

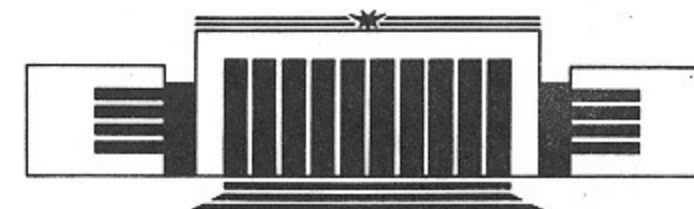


42
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
им. Г.И. Будкера СО РАН

И.А. Котельников, С.Г. Яковченко

ВЧ СТАБИЛИЗАЦИЯ ПЛАЗМЫ
С РЕЗКОЙ ГРАНИЦЕЙ

ИЯФ 94-66



НОВОСИБИРСК

ВЧ стабилизация плазмы с резкой границей

И.А. Котельников, С.Г. Яковченко

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера
630090, Новосибирск, Российская Федерация

Аннотация

Исследуется влияние собственных высокочастотных (ВЧ) колебаний плазменного шнура в цилиндрическом проводящем кожухе на устойчивость желобковых возмущений. Развитие желобков вызывает изменение частоты ω ВЧ колебаний, которое связано с изменением их энергии W условием постоянства адиабатического инварианта $W/\omega = const$; последний сохраняется вследствие относительной медленности желобковых возмущений. Использование адиабатического приближения позволяет получить простые критерии стабилизации желобковой неустойчивости ВЧ полем. Рассмотрены ВЧ колебания плазмы с резкой границей.

Взаимодействие высокочастотных (ВЧ) и низкочастотных (НЧ) колебаний принято описывать, пользуясь понятием пондеромоторной (ПМ) силы, причём для её вычисления необходимо учитывать наличие комбинационных полей, частота ω_{\pm} и волновой вектор k_{\pm} которых определяются соотношениями $\omega_{\pm} = \omega \pm \omega_s$, $k_{\pm} = k \pm k_s$, где индексом s помечены величины, относящиеся к НЧ колебаниям. Пондеромоторная сила является нелинейной (по амплитуде ВЧ поля) низкочастотной частью полной силы, действующей на плазму в ВЧ поле. Вследствие нелинейности задачи ВЧ стабилизации НЧ неустойчивостей плазмы её решение требует весьма громоздких вычислений, хотя и сводится к решению системы линейных уравнений для основной и комбинационной компонент ВЧ поля [1,2]. Теория ВЧ стабилизации плазмы в наиболее завершённом виде, по видимому, развита в работе Ипполито и Майре [3]. Простое изложение этой теории содержится в [4]. Предсказания теории Ипполито и Майре качественно подтверждаются результатами экспериментов в области частот выше ионной циклотронной частоты [5,20].

Иной подход к проблеме ВЧ стабилизации был предложен в работе Звонкова и Тимофеева [6]. Они указали, что при достаточно малом поглощении плазмой энергии ВЧ колебаний и вследствие существенного различия частот ВЧ и НЧ колебаний при их взаимодействии сохраняется адиабатический инвариант, характеризующий ВЧ степень свободы. Он равен W/ω , где W — энергия ВЧ колебаний, а ω — их частота. Развитие НЧ возмущений, перестраивая профиль плотности плазмы, вызывает изменение частоты ВЧ колебаний. Если частота ВЧ колебаний изменяется на $\delta\omega$, то их энергия изменяется на $\delta W = (\delta\omega/\omega) \cdot W$. Плазма будет устойчивой при условии, что суммарная энергия НЧ возмущений и ВЧ колебаний положительна: $\Delta W + \delta W > 0$.

В настоящей работе, следуя методу Звонкова и Тимофеева, на примере плазмы с резкой границей мы рассмотрим, как влияют на устойчи-

вость желобковых возмущений собственные ВЧ колебания плазменного шнура. Аналогичная задача решена в разд. 3 статьи [6] Звонкова и Тимофеева в приближении плоской границы плазмы. В плоской системе собственными колебаниями плазмы являются поверхностные альфвеновские моды; как показано в [6], эти моды дестабилизируют границу плазмы. Мы проанализируем устойчивость желобковых колебаний в более реальной — цилиндрической — геометрии и покажем, что существуют ВЧ моды, которые могут быть использованы для стабилизации плазмы. Для упрощения задачи, будем считать, что радиус плазмы a мал по сравнению с c/ω_{pi} ; более точный критерий указан ниже.

План статьи следующий. В разд. 1 обсуждается приближение плазмы с резкой границей и приведено решение уравнений Максвелла для плазменного шнура с невозмущенной границей. В разд. 2 вычислена поправка к частоте, обусловленная желобковыми возмущениями границы. В разд. 3 рассмотрен случай вырождения, когда собственные частоты двух ВЧ колебаний совпадают. Сравнению с экспериментом посвящен разд. 4.

1. Модель плазмы с резкой границей

Для простоты будем считать, что плазменный шнур имеет форму бесконечного цилиндра радиуса a и что плазму окружает проводящий кожух радиуса $R > a$. Пусть при $r < a$ плотность плазмы везде одинакова и равна n_0 , а при $r > a$ также постоянна, но весьма мала по сравнению с n_0 , хотя, возможно, и не равна нулю. Вся система помещена в однородное магнитное поле H_0 , направленное вдоль оси системы, которую выберем за ось z цилиндрической системы координат $\{r, \varphi, z\}$. Пренебрегая кинетическими и диссипативными эффектами, для описания электромагнитных свойств плазмы используем оператор диэлектрической проницаемости холодной плазмы ϵ :

$$\epsilon \cdot E = \epsilon E + (\eta - \epsilon)h(h \cdot E) + ig[h, E],$$

где $h = H_0/H_0$, $\epsilon = 1 + \omega_{pi}^2/(\omega_i^2 - \omega^2)$, $g = \omega_{pe}^2 \omega / \omega_i(\omega_i^2 - \omega^2)$, $\eta = 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2$, ω_{pi} и ω_{pe} — плазменная частота ионов и электронов, ω_i — циклотронная частота ионов. Соответствующее волновое уравнение

$$\nabla \times \nabla \times E = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \epsilon \cdot E, \quad (1)$$

удобно решать, используя спиральные координаты (см., например, [7–9]) с ортами

$$e_{\pm} = \frac{e_r \pm ie_{\varphi}}{\sqrt{2}} \exp(\pm i\varphi), \quad e_{\parallel} = e_z.$$

Вследствие стационарности системы и однородности по z можно считать, что зависимость любой компоненты ВЧ поля от z и t сводится к множителю $\exp(ik_{\parallel}z - i\omega t)$, который для краткости мы в дальнейшем опускаем. Тогда, вводя обозначения

$$E_{\pm} = e_{\pm} \cdot E = \frac{e^{\pm i\varphi}}{\sqrt{2}} (E_r \pm iE_{\varphi}), \quad E_{\parallel} = E_z,$$

$$\nabla_{\pm} = e_{\pm} \cdot \nabla = \frac{e^{\pm i\varphi}}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \pm i \frac{\partial}{r \partial \varphi} \right), \quad \nabla_{\parallel} = \frac{\partial}{\partial z},$$

$$N_{\parallel}^2 = \frac{k_{\parallel}^2 c^2}{\omega^2}, \quad \nu_{\pm} = \frac{\omega^2}{c^2} (\epsilon \pm g - N_{\parallel}^2), \quad \nu_{\parallel} = \frac{\omega^2}{c^2} \eta,$$

из (1) получаем:

$$\nabla_{\pm}(\nabla_{\pm} E_{\mp} - \nabla_{\mp} E_{\pm}) = \nu_{\pm} E_{\pm} - \nabla_{\pm} \nabla_{\parallel} E_{\parallel}, \quad (2)$$

$$\nabla_{\parallel}(\nabla_{+} E_{-} + \nabla_{-} E_{+}) = \nu_{\parallel} E_{\parallel} + 2\nabla_{+} \nabla_{-} E_{\parallel}. \quad (3)$$

Магнитное поле можно найти, используя формулы

$$H_{\pm} = \pm \frac{c}{\omega} [\nabla_{\parallel} E_{\pm} - \nabla_{\pm} E_{\parallel}], \quad H_{\parallel} = \frac{c}{\omega} [\nabla_{+} E_{-} - \nabla_{-} E_{+}].$$

Поскольку

$$\nabla_{\pm} [I_n(\kappa r) e^{in\varphi}] = + \frac{\kappa}{\sqrt{2}} I_{n\pm 1}(\kappa r) e^{i(n\pm 1)\varphi},$$

$$\nabla_{\pm} [K_n(\kappa r) e^{in\varphi}] = - \frac{\kappa}{\sqrt{2}} K_{n\pm 1}(\kappa r) e^{i(n\pm 1)\varphi},$$

где $I_n(x)$ и $K_n(x)$ функции Бесселя мнимого аргумента, решение уравнений (2), (3) удобно искать в виде

$$E_{\pm} = [I_{m\pm 1}(\kappa r) A_{\pm} + K_{m\pm 1}(\kappa r) B_{\pm}] e^{i(m\pm 1)\varphi},$$

$$E_{\parallel} = [I_m(\kappa r) A_{\parallel} + K_m(\kappa r) B_{\parallel}] e^{im\varphi}. \quad (4)$$

В области, занятой плазмой, следует положить $B_{\pm} = B_{\parallel} = 0$, поскольку функции K_n сингулярны при $r \rightarrow 0$. Остальные коэффициенты определяются из линейной системы алгебраических уравнений, получающейся

после подстановки (4) в (3):

$$\begin{pmatrix} \kappa^2/2 + \nu_+ & -\kappa^2/2 & -ik_{\parallel}\kappa/\sqrt{2} \\ -\kappa^2/2 & \kappa^2/2 + \nu_- & -ik_{\parallel}\kappa/\sqrt{2} \\ -ik_{\parallel}\kappa/\sqrt{2} & -ik_{\parallel}\kappa/\sqrt{2} & \kappa^2 + \nu_{\parallel} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_+ \\ A_- \\ A_{\parallel} \end{bmatrix} = 0.$$

Условие существования нетривиального решения приводит к биквадратному относительно κ дисперсионному уравнению:

$$\kappa^4[\nu_+ + \nu_- + 2k_{\parallel}^2] + \kappa^2[2\nu_+\nu_- + (\nu_{\parallel} + k_{\parallel}^2)(\nu_+ + \nu_-)] + 2\nu_{\parallel}\nu_+\nu_- = 0. \quad (5)$$

В пределе плотной плазмы, $\nu_{\parallel} \gg \nu_+\nu_-/(\nu_+ + \nu_-)$, в диапазоне понных частот, $\nu_{\parallel} \gg k_{\parallel}^2$, его корни

$$\begin{aligned} \kappa_1^2 &\simeq -\frac{2\nu_+\nu_-}{\nu_+ + \nu_-} = \frac{\omega^2 (N_{\parallel}^2 - \varepsilon)^2 - g^2}{c^2 (N_{\parallel}^2 - \varepsilon)}, \\ \kappa_2^2 &\simeq -\frac{(\nu_+ + \nu_-)\nu_{\parallel}}{\nu_+ + \nu_- + 2k_{\parallel}^2} = \frac{\omega^2 (N_{\parallel}^2 - \varepsilon)\eta}{c^2 \varepsilon}, \end{aligned}$$

существенно различны: κ_1 соответствует обыкновенной, или быстрой волне (БВ), а $\kappa_2 \gg \kappa_1$ — необыкновенной, или медленной (МВ); см. [8]. Исключение составляет область вблизи альфвеновского резонанса $N_{\parallel}^2 - \varepsilon = 0$, где $\kappa_1 \sim \kappa_2$ и разделение на быструю и медленные волны теряет смысл.

