

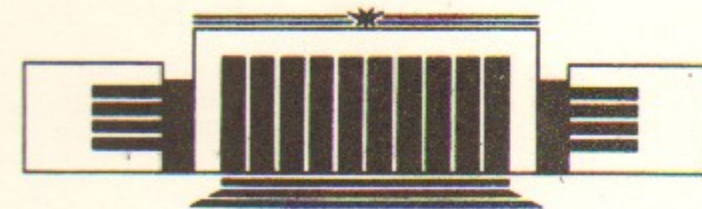


18
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
им. Г.И. Будкера СО РАН

В.Н. Худик

ПРОДОЛЬНЫЕ ПОТЕРИ
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ
ИЗ ОТКРЫТОЙ ЛОВУШКИ
С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПРОБОЧНЫМ
ОТНОШЕНИЕМ

ИЯФ 94-33



НОВОСИБИРСК

Продольные потери заряженных частиц из открытой ловушки с произвольным пробочным отношением

В.Н. Худик

630090, Новосибирск, Россия
Институт ядерной физики

Аннотация

На основе линеаризованного уравнения Фоккера-Планка вычислены классические продольные потери заряженных частиц из открытой ловушки с произвольным пробочным отношением R .

© Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера

1 Введение

В ряде проектов открытой ловушки пробочное отношение R невелико, и продольное удержание плазмы осуществляется запирающим амбиполярным потенциалом ϕ [1]. Обычно для качественных оценок продольных потерь в таких ловушках используется формула Пастухова [2]. Вопрос о количественной величине этих потерь является открытым.

Ранее задача нахождения классических продольных потерь заряженных частиц, определяемых кулоновскими столкновениями, рассматривалась для открытых ловушек с большим пробочным отношением [2–4], причем результаты разных работ [2, 3] не вполне согласовывались друг с другом, и оставалась неясной их точность.

В данной работе указана регулярная процедура для уточнения продольных потерь заряженных частиц из открытой ловушки с произвольным пробочным отношением. Все вычисления проделаны для электронов плазмы в предположении, что величина энергетического барьера, создаваемого запирающим потенциалом, много больше температуры T_e . Предполагается также, что заряд ионов плазмы равен абсолютной величине заряда электрона e .

2 Основные уравнения

Быстрые электроны с большой по сравнению с температурой энергией при наличии аксиальной симметрии описываются кинетическим уравнением [5]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[v^2 D_v \left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{mv}{T_e} f \right) \right] + \frac{D_\theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right). \quad (1)$$

Здесь коэффициенты диффузии приближенно равны:

$$D_v \approx \frac{T_e}{m} \nu, \quad D_\theta \approx v^2 \nu \alpha, \quad \alpha = 1 - T_e/2mv^2, \quad (2)$$

θ — угол между скоростью электронов \vec{v} и магнитным полем \vec{B} , которое предполагается постоянным в центральной секции ловушки. Через ν обозначена частота столкновений быстрых электронов с тепловыми частицами:

$$\nu = \frac{4\pi e^4 n \Lambda}{m^2 v^3},$$

m, n — соответственно масса и плотность электронов, Λ — кулоновский логарифм. Предполагается, что внешние источники, обеспечивающие неизменность общего числа частиц и энергии в системе, существенны лишь при тепловых скоростях электронов.

Искомая функция распределения обращается в нуль в области стока

$$v_{\parallel}^2 - v_{\perp}^2 (R - 1) \geq v_0^2, \quad v_0^2 = -2e\phi/m, \quad (3)$$

$$v_{\parallel} = v \cdot \cos \theta, \quad v_{\perp} = v \cdot \sin \theta.$$

и близка к максвелловской функции достаточно далеко от этой области. Удобно вместо скорости в качестве независимой переменной использовать энергию $\epsilon = mv^2/2$. После такой замены линеаризованное уравнение Фоккера-Планка (1) для стационарной задачи переписывается в виде:

$$2\nu\epsilon \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(T_e \frac{\partial f}{\partial \epsilon} + f \right) + \alpha \frac{\nu}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) = 0, \quad \alpha = 1 - T_e/4\epsilon, \quad (4)$$

а область стока задается соотношением

$$\epsilon - \epsilon \cdot R \sin^2 \theta \geq \epsilon_0, \quad \epsilon_0 = -e\phi. \quad (5)$$

