \hat{L}_{n+1}, \quad (15)$$

$$\hat{T} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \hat{T}_n, \quad H = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n H_n,$$

$$\bar{H} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \bar{H}_n. \quad (16)$$

Подставляя эти выражения в (13) и (14) после ряда выкладок можно получить искомые уравнения

$$\hat{T}_n = -\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \hat{T}_m \hat{L}_{n-m}$$

$$\hat{T}_n^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \hat{L}_{n-m} \hat{T}_m^{-1}$$

$$\hat{D}_0 w_n = n(\bar{H}_n - H_n) - \sum_{m=1}^{n-1} (\hat{L}_{n-m} \bar{H}_m + m \hat{T}_{n-m}^{-1} H_m), \quad (17)$$

где оператор  $\hat{D}_0 = \partial/\partial\theta + [\cdot, H_0]$  является полной производной по времени вдоль невозмущенной траектории и в нашем случае (учитывая вид  $H_0$ , описывающего линейное движение (5)) выглядит как

$$\hat{D}_0 = \frac{\partial}{\partial\theta} + \nu_x \frac{\partial}{\partial\phi_x} + \nu_z \frac{\partial}{\partial\phi_z} \quad (18)$$

Выражение для нахождения  $w_n$  (17) содержит пока произвольный член  $\bar{H}_n$ , который выбирается так, чтобы исключить секулярные члены из производящей функции  $w_n$ .

Приведем первые три члена разложения  $\hat{T}$  и соответствующие уравнения для нахождения  $w_n$ :

$$\hat{T}_1 = -\hat{L}_1$$

$$\hat{T}_2 = -\frac{1}{2} \hat{L}_2 + \frac{1}{2} \hat{L}_1^2$$

$$\hat{T}_3 = -\frac{1}{3} \hat{L}_3 + \frac{1}{6} \hat{L}_2 \hat{L}_1 + \frac{1}{3} \hat{L}_1 \hat{L}_2 - \frac{1}{6} \hat{L}_1^3$$

$$\hat{D}_0 w_1 = \bar{H}_1 - H_1$$

$$\hat{D}_0 w_2 = 2(\bar{H}_2 - H_2) - \hat{L}_1 \bar{H}_1 - \hat{L}_1 H_1$$

$$\hat{D}_0 w_3 = 3(\bar{H}_3 - H_3) - \hat{L}_2 \bar{H}_1 - \frac{1}{2} \hat{L}_2 H_1 - \hat{L}_1 \bar{H}_2$$

$$- 2\hat{L}_1 H_2 - \frac{1}{2} \hat{L}_1^2 H_1. \quad (19)$$

Выражение для новых канонических переменных  $[\bar{J}, \bar{\phi}]$  находится с помощью эволюционного оператора  $\hat{T}$ :

$$\bar{J} = \hat{T} J, \quad \bar{\phi} = \hat{T} \phi$$

Вдали от резонансов к секулярности в выражении для  $w_n$  приводят слагаемые, чье среднее значение по циклическим переменным  $\phi_{x,z}$  и по независимой переменной  $\theta$  не равно нулю, поэтому нужно на каждом шаге принимать  $n\bar{H}_n = \langle rhs_n \rangle$ , где  $\langle \rangle$  - означает усреднение по  $\phi_{x,z}$  и  $\theta$ , а  $rhs_n$  - правая часть уравнения (19).

Конкретной особенностью секступольного возмущения является то, что  $\bar{H}_n = 0$  при  $n$  нечетном. Это слегка упрощает уравнения для нахождения  $w_n$ :

$$\hat{D}_0 w_1 = -H_1$$

$$\hat{D}_0 w_2 = 2\bar{H}_2 - \hat{L}_1 H_1$$

$$\hat{D}_0 w_3 = -\frac{1}{2} \hat{L}_2 H_1 - \hat{L}_1 \bar{H}_2 - \frac{1}{2} \hat{L}_1^2 H_1 \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \hat{D}_0 w_4 &= 4\bar{H}_4 - \frac{1}{3}\hat{L}_3 H_1 - \hat{L}_2 \bar{H}_2 - \frac{1}{3}\hat{L}_2 \hat{L}_1 H_1 \\ &\quad - \frac{1}{6}\hat{L}_1 \hat{L}_2 H_1 - \frac{1}{6}\hat{L}_1^3 H_1. \end{aligned}$$

Как уже говорилось, нахождение  $w_n$  сводится к последовательному применению скобок Пуассона. Поэтому, получим выражения для скобок Пуассона, которые более удобны для алгебраических выкладок с помощью REDUCE, учитывая, что функции, стоящие в скобках имеют вид

$$\begin{aligned} F_1 &= J_x^{a_{x1}} J_z^{a_{z1}} \sum_m^\infty B_m \sin(p_{x1}\phi_x + p_{z1}\phi_z - m\theta), \\ F_2 &= J_x^{a_{x2}} J_z^{a_{z2}} \sum_m^\infty A_m \cos(p_{x2}\phi_x + p_{z2}\phi_z - m\theta). \end{aligned}$$

Опуская громоздкие выкладки приведем получившиеся выражения

$$\begin{aligned} [F_1, F_2] &= J_x^{b_{x1}} J_z^{b_{z1}} \sum_m^\infty (C_{1m} \cos(p_{-x}\phi_x + p_{-z}\phi_z - m\theta) \\ &\quad + C_{2m} \cos(p_{+x}\phi_x + p_{+z}\phi_z - m\theta)) \\ &\quad + J_x^{b_{x2}} J_z^{b_{z2}} \sum_m^\infty (C_{3m} \cos(p_{-x}\phi_x + p_{-z}\phi_z - m\theta) \\ &\quad + C_{4m} \cos(p_{+x}\phi_x + p_{+z}\phi_z - m\theta)), \\ C_{1m} &= \frac{1}{2}(p_{x1}a_{x2} + p_{x2}a_{x1}) \sum_{m'} A_{m'} B_{m'-m}, \\ C_{2m} &= \frac{1}{2}(p_{x1}a_{x2} - p_{x2}a_{x1}) \sum_{m'} A_{m'} B_{m-m'}, \\ C_{3m} &= \frac{1}{2}(p_{z1}a_{z2} + p_{z2}a_{z1}) \sum_{m'} A_{m'} B_{m'-m}, \\ C_{4m} &= \frac{1}{2}(p_{z1}a_{z2} - p_{z2}a_{z1}) \sum_{m'} A_{m'} B_{m-m'}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{x1} &= a_{x1} + a_{x2} - 1, & p_{-x} &= p_{x1} - p_{x2}, \\ b_{z1} &= a_{z1} + a_{z2}, & p_{-z} &= p_{z1} - p_{z2}, \\ b_{x2} &= a_{x1} + a_{x2}, & p_{+x} &= p_{x1} + p_{x2}, \\ b_{z2} &= a_{z1} + a_{z2} - 1, & p_{+z} &= p_{z1} + p_{z2}, \end{aligned}$$

Видно, что результат применения скобок Пуассона к двум рядам, указанного вида, является рядом того же вида, а сама процедура сводится к манипулированию с коэффициентами исходных рядов. Приведенные формулы для вычисления производящей функции, операторов  $\hat{T}$  и  $\hat{T}^{-1}$  и новых инвариантов движения были запрограммированы на REDUCE.

В нашем случае применение метода Ли и выбор нового гамильтониана так, чтобы избежать секулярности в уравнении для производящей функции, приводит к тому, что  $\bar{H}$ , во-первых, является автономным гамильтонианом (интегралом движения), а, во-вторых, не зависит явно от сопряженной координаты:  $\partial \bar{H} / \partial \phi_{x,z} = 0$ . Из последнего вытекает, что для нового канонического импульса  $d\bar{J}_{x,z}/d\theta = 0$  и, следовательно,  $\bar{J}_{x,z} = const$ . Тем самым достигается цель канонического преобразования: новый гамильтониан имеет значительно простой вид чем исходный, а новый сопряженный импульс  $\bar{J}$  после применения эволюционного оператора позволяет построить фазовые кривые первоначальной задачи.

## 5 Азимутальные гармоники потенциала возмущения

Описанная техника приводит к решению задачи с возмущением в виде рядов по параметру малости, а следовательно, позволяет вычислять зависимость частоты колебаний от амплитуды, рисовать фазовые кривые (поверхности, в двумерном случае), определять с их помощью границы устойчивого движения и т.д. Однако, ряды решения оказываются очень громоздкими (особенно в двумерном случае); количество их членов быстро растет при увеличении порядка приближения, исследовать их аналитически хотя бы с учетом третьего порядка оказывается весьма затруднительным, а физический смысл получаемых результатов скрыт их сложностью.

Естественным при этом является желание упростить задачу, например, путем выбора небольшого числа значащих гармоник и пренебрежения остальными, и при помощи полученных, более простых, формул попытаться понять общие закономерности фазовой динамики, которые могли бы применяться при проектировании циклических ускорителей



для учета нелинейных эффектов. Для этого необходимо количественное изучение поведения как исходных азимутальных гармоник потенциала возмущения, так и коэффициентов гармонических рядов, представляющих решение  $\bar{J}$ .

Остановиться на изучении поведения гармоник важно также и потому, что получаемые ряды являются асимптотическими: их сходимости, от которой зависит практическая ценность получаемых результатов, препятствует наличие резонансных знаменателей. Причем, в нашем случае малые знаменатели входят в решение весьма сложным образом, определяя величину члена ряда в некотором порядке в зависимости от значения невозмущенных частот. Умея оценивать амплитуду гармоник можно делать выводы о сходимости рядов.

Начнем с исходных гармоник разложения гамильтониана (9), которые описываются выражениями (8). Резонно ожидать, что определяющую роль будут играть гармоники, удовлетворяющие резонансным условиям

$$\begin{aligned} j\nu_x &\simeq n, \quad (j = 1, 3), \\ \nu_{\pm} &\simeq n, \end{aligned} \quad (21)$$

т.к. эти условия соответствуют наиболее медленному изменению фазы косинусов в (8). Поэтому, интересно изучить вопрос о том, какие ускорительные параметры определяют величины таких (основных) гармоник.