В указанном пределе и вне альфвеновского резонанса получаем

$$\begin{aligned} E_{\pm} &\simeq \mp \frac{\omega}{\kappa_1 c \nu_+ + \nu_-} \sqrt{2\nu_{\mp}} I_{m\pm 1}(\kappa_1 r) e^{i(m\pm 1)\varphi} A_{БВ}, \\ E_{\parallel} &\simeq 0, \\ H_{\pm} &\simeq -i \frac{k_{\parallel}}{\kappa_1} \frac{\sqrt{2\nu_{\mp}}}{\nu_+ + \nu_-} I_{m\pm 1}(\kappa_1 r) e^{i(m\pm 1)\varphi} A_{БВ}, \\ H_{\parallel} &\simeq I_m(\kappa_1 r) e^{im\varphi} A_{БВ} \end{aligned} \quad (6)$$

соответственно для быстрой и

$$\begin{aligned} E_{\pm} &\simeq I_{m\pm 1}(\kappa_2 r) e^{i(m\pm 1)\varphi} A_{МВ}, \\ E_{\parallel} &\simeq i \frac{\sqrt{2}k_{\parallel}\kappa_2}{\kappa_2^2 + \nu_{\parallel}} I_m(\kappa_2 r) e^{im\varphi} A_{МВ}, \\ H_{\pm} &\simeq \pm i \frac{k_{\parallel}c}{\omega} \frac{\nu_{\parallel}}{\kappa_2^2 + \nu_{\parallel}} I_{m\pm 1}(\kappa_2 r) e^{i(m\pm 1)\varphi} A_{МВ}, \\ H_{\parallel} &\simeq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

для медленной волн; $A_{БВ}$ и $A_{МВ}$ обозначают амплитуды этих волн. Согласно терминологии, принятой в теории волноводов [10], быстрая волна приближённо является ТЕ волной, поскольку электрическое поле поляризовано поперёк оси системы, $E_{\parallel} \simeq 0$; соответственно, медленная волна является ТМ волной, так как имеет $H_{\parallel} \simeq 0$.

В вакуумной области (где $\varepsilon = \eta = 1, g = 0$) ТЕ и ТМ волны вырождены по частоте, так как корни уравнения (5) одинаковы:

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (N_{\parallel}^2 - 1). \quad (8)$$

В дальнейшем через κ без индекса мы будем обозначать именно это решение дисперсионного уравнения в вакууме.

Предполагая, что вакуумная область ограничена как со стороны малых, так и со стороны больших радиусов, $a < r < R$, следует считать, что в решении (4) отличны от нуля как коэффициенты A , так и коэффициенты B . Чтобы различить ТЕ и ТМ волны в вакууме от их аналогов в плазме, условимся волны в плазме по-прежнему обозначать индексами БВ и МВ, а индексы ТЕ и ТМ зарезервируем для волн в вакууме. Тогда получаем

$$\begin{aligned} E_{\pm} &= \mp \frac{\omega}{\sqrt{2}\kappa c} [I_{m\pm 1}(\kappa r) A_{ТЕ} - K_{m\pm 1}(\kappa r) B_{ТЕ}] e^{i(m\pm 1)\varphi}, \\ E_{\parallel} &= 0, \\ H_{\pm} &= -i \frac{k_{\parallel}}{\sqrt{2}\kappa} [I_{m\pm 1}(\kappa r) A_{ТЕ} - K_{m\pm 1}(\kappa r) B_{ТЕ}] e^{i(m\pm 1)\varphi}, \\ H_{\parallel} &= [I_m(\kappa r) A_{ТЕ} - K_m(\kappa r) B_{ТЕ}] e^{im\varphi} \end{aligned} \quad (9)$$

соответственно для ТЕ и

$$\begin{aligned} E_{\pm} &= [I_{m\pm 1}(\kappa r) A_{ТМ} + K_{m\pm 1}(\kappa r) B_{ТМ}] e^{i(m\pm 1)\varphi}, \\ E_{\parallel} &= i \frac{\sqrt{2}\kappa}{\kappa_{\parallel}} [I_m(\kappa r) A_{ТМ} - K_m(\kappa r) B_{ТМ}] e^{im\varphi}, \\ H_{\pm} &= \pm i \frac{\omega}{\kappa_{\parallel} c} [I_{m\pm 1}(\kappa r) A_{ТМ} + K_{m\pm 1}(\kappa r) B_{ТМ}] e^{i(m\pm 1)\varphi}, \\ H_{\parallel} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

для ТМ волны. Таким образом, всего имеется шесть неизвестных коэффициентов: $A_{БВ}, A_{МВ}, A_{ТЕ}, B_{ТЕ}, A_{ТМ}, B_{ТМ}$. Они должны быть найдены из граничных условий на поверхности проводящего кожуха и на поверхности раздела плазмы с вакуумной областью.

На поверхности проводящего кожуха, то есть при $r = R$, обращаются в нуль касательные компоненты электрического поля:

$$E_{\varphi} = 0, \quad E_{\parallel} = 0. \quad (11)$$

С помощью этих двух условий удобно исключить коэффициенты B_{TE} и B_{TM} в формулах (9) и (10), выразив их через A_{TE} и A_{TM} :

$$B_{TE} = -\frac{I'_m(\kappa R)}{K'_m(\kappa R)} A_{TE}, \quad B_{TM} = \frac{I_m(\kappa R)}{K_m(\kappa R)} A_{TM}. \quad (12)$$

Здесь штрих обозначает производную функций Бесселя по их аргументу. Оставшиеся коэффициенты определяются из граничных условий на границе плазмы с вакуумным промежутком. Равновесная граница плазмы описывается уравнением $r = a_0$, а при возникновении желобковых колебаний — уравнением $r = a(\varphi) \equiv a_0 + \xi(\varphi)$, где $\xi(\varphi)$ обозначает радиальную компоненту вектора желобкового смещения. На этой границе непрерывны касательные компоненты векторов магнитного и электрического полей:

$$\{E_{\parallel}\} = 0, \quad (13)$$

$$\{H_{\parallel}\} = 0, \quad (14)$$

$$\{E_{\perp t}\} = 0, \quad (15)$$

$$\{H_{\perp t}\} = 0. \quad (16)$$

Здесь фигурные скобки обозначают разность соответствующих величин по обе стороны от границы, а $E_{\perp t}$ и $H_{\perp t}$ проекции перпендикулярных равновесному магнитному полю (т.е. оси z) компонент ВЧ поля на плоскость, касательную к поверхности границы. На равновесной границе плазмы $E_{\perp t} = E_{\varphi}$, а на деформированной

$$E_{\perp t} = \left[E_{\varphi} + \frac{d\xi}{a d\varphi} E_r \right] / \sqrt{1 + \left(\frac{d\xi}{a d\varphi} \right)^2};$$

аналогичные формулы имеются для $H_{\perp t}$. Что касается нормальных к границе компонент полей, то соответствующие граничные условия

$$\{(\epsilon \cdot E)_n\} = 0, \quad \{H_n\} = 0,$$

тождественно удовлетворяются при выполнении (13)–(16).

Поскольку из четырёх коэффициентов: A_{BV} , A_{MV} , A_{TE} , A_{TM} — один является независимым, в силу линейности граничных условий, четыре уравнения (13)–(16) позволяют, в принципе, найти собственные частоты ВЧ колебаний системы. Эта задача легко решается для плазмы с возмущённой границей (см., например, [11,8]), но становится чрезмерно громоздкой при деформированной границе. Поэтому мы рассмотрим предельный случай, когда продольную проводимость плазмы (и, следовательно, коэффициент η) можно считать достаточно большой; более точный критерий, полученный из качественных соображений, мы укажем ниже.

При конечном η собственные колебания рассматриваемой неоднородной системы, в отличие, например, от случая, когда отсутствует вакуумный промежуток между плазмой и проводящим кожухом, не разделяются на ТЕ и ТМ колебания; иными словами в собственных колебаниях одновременно отличны от нуля как E_{\parallel} , так и H_{\parallel} . Однако при $\eta \rightarrow \infty$ такое разделение приближенно можно провести, что существенно упрощает задачу. Действительно, при $\kappa_2 \rightarrow \infty$ поле МВ волны очень быстро уменьшается по направлению от границы вглубь плазмы. Поэтому МВ волна, а вместе с ней и продольное электрическое поле E_{\parallel} может существовать только в узком (шириной порядка $1/\kappa_2$) приповерхностном слое плазмы. Соответственно только в этом тонком слое может течь продольный ток заметной величины, так как $j_{\parallel} \propto \eta E_{\parallel}$. Вследствие малой толщины этого слоя, данный ток можно рассматривать в качестве поверхностного. Тогда вместо (16) получаем следующее граничное условие

$$\{H_{\perp t}\} = \frac{4\pi}{c} i_{\parallel}, \quad (16')$$

которое может использоваться для вычисления поверхностного тока i_{\parallel} .

Таким образом, при $\eta \rightarrow \infty$ можно забыть о существовании МВ волны (7), а для сшивки БВ волны (6) в плазме с ТЕ и ТМ волнами в вакуумном промежутке использовать граничные условия (13)–(15), допуская существование скачка $H_{\perp t}$ компоненты магнитного поля на границе. Остаётся только установить условие, когда указанное приближение справедливо: необходимо, чтобы толщина $1/\kappa_2$ слоя, в котором течёт продольный ток, была значительно меньше длины волны, которую можно оценить как $a/|m|$, то есть

$$\kappa_2 a \gg |m|.$$

При $m = 0$ это условие следует интерпретировать как $\kappa_2 a \gg 1$; мы не будем более делать подобных пояснений.