Число частиц J , покидающих систему в единицу времени, вычисляется с помощью формулы

$$J = -2\pi \int \nu T_e \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \left(\frac{2\epsilon}{m} \right)^{3/2} \sin \theta d\theta + 2\pi \int \alpha \nu \frac{\partial f}{\partial \theta} \sin \theta \left(\frac{2\epsilon}{m} \right)^{3/2} \frac{d\epsilon}{2\epsilon}. \quad (6)$$

Первым интегралом определяются потери, связанные с диффузией частиц по энергии, а вторым — потери, связанные с угловой диффузией. Интегрирование производится по поверхности, отделяющей область стока (5) от остальной части фазового пространства.

Функция распределения хотя и существенно отличается от максвелловской вблизи области стока, тем не менее и здесь быстро падает с ростом энергии. Поэтому для вычисления потока покидающих систему частиц особенно важно выяснить ее поведение при значениях энергии ϵ , отличающихся от ϵ_0 на величину порядка T_e . Как видно из (5), этому разбросу энергии соответствует угловое уширение границы области стока

$$\Delta\theta_R = \left(\frac{T_e}{\epsilon_0 R} \right)^{1/2}, \quad (7)$$

определяющее характерный масштаб изменения функции распределения по углу в интересующей нас окрестности области стока.

Еще один угловой масштаб задачи находится из сравнения основных членов уравнения (4). Легко видеть, что для функции распределения с характерным энергетическим масштабом $\Delta\epsilon \sim T_e$ все члены в (4) будут одного порядка

$$\nu\epsilon T_e f / \Delta\epsilon^2 \sim \nu\epsilon f / \Delta\epsilon \sim \nu f / \Delta\theta^2, \quad (8)$$

только если эта функция существенно меняется на угловых интервалах

$$\Delta\theta \sim \Delta\theta_0 = \left(\frac{T_e}{\epsilon_0} \right)^{1/2}. \quad (9)$$

Характер решения уравнения (4) существенно зависит от соотношения угловых масштабов $\Delta\theta_R, \Delta\theta_0$, то есть от величины пробочного отношения R .

3 Предельные случаи больших и малых R

При большом пробочном отношении угловой масштаб $\Delta\theta_R \ll \Delta\theta_0$, и по грубой оценке члены уравнения (4) пропорциональные производным

по энергии в окрестности области стока пренебрежимо малы. Функция распределения в этой окрестности удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \approx 0. \quad (10)$$

При значениях энергии ϵ больших ϵ_0 на величину $\sim T_e$ и углах $\theta \ll \Delta\theta_0$ решение уравнения (10), обращающееся в ноль на границе области стока имеет вид

$$f \approx A(\epsilon) \ln \left[\frac{\theta}{\theta(\epsilon)} \right], \quad \theta(\epsilon) \approx \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_0 R} \right)^{1/2}. \quad (11)$$

При $\theta \sim \Delta\theta_0$ это решение должно переходить в максвелловскую функцию

$$f_m(\epsilon) = n \left(\frac{m}{2\pi T_e} \right)^{3/2} e^{-\epsilon/T_e}.$$

С логарифмической точностью (в предположении, что $\ln(\Delta\theta_0/\Delta\theta_R) = \frac{1}{2} \ln R \gg 1$) функция $A(\epsilon)$ равна

$$A(\epsilon) \approx \frac{f_m(\epsilon)}{\ln(\Delta\theta_0/\Delta\theta_R)} = \frac{2}{\ln R} f_m(\epsilon). \quad (12)$$

При подсчете числа частиц J , покидающих систему в единицу времени, в принятом приближении существенна только диффузия по углу [6]:

$$J \approx \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{n}{\tau_e} \frac{e^{-\epsilon_0/T_e}}{\ln R} \frac{T_e}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{5 T_e}{4 \epsilon_0} + \dots \right), \quad \tau_e = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{T_e^{3/2}}{\pi e^4 n \Lambda}. \quad (13)$$

Удержание поправочного члена в скобках оправдано, только если эта поправка велика по сравнению с $\ln^{-1} R$.

Главный результат этих грубых рассуждений — формулы (11), (12) для функции распределения — мало чувствителен к значению потенциала ϕ . Взяв более точное значение углового коэффициента диффузии, можно вычислить потери частиц при $\phi = 0$ и получить при больших R в логарифмическом приближении формулу Будкера для времени удержания плазмы в открытой ловушке при отсутствии амбиполярного потенциала.