Рассмотрим накопитель — источник СИ с ахроматическими поворотами и натуральным хроматизмом  $\xi_x, \xi_z$  (далее все величины: хроматизм, бетатронные частоты, фазы и т.д. считаются для одной ячейки периодичности). Секступольные линзы размещаются в ахромате, где дисперсионная функция не равна нулю. Тогда силы секступолей определяются из условия компенсации натурального хроматизма:

$$\xi_{x,z} + \frac{1}{4\pi} \int_0^C k_2(s) \beta_{x,z}(s) \eta(s) ds = 0,$$

где  $\eta(s)$  — горизонтальная дисперсионная функция, а интеграл берется по длине ячейки периодичности  $C$ . В случае сосредоточенных ("тонких") секступолей интегралы можно записать в виде системы уравнений

$$4\pi\xi_x + \sum_k (k_2 l)_k \beta_{xk} \eta_k = 0,$$

$$4\pi\xi_z + \sum_k (k_2 l)_k \beta_{zk} \eta_k = 0. \quad (22)$$

Начнем с гармоник  $A_{1m}$  (8). Для резонансной гармоники с учетом условий (21) можно считать в аргументе косинуса  $\nu_x \theta - M\theta \simeq 0$ . Тогда для этой гармоники (индекс  $N$  опускаем)

$$A_1 \simeq \frac{1}{48\pi} \sum_k [(\beta_x^{3/2} k_2 l) \cos \psi_x]_k, \quad (23)$$

Чтобы упростить это выражение дальше рассмотрим известную  $H$ -функцию

$$H = \gamma_x \eta^2 + 2\alpha_x \eta \eta' + \beta_x \eta'^2.$$

Так как дисперсионная функция  $\eta$  подчиняется уравнению

$$\eta''(s) + k_x(s)\eta = \frac{1}{\rho(s)},$$

решение которого там, где  $1/\rho(s) = 0$ , совпадает с выражением для свободных бетатронных колебаний, то вне поворотных магнитов аналогично инварианту Куранта-Снайдера  $H = const$ . В ахроматическом повороте к дисперсионной функции может быть применено преобразование Флоке [12]

$$a = \frac{\eta}{\sqrt{\beta_x}}, \quad b = \eta' \sqrt{\beta_x} + \eta \frac{\alpha_x}{\sqrt{\beta_x}}$$

тогда в ахроматическом повороте  $H_a$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} H_a &= a^2 + b^2, \\ a &= \sqrt{H_a} \cos \psi_x, \quad b = \sqrt{H_a} \sin \psi_x, \end{aligned}$$

где  $\psi_x$  набег бетатронной фазы. Подставив в (23)  $\sqrt{\beta_x}/\eta = 1/\sqrt{H_a} \cos \psi_x$  и учитывая, что в ахроматическом повороте вне поворотных магнитов  $H = \text{const}$ , получим

$$A_1 \simeq \frac{1}{48\pi\sqrt{H_a}} \sum_k (k_2 l)_k \beta_{xk} \eta_k, \quad (24)$$

или, принимая во внимание первое уравнение (22) можно получить простую оценку для основной (резонансной) гармоники

$$A_1 \simeq -\frac{1}{12} \frac{\xi_x}{\sqrt{H_a}}$$

Для  $B_{1m}$  получается аналогичное выражение, только вместо  $\xi_x$  нужно подставить  $-\xi_z$  (из второго уравнения (22)). Для гармоник  $A_{3m}$  и  $B_{\pm m}$ , чтобы получить такую же оценку нужно дополнительно принять, что бетатронная фаза в местах размещения секступольных линз, компенсирующих хроматизм, мала:  $\psi_{x,z} \ll 1$ . Это ограничение не является существенным и хорошо выполняется для всех исследованных нами источников СИ, т.к. секступоли размещаются в весьма ограниченном пространстве ахроматического поворота, где набег бетатронной фазы мал. Тогда для оценки величины основных гармоник  $A$ - и  $B$ -типа можно пользоваться следующими формулами:

$$A \simeq -\frac{1}{12} \frac{\xi_x}{\sqrt{H_a}}, \quad B \simeq \frac{1}{12} \frac{\xi_z}{\sqrt{H_a}}. \quad (25)$$

Отсюда видно, что величина основных гармоник потенциала возмущения, которые, как будет показано ниже, определяют топологию фазового пространства системы (а следовательно, такие характеристики, как область финитного движения, зависимость частоты колебаний от амплитуды и т.д.) практически не зависит (или зависит слабо) от числа и места размещения хроматических секступолей, и определяется только такими фундаментальными параметрами машины, как натуральный хроматизм и эмиттанс ( $\epsilon_x \sim \langle H(s) \rangle$ ,  $\langle \rangle$  - усреднение по магнитам) в расчете на одну ячейку периодичности.

Для СИБИРЬ-2 для  $\xi_x \simeq \xi_z = -3.98$  и  $H_a = 4.03$  см согласно (25) получим  $A = 0.165 \text{ см}^{-1/2}$ ,  $B = -0.165 \text{ см}^{-1/2}$ . В то время, как точный расчет дает

$$\begin{aligned} A_{11} &= 0.165 \text{ см}^{-1/2}, & B_{11} &= -0.167 \text{ см}^{-1/2}, \\ A_{34} &= 0.177 \text{ см}^{-1/2}, & B_{-1} &= -0.167 \text{ см}^{-1/2}, \\ & & B_{+4} &= -0.103 \text{ см}^{-1/2}, \end{aligned}$$

Видно, что кроме  $B_{+4}$ , для которой необходимо учитывать бетатронные фазы секступольных линз, совпадение хорошее.

Оценки, сделанные для различных источников СИ третьего поколения с разными значениями хроматизма и горизонтального эмиттанса, вполне подтверждают справедливость выражений (25) в пределах сделанных ограничений на малость отличия бетатронных фаз для секступольных линз (рис.3).

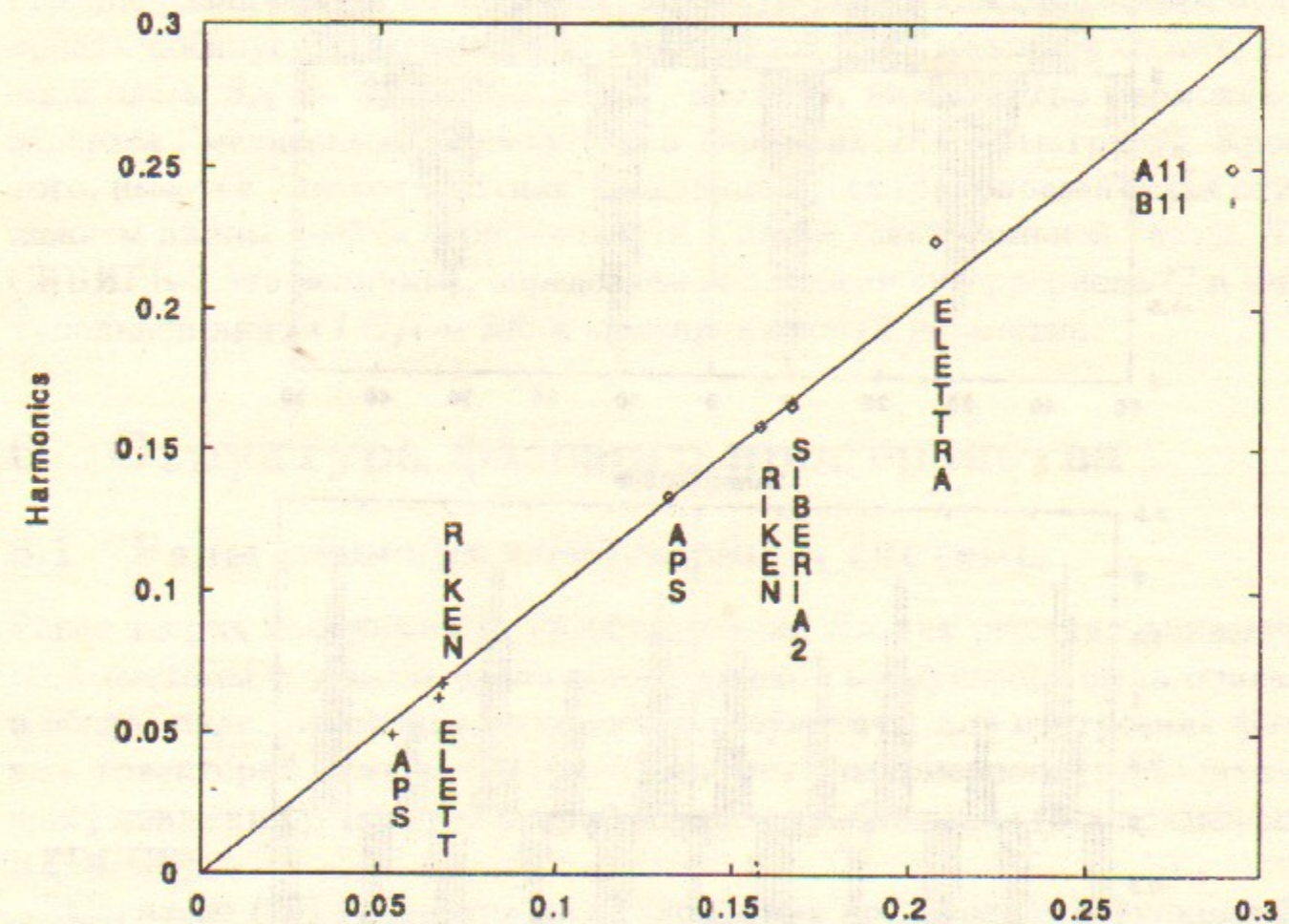


Рис. 3: Значения гармоник  $A_{11}$  и  $B_{11}$  для разных источников синхротронного излучения. По оси X отложена величина  $\frac{1}{12} \frac{\xi_{x,z}}{\sqrt{H_a}}$ . В этих координатах, в соответствие с (25), значения гармоник должны лежать на прямой  $y = x$ .

Попутно заметим, что оптимизация расстановки хроматических секступолей с целью увеличения динамической апертуры по-видимому не

очень эффективна, т.к. требует большого набега фаз между линзами, что реально трудно осуществить. Трекинг различных вариантов размещения секступольных линз для СИБИРИ-2, при которых силы отдельных линз менялись до двух раз, показал, что на величину основных гармоник и динамической апертуры это не влияет.