В случае невозмущённой границы плазмы определяемые в таком приближении собственные колебания разделяются на ТЕ и ТМ, в которых всюду, за исключением тонкого приграничного слоя, равны нулю соответственно E_{\parallel} и H_{\parallel} . В ТМ колебаниях ВЧ поле имеется только в вакуумном промежутке, причём на границе плазмы, как и на поверхности проводящего кожуха, $E_{\parallel} = E_{\varphi} = 0$. Используя (10), находим дисперсионное уравнение ТМ колебаний:

$$K_m(\kappa R)I_m(\kappa a) - I_m(\kappa R)K_m(\kappa a) = 0. \quad (17)$$

Оно не имеет решений с вещественным κ , поэтому $\omega > k_{\parallel}c$. В ТЕ колебаниях ВЧ поле существует как в вакуумном промежутке, так и внутри плазмы. Сшивая ТЕ колебания вакуумного промежутка (9) с БВ волной в плазме (6) с помощью граничного условия (15), получаем соответствующее дисперсионное уравнение [11,8]:

$$\frac{\kappa}{\kappa_1} \left[\frac{I'_m(\kappa_1 a)}{I_m(\kappa_1 a)} - \frac{m}{\kappa_1 a} \frac{g}{N_{\parallel}^2 - \varepsilon} \right] - \frac{I'_m(\kappa R)K'_m(\kappa a) - K'_m(\kappa R)I'_m(\kappa a)}{I'_m(\kappa R)K_m(\kappa a) - K'_m(\kappa R)I_m(\kappa a)} = 0. \quad (18)$$

Оно существенно упрощается в пределе

$$\kappa_1 a \ll \sqrt{|m|}, \quad \kappa R \ll \sqrt{|m|}, \quad (19)$$

то есть "радиальная" длина волны ($2\pi/\kappa_1$, $2\pi/\kappa$) заведомо мала по сравнению с "азимутальной" ($2\pi/m$); мы предполагаем, что $m \neq 0$. Тогда

$$I_m(x) \simeq \frac{x^{|m|}}{2^{|m|}|m|!}, \quad K_m(x) \simeq \frac{2^{(|m|-1)}(|m|-1)!}{x^{|m|}},$$

и после простых вычислений получаем

$$N_{\parallel}^2 - 1 = \frac{z_m}{z_m + 1} (\varepsilon - 1 - s_m g) = \frac{z_m}{z_m + 1} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_i(\omega_i + s_m \omega)}, \quad (20)$$

где¹

$$s_m = m/|m|, \quad z_m = (R^{2|m|} - a^{2|m|}) / (R^{2|m|} + a^{2|m|}). \quad (21)$$

В пределе $a/R \rightarrow 0$ формула (20) с точностью до коэффициента s_m совпадает с результатом Звонкова и Тимофеева [6] (мы предполагаем, что

¹В работе [11] допущена небрежность в вычислении z_m (в других обозначениях), которая привела к ошибочному результату в законе дисперсии в пределе $\omega \ll \omega_i$; ср. (25) и формулу (14) из [11]. Эта ошибка перекочевала в работу [8], где утверждается, что спектр колебаний вырожден по m в пределе $\omega \rightarrow 0$.

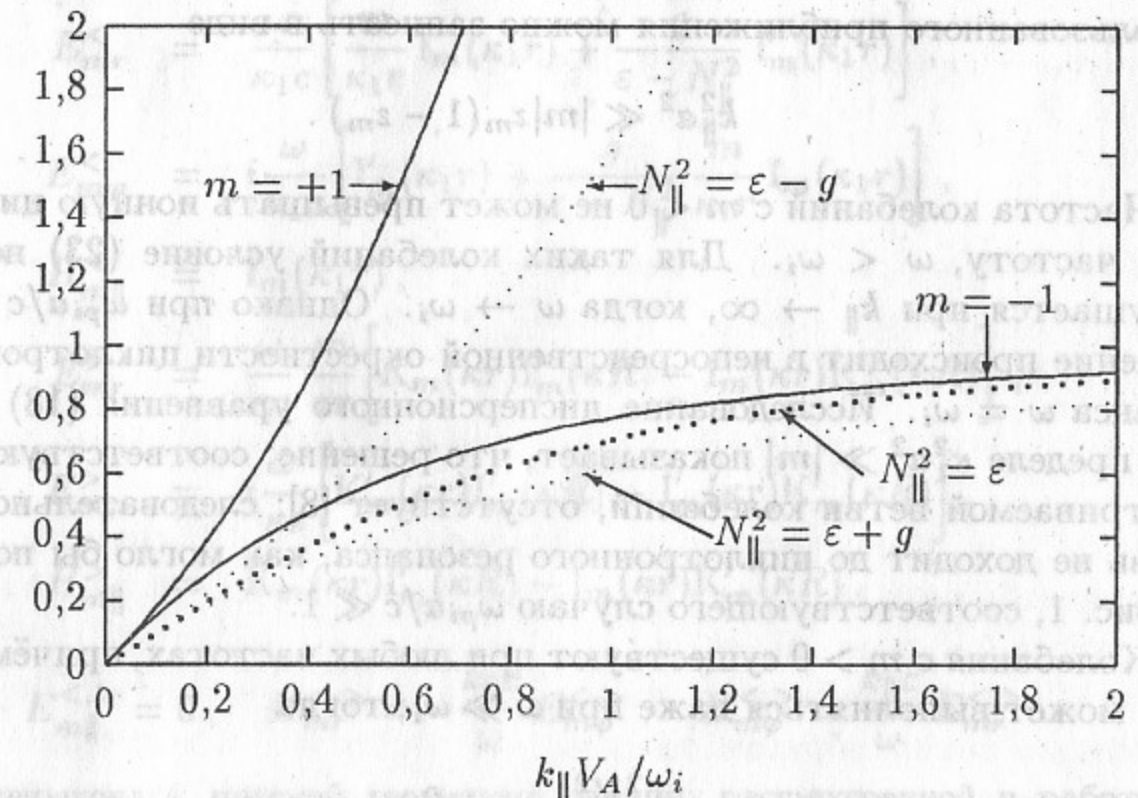


Рис. 1: Дисперсия ТЕ волны при $a/R = 0,5$. Точками изображена линия альфвеновского резонанса $N_{\parallel}^2 = \varepsilon$ и линии $N_{\parallel}^2 = \varepsilon \pm g$, где $\kappa_1 = 0$. В плазме с размытой границей альфвеновский резонанс занимает область, лежащую между линиями $N_{\parallel}^2 = \varepsilon$ и $\omega/\omega_1 = 1$ (не показана).

$\omega > 0$). Графики дисперсионных кривых приведены на рисунке 1; там же точками показаны графики кривых $N_{\parallel}^2 = \varepsilon$ и $N_{\parallel}^2 = \varepsilon \pm g$. Как видно из рисунка, дисперсионная кривая колебаний с $m < 0$ пересекает линию $N_{\parallel}^2 = \varepsilon - g$ при $\omega = \omega_i / (1 + 2z_m)$. В точке пересечения функция

$$\kappa_1^2 = -\frac{\omega_{pi}^2}{c^2} \frac{\omega^2}{\omega_i^2 - \omega^2} \frac{[\omega_i + z_m s_m \omega]^2 - [(1 + z_m) s_m \omega]^2}{(1 + z_m)(\omega_i + z_m s_m \omega)} \quad (22)$$

изменяет знак. С учётом (20) и (22) условие применимости $|\kappa_1^2| \ll |m|/a^2$ использованного приближения можно записать в виде

$$k_{\parallel}^2 a^2 \ll |m| z_m (1 - z_m). \quad (23)$$

Частота колебаний с $m < 0$ не может превышать ионную циклотронную частоту, $\omega < \omega_i$. Для таких колебаний условие (23) неизбежно нарушается при $k_{\parallel} \rightarrow \infty$, когда $\omega \rightarrow \omega_i$. Однако при $\omega_{pi} a / c \ll 1$ нарушение происходит в непосредственной окрестности циклотронного резонанса $\omega = \omega_i$. Исследование дисперсионного уравнения (18) в обратном пределе $\kappa_1^2 a^2 \gg |m|$ показывает, что решение, соответствующее рассматриваемой ветви колебаний, отсутствует [8]; следовательно, данная ветвь не доходит до циклотронного резонанса, как могло бы показаться из рис. 1, соответствующего случаю $\omega_{pi} a / c \ll 1$.

Колебания с $m > 0$ существуют при любых частотах, причём условие (23) может выполняться даже при $\omega \gg \omega_i$; тогда

$$\omega \simeq \frac{k_{\parallel}^2 V_A^2}{\omega_i} \frac{2}{1 - (a/R)^{2|m|}}, \quad (24)$$

где $V_A = c \omega_i / \omega_{pi}$ — альфвеновская скорость.

Длинноволновые колебания (такие, что $k_{\parallel} c \ll \omega_{pi}$), имеют закон дисперсии, не зависящий от знака m :

$$\omega \simeq k_{\parallel} V_A \sqrt{\frac{2}{1 - (a/R)^{2|m|}}}. \quad (25)$$

Для таких колебаний получаем

$$\kappa_1^2 \simeq -k_{\parallel}^2 / z_m, \quad \kappa^2 \simeq k_{\parallel}^2.$$

Мы ограничимся рассмотрением только ТЕ колебаний с $m \neq 0$; при $V_A \ll c$ и одинаковом значении k_{\parallel} они имеют существенно более низкую

частоту ($\omega \sim V_A/a$), чем ТМ колебания или ТЕ колебания с $m = 0$ ($\omega \sim c/a$).

Для удобства дальнейшего изложения вернёмся к цилиндрическим координатам, а электрическое поле ТЕ колебаний внутри плазмы, определяемое формулой (6) с $A_{\text{БВ}} = 1$, запишем в виде $E = E_m^< \exp(im\varphi)$. Поле вне плазмы, определяемое формулами (9) и (12) $A_{\text{ТЕ}} = I_m'(\kappa R)$ будем помечать индексом '>' в отличие от полей в плазме, помечаемых индексом '<'. Аналогичные обозначения введём для магнитного поля. Расшифровка обозначений приведена ниже.

$$E_{mr}^< = \frac{\omega}{\kappa_1 c} \left[\frac{m}{\kappa_1 r} I_m(\kappa_1 r) + \frac{g}{\varepsilon - N_{\parallel}^2} I_m'(\kappa_1 r) \right],$$

$$E_{m\varphi}^< = i \frac{\omega}{\kappa_1 c} \left[I_m'(\kappa_1 r) + \frac{g}{\varepsilon - N_{\parallel}^2} \frac{m}{\kappa_1 r} I_m(\kappa_1 r) \right],$$

$$H_{m\parallel}^< = I_m(\kappa_1 r),$$

$$E_{mr}^> = \frac{\omega}{\kappa c} \frac{m}{\kappa r} \left[K_m(\kappa r) I_m'(\kappa R) - I_m(\kappa r) K_m'(\kappa R) \right],$$

$$E_{m\varphi}^> = i \frac{\omega}{\kappa c} \left[K_m'(\kappa r) I_m(\kappa R) - I_m(\kappa r) K_m'(\kappa R) \right],$$

$$H_{m\parallel}^> = K_m(\kappa r) I_m'(\kappa R) - I_m(\kappa r) K_m'(\kappa R).$$

$$E_{m\parallel}^< > = 0, \quad H_{mr}^< > = -\frac{k_{\parallel} c}{\omega} E_{m\varphi}^< >, \quad H_{m\varphi}^< > = \frac{k_{\parallel} c}{\omega} E_{mr}^< >. \quad (26)$$