Столь же просто исследование другого предельного случая малых значений параметра R . При $R \ll 1$ угловой масштаб $\Delta\theta_0 \ll \Delta\theta_R$, что позволяет пренебречь в уравнении (4) производными по углу в окрестности интенсивного стока:

$$2\nu\epsilon T \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon} + \frac{f}{T} \right) \approx 0, \quad (14)$$

и найти функцию распределения, обращающуюся в ноль на границе области стока и приближающуюся при уменьшении энергии к максвелловской функции

$$f = f_m(\epsilon) - f_m[\epsilon(\theta)], \quad \epsilon(\theta) = \frac{\epsilon_0}{1 - R \sin^2 \theta}. \quad (15)$$

Темп потерь в этом приближении связан только с диффузией частиц по энергии

$$J \approx \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{n}{\tau_e} e^{-\epsilon_0/T_e} \int_0^{\pi/2} e^{-[\epsilon(\theta) - \epsilon_0]} \sin \theta d\theta. \quad (16)$$

В случае, когда $R = 0$, интеграл в (16) равен единице, и величина J как функция R достигает максимального значения.

4 Потери частиц при произвольном пробочном отношении

При рассмотрении общего случая будем для простоты предполагать, что пробочное отношение $R \geq 1$. В нулевом по $\Delta\theta_0^2 = T/\epsilon_0$ приближении в окрестности области стока в (4), (5) можно сделать огрубляющую замену

$$2\nu\epsilon \rightarrow 2\nu\epsilon_0, \quad \alpha \rightarrow 1, \quad \sin \theta \rightarrow \theta, \quad \epsilon \sin^2 \theta \rightarrow \epsilon_0 \theta^2. \quad (17)$$

Это позволяет после введения вместо θ, ϵ новых переменных r_\perp, z

$$r_\perp = \sqrt{2\epsilon_0/T_e} \cdot \theta, \quad z = (\epsilon - \epsilon_*)/T_e, \quad (\epsilon_* = \epsilon_0 + T_e/2R) \quad (18)$$

упростить уравнение для функции распределения

$$\Delta f + \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial}{\partial r_\perp} r_\perp \frac{\partial}{\partial r_\perp}, \quad (19)$$

и неравенство, приближенно определяющее область стока

$$z + \frac{1}{2} R \geq \frac{1}{2} R r_\perp^2. \quad (20)$$

Окрестность области стока, из которой происходит интенсивный уход частиц, имеет в этих переменных размеры $r_\perp \sim 1, z \sim 1$ (при пробочном отношении $R \sim 1$).

Определив функцию g с помощью соотношения

$$f = g \cdot f_m(\epsilon), \quad (21)$$

нетрудно проверить, что вблизи области стока она удовлетворяет уравнению

$$\Delta g - \frac{\partial g}{\partial z} = 0. \quad (22)$$

Параболическая форма области стока (20) наводит на мысль использовать в этой задаче параболические координаты ζ, η [7]:

$$\zeta = \sqrt{r_{\perp}^2 + z^2} + z, \quad \eta = \sqrt{r_{\perp}^2 + z^2} - z. \quad (23)$$

В этих координатах область стока задается неравенством

$$\eta \leq \eta_0, \quad \eta_0 = 1/R, \quad (24)$$

а уравнение для функции g принимает вид:

$$\frac{4}{\zeta + \eta} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta \frac{\partial g}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \eta \frac{\partial g}{\partial \eta} \right) - \frac{2}{\zeta + \eta} \left(\zeta \frac{\partial g}{\partial \zeta} - \eta \frac{\partial g}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (25)$$

Физически очевидно (и легко показать формально), что функция g неотрицательна и ограничена: она обращается в ноль в области стока (при $\eta \leq \eta_0$) и стремится к единице при удалении от этой области (то есть при больших значениях η). Удовлетворяющее этим условиям решение уравнения (25) легко находится методом разделения переменных; оно оказывается постоянным на софокусных параболах $\eta = \text{const}$ (см. рис. 1):

$$g = C^{-1} \int_{1/R}^{\eta} \frac{d\eta}{\eta} e^{-\eta/2}, \quad C = \int_{1/R}^{\infty} \frac{d\eta}{\eta} e^{-\eta/2}. \quad (26)$$