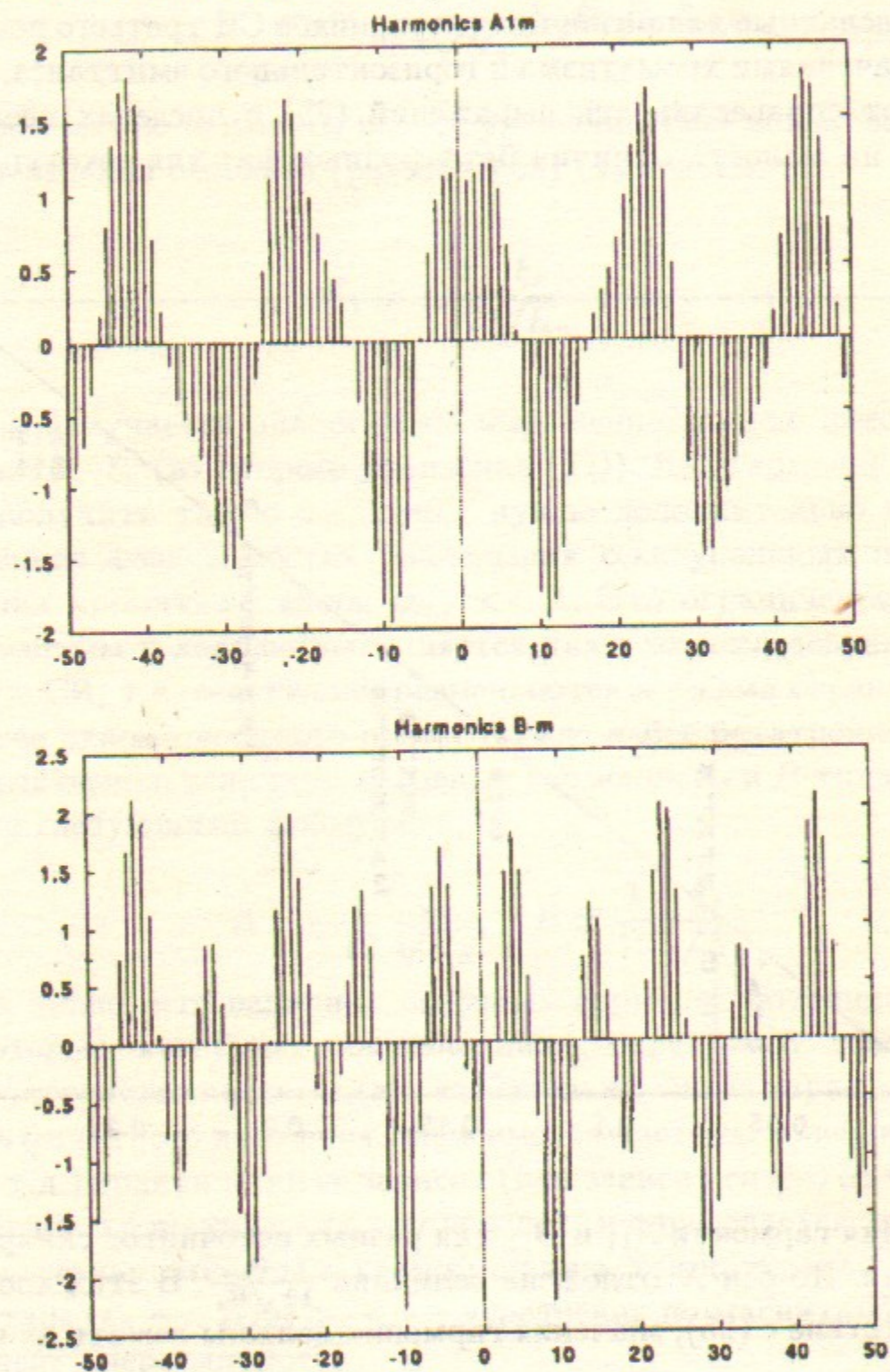


Рис. 4: Спектры гармоник  $A_{1m}$  и  $B_{-m}$  для СИБИРИ-2.

Теперь рассмотрим спектральную зависимость азимутальных гармоник. На рис.4 для СИБИРИ-2 приведены спектры гармоник  $A_{1m}$  и  $B_{-m}$ , которые определяются выражениями (8).

Проще всего это сделать когда для компенсации хроматизма используются два семейства секступольных линз; тогда суммы в (8) будут включать два косинуса со своими амплитудами. Период косинусов  $M$  зависит от азимута секступоли:  $M = 2\pi/\theta$ , а смещение по фазе — от величины вида  $\psi(\theta) - \nu\theta$ . Секступоль, размещенная ближе к началу структуры дает косинус с большим периодом, дальше — с меньшим: для СИБИРИ-2  $M_1 = 21$ ,  $M_2 = 9$ . И поскольку для компенсации хроматизма бета-функции в местах размещения секступольных линз существенно различаются по величине, основную роль в каждом спектре будет играть косинус с максимальной амплитудой. Для модели, рассматриваемой здесь  $\beta_{x1} > \beta_{x2}$  и  $\beta_{z2} > \beta_{z1}$ , поэтому, вид спектра гармоник  $A$  задается "медленным" косинусом, а гармоник  $B$  — "быстрым". Кроме того, имеется "низкочастотная" модуляция спектра, определяемая отношением длины ячейки периодичности к длине секступольной линзы. Для СИБИРИ-2 эта величина, определяемая длинами суперпериода  $C$  и секступольной линзы  $l$   $C/l \sim 200$  и модуляция почти незаметна.

## 6 Структура фазового пространства

### 6.1 Ряды решения возмущенной системы

Ранее теория канонических преобразований Ли для решения динамической системы с учетом различных порядков возмущения была описана в общем виде. Применим полученные результаты для построения фазовых траекторий. Для иллюстрации начнем с одномерного (горизонтального) движения, учитывая второй порядок приближения (без применения REDUCE).

Согласно (20) уравнения для нахождения производящей функции Ли  $w_n$  при  $n = 1, 2$  записываются в виде

$$\begin{aligned} \hat{D}_0 w_1 &= -H_1, \\ \hat{D}_0 w_2 &= 2\bar{H}_2 - \hat{L}_1 H_1, \end{aligned} \quad (26)$$

где  $\hat{L}$  — оператор скобок Пуассона, возмущенная часть гамильтониана в соответствии с (9) выглядит как

$$H_1 = (2J_x)^{3/2} \sum_m [3A_{1m} \cos(\phi_x - m\theta) + A_{3m} \cos(3\phi_x - m\theta)], \quad (27)$$

а оператор  $\hat{D}_0 = \partial/\partial\theta + \nu_x \partial/\partial\phi_x$ . Решение первого из уравнений (26) получается сразу и дает следующее выражение для производящей функции Ли первого порядка:

$$w_1 = -(2\bar{J}_x)^{3/2} \sum_m \left[ \frac{3A_{1m}}{\nu_x - m} \sin(\phi_x - m\theta) + \frac{A_{3m}}{3\nu_x - m} \sin(3\phi_x - m\theta) \right]. \quad (28)$$

В первом порядке секступольное возмущение не приводит к появлению секулярных членов в производящей функции; новый гамильтониан и нелинейность в этом случае равны нулю. Зная  $w_1$ , мы можем найти правую часть второго уравнения (26):

$$\begin{aligned} \hat{L}_1 H_1 &= -36\bar{J}_x^2 \sum_m \left[ \cos m\theta \sum_l \left( \frac{3A_{1l}A_{1l+m}}{\nu_x - l} + \frac{A_{3l}A_{3l+m}}{3\nu_x - l} \right) \right. \\ &+ \cos(2\phi_x - m\theta) 2 \sum_l \frac{3A_{1l}A_{3m+l}}{(\nu_x - l)(3\nu_x - m - l)} (4\nu_x - 2l - m) \\ &+ \left. \cos(4\phi_x - m\theta) \sum_l \frac{3A_{1l}A_{3m-l}}{(\nu_x - l)(3\nu_x - m + l)} (2\nu_x - 2l + m) \right]. \end{aligned}$$

Чтобы не допустить появления секулярных членов в  $w_2$ , выберем  $2\bar{H}_2$  равным постоянной составляющей от  $\hat{L}_1 H_1$  (слагаемое с  $m = 0$ ), так что:

$$\bar{H}_2 = -18\bar{J}_x^2 \sum_l \left( \frac{3A_{1l}^2}{\nu_x - l} + \frac{A_{3l}^2}{3\nu_x - l} \right). \quad (29)$$

Тогда уравнение для  $w_2$  будет выглядеть как

$$\hat{D}_0 w_2 = -\{w_1, H_1\}, \quad (30)$$

где фигурные скобки обозначают переменную часть. Решая это уравнение, получим выражение для производящей функции второго порядка:

$$\begin{aligned} w_2 &= 36\bar{J}_x^2 \left[ \sum_{m \neq 0} \frac{\sin m\theta}{-m} \sum_l \frac{3A_{1l}A_{1l+m}}{\nu_x - l} + \frac{A_{3l}A_{3l+m}}{3\nu_x - l} \right. \\ &+ 6 \sum_m \frac{\sin(2\phi_x - m\theta)}{2\nu_x - m} \sum_l \frac{A_{1l}A_{3m+l}(4\nu_x - 2l - m)}{(\nu_x - l)(3\nu_x - m - l)} \\ &+ \left. 3 \sum_m \frac{\sin(4\phi_x - m\theta)}{4\nu_x - m} \sum_l \frac{A_{1l}A_{3m-l}(2\nu_x - 2l + m)}{(\nu_x - l)(3\nu_x - m + l)} \right]. \end{aligned}$$

Из этого выражения видно, что во втором порядке появляются новые секступольные резонансы для горизонтального движения  $2\nu_x = m$  и  $4\nu_x = m$ .