Для перехода к плоской геометрии задачи, рассмотренной в работе [6], нужно устремить к бесконечности одновременно координату r и азимутальное число m , сохраняя неизменным отношение m/r . При $m \sim x \gg 1$

$$I_m(x) \approx (2\pi)^{-1/2} (m^2 + x^2)^{-1/4} x^{|m|} (|m| + \sqrt{m^2 + x^2})^{-|m|} e^{\sqrt{m^2 + x^2}},$$

$$K_m(x) \approx (\pi/2)^{1/2} (m^2 + x^2)^{-1/4} x^{-|m|} (|m| + \sqrt{m^2 + x^2})^{|m|} e^{-\sqrt{m^2 + x^2}}. \quad (27)$$

Легко проверить, что $I_m'(x)/I_m(x) \approx [m^2/x^2 + 1]^{1/2}$, $K_m'(x)/K_m(x) \approx -[m^2/x^2 + 1]^{1/2}$. Следовательно, на интервале $\Delta x \ll |m|$ вблизи $x = x_0 \sim |m|$ функции $I_m(x)$ и $K_m(x)$ можно заменить на $\exp[\pm \sqrt{m^2/x_0^2 + 1}(x - x_0)]$. Вводя обозначение $k_y = m/a$, из (18) получаем дисперсионное уравнение ТЕ волн на плоской границе плазмы:

$$\frac{\kappa}{\kappa_1} \left[\sqrt{k_y^2 + \kappa_1^2} - k_y \frac{g}{N_{\parallel}^2 - \varepsilon} \right] + \sqrt{k_y^2 + \kappa^2} \operatorname{th} \left(\sqrt{k_y^2 + \kappa^2} (R - a) \right) = 0. \quad (28)$$

При $\sqrt{k_y^2 + \kappa^2(R-a)} \gg 1$ оно описывает поверхностную альфвеновскую волну (ср. [6]). Из сравнения (и вывода) уравнений (20), (28) должно быть ясно, что при $|m| \gg 1$ имеется обширная область (соответствующая неравенству $\sqrt{|m|} \leq x \leq |m|$), где не применимо ни одно из них. Поэтому не следует ожидать, что результаты следующего раздела, относящиеся к случаю (19), должны "сшиваться" с результатами работы [6]. Что касается "сшивки" дисперсионных уравнений, её нетрудно обеспечить, уточнив выражение для z_m в уравнении (20) с помощью (27):

$$z_m = \frac{1 - (a/R)^{2|m|} \exp(-\kappa^2(R^2 - a^2)/2|m|)}{1 + (a/R)^{2|m|} \exp(-\kappa^2(R^2 - a^2)/2|m|)}$$

Тогда уравнение (20) будет верно, если $\kappa_1 a \ll |m|$, $\kappa R \ll |m|$.

2. Поправка к частоте

Желобковые возмущения деформируют границу плазмы. Рассмотрим возмущение с азимутальным числом l , тогда смещение границы плазмы можно представить в виде

$$\xi(\varphi) = \xi_l(t) \exp(il\varphi) + \xi_{-l}(t) \exp(-il\varphi),$$

причём $\xi_{-l} = \xi_l^*$ вследствие вещественности $\xi(\varphi)$. Напомним, что частота желобковых возмущений ω_s предполагается малой по сравнению с частотой ω ВЧ поля, $\omega_s \ll \omega$. Поэтому при вычислении собственных частот ВЧ колебаний форму границы плазмы можно считать статичной. Найденные таким образом собственные частоты ВЧ колебаний зависят от мгновенной амплитуды желобка $\xi_l(t) \propto \exp(-i\omega_s t)$ как от параметра.

Собственные моды ТЕ колебаний плазменного шнура с деформированной границей можно представить в виде суперпозиции полей (26) с азимутальными числами $m + ql$ при целом q ; иными словами, к колебаниям с азимутальным числом m примешиваются комбинационные колебания. На линейной стадии желобковой неустойчивости, когда смещение границы плазмы достаточно мало, относительный вес последних с ростом q убывает пропорционально $|\xi_l|^{|q|}$. Хотя поправка к частоте ВЧ колебаний пропорциональна $|\xi_l|^2$, для её вычисления достаточно учесть лишь слагаемые с $q = 0$ и $q = \pm 1$ [6]. Тогда

$$\mathbf{E} = A_m^< \mathbf{E}_m^< + \sum_{\pm} A_{m\pm l}^< \mathbf{E}_{m\pm l}^<, \text{ при } r < a_0 + \xi(\varphi),$$

$$\mathbf{E} = A_m^> \mathbf{E}_m^> + \sum_{\pm} A_{m\pm l}^> \mathbf{E}_{m\pm l}^>, \text{ при } r > a_0 + \xi(\varphi);$$

то же верно для магнитного поля. Для нахождения 6 неизвестных коэффициентов A используем два граничных условия (14, 15) на деформированной границе плазмы $r = a_0 + \xi(\varphi)$, записав каждое отдельно для трёх Фурье-компонент с азимутальными числами $m, m-l, m+l$; граничное условие (13) выполняется тождественно. Так, из m -компоненты уравнений (14), (15) получаем два уравнения, которые представим в матричном виде:

$$(\widehat{M}_m + |\xi_l|^2 \widehat{M}_m'') \cdot |A\rangle_m + \xi_{-l} \widehat{N}_{m+l,-} \cdot |A\rangle_{m+l} + \xi_l \widehat{N}_{m-l,+} \cdot |A\rangle_{m-l} = 0, \quad (29)$$

где

$$|A\rangle_n = \begin{bmatrix} A_n^< \\ A_n^> \end{bmatrix}, \quad \widehat{M}_n = \begin{bmatrix} E_{n\varphi}^< & E_{n\varphi}^> \\ H_{n\parallel}^< & H_{n\parallel}^> \end{bmatrix},$$

$$\widehat{N}_{n,\pm} = \begin{bmatrix} E_{n\varphi}' \pm i(l/a) E_{nr}^< & E_{n\varphi}' \pm i(l/a) E_{nr}^> \\ H_{n\parallel}' & H_{n\parallel}' \end{bmatrix},$$

значения всех полей относятся к радиусу $r = a_0$, а штрих означает дифференцирование по a_0 . Соответствующие уравнения для компонент $m \pm l$ связывают амплитуды комбинационных полей $|A\rangle_{m \pm l}$ с $|A\rangle_m$:

$$\xi_{\pm l} \widehat{N}_{m,\pm} \cdot |A\rangle_m + \widehat{M}_{m \pm l} \cdot |A\rangle_{m \pm l} = 0. \quad (30)$$

Исключая амплитуды комбинационных полей в уравнении (29) с помощью (30), получаем уравнение на вектор $|A\rangle_m$:

$$\widehat{D} \cdot |A\rangle_m = 0, \quad (31)$$

где

$$\widehat{D} = \widehat{M}_m + |\xi_l|^2 (\widehat{M}_m'' - \sum_{\pm} \widehat{N}_{m \pm l, \mp} \cdot \widehat{M}_{m \pm l}^{-1} \cdot \widehat{N}_{m, \pm}).$$

Условие разрешимости этой системы, $\det \widehat{D} = 0$, даёт дисперсионное уравнение на частоту ω собственных ВЧ колебаний с учётом поправок, вносимых желобковым смещением границы плазмы. Существенно, что величина смещения граница плазмы входит в уравнение (31) в виде $|\xi_l|^2$, а учёт комбинационных полей с $q = \pm 2$ привел бы к появлению членов порядка $\mathcal{O}(|\xi_l|^4)$.

В пределе $\xi_l = 0$ уравнение $\det \widehat{D} = \det \widehat{M}_m = 0$ совпадает с уравнением (18). Решение последнего обозначим через ω_m . Очевидно, что при малой деформации границы поправка $\delta\omega$ к частоте ВЧ колебаний $\omega = \omega_m + \delta\omega$ есть малая величина порядка $\mathcal{O}(|\xi_l|^2)$.

Чтобы вычислить $\delta\omega$, введем понятие левого и правого собственных векторов матрицы \hat{D} , определив их посредством уравнений

$$\langle A|m \cdot \hat{D} = 0, \quad \hat{D} \cdot |A\rangle_m = 0.$$

При $\xi_l \rightarrow 0$ они равны соответствующим собственным векторам матрицы \hat{M}_m , которые мы помечаем индексом m внутри угловых скобок:

$$\langle A|m = \langle A_m| + \langle \delta A|m, \quad |A\rangle_m = |A_m\rangle + |\delta A\rangle_m,$$

причём $\langle \delta A|m$ и $|\delta A\rangle_m$ одного порядка малости с $|\xi_l|^2$. Компоненты невозмущённых векторов

$$\langle A_m| = (H_{m\parallel}^>, -E_{m\varphi}^>), \quad |A_m\rangle = \begin{pmatrix} H_{m\parallel}^> \\ -H_{m\parallel}^< \end{pmatrix},$$

следует вычислять при $\omega = \omega_m$ и $r = a_0$. Пренебрегая в уравнении (31) членами порядка $\mathcal{O}(|\xi_l|^2)$, получаем

$$\begin{aligned} \hat{M}_m \cdot |A_m\rangle + \hat{M}_m \cdot |\delta A\rangle_m + \delta\omega \frac{\partial \hat{M}_m(\omega_m)}{\partial \omega_m} \cdot |A_m\rangle \\ + |\xi_l|^2 \left[\hat{M}_m'' - \sum_{\pm} \hat{N}_{m\pm l, \mp} \cdot \hat{M}_{m\pm l}^{-1} \cdot \hat{N}_{m, \pm} \right] \cdot |A_m\rangle = 0. \end{aligned}$$

Домножая полученное выражение слева на $\langle A_m|$, находим:

$$\delta\omega = |\xi_l|^2 \frac{\langle A_m| \cdot \left(\sum_{\pm} \hat{N}_{m\pm l, \mp} \cdot \hat{M}_{m\pm l}^{-1} \cdot \hat{N}_{m, \pm} - \hat{M}_m'' \right) \cdot |A_m\rangle}{\langle A_m| \cdot \partial \hat{M}_m / \partial \omega \cdot |A_m\rangle}. \quad (32)$$

Если $\delta\omega > 0$, то ВЧ поле оказывает стабилизирующее влияние на плазму, если $\delta\omega < 0$ — дестабилизирующее. Обозримый результат удаётся получить в приближении (19):

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = -|m| \frac{1 - z_m \frac{\omega_i + s_m \omega}{2\omega_i + s_m \omega} \left| \frac{\xi_l}{a} \right|^2 \left\{ [2|l| - z_l] + \frac{2z_m (1 + z_l)^2 (\omega_i + z_m s_m \omega) \max(|l| - |m|, 0)}{[2z_m - (1 + z_m^2) z_l] \omega_i - [(1 + 2z_m - z_m^2) z_l - 2z_m^2] s_m \omega} \right\}}{2z_m (1 + z_l)^2 (\omega_i + z_m s_m \omega) \max(|l| - |m|, 0)}. \quad (33)$$