При вычислении константы C с экспоненциальной точностью интегрирование распространено до бесконечности. Величина C выражается через известную интегральную показательную функцию $C = -Ei(-1/2R)$. При не слишком больших значениях аргумента эта функция хорошо аппроксимируется несколькими членами ряда [7]:

$$-Ei(-x) = \ln \frac{1}{x} - c_0 + x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} - \dots, \quad c_0 \approx 0.5772157. \quad (27)$$

Зная функцию распределения, с помощью формулы (6) легко подсчитать темп потерь частиц

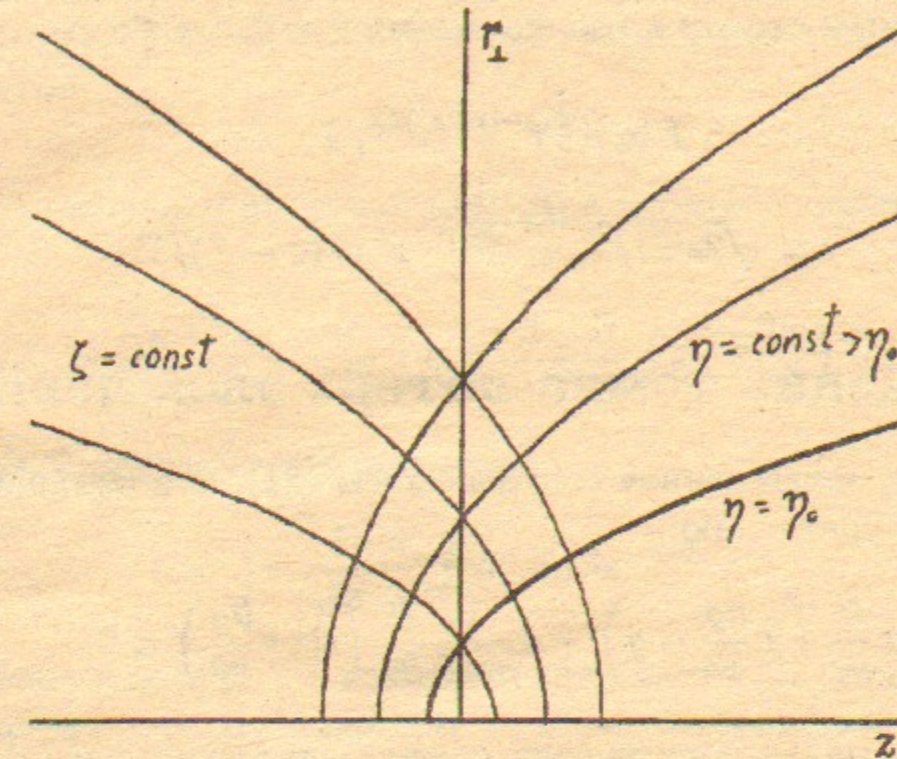


Рис. 1. Параболические координаты. Функция g постоянна на софокусных параболах $\eta = \text{const} > \eta_0$ (парабола $\eta = \eta_0$ отделяет область стока от остальной части фазового пространства).

$$J = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{n e^{-\epsilon_0/T_e} T_e}{\tau_e C_R \epsilon_0}, \quad C_R = e^{\frac{1}{2R} C} \quad (28)$$

Отметим, что полученное выражение справедливо даже для малых значений R до тех пор, пока $R \gg T_e/\epsilon_0$. Можно убедиться, что в общей области применимости

$$T_e/\epsilon_0 \ll R \ll 1$$

формулы (16), (28) дают один и тот же результат. При $R = 1$ выражением (28) определяется темп продольных потерь электронов, удерживаемых амбиполярным потенциалом в системе с постоянным магнитным полем. При больших пробочных отношениях

$$C_R \approx \ln R + 0.11593$$

и выражение (28) уточняет логарифмическую зависимость от R в (13).