Учитывая, что теперь новый гамильтониан  $\bar{H}$  с точностью до второго порядка не зависит от времени  $\theta$  и фазовой переменной  $\phi_x$ , то и он сам и новое действие  $\bar{J}_x$  являются инвариантами движения. Поэтому, используя эволюционный оператор  $\hat{T}$  можно найти новое действие и построить фазовые траектории системы  $J_x(\phi_x)$ . Для этого вспомним, что эволюционный оператор связывает функцию в новых и старых координатах:

$$\begin{aligned} \bar{J}_x &= \hat{T} J_x = (\hat{T}_0 + \hat{T}_1 + \hat{T}_2) J_x \\ &= \left( 1 - \hat{L}_1 - \frac{1}{2} \hat{L}_2 + \frac{1}{2} \hat{L}_1^2 \right) J_x \\ &= J_x - [w_1, J_x] - \frac{1}{2} [w_2, J_x] + \frac{1}{2} [w_1, [w_1, J_x]]. \end{aligned}$$

В общем виде ряд, представляющий собой  $\bar{J}_x$  (или  $\bar{J}_z$ ), выглядит как

$$\bar{J}_{x,z} = \sum_{j_x, j_z} J_x^{j_x} J_z^{j_z} \sum_{k_x, k_z} c^{(n)}(k_x, k_z), \quad (31)$$

$$c^{(n)}(k_x, k_z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a^{(n)}(k_x, k_z, m) \cos(k_x \phi_x + k_z \phi_z - m\theta), \quad (32)$$

где для приближения порядка  $n$  имеем  $j_x + j_z = n + 2$ , а вид  $a^{(n)}(k_x, k_z, m)$  находится из уравнения для  $w_n$ . В рассматриваемом нами случае горизонтального движения используя выражения для  $w_1$  и  $w_2$  и применяя последовательно скобки Пуассона можно получить искомый ряд, связывающий новое действие с переменными исходной задачи  $(J_x, \phi_x)$ :

$$\bar{J}_x = J_x \quad (33)$$

$$+ J_x^{3/2} [\cos \phi_x \sum_m a_x^{(1)}(1, 0, m) + \cos 3\phi_x \sum_m a_x^{(1)}(3, 0, m)] + J_x^2 [\sum_m a_x^{(2)}(0, 0, m) + \cos 2\phi_x \sum_m a_x^{(2)}(2, 0, m) + \cos 4\phi_x \sum_m a_x^{(2)}(4, 0, m)],$$

(34)

где принято  $\theta = 0$ , а соответствующие слагаемые сумм имеют вид:

$$a_x^{(1)}(1, 0, m) = 3\sqrt{8} \frac{A_{1m}}{\nu_x - m},$$

$$a_x^{(1)}(3, 0, m) = 3\sqrt{8} \frac{A_{3m}}{3\nu_x - m},$$

$$a_x^{(2)}(0, 0, m) = 108 \sum_l \frac{A_{1l} A_{1m+l}}{(\nu_x - l)(\nu_x - m - l)} + \frac{A_{3l} A_{3m+l}}{(3\nu_x - l)(3\nu_x - m - l)},$$

$$a_x^{(2)}(2, 0, m) = \frac{72}{2\nu_x - m} \sum_l \frac{A_{1l} A_{3m+l}}{(\nu_x - l)(3\nu_x - l - m)} (2l - m),$$

$$a_x^{(2)}(4, 0, m) = \frac{36}{4\nu_x - m} \sum_l \frac{A_{1l} A_{3m-l}}{(\nu_x - l)(3\nu_x + l - m)} (4l - m). \quad (35)$$

Итак, решение фазовых траекторий имеет вид ряда по степеням  $\sqrt{J_{x,z}}$  со сложными коэффициентами. Т.к. в левой части (33) стоит  $\bar{J}_x = const$ , решив это неявное уравнение  $J_x(\phi_x)$  мы можем получить соответствующие фазовые траектории.

## 6.2 Арифметические свойства рядов решений

Однако, прежде рассмотрим свойства полученных рядов и возможность их упрощения выбором малого числа основных (резонансных) гармоник. В общем случае решение (и все величины, получаемые на его основе, такие, как производящая функция Ли, зависимость частоты колебаний от амплитуды и т.д.) являются степенными рядами по параметру малости  $\epsilon \sim \sqrt{J_{x,z}}$  (31), а их коэффициенты в свою очередь являются гармоническими рядами (32) с амплитудами  $a^{(n)}(k_x, k_z, m)$ , выражающимися через исходные азимутальные гармоники секступольного возмущения либо напрямую (для первого порядка), либо с помощью сложных сумм по этим

азимутальным гармоникам (со второго порядка и выше) (35). Особенно сью этих выражений является то, что амплитуда азимутальной гармоники  $A_{1m}, A_{3m}, B_{1m}, B_{\pm m}$  входит в них со своим знаменателем вида  $k_x \nu_x + k_z \nu_z - m$ , который и определяет относительный вклад азимутальной гармоники в соответствующую величину в зависимости от невозмущенных частот.

На рис.5 показана зависимость ранее полученных выражений

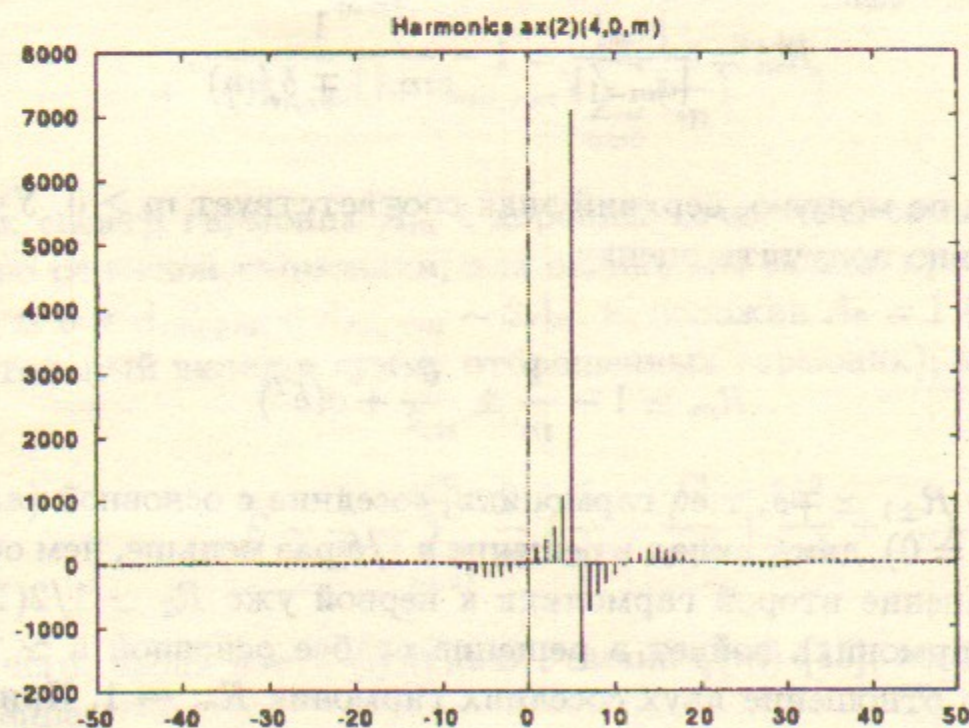
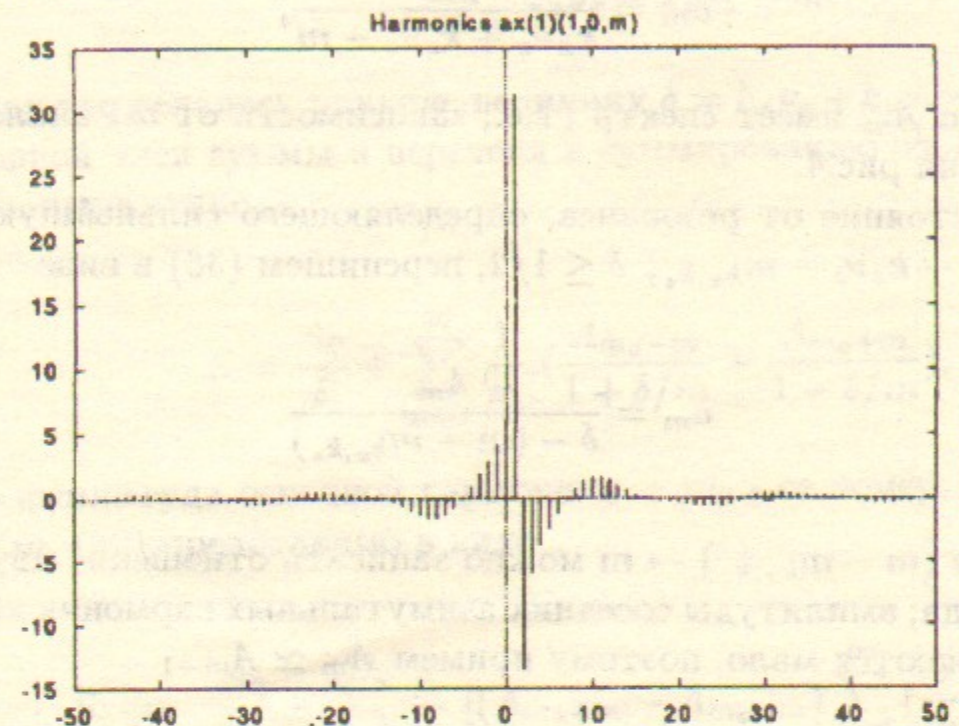


Рис. 5: Гармоники  $a_{x1}^{(1)}(1, 0, m)$  и  $a_{x1}^{(2)}(4, 0, m)$  для СИБИРИ-2.

$a_{x1}^{(1)}(1, 0, m)$  и  $a_{x1}^{(2)}(2, 0, m)$  от номера  $m$  для СИБИРИ-2. Видно, что наличие знаменателей приводит к подчеркиванию малого числа значащих гармоник (сравни с рис.4). Поэтому, прежде всего, зададимся вопросом об относительном вкладе гармоник в получаемые решения. Запишем  $m$ -тый член суммы  $a^{(n)}(k_x, k_z, m) = a_m$  в виде

$$a_m = \frac{A_m}{k_x \nu_x + k_z \nu_z - m}, \quad (36)$$

где важно, что  $A_m$  имеет спектр (т.е., зависимость от  $m$ ) аналогичный приведенным на рис.4.