Здесь и в дальнейшем для краткости мы не пишем индексы у величин a_0 и ω_m . Общий множитель (вместе со знаком минус), стоящий перед

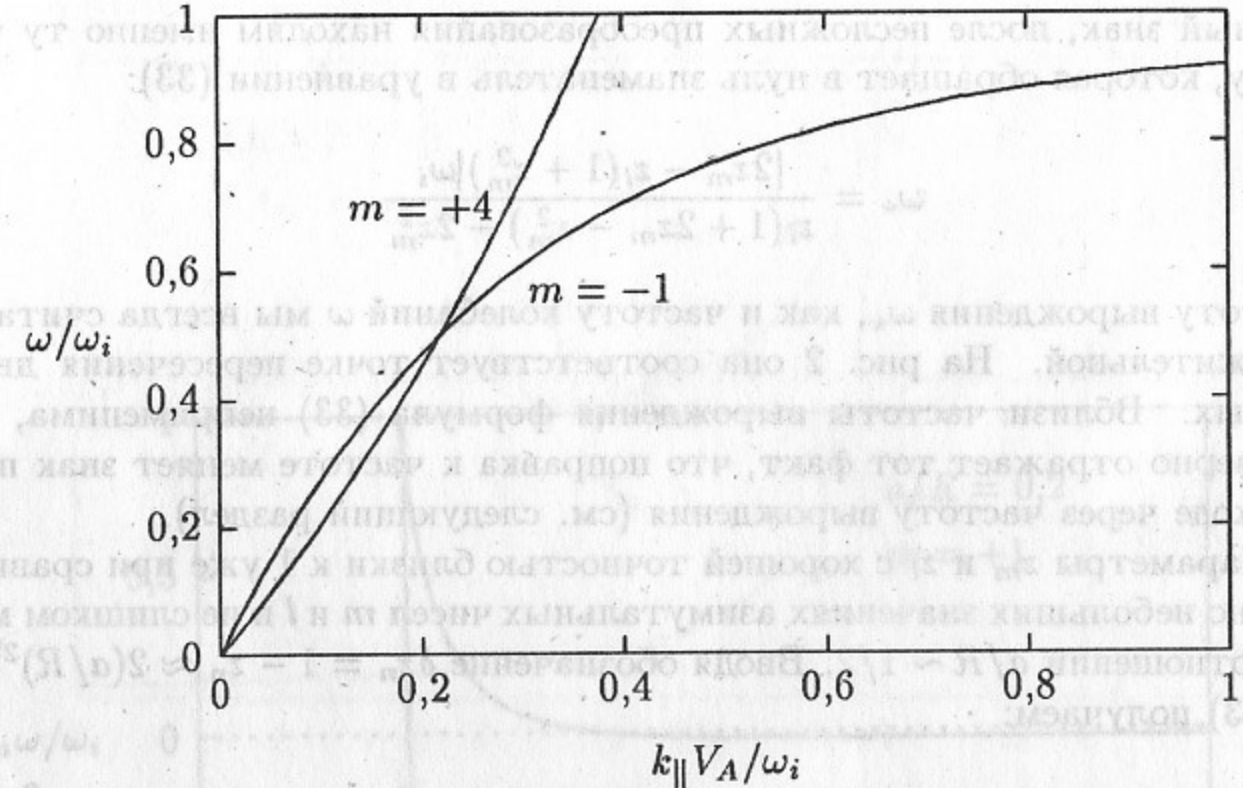


Рис. 2: Вырождение ТЕ колебаний. Частота вырождения соответствует точке пересечения графиков закона дисперсии колебаний с $m = +4$ и $m = -1$; $a/R = 0.9$.

фигурными скобками, всегда меньше нуля, так как $\omega < \omega_i$ при $s_m = -1$. Первое слагаемое в фигурных скобках положительно, а второе слагаемое отлично от нуля только при $|m| < |l|$. Следовательно, $\delta\omega < 0$ при $|m| \geq |l|$, а стабилизирующий эффект могут создавать лишь ВЧ колебания с $|m| < |l|$. В работе [6] в приближении плоской границы был рассмотрен случай, который эквивалентен условию $|m| \gg |l|$, поэтому стабилизирующий эффект ТЕ колебаний не был обнаружен.

Знаменатель во втором слагаемом в (33) обращается в нуль, если частота основного ВЧ колебания с азимутальным числом m совпадает с частотой одного из комбинационных колебаний $m + l$ или $m - l$. Сравнивая уравнение (20) и его аналог с подстановкой $m \pm l$ вместо m , условие вырождения колебаний по частоте можно записать в виде

$$\frac{z_m}{z_m + 1} \left[1 - s_m \frac{\omega}{\omega_i} \right] = \frac{z_{m\pm l}}{z_{m\pm l} + 1} \left[1 - s_{m\pm l} \frac{\omega}{\omega_i} \right].$$

Это уравнение имеет решение только при условии, что m и $m \pm l$ имеют противоположные знаки, то есть $|l| > |m|$. Далее нетрудно установить, что при $m > 0$ должно быть $m < |l| < 2m$, а при $m < 0$ необходимо, чтобы $2|m| \leq |l|$; в любом случае $\omega < \omega_i$. Выбрав в комбинации $m \pm l$

нужный знак, после несложных преобразования находим именно ту частоту, которая обращает в нуль знаменатель в уравнении (33):

$$\omega_* = \frac{|2z_m - z_l(1 + z_m^2)|\omega_i}{z_l(1 + 2z_m - z_m^2) - 2z_m^2}$$

Частоту вырождения ω_* , как и частоту колебаний ω мы всегда считаем положительной. На рис. 2 она соответствует точке пересечения двух кривых. Вблизи частоты вырождения формула (33) неприменима, но она верно отражает тот факт, что поправка к частоте меняет знак при переходе через частоту вырождения (см. следующий раздел).

Параметры z_m и z_l с хорошей точностью близки к 1 уже при сравнительно небольших значениях азимутальных чисел m и l и не слишком малом отношении $a/R \sim 1/2$. Вводя обозначение $\delta z_n = 1 - z_n \approx 2(a/R)^{2|n|}$, из (33) получаем:

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = -\frac{8(|l| - |m|)|m|(\omega_i + s_m\omega)^2}{(2\omega_i + s_m\omega)[(4 - 2\delta z_l/4\delta z_m)s_m\omega + \omega_i(\delta z_m - 2\delta z_l/\delta z_m)]} \left| \frac{\xi_l}{a} \right|^2, \quad (34)$$

при $|m| < |l|$ и

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = -(2|l| - 1)|m| \frac{\omega_i + s_m\omega}{2\omega_i + s_m\omega} \left| \frac{\xi_l}{a} \right|^2 \delta z_m \quad (35)$$

при $|m| \geq |l|$. При $|m| \geq |l|$ сдвиг частоты отрицателен и в приближении $\delta z_m \ll 1$ значительно меньше, чем при $|m| < |l|$.

При $|m| < |l|$ стабилизирующий эффект могут создавать обе ветви ТЕ колебаний: но частота ветви $m < 0$ должна быть выше, а $m > 0$ — ниже частоты вырождения $\omega_* = |\delta z_m - 2\delta z_l/\delta z_m|\omega_i/4$. Так как при $a/R \ll 1$ частота вырождения чрезвычайно мала, колебания с $m > 0$ могут стабилизировать плазму, если имеют частоту существенно меньшую циклотронной. Область параметров, при которой ТЕ колебания оказывают стабилизирующее влияние на желобковые возмущения границы плазмы, показана на серии рисунков 3-7. Пределу $a/R \ll 1$ соответствует рисунок 3.

В случае, когда вакуумный зазор между поверхностью плазмы и проводящим кожухом мал, $(R-a)/R \ll 1$, из (21) находим, что $z_n \approx \text{th}[|n|(R-a)/R]$. Если при этом $|n|(R-a)/R \gg 1$ как для $n = m$, так и для $n = l$, то $\delta z_n \approx 2 \exp[-|n|(R-a)/R] \ll 1$. Тогда вновь можно использовать формулы (34) и (35). Если же $|n|(R-a)/R \ll 1$ как для $n = m$, так и для