В заключение этого раздела заметим, что прием, предложенный Пастуховым в работе [2], также приводит к формуле (28), если использовать

более точное выражение для возмущения функции распределения, вызываемого точечным стоком с координатами $\theta = 0, \varepsilon = \varepsilon'$:

$$f \propto -\frac{1}{r} e^{-(r+z')/2}, \quad (29)$$

$$r = \sqrt{2\varepsilon'\theta^2/T_e + z'^2}, \quad z' = (\varepsilon - \varepsilon')/T_e.$$

5 Уточнение темпа потерь электронов

Функция g , определенная соотношением (21), при больших энергиях удовлетворяет уравнению

$$2\varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(T \frac{\partial g}{\partial \varepsilon} - g \right) + \alpha \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (30)$$

Не интересуясь малыми искажениями максвелловского распределения тепловых электронов, будем формально решать уравнение (30) при всех значениях энергии ε . Искомое решение должно удовлетворять следующим условиям: а) $g(\varepsilon, \theta)$ неотрицательная ограниченная функция во всем фазовом пространстве, б) $g(\varepsilon, \theta) = 0$ в области стока, в) $g(\varepsilon, \theta) = 1$ при $\varepsilon = 0$.

Примечательно, что уравнение (30) может быть получено, исходя из вариационного принципа [3]. На классе функций, удовлетворяющих условиям а)–в), минимум функционала

$$J = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{n}{\tau_e} \int d\varepsilon d\theta \sin \theta e^{-\varepsilon/T_e} \left[T_e \left(\frac{\partial g}{\partial \varepsilon} \right)^2 + \frac{\alpha}{2\varepsilon} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^2 \right]. \quad (31)$$

достигается как раз на искомом решении уравнения (30). Величина J при этом равна темпу потерь частиц из системы.¹

Наряду с функционалом (31) оказывается полезным рассмотрение функционала

$$I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{n}{\tau_e} \int d\varepsilon d\theta \sin \theta \left[T_e \left(\frac{\partial h}{\partial \varepsilon} \right)^2 + \frac{h^2}{4T_e} + \frac{\alpha}{2\varepsilon} \left(\frac{\partial h}{\partial \theta} \right)^2 \right]. \quad (32)$$

¹В (30), (31) подразумевается, что аппроксимация коэффициента α при всех значениях энергии не нарушает его положительности.

Для функции h , минимизирующей функционал (32) на классе функций, равных $\exp(-\varepsilon/2T_e)$ на границе области стока и нулю при $\varepsilon = 0$, имеет место равенство

$$h = (1 - g) \cdot e^{-\varepsilon/2T_e}, \quad (33)$$

где g искомое решение уравнения (30). При этом h удовлетворяет уравнению:

$$\hat{H}h \equiv 2\varepsilon \left(T_e \frac{\partial^2 h}{\partial \varepsilon^2} - \frac{h}{4T_e} \right) + \alpha \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial h}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (34)$$

а темп потерь J определяется формулой:

$$J = I + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{n}{\tau_e} \int d\theta \sin \theta e^{-\varepsilon/T_e}. \quad (35)$$

Интегрирование в последнем члене в правой части (35) производится по границе области стока. В Приложении 1 показано, что функция h неотрицательна и при удалении от точек фазового пространства с координатами

$$\theta = 0, \varepsilon = \varepsilon_*; \quad \theta = \pi, \varepsilon = \varepsilon_*, \quad (\varepsilon_* \equiv \varepsilon_0 + T_e/2R) \quad (36)$$

экспоненциально быстро убывает:

$$h \leq \tilde{h} \equiv a e^{-\varepsilon_*/2T_e} \cdot e^{-br}, \quad r = \sqrt{r_{\perp}^2 + z^2}, \quad (37)$$

где a, b — числовые константы, а используемые здесь и ниже переменные r_{\perp}, z связаны с θ, ε формулами:

$$r_{\perp} = \sqrt{2\varepsilon/T_e} \cdot \sin \theta, \quad z = (\varepsilon - \varepsilon_*)/T_e. \quad (38)$$

Это означает, что значение интеграла (32) (и, соответственно, темпа потерь частиц) определяется видом функции h в небольших окрестностях точек (36). Вклад удаленных областей в рассматриваемый функционал пренебрежимо мал, так что конкретный вид функции h в удаленных точках фазового пространства для нашей задачи совершенно не существует.