Вводя расстояние от резонанса, определяющего сильнейшую гармонику  $\delta = k_x \nu_x + k_z \nu_z - m_{k_x, k_z}$ ,  $\delta \leq 1/2$ , перепишем (36) в виде

$$a_m = \frac{A_m}{\delta - (m - m_{k_x, k_z})},$$

переобозначив  $(m - m_{k_x, k_z}) \rightarrow m$  можно записать отношение двух соседних членов ряда; амплитуды соседних азимутальных гармоник исходного спектра отличаются мало, поэтому примем  $A_m \simeq A_{m-1}$

$$R_m = \frac{|a_m|}{|a_{m-1}|} = 1 - \frac{1}{m(1 \mp \delta/m)},$$

где  $m$  берется по модулю, верхний знак соответствует  $m \geq 0$ . Учитывая малость  $\delta$  можно получить оценку

$$R_m \simeq 1 - \frac{1}{m} \pm \frac{\delta}{m^2} + o(\delta^2). \quad (37)$$

Согласно (37)  $R_{\pm 1} \simeq \mp \delta$ , т.е., гармоники, соседние с основной (для которой  $m - m_{k_x, k_z} = 0$ ), дают вклад в решение в  $1/\delta$  раз меньше, чем основная. Однако, отношение второй гармоники к первой уже  $R_2 \simeq 1/2(1 - \delta/2)$ , т.е., вторая гармоника войдет в решение слабее основной в  $\simeq 2/\delta$  раз. При  $m \rightarrow \pm\infty$  отношение двух соседних гармоник  $R_m \rightarrow 1$ . Причем, нетрудно заметить, что чем ближе расстояние до определенного резонанса, тем больше оснований пользоваться для приближения одной (основной) гармоникой, пренебрегая остальными.

Оценим вклад остальных (помимо основной) гармоник в сумму, определяющую коэффициент гармонического ряда, стоящий при определенном косинусе:

$$S = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{A_m}{k_x \nu_x + k_z \nu_z - m}. \quad (38)$$

Вводя, как это делалось раньше, величину  $\delta = k_x \nu_x + k_z \nu_z - m_{k_x, k_z}$ , выделяя основной член суммы и переходя к суммированию от 1 до  $+\infty$  легко получить выражение

$$S = \frac{A_0}{\delta} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left( \frac{A_{m_0-m}}{1 + \delta/m} - \frac{A_{m_0+m}}{1 - \delta/m} \right), \quad (39)$$

где  $A_0$  - амплитуда основной гармоники, а  $m_0$  - ее номер. Учитывая малость  $\delta/m$ , (39) представимо в виде

$$S = \frac{A_0}{\delta} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left[ (A_{m_0+m} - A_{m_0-m}) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\delta}{m}\right)^{2n} + (A_{m_0+m} + A_{m_0-m}) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\delta}{m}\right)^{2n+1} \right].$$

Так как спектр гармоник  $A_m$  с хорошей точностью симметричен относительно основной гармоники, для оценки мы можем принять  $A_{m_0+m} - A_{m_0-m} \simeq 0$  и  $A_{m_0+m} + A_{m_0-m} \sim 2A_0$ , и, положив  $A_0 = 1$  (нам интересен относительный вклад в сумму отброшенных гармоник), запишем

$$S \sim \frac{1}{\delta} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m} \left( \frac{\delta}{m} + \frac{\delta^3}{m^3} + \frac{\delta^5}{m^5} + \dots \right). \quad (40)$$

После чего, вводя дзета-функцию Римана  $\zeta(m)$  [15], получаем конечное выражение:

$$S \sim \frac{1}{\delta} - 2\delta (\zeta(2) + \delta^2 \zeta(4) + \delta^4 \zeta(6) + \dots). \quad (41)$$

учитывая, что  $\zeta(2) = \pi^2/6 \approx 1.645$ ,  $\zeta(4) = \pi^4/90 \approx 1.082$  и  $\zeta(6) = \pi^6/945 \approx 1.017$ ; вообще,  $\zeta(m) \rightarrow 1$  при  $m \rightarrow \infty$ . Получившаяся сумма сходится, что легко проверяется прямо с помощью любого признака сходимости. В полученном выражении первое слагаемое определяет вклад в сумму основной гармоники, а следующие — поправку, вносимую отброшенными.

### 6.3 Фазовое пространство горизонтального движения

Изучение топологии фазового пространства при помощи сечения Пуанкаре является одним из основных методов анализа гамильтоновой динамики. Фазовый портрет — инвариантные кривые (или поверхности в двумерном случае) — неперенный и обязательный атрибут для понимания поведения нелинейной системы, наравне с такими количественными характеристиками как область финитного движения, зависимость частоты колебаний от амплитуды или ширина резонанса. Применим полученные результаты для построения горизонтальных фазовых траекторий для нашей модели в приближении многих гармоник и одиночной сильной гармоники.

Ряд решения с коэффициентами, вычисленными суммированием азимутальных гармоник в пределах  $\pm 1000$ , имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{J}_x = & J_x + J_x^{3/2} (2.2 \cos\phi_x - 7.8 \cos 3\phi_x) \\ & + J_x^2 (158 - 80 \cos 2\phi_x + 144 \cos 4\phi_x) \\ & + J_x^{5/2} (-2113 \cos\phi_x + 2357 \cos 3\phi_x - 433 \cos 5\phi_x), \end{aligned} \quad (42)$$

а в случае приближения коэффициентов ряда основными гармониками  $A_{11}$  и  $A_{34}$ :

$$\begin{aligned} \bar{J}_x = & J_x + J_x^{3/2} (3.1 \cos\phi_x - 8.3 \cos 3\phi_x) \\ & + J_x^2 (102 - 120 \cos 2\phi_x + 180 \cos 4\phi_x) \\ & + J_x^{5/2} (-2418 \cos\phi_x + 4300 \cos 3\phi_x - 1000 \cos 5\phi_x), \end{aligned} \quad (43)$$

Следует отметить, что различие коэффициентов при приближении их суммой гармоник и одной гармоникой достаточно хорошо описывается

выражением (41), которое с точностью до второго порядка по расстройке частоты может быть записано как

$$\frac{\Delta S}{S} \approx -\delta^2 (3.3 + 12.2\delta^2), \quad (45)$$

Согласно этой оценке различие в определении коэффициента одной гармоникой и суммированием в первом порядке при  $\cos\phi_x$  должно быть 37% (реально 41%), а при  $\cos 3\phi_x$  — 5% (реально 6%).

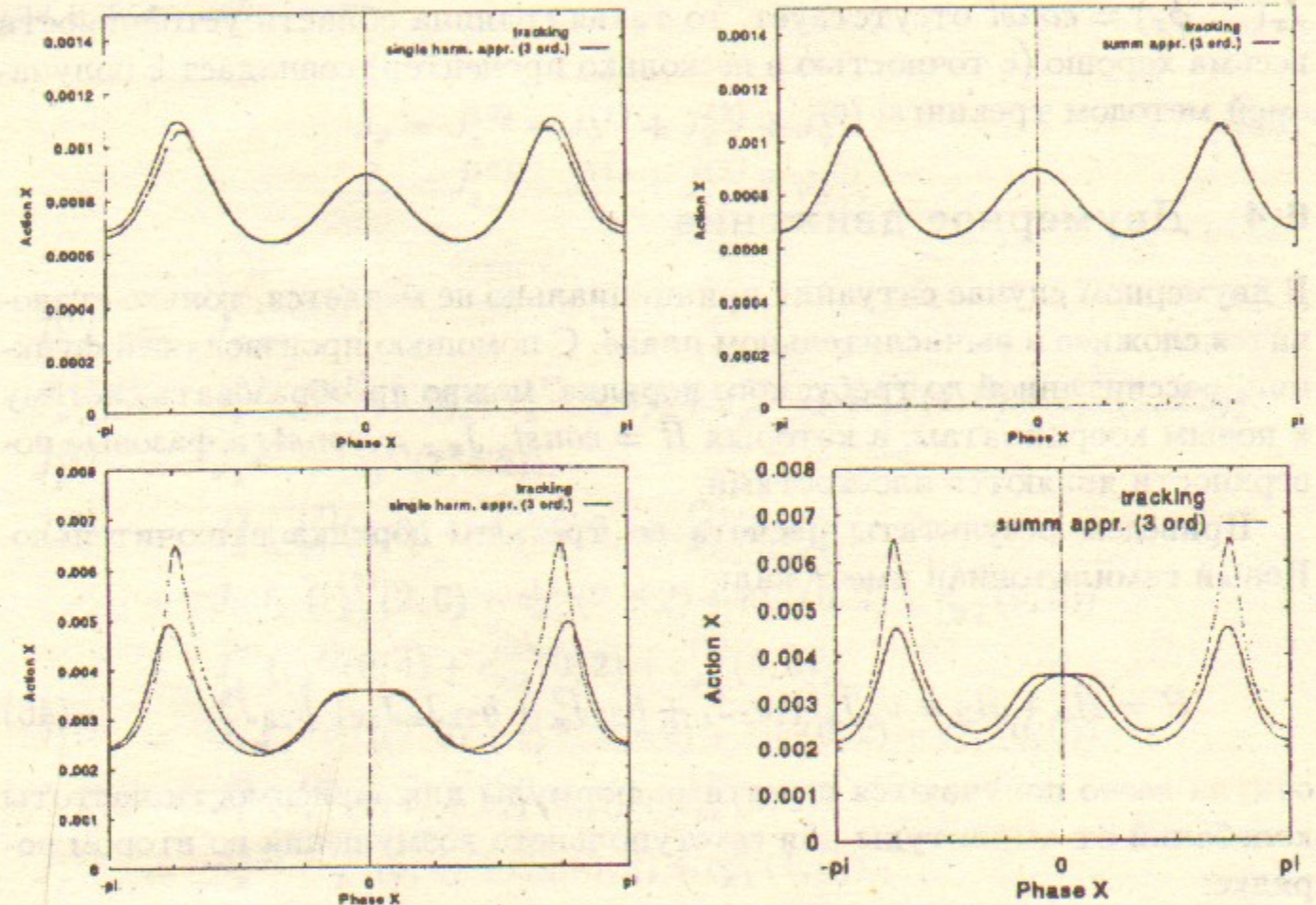


Рис. 6: Горизонтальное одномерное движение: трекинг (точки) и приближение суммами и выделенными гармониками (линии). Верхние рис. соответствуют амплитуде  $\approx \frac{1}{2}$  ДА, а нижние — динамической апертуре.