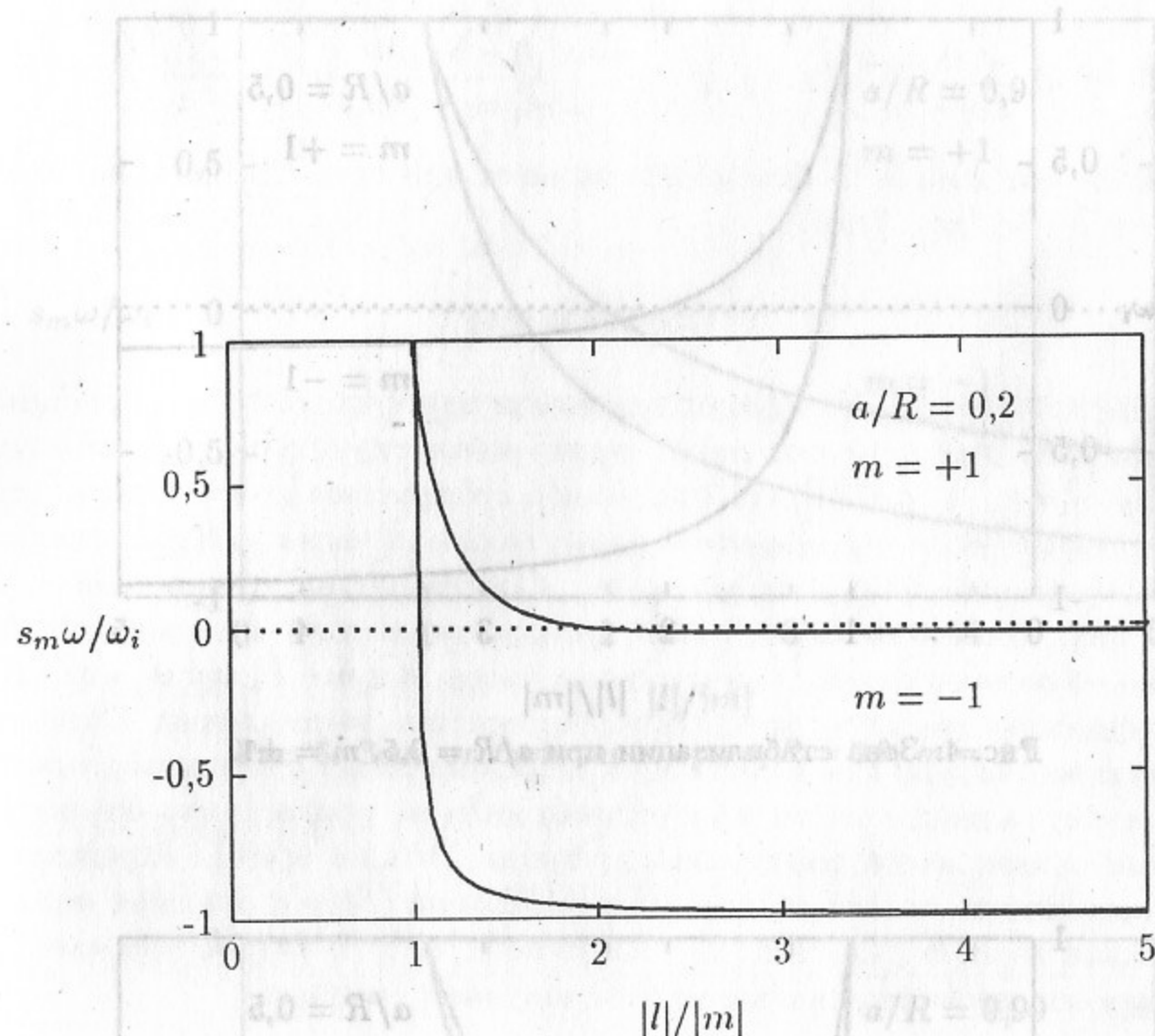


Рис. 3: Зона стабилизации $\delta\omega > 0$ в зависимости от азимутального числа желобковых возмущений при $a/R = 0,2$, $m = \pm 1$; $s_m\omega/\omega_i > 0$ соответствует колебаниям с $m > 0$, $s_m\omega/\omega_i < 0$ — колебаниям с $m < 0$. Верхняя кривая — график частоты вырождения, нижняя — график частоты, при которой $\delta\omega = 0$. Область $\delta\omega > 0$, где высокочастотные ТЕ колебания содействуют стабилизации желобковых возмущений, находится между этими двумя графиками.

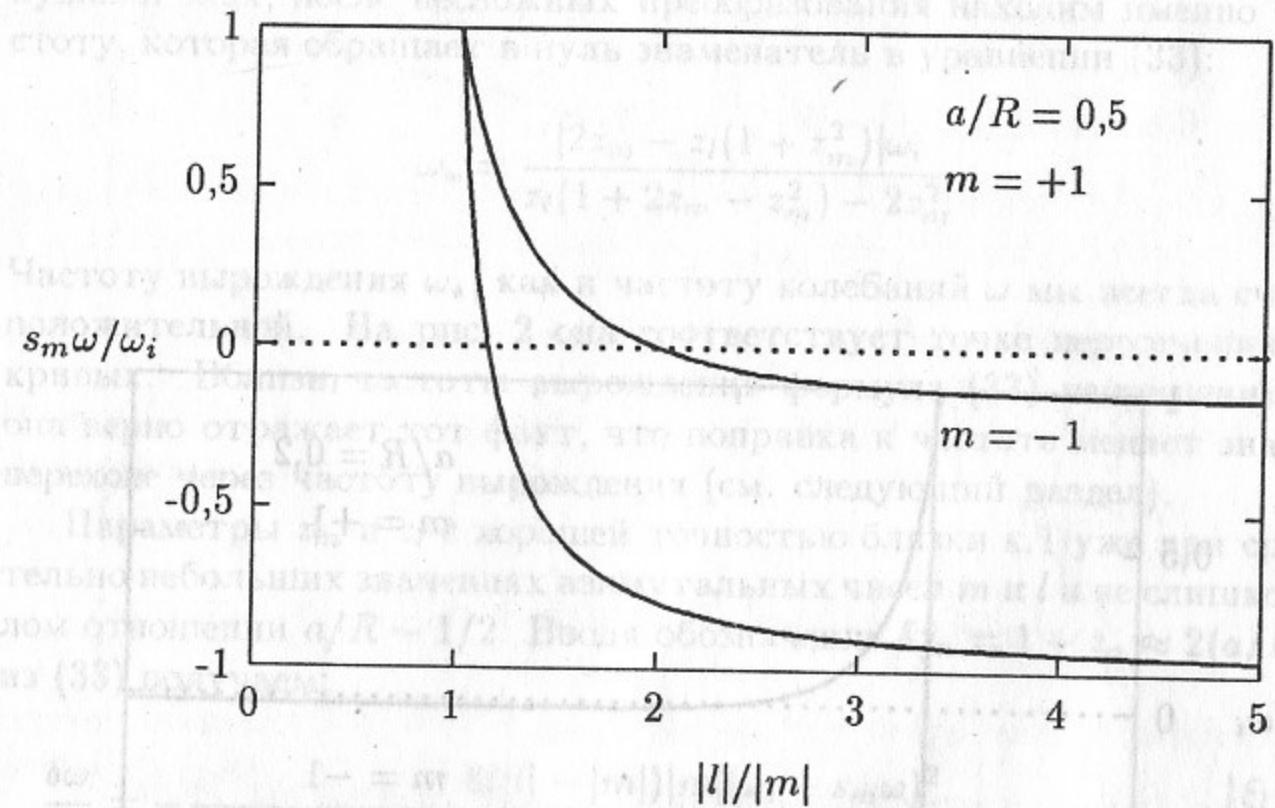


Рис. 4: Зона стабилизации при $a/R = 0,5$, $m = \pm 1$.

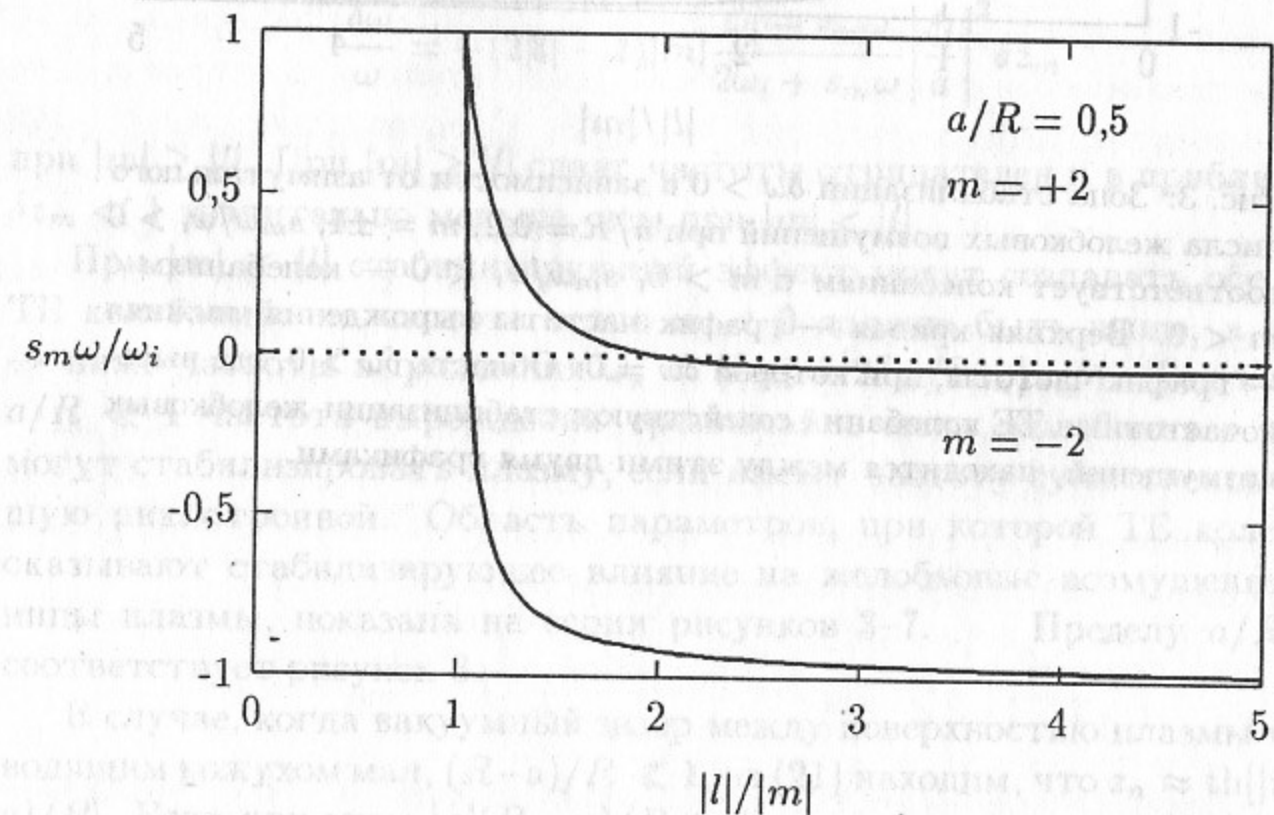


Рис. 5: Зона стабилизации при $a/R = 0,5$, $m = \pm 2$.

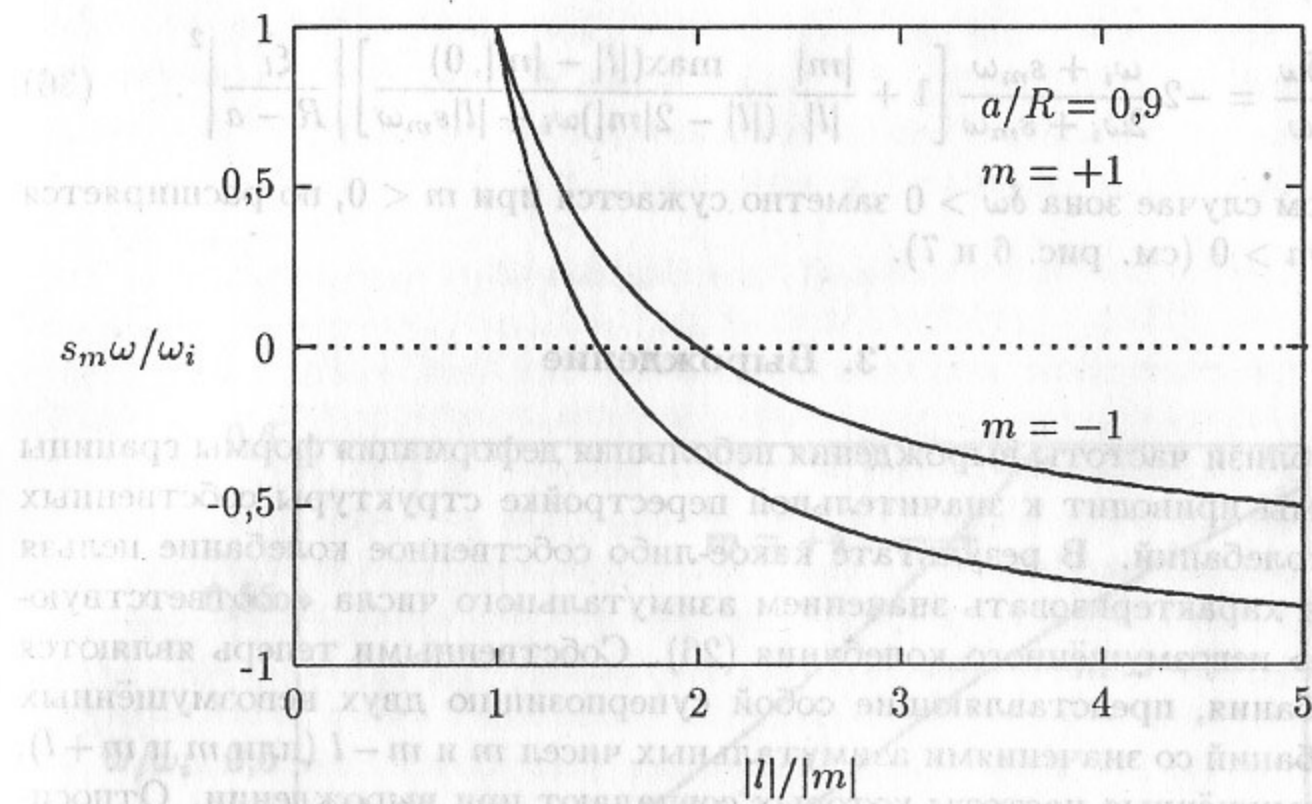


Рис. 6: Зона стабилизации при $a/R = 0,9$, $m = \pm 1$.