Нетрудно построить регулярную теорию возмущений по параметру T_e/ε_0 для нахождения функции распределения частиц в малых окрестностях указанных точек. В этих окрестностях представим g в виде суммы

$$g = g^{(0)} + g^{(1)} + \dots, \quad g^{(k)} \propto (T_e/\varepsilon_0)^k$$

и потребуем, чтобы каждое $g^{(k)}$ обращалось в ноль в области стока (которая в новых координатных переменных (38) теперь уже не приближенно,

а точно задается неравенством (20)). Потребуем также, чтобы вычисленные по $g^{(k)}$ функции $h^{(k)}$ экспоненциально быстро стремились к нулю при удалении от точек (36).

Найденная в предыдущем разделе функция g является нулевым приближением к искомой функции в окрестности точек (36) (см. Приложение 2):

$$g^{(0)} = C^{-1} \int_{1/R}^{\eta} \frac{d\eta}{\eta} e^{-\eta/2}, \quad C = \int_{1/R}^{\infty} \frac{d\eta}{\eta} e^{-\eta/2}, \quad (39)$$

здесь $\eta = \sqrt{r_1^2 + z^2} - z$. Наличие вариационного принципа позволяет сразу найти линейную поправку к темпу потерь частиц (не вычисляя функции $g^{(1)}$), так как значение функционала (31), соответствующее функции $g^{(0)}$, отличается от искомого функционала на величину $\sim T_e^2/\epsilon_0^2$. Прделав необходимые простые вычисления, получим

$$J = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{n}{\tau_e} \frac{e^{-\epsilon_0/T_e} T_e}{C_R \epsilon_0} \left(1 + A_R \frac{T}{\epsilon_0} + \dots \right). \quad (40)$$

Здесь коэффициент

$$A_R = \left(-\frac{5}{4} - \frac{5}{8R} - \frac{1}{4R^2} + \frac{1}{12R^3} \right) + C_R^{-1} \left(-\frac{1}{12} + \frac{5}{6R} - \frac{1}{6R^2} \right), \quad (41)$$

отрицателен $-1.41 < A_R < -1.25$ при пробочных отношениях $R \geq 1$. В приложении 2 найдена функция $g^{(1)}$.² Нетрудно видеть, что значение функционала (31), соответствующее функции $g \approx g^{(0)} + g^{(1)}$, отличается от искомого функционала уже на величину $\sim T_e^4/\epsilon_0^4$, что при необходимости позволяет существенно улучшить точность определения величины темпа потерь частиц из системы (для чего, правда, необходимо проделать громоздкие и трудоёмкие вычисления сопряжённые со взятием интеграла (31)). В принципе можно определить и функции $g^{(2)}, g^{(3)}, \dots$, и произвести дальнейшее уточнение темпа потерь частиц. Однако надо иметь в виду, что нахождение поправок $\sim T_e^k/\epsilon_0^k$ к темпу потерь очень высокой степени k заведомо не имеет смысла, так как уже при замене точного уравнения Фоккера-Планка линеаризованным уравнением (4) допущена ошибка $\sim \exp(-\epsilon_0/T_e)$.

²Используя явный вид функции $g^{(1)}$ можно, конечно, получить результат (40) и непосредственно с помощью формулы (6).

6 Потери плазмы с многозарядными ионами

Полученные в предыдущем разделе результаты легко переносятся на плазму с произвольным зарядом ионов $e_i = z_i e$. Быстрые электроны такой плазмы описываются уравнением (4), в котором

$$\alpha = \tilde{\alpha} - T_e/4\epsilon, \quad \tilde{\alpha} = (1 + z_i)/2. \quad (42)$$

Темп потерь электронов из системы в этом случае равен

$$J = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{n}{\tau_e} \frac{e^{-\epsilon_0/T_e} T_e}{C_{\tilde{R}} \epsilon_0} \tilde{\alpha} \left(1 + \tilde{A} \frac{T}{\epsilon_0} + \dots \right), \quad (43)$$

здесь коэффициент

$$\tilde{A} = -1 - \frac{1}{4\tilde{\alpha}} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8\tilde{\alpha}} \right) \frac{1}{\tilde{R}} - \frac{1}{4\tilde{R}^2} + \frac{\tilde{\alpha}}{12\tilde{R}^3} + C_{\tilde{R}}^{-1} \left[\frac{1}{4\tilde{\alpha}} - \frac{\tilde{\alpha}}{3} + \left(\frac{\tilde{\alpha}}{3} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{\tilde{R}} - \frac{\tilde{\alpha}}{6\tilde{R}^2} \right], \quad (44)$$