Фазовые кривые горизонтального движения для рабочей точки  $\nu_x = 7.763$  рассчитанные с использованием двух основных гармоник, сумм гармоник (три порядка приближения) и трекингом приведены на рис.6. Совпадение результатов непосредственно вблизи границы области устой-

чивости весьма удовлетворительное, а на уровне половины апертуры — хорошее. Кроме того, видно, что различие в описании главными гармониками и суммой гармоник мало, несмотря на то, что некоторые коэффициенты рядов могут значительно отличаться. Это объясняется тем, что при упрощении задачи выделением одной гармоники большая ошибка в коэффициентах свойственна тем членам ряда, чей вклад в решение мал; главный же член, определяющий вид фазовой траектории, хорошо приближается описанными методами (например, в нашем случае в первом порядке основным является член с  $\cos 3\phi_x$ ).

Отметим, что если определять динамическую апертуру, как такие начальные условия  $J_x = J_{x0}$ ,  $\phi_x = 0$ , при которых решение уравнения  $\bar{J}_x(J_x, \phi_x) = \text{const}$  отсутствует, то такая граница области устойчивости весьма хорошо (с точностью в несколько процентов) совпадает с получаемой методом трекинга.

#### 6.4 Двумерное движение

В двумерном случае ситуация принципиально не меняется, только становится сложнее в вычислительном плане. С помощью производящей функции, рассчитанной до требуемого порядка, можно преобразовать систему к новым координатам, в которых  $\bar{H} = \text{const}$ ,  $\bar{J}_{x,z} = \text{const}$ , а фазовые поверхности являются плоскостями.

Приведем результаты расчета до третьего порядка включительно. Новый гамильтониан имеет вид:

$$\bar{H} = \bar{H}_0 + \bar{H}_2 = \nu_x \bar{J}_x + \nu_z \bar{J}_z + h_{21} \bar{J}_x^2 + h_{22} \bar{J}_x \bar{J}_z + h_{23} \bar{J}_z^2, \quad (46)$$

откуда легко получаются известные формулы для зависимости частоты колебаний от амплитуды для секступольного возмущения во втором порядке:

$$\begin{aligned} \Delta\nu_x(\bar{J}_x, \bar{J}_z) &= 2\bar{J}_x h_{21} + \bar{J}_z h_{22} \\ \Delta\nu_z(\bar{J}_x, \bar{J}_z) &= \bar{J}_x h_{22} + 2\bar{J}_z h_{23}, \end{aligned} \quad (47)$$

где коэффициенты выражаются через соответствующие гармоники (8):

$$h_{21} = -18 \sum_m \left( \frac{3A_{1m}^2}{\nu_x - m} + \frac{A_{3m}^2}{3\nu_x - m} \right)$$

$$\begin{aligned} h_{22} &= 72 \sum_m \left( \frac{2B_{1m}A_{1m}}{\nu_x - m} - \frac{B_{+m}^2}{\nu_+ - m} + \frac{B_{-m}^2}{\nu_- - m} \right) \\ h_{23} &= -18 \sum_m \left( \frac{4B_{1m}^2}{\nu_x - m} + \frac{B_{+m}^2}{\nu_+ - m} + \frac{B_{-m}^2}{\nu_- - m} \right). \end{aligned} \quad (48)$$

В нашем случае  $h_{21} = 449 \text{ м}^{-1}$ ,  $h_{22} = 755 \text{ м}^{-1}$ ,  $h_{23} = -1854 \text{ м}^{-1}$ .

Так как новый гамильтониан (46) не зависит от переменных  $\bar{\phi}_{x,z}$  и  $\theta$ , то он, как и новое действие, являются инвариантами движения, т.е.  $\bar{J}_{x,z} = \text{const}$  и  $\bar{H} = \text{const}$ . Применение оператора  $\hat{T}$  дает следующее выражение для нового действия:

$$\begin{aligned} \bar{J}_x &= \bar{J}_x^{(0)} + \bar{J}_x^{(1)} + \bar{J}_x^{(2)} + \bar{J}_x^{(3)} \\ \bar{J}_z &= \bar{J}_z^{(0)} + \bar{J}_z^{(1)} + \bar{J}_z^{(2)} + \bar{J}_z^{(3)} \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \bar{J}_{x,z}^{(0)} &= J_{x,z}, \\ \bar{J}_x^{(1)} &= J_x^{3/2} (c_{x1}^{(1)}(1,0) + c_x^{(1)}(3,0)) + J_x^{1/2} J_z (c_{x2}^{(1)}(1,0) + c_x^{(1)}(1, \pm 2)), \\ \bar{J}_z^{(1)} &= J_x^{1/2} J_z (c_z^{(1)}(1, \pm 2)), \\ \bar{J}_x^{(2)} &= J_x^2 (c_{x1}^{(2)}(4,0) + c_{x1}^{(2)}(2,0) + c_{x1}^{(2)}(0,0)) \\ &+ J_x J_z (c_{x2}^{(2)}(2,0) + c_x^{(2)}(2, \pm 2) + c_{x1}^{(2)}(0,2) + c_{x2}^{(2)}(0,0)) \\ &+ J_z^2 (c_x^{(2)}(0,4) + c_{x2}^{(2)}(0,2) + c_{x2}^{(2)}(0,0)), \\ \bar{J}_z^{(2)} &= J_x J_z (c_z^{(2)}(2,0) + c_z^{(2)}(2, \pm 2) + c_{z1}^{(2)}(0,2) + c_{z1}^{(2)}(0,0)) \\ &+ J_z^2 (c_z^{(2)}(0,4) + c_{z2}^{(2)}(0,2) + c_{z2}^{(2)}(0,0)) \\ \bar{J}_x^{(3)} &= J_x^{5/2} (c_x^{(3)}(5,0) + c_{x1}^{(3)}(3,0) + c_{x1}^{(3)}(1,0)) \\ &+ J_x^{3/2} J_z (c_{x2}^{(3)}(3,0) + c_x^{(3)}(3, \pm 2) + c_{x2}^{(3)}(1,0) + c_{x1}^{(3)}(1, \pm 2)) \\ &+ J_x^{1/2} J_z^2 (c_{x3}^{(3)}(1,0) + c_x^{(3)}(1, \pm 4) + c_{x2}^{(3)}(1, \pm 2)) \\ \bar{J}_z^{(3)} &= J_x^{3/2} J_z (c_z^{(3)}(3,0) + c_z^{(3)}(3, \pm 2) + c_{z1}^{(3)}(1,0) + c_{z1}^{(3)}(1, \pm 2)) \\ &+ J_x^{1/2} J_z^2 (c_{z2}^{(3)}(1,0) + c_z^{(3)}(1, \pm 4) + c_{z2}^{(3)}(1, \pm 2)). \end{aligned}$$

где для экономии  $\pm$  обозначает два слагаемых (отдельно со знаком  $+$  и со знаком  $-$ ). Здесь используются обозначения, ранее введенные в (32). Приведенные формулы позволяют получить следующую иерархию резонансов, генерируемых секступолями в первых трех порядках приближения:



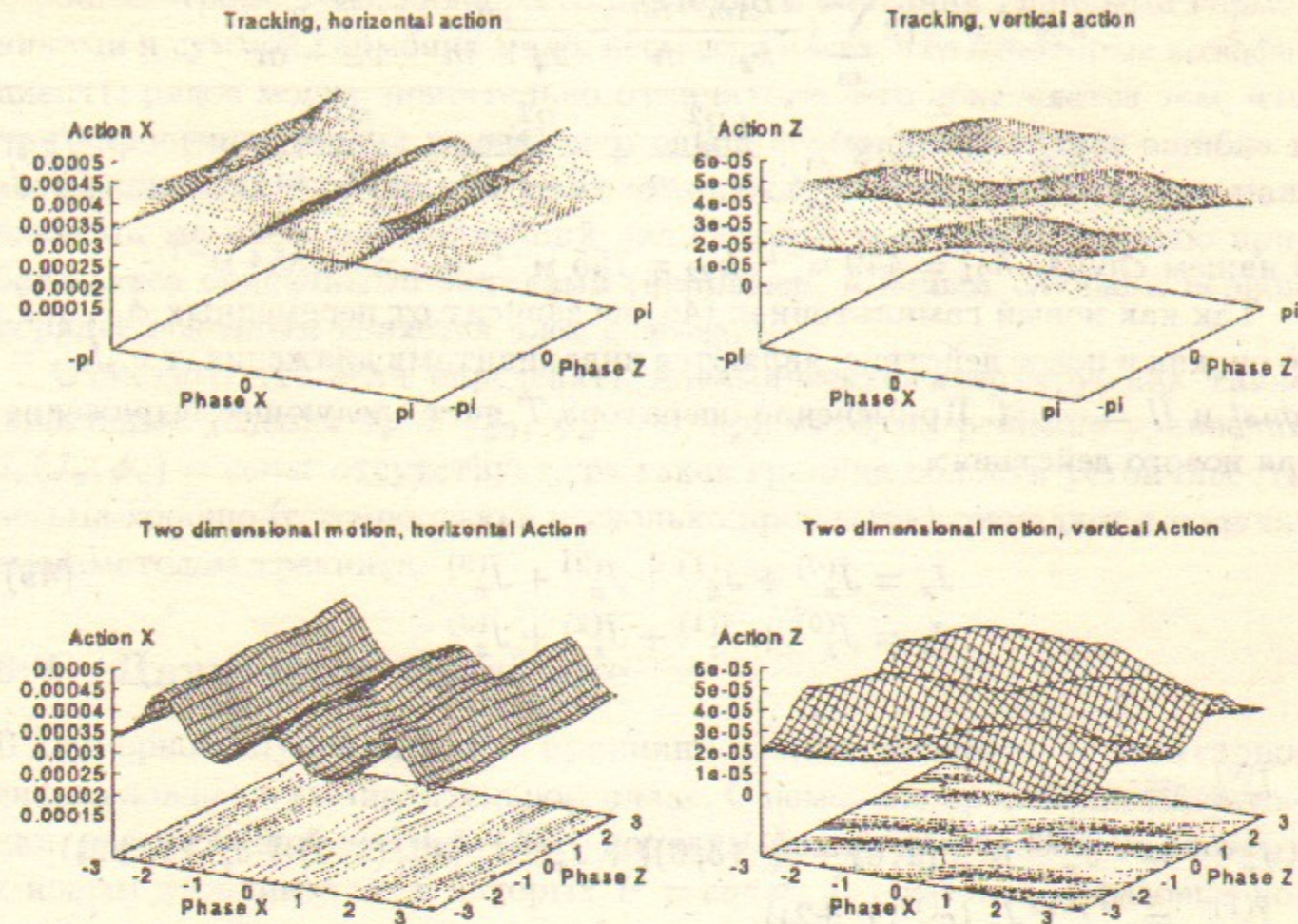


Рис. 7: Двумерное движение, поверхности  $J_x(\phi_x, \phi_z)$  (верхний ряд рисунков) и  $J_z(\phi_x, \phi_z)$  (нижний ряд): трекинг (точки) и приближение суммами с использованием 3 порядков приближения (линии).