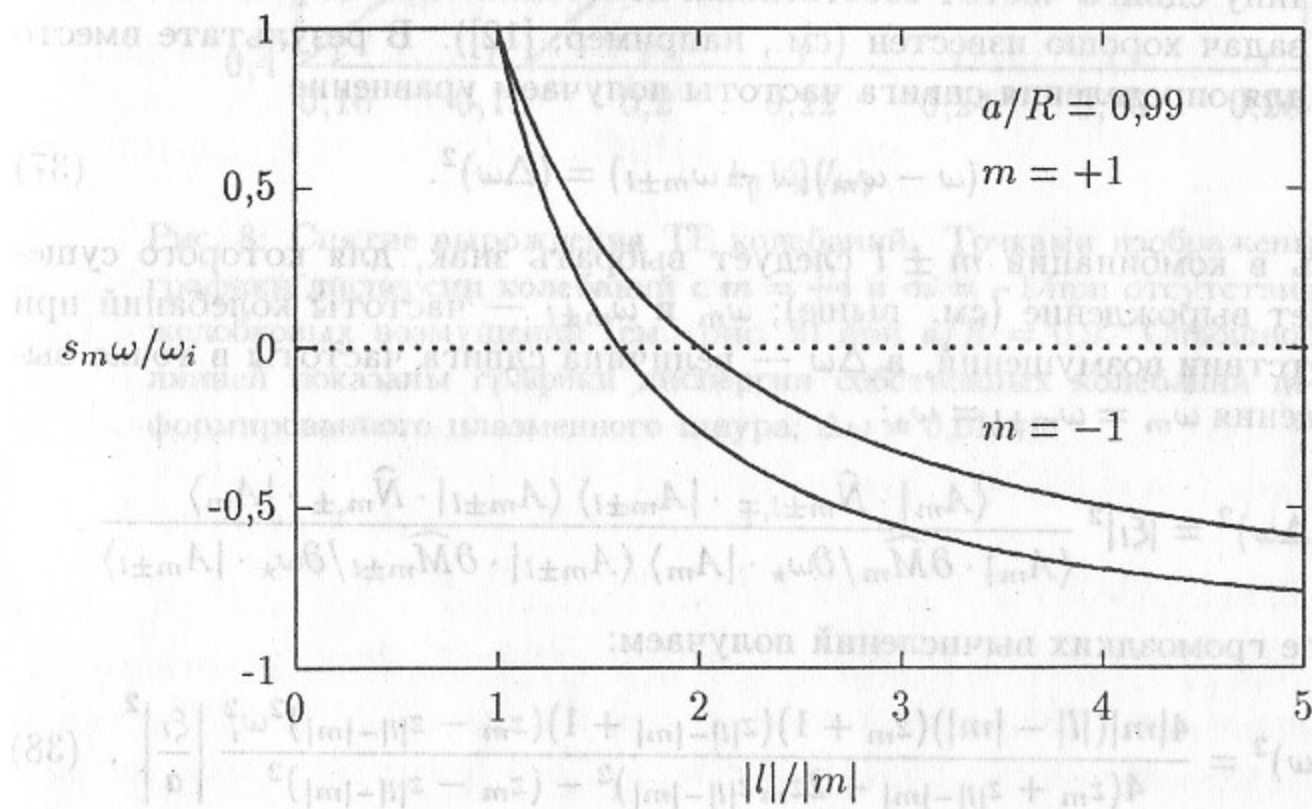


Рис. 7: Зона стабилизации при $a/R = 0,99$, $m = \pm 1$.

$n = l$, то

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = -2 \frac{\omega_i + s_m \omega}{2\omega_i + s_m \omega} \left[1 + \frac{|m|}{|l|} \frac{\max(|l| - |m|, 0)}{(|l| - 2|m|)\omega_i + |l|s_m \omega} \right] \left| \frac{\xi_l}{R - a} \right|^2. \quad (36)$$

В этом случае зона $\delta\omega > 0$ заметно сужается при $m < 0$, но расширяется при $m > 0$ (см. рис. 6 и 7).

3. Вырождение

Вблизи частоты вырождения небольшая деформация формы границы плазмы приводит к значительной перестройке структуры собственных ТЕ колебаний. В результате какое-либо собственное колебание нельзя более характеризовать значением азимутального числа «соответствующего» невозмущённого колебания (26). Собственными теперь являются колебания, представляющие собой суперпозицию двух невозмущённых колебаний со значениями азимутальных чисел m и $m - l$ (или m и $m + l$), невозмущённые частоты которых совпадают при вырождении. Относительную амплитуду каждого из этих двух колебаний с заданным значением азимутального числа, следует находить из условия, что она мало изменяется при малой деформации границы. Это же условие определяет величину сдвига частот собственных колебаний. Метод решения подобных задач хорошо известен (см., например, [12]). В результате вместо (32) для определения сдвига частоты получаем уравнение

$$(\omega - \omega_m)(\omega - \omega_{m \pm l}) = (\Delta\omega)^2. \quad (37)$$

Здесь в комбинации $m \pm l$ следует выбрать знак, для которого существует вырождение (см. выше); ω_m и $\omega_{m \pm l}$ — частоты колебаний при отсутствии возмущений, а $\Delta\omega$ — величина сдвига частоты в точке вырождения $\omega_m = \omega_{m \pm l} = \omega_*$:

$$(\Delta\omega)^2 = |\xi_l|^2 \frac{\langle A_m | \cdot \hat{N}_{m \pm l, \mp} \cdot | A_{m \pm l} \rangle \langle A_{m \pm l} | \cdot \hat{N}_{m, \pm} \cdot | A_m \rangle}{\langle A_m | \cdot \partial \hat{M}_m / \partial \omega_* \cdot | A_m \rangle \langle A_{m \pm l} | \cdot \partial \hat{M}_{m \pm l} / \partial \omega_* \cdot | A_{m \pm l} \rangle}.$$

После громоздких вычислений получаем:

$$(\Delta\omega)^2 = \frac{4|m|(|l| - |m|)(z_m + 1)(z_{|l|-|m|} + 1)(z_m - z_{|l|-|m|})^2 \omega_i^2}{4(z_m + z_{|l|-|m|} + 2z_m z_{|l|-|m|})^2 - (z_m - z_{|l|-|m|})^2} \left| \frac{\xi_l}{a} \right|^2, \quad (38)$$

причём всегда $(\Delta\omega)^2 > 0$. Результат снятия вырождения показан на рис. 8.

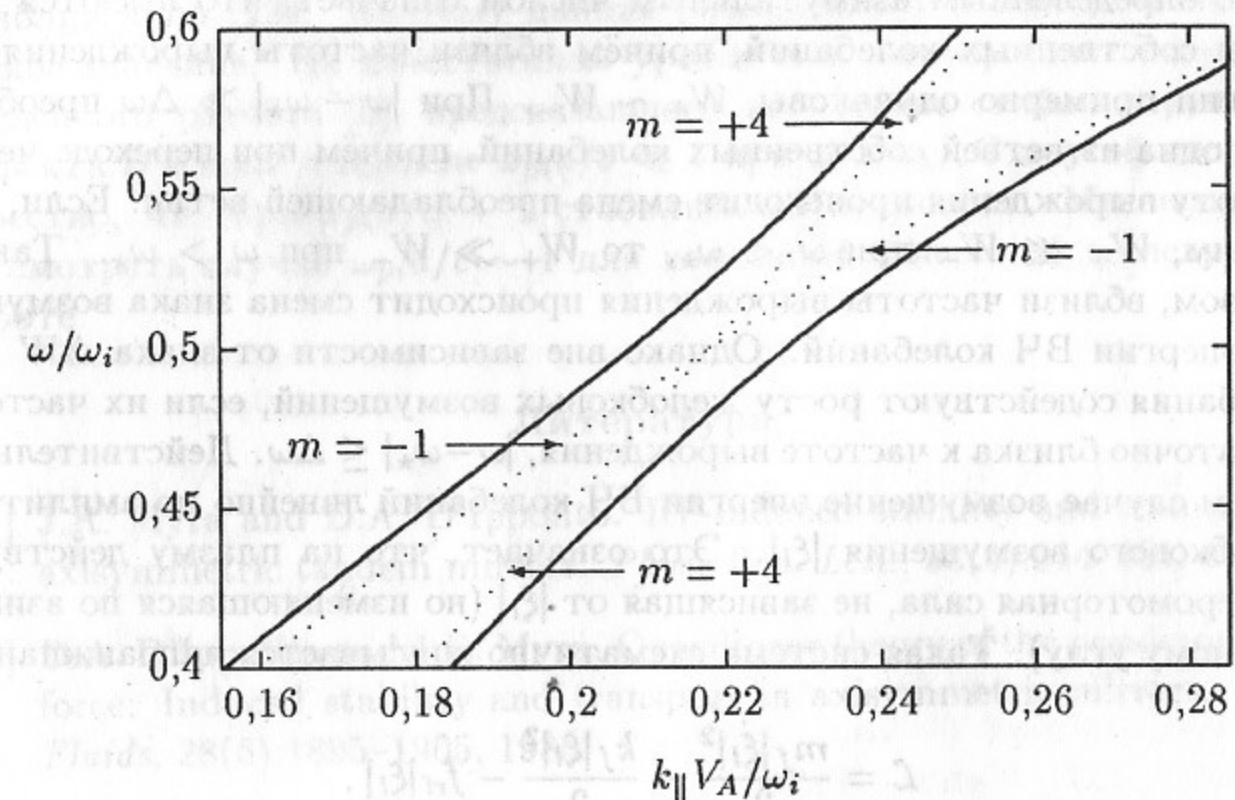


Рис. 8: Снятие вырождения ТЕ колебаний. Точками изображены графики дисперсии колебаний с $m = +4$ и $m = -1$ при отсутствии желобковых возмущений (см. рис. 2) при $a/R = 0,9$. Сплошной линией показаны графики дисперсии собственных колебаний деформированного плазменного шнура; $\Delta\omega = 0,01\omega_i$.