а $\tilde{R} = \tilde{\alpha} R$. Требование малости линейной поправки $\tilde{A} T_e/\epsilon_0$ приводит к условию применимости формулы (43):

$$\frac{\tilde{\alpha} T_e}{C_{\tilde{R}} \epsilon_0} \ll 1. \quad (45)$$

При этом темп потерь электронов

$$J \ll J_{max} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{n}{\tau_e} e^{-\epsilon_0/T_e}.$$

Для лоренцевской плазмы с зарядовым числом ионов $z_i \gg 1$ возможна ситуация, когда выполняется неравенство, противоположное (45). При таких больших z_i коэффициент диффузии по углу аномально велик, и очень интенсивная угловая диффузия приводит к аномально малой величине функции распределения в области фазового пространства, где $\epsilon > \epsilon_0$. Всю эту область можно считать, по-существу, эффективной областью стока, так что темп потерь при большом зарядовом числе ионов находится с помощью формул (15), (16) (с $R = 0$) и равен J_{max} .

Результат предыдущих вычислений может быть использован для нахождения продольных потерь ионов из открытой ловушки с произвольным пробочным отношением R . При малых скоростях ионов влиянием электронов на процесс диффузии тяжелых частиц можно пренебречь, и ионные потери описываются формулами (43), (44), в которых следует произвести замену:

$$\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_i \phi, \quad \tilde{\alpha} \rightarrow 1/2, \quad n \rightarrow n_i, \quad \tau_e \rightarrow \tau_i = \sqrt{\frac{m_i}{2}} \frac{T_i^{3/2}}{\pi e^4 n_i \Lambda}$$

здесь ϕ — запирающий ионы амбиполярный потенциал, m_i — масса иона, n_i, T_i — соответственно плотность и температура ионов. Отметим, что при пробочном отношении большем единицы коэффициент \tilde{A} для ионов почти постоянен и с точностью до 3% его можно считать равным -1.45 .

7 Заключение

При произвольном значении пробочного отношения вычислена величина классических продольных потерь заряженных частиц из открытой ловушки (в предположении, что запирающий амбиполярный потенциал достаточно велик). Это удалось сделать, благодаря малым размерам прилегающей к области стока окрестности, из которой происходит интенсивный уход частиц из системы.

Что же касается потерь энергии из системы, то можно показать, что при всех физически интересных пробочных отношениях средняя энергия, уносимая одной заряженной частицей из ловушки равна $\epsilon_0 + T$.

Действуя в духе работы [4], полученные выше результаты можно обобщить на случай произвольного профиля магнитного поля.

Автор выражает благодарность И.А. Котельникову за поддержку и интерес, проявленный к работе.

Приложение 1

Искомая функция h , являясь решением эллиптического уравнения $\hat{H}h = 0$, принимает минимальное значение на границе Γ области Ω , в которой она определена, и, следовательно, $h \geq 0$. Далее, прямой проверкой можно убедиться, что $\hat{H}\tilde{h} \leq 0$ при $b = 1/4$. Если положить константу $a = \exp(1/2R)$, то \tilde{h} будет больше h на Γ . И так как $\hat{H}(\tilde{h} - h) \leq 0$, то минимум функции $(\tilde{h} - h)$ не может достигаться во внутренних точках области Ω . Следовательно, всюду $\tilde{h} \geq h$.

Приложение 2

Для определения вида функции g в окрестностях точек (36) перепишем уравнение (30) в переменных r_{\perp}, z (38):

$$\hat{G}g \equiv \Delta g - \frac{\partial g}{\partial z} + \kappa r_{\perp} \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial r_{\perp}} - \frac{1}{8} \kappa (8 + 3\kappa) r_{\perp} \frac{\partial g}{\partial r_{\perp}} - \frac{1}{8} \kappa (2 + 4r_{\perp}^2 - 3r_{\perp}^2 \kappa) \Delta_{\perp} g = 0, \quad (46)$$

здесь $\kappa = T_e/\epsilon$, а поперечный лапласиан $\Delta_{\perp} = \Delta - \partial^2/\partial z^2$. Уравнение для функции нулевого приближения $g^{(0)}$ получается из (46) отбрасыванием всех слагаемых пропорциональных κ :

$$\hat{G}_0 g^{(0)} = 0, \quad \hat{G}_0 = \Delta - \frac{\partial}{\partial z}. \quad (47)$$