1	$\nu_x = m$ $3\nu_x = m$	$\nu_x \pm 2\nu_z = m$
2	$2\nu_x = m$ $4\nu_x = m$	$\pm 2\nu_z = m$ $\pm 4\nu_z = m$ $2\nu_x \pm 2\nu_z = m$
3	$\nu_x = m$ $3\nu_x = m$ $5\nu_x = m$	$\nu_x \pm 2\nu_z = m$ $\nu_x \pm 4\nu_z = m$ $3\nu_x \pm 2\nu_z = m$

В двумерном случае коэффициенты  $a^{(n)}(k_x, k_z, m)$  (32) являются сложными выражениями и рассчитываются с помощью REDUCE. Система из двух уравнений (49) решается численно методом Ньютона. Полученные таким образом фазовые поверхности (3 порядка приближения) показаны на рис.7 в сравнении с результатами моделирования (трекингом). Расчеты проводились для значения  $J_{x0} = 4 \times 10^{-4}$  см,  $J_{z0} = 4 \times 10^{-5}$  см

(при этом значения соответствующие динамической апертуре  $J_{x0} = 3 \times 10^{-3}$  см,  $J_{z0} = 2.5 \times 10^{-3}$  см. Видно, что совпадение аналитических и модельных результатов хорошее.

Как и в случае одномерного движения определение границы устойчивости по отсутствию решения системы уравнений с хорошей точностью (около 3%) совпадает с границей, полученной с помощью математического моделирования.

Чтобы более детально изучить разные варианты расчета фазового движения с помощью теории возмущений и границы их применимости, рассмотрим сечения фазовых поверхностей плоскостями вида  $J_x(\phi_x)$ ,  $J_x(\phi_z)$ ,  $J_z(\phi_x)$ ,  $J_z(\phi_z)$  при различных значениях действия (вблизи и вдали от границы области устойчивости). На рис.8 показаны сечения  $J_x(\phi_z)$  и  $J_z(\phi_x)$  при малом значении  $J_x$  и  $J_z$ . Приближения сделаны (слева направо) основными гармониками (первый порядок), суммой гармоник (первый порядок), суммой гармоник (три порядка) и сравниваются с трекингом. Те же фазовые портреты, но непосредственно на границе области устойчивости по  $z$  приведены на рис.9.

Для демонстрации возможности приближения результатов трекинга различными порядками на рис.10 показаны фазовые траектории горизонтального движения (сечение двумерной поверхности) в случае, когда  $J_x$  близко к границе устойчивости ( $\approx 95\%$ ), а  $J_z$  небольшое.

Изучение большого числа фазовых кривых для случая двумерного движения позволяет сделать следующие выводы:

а) аналитические формулы, полученные с помощью техники канонических Ли-преобразований позволяют получить фазовые портреты (как в одномерном, так и в двумерном случаях) хорошо совпадающие с результатами математического моделирования вплоть до траекторий, близких к границе устойчивости;

б) расчеты сделанные с помощью сумм азимутальных гармоник и одной (основной) гармоникой для каждого типа совпадают достаточно хорошо, что показывает правомерность упрощенных оценок и возможность их использования для расчетов основных параметров нелинейного движения. В системе обычно имеется одна гармоника, определяющая фазовое пространство (в нашем случае это  $B_{-1}$ ) и именно для такой гармоники лучшим образом работает унитарное приближение, позволяющее упростить оценки;

в) влияние второго и третьего порядков практически незаметно по сравнению с первым до значений  $J_{x,z}$ , соответствующих половине динамической апертуры; и даже в случае границы апертуры по  $z$  и небольших

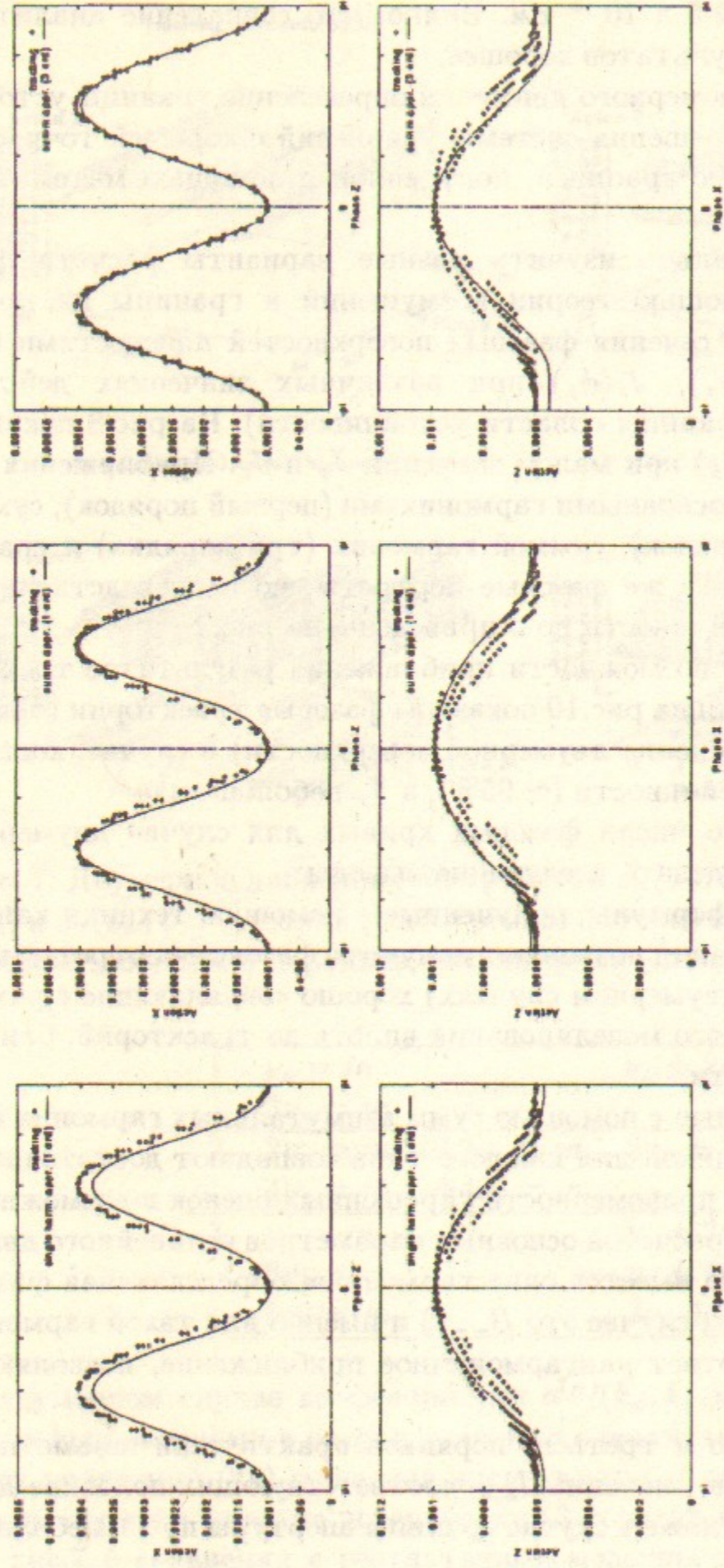


Рис. 8: Двумерное движение, сечение  $J_x(\phi_x)$  (верхний ряд рисунков) и  $J_z(\phi_z)$  (нижний ряд): трекинг (точки) и приближение суммами и выделенными гармониками (линии). Амплитуда по  $z$  соответствует половине границы устойчивости, а по  $x \simeq \frac{1}{5}$  ДА.