Изменение энергии δW ВЧ колебаний, вызванное деформацией границы плазменного шнура, равно сумме изменения энергии двух ветвей собственных колебаний. Обозначив через W_+ энергию той ветви собственных колебаний, сдвиг частоты которой в точке вырождения больше нуля, $\delta\omega_+ = \Delta\omega$, получаем, что

$$\delta W = (W_+ - W_-)\Delta\omega/\omega_*,$$

где W_- — энергия другой ветви колебаний. Возбуждение ВЧ колебаний с определённым азимутальным числом означает, что имеются обе ветви собственных колебаний, причём вблизи частоты вырождения их энергии примерно одинаковы, $W_+ \sim W_-$. При $|\omega - \omega_*| \gg \Delta\omega$ преобладает одна из ветвей собственных колебаний, причём при переходе через частоту вырождения происходит смена преобладающей ветви. Если, допустим, $W_+ \ll W_-$ при $\omega < \omega_*$, то $W_+ \gg W_-$ при $\omega > \omega_*$. Таким образом, вблизи частоты вырождения происходит смена знака возмущения энергии ВЧ колебаний. Однако вне зависимости от знака ΔW ВЧ колебания содействуют росту желобковых возмущений, если их частота достаточно близка к частоте вырождения, $|\omega - \omega_*| \leq \Delta\omega$. Действительно, в этом случае возмущение энергии ВЧ колебаний линейно по амплитуде желобкового возмущения $|\xi_l|$. Это означает, что на плазму действует пондеромоторная сила, не зависящая от $|\xi_l|$ (но изменяющаяся по азимутальному углу). Такая система схематично описывается лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{m_f |\dot{\xi}_l|^2}{2} - \frac{k_f |\xi_l|^2}{2} - f_{rf} |\xi_l|,$$

где m_f — эффективная масса желобка, k_f — эффективная упругость магнитной системы по отношению к желобку, $f_{rf} = \delta W/|\xi_l|$ — амплитуда пондеромоторной силы. Рассматривая $\xi_l = \zeta \exp(i\psi)$ и $\xi_l^* = \zeta \exp(-i\psi)$ как независимые «координаты», получаем два уравнения для амплитуды ζ и фазы ψ желобкового возмущения

$$m_f (\ddot{\zeta} - \dot{\psi}^2 \zeta) + k_f \zeta + f_{rf} = 0, \quad \ddot{\psi} \zeta + 2\dot{\psi} \dot{\zeta} = 0.$$

Из второго уравнения находим, что $\dot{\psi} = C/\zeta^2$, где C — константа интегрирования. Если предположить, что в начальный момент времени $\xi_l = 0$, а $\dot{\xi}_l$ ограничено, следует выбрать $C = 0$; тогда азимутальное вращение желобка отсутствует. При $C = 0$ первое уравнение соответствует движению «частицы» с массой m_f в потенциале $U = k_f \zeta^2/2 + f_{rf} \zeta$. При $k_f < 0$ (неблагоприятная кривизна магнитных силовых линий) движение

«частицы» инфинитно, что соответствует неустойчивости; при $k_f > 0$ (неблагоприятная кривизна) система совершает колебания вокруг точки равновесия $\zeta = f_{rf}/k_f$.

4. Заключение

Среди множества публикаций, посвящённых экспериментам по ВЧ стабилизации плазмы (см. [13–15], [16–19, 21–23, 20, 24], [25–27]), мы не нашли таких, условия которых соответствовали бы использованному нами приближению (23). Поэтому данная работа имеет в основном методическое значение. На качественном уровне она подтверждает результат численного расчёта [5], предсказавшего отсутствие стабилизирующего эффекта ВЧ поля в пределе $\omega_{pi} a/c \ll 1$ при $\omega > \omega_i$. С другой стороны, известно, что при $\omega_{pi} a/c \sim 1$ стабилизация возможна. Мы намерены рассмотреть случай $\omega_{pi} a/c \sim 1$ для колебаний с $m = \pm 1$ в следующей работе.

Литература

- [1] J.R. Myra and D.A. D'Ippolito. RF-induced stability and transport in axisymmetric tandem mirrors. *Phys. Rev. Lett.*, 53(9):914–921, 1984.
- [2] D.A. D'Ippolito and J.R. Myra. Quasilinear theory of the ponderomotive force: Induced stability and transport in axisymmetric mirrors. *Phys. Fluids*, 28(6):1895–1905, 1985.
- [3] D.A. D'Ippolito and J.R. Myra. Stabilization of magnetohydrodynamic modes by applied radio-frequency waves. *Phys. Fluids*, 29(8):2594–2604, 1986.
- [4] I.A. Kotelnikov and S.G. Yakovchenko. Ponderomotive stabilization of interchange mode in mirror plasmas at ICRF heating. *Plasma Phys. Controlled Fusion*, 36:797–806, 1994.
- [5] J.R. Myra, D.A. D'Ippolito, and G.L. Francis. A computational study of ion cyclotron frequency stabilization on the $m = 1$ interchange mode in mirror geometry. *Phys. Fluids*, 30(1):148–159, January 1987.
- [6] А.В. Звонков, А.В. Тимофеев. О ВЧ стабилизации желобковой неустойчивости. *Физика плазмы*, 16:1345–1352, 1990.

- [7] А.В. Тимофеев. Циклотронные колебания равновесной плазмы. В кн. *Вопросы теории плазмы*, под. ред. Б.Б. Кадомцева, том 14, стр. 56–226. М.: Энергоатомиздат, 1985.
- [8] C. Litwin and N. Hershkowitz. Eigenmode electric field profiles in cylindrical plasmas. *Phys. Fluids*, 30(5):1323–1330, May 1987.
- [9] А.В. Тимофеев. О дисперсионном соотношении колебаний замагниченной плазмы, *Физика плазмы*, 18(3):407–410, 1992.
- [10] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*. Серия *Теоретическая физика*, том VII. М.: Наука, 1974.
- [11] K. Appert, J. Vaclavic, and L. Villard. Spectrum of low-frequency, nonaxisymmetric oscillations in a cold, current-carrying plasma column. *Phys. Fluids*, 27(2):432–437, February 1984.
- [12] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Электродинамика сплошных сред*, серия *Теоретическая физика*, том III. М.: Наука, 1989.
- [13] M. Inutake, K. Ishii, A. Itakura, I. Katanuma, T. Kawabe, Y. Kiwamoto, A. Mase, S. Miyoshi, T. Saito, K. Sawada, D. Tsubouschi, K. Yatsu, M. Aizawa, T. Kamimura, R. Itatani, and Y. Yasaka. Studies on improvement of plasma confinement in axisymmetrized tandem mirror. In *Proceedings of the 9th International Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research*, pages 545–552, Baltimore, 1982. IAEA, Vienna, 1983.
- [14] Y. Yasaka and R. Itatani. RF stabilization of high-density plasma in axisymmetric mirror I: identifications and stabilization of flute mode. *Nucl. Fusion*, 24(4):445–454, April 1984.
- [15] Y. Yasaka and R. Itatani. RF stabilization of high-density plasma in axisymmetric mirror II: empirical scaling. *Nuclear Fusion*, 25(1):29–34, January 1985.
- [16] J.R. Ferron, N. Hershkowitz, R.A. Breun, S.N. Golovato, and R. Goulding. RF stabilization of an axisymmetric tandem mirrors. *Phys. Rev. Lett.*, 51:1955–1958, 1983.
- [17] J.R. Ferron, S.N. Golovato, N. Hershkowitz, and R. Goulding. Interchange stabilization of an axisymmetric single cell mirror using high-frequency electric field. *Phys. Fluids*, 30(6):1869–1884, June 1987.
- [18] R. Majeski, J.J. Browning, S. Meassick, N. Hershkowitz, T. Intrator, and J.R. Ferron. Effect of variable eigenmode excitation on rf stabilization of a mirror plasma. *Phys. Rev. Lett.*, 59(2):206–209, 1987.
- [19] J.J. Browning, R. Majeski, T. Intrator, N. Hershkowitz, and S. Meassick. Interchange stabilization of a mirror plasma using radio-frequency waves below the ion cyclotron frequency. *Phys. Fluids*, 31(4):714–716, 1988.
- [20] S. Meassick, T. Intrator, N. Hershkowitz, J. Browning, and R. Majeski. Measurements of the ponderomotive force including sideband mode coupling effects and damping rates. *Phys. Fluids B*, 1(5):1049–1058, May 1989.
- [21] J.J. Browning, N. Hershkowitz, T. Intrator, R. Majeski, and N. S. Meassick. Radio-frequency wave interchange stability experiments below the ion cyclotron frequency. *Phys. Fluids B*, 1(8):1692–1701, 1989.
- [22] T. Intrator, S. Meassick, J. Browning, R. Majeski, and N. Hershkowitz. The bispectrum and three-wave coupling between fast magnetosonic waves and interchange modes. *Phys. Fluids B*, 1(2):271–273, February 1989.
- [23] T. Intrator, S. Meassick, J. Browning, R. Majeski, J.R. Ferron, and N. Hershkowitz. Measurements of electromagnetic waves in Phaedrus-B: bench-mark test of antenna wave field calculation. *Nucl. Fusion*, 29(3):377–395, 1989.
- [24] R. Majeski and T. Tanaka. ICRF-edge plasma investigations in Phaedrus-B. Technical Report PTMR-91-1, University of Wisconsin, February 1991.
- [25] K. Brau et al. S.N. Golovato. Stability of plasmas sustained by ICRF in the central cell of the Tara tandem mirror. Technical Report PFC/JA-88-20, Massachusetts Institute of Technology, May 1988.
- [26] J.H. Irby, B.G. Lane, J.A. Casey, K. Brau, S.N. Golovato, W. Guss, S.F. Horne, J. Kesner, R.S. Post, E. Sevillano, J.D. Sullivan, and D.K. Smith. Experimental study of nonlinear $m = 1$ modes in the Tara tandem mirror. *Phys. Fluids*, 31(4):902–907, 1988.
- [27] S.N. Golovato and K. Brau. Plasma production and heating in a tandem mirror central-cell by radio-frequency waves in the ion cyclotron frequency range. *Phys. Fluids B*, 31(12):3744–3753, 1988.

И.А. Котельников, С.Г. Яковченко

**ВЧ стабилизация плазмы
с резкой границей**

ИЯФ 94-66

Ответственный за выпуск С.Г. Попов

Работа поступила 24 июня 1994 г.

Сдано в набор 24 июня 1994 г.

Подписано в печать 27 июня 1994 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1.8 печ.л., 1.5 уч.-изд.л.

Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ № 66

**Обработано на IBM PC и отпечатано на
роталпринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН,**

Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.