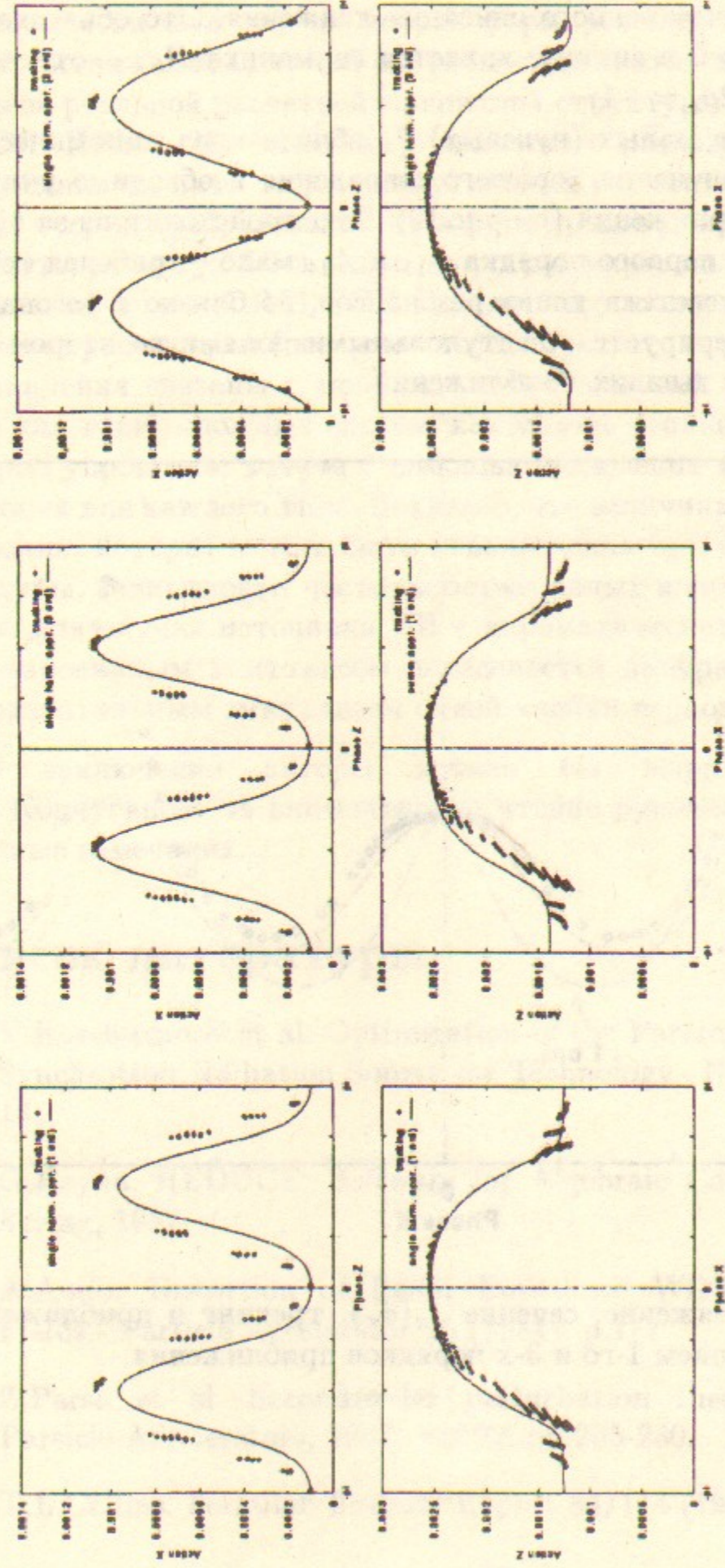


Рис. 9: Двумерное движение, сечение  $J_x(\phi_x)$  и  $J_z(\phi_z)$  трекинг и приближение суммами и выделенными гармониками. Амплитуда соответствует границе устойчивости по вертикали.

начальных амплитудах по  $x$  первого порядка практически достаточно для правильного количественного описания движения. Это объясняется тем, что доминирующей в системе является гармоника  $B_{-1}$ , отвечающая за резонанс  $\nu_x - 2\nu_z = -1$ ;

г) однако, в случае малых (нулевых)  $J_z$  вблизи края динамической апертуры по  $x$  для получения хорошего совпадения необходимо учитывать три порядка приближения (см.рис.10). Это происходит из-за того, что влияние гармоник первого порядка  $A_{11}$  и  $A_{34}$  мало — рабочая точка выбрана вдали от соответствующих резонансов, но близко к резонансу  $4\nu_x = 5$ , который генерируется секступольными полями во втором порядке и требует учета высших приближений.

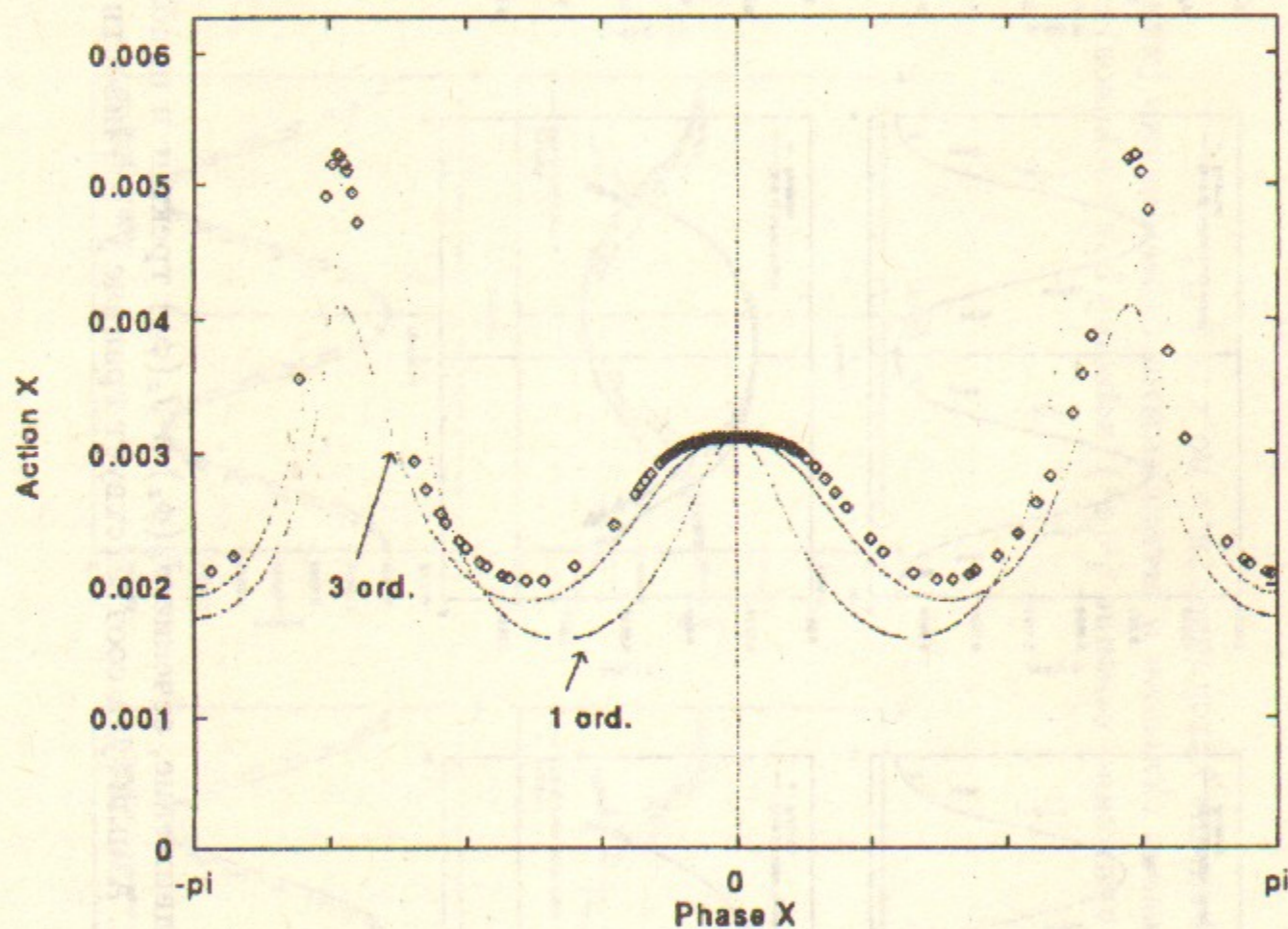


Рис. 10: Двумерное движение, сечение  $J_x(\phi_x)$ : трекинг и приближение суммами с использованием 1-го и 3-х порядков приближения.

## 7 Выводы и благодарности

Аналитически был изучен вопрос формирования двумерного фазового пространства гамильтоновой системы с квадратичной нелинейностью на примере реальной расчетной магнитной структуры накопителя электронов СИБИРЬ-2. На основе гармонического разложения гамильтониана возмущения на пять типов азимутальных гармоник с помощью канонической теории преобразований Ли в форме рядов Депри получены выражения, которые могут быть легко запрограммированы на системе алгебраических вычислений REDUCE. Данные выражения позволили рассчитать фазовые траектории (поверхности) до третьего порядка включительно. Ограничения связаны с мощностью применяемой ЭВМ. Показано, что даже для таких сложных систем, как модель реального ускорителя, правомерно упрощение задачи с помощью выделения малого числа (одной) гармоник для каждого типа. Показано, что величина амплитуды главных гармоник, которая может быть использована при оценке динамической апертуры, зависимости частоты бетатронных колебаний от амплитуды и т.п. для случая источника СИ с ахроматическими поворотами и минимизированным эмиттансом определяется натуральным хроматизмом и горизонтальным эмиттансом одной ячейки периодичности.

В заключение авторы хотели бы выразить благодарность В.Н. Корчуганову за внимательное чтение рукописи и многочисленные полезные замечания.

## Список литературы

- [1] V.Korchuganov et al. Optimization of the Parameters of the Dedicated Synchrotron Radiation Source for Technology.- NIM 208 (1983), pp.11-18.
- [2] G.Rayna. REDUCE: Software for Algebraic Computation.- Springer-Verlag, 1987.
- [3] A.Ando. Distortion of Beam Emittance With Nonlinear Magnetic Fields.- Particle Accelerator 15 (1984), p.177
- [4] Z.Parsa et al. Second-order perturbation theory for accelerators.- Particle Accelerators, 1987, Vol.22, pp.205-230.
- [5] T.L.Collins. Fermilab Internal Report 84/114 (1984).

- [6] K.Y.Ng. Fermilab Report TM-1281 (1984).
- [7] G.I.Erg et al. Magnetic lattice of SIBERIA-2 - dedicated SR source.- Preprint INP 89-174, 1989.
- [8] J.Murphy. Synchrotron Light Source Data Book (V.3.0), BNL 42333, October 1993.
- [9] В.Н.Корчуганов, Е.Б.Левичев, В.В.Сажеев. Компенсация хроматизма и динамическая апертура накопителя электронов СИБИРЬ-2 (численное моделирование).- Препринт ИЯФ 93-27 (1993).
- [10] А.Лихтенберг, М.Либерман. Регулярная и стохастическая динамика.- "Мир", М., 1984.
- [11] J.R.Cary, Phys. Reports 79, No.2 (1981) 129-159.
- [12] E.D.Courant and H.S.Snyder, Ann. Phys. 3, 1 (1958).
- [13] R.L.Dewar, J.Phys.A9 (1976) 2043.
- [14] A.J.Dragt and J.M.Finn, J.Math.Phys.17 (1976) 2215.
- [15] Г.Б.Двайт. Таблицы интегралов и другие математические формулы.- "Наука", М., 1977.

*Е.Б. Левичев, В.В. Сажеев*

**Приближение потенциала  
секступольного возмущения  
малым числом азимутальных гармоник**

ИЯФ 95-58

Ответственный за выпуск С.Г. Попов

Работа поступила 25.05 1995 г.

Сдано в набор 31.07. 1995 г.

Подписано в печать 31.07 1995 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2,2 печ.л., 1,8 уч.-изд.л.

Тираж 180 экз. Бесплатно. Заказ N 58

Обработано на IBM PC и отпечатано на  
роталпринте ГНЦ РФ "ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН",  
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.