а уравнение для линейной поправки имеет вид:

$$\hat{G}_0 g^{(1)} = \kappa_0 \left(\frac{1}{4} \Delta_{\perp} g^{(0)} + \frac{1}{2} r_{\perp}^2 \Delta_{\perp} g^{(0)} - r_{\perp} \frac{\partial^2 g^{(0)}}{\partial r_{\perp} \partial z} + r_{\perp} \frac{\partial g^{(0)}}{\partial r_{\perp}} \right), \quad (48)$$

здесь $\kappa_0 = T_e/\epsilon_0$.

Функция (39) является искомым решением уравнения (47): она удовлетворяет этому уравнению, обращается в ноль на границе области стока, и соответствующая функция

$$h^{(0)} = (1 - g^{(0)}) e^{-\epsilon/2T_e} = e^{-r/2} \cdot C^{-1} e^{-\epsilon/2T_e} \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\eta'}{\eta'} e^{-(\eta' - \eta)/2},$$

при больших r удовлетворяет неравенству (37) (с $b = 1/2$).

Нетрудно проверить, что для любой функции $g^{(0)}$, являющейся решением уравнения (47), имеют место равенства:

$$\begin{aligned} \hat{G}_0 \left(\frac{1}{8} r_{\perp} \frac{\partial g^{(0)}}{\partial r_{\perp}} \right) &= \frac{1}{4} \Delta_{\perp} g^{(0)}, \\ \hat{G}_0 \left(\frac{1}{4} r_{\perp}^2 \frac{\partial g^{(0)}}{\partial z} \right) &= r_{\perp} \frac{\partial^2 g^{(0)}}{\partial r_{\perp} \partial z} + \frac{\partial g^{(0)}}{\partial z}, \\ \hat{G}_0 \left(\frac{1}{12} r_{\perp}^3 \frac{\partial g^{(0)}}{\partial r_{\perp}} \right) &= \frac{1}{2} r_{\perp}^2 \Delta_{\perp} g^{(0)} + \frac{1}{3} r_{\perp} \frac{\partial g^{(0)}}{\partial r_{\perp}}, \end{aligned}$$

и кроме того, для функции $g^{(0)}$ вида (39) справедливо соотношение

$$\hat{G}_0 \left[\frac{1}{3}(\zeta - 1)\chi \right] = -\frac{2}{3}r_{\perp} \frac{\partial g^{(0)}}{\partial r_{\perp}} - \frac{\partial g^{(0)}}{\partial z},$$

здесь ζ, η связаны с r_{\perp}, z формулами (23); а

$$\chi \equiv C^{-1}e^{-\eta/2}.$$

Из этих тождеств следует, что уравнение (48) имеет частное решение:

$$g_p^{(1)} = \kappa_0 \left[\frac{1}{8}r_{\perp} \frac{\partial g^{(0)}}{\partial r_{\perp}} - \frac{1}{4}r_{\perp}^2 \frac{\partial g^{(0)}}{\partial z} + \frac{1}{12}r_{\perp}^3 \frac{\partial g^{(0)}}{\partial r_{\perp}} - \frac{1}{3}(\zeta - 1)\chi \right],$$

которое можно представить в виде суммы трех слагаемых:

$$g_p^{(1)} = \kappa_0 (g_{p1}^{(1)} + g_{p2}^{(1)} + g_{p3}^{(1)}),$$

$$g_{p1}^{(1)} = \frac{2\eta^3 - 6\eta^2 - 3\eta}{12(\zeta + \eta)}\chi \equiv \frac{P_1(\eta)}{\zeta + \eta}\chi,$$

$$g_{p2}^{(1)} = \frac{1}{12}(-1 + 10\eta - 2\eta^2)\chi \equiv P_2(\eta)\chi,$$

$$g_{p3}^{(1)} = \frac{1}{6}(\zeta - 2)(\eta - 2)\chi.$$

Однако таким образом выбранное частное решение не обращается в ноль на границе области стока. Для того, чтобы удовлетворить этому граничному условию, следует подобрать подходящие решения однородного уравнения $\hat{G}_0 g^{(1)} = 0$:

$$g_{h1}^{(1)} = -\frac{P_1(\eta_0)}{\zeta + \eta}\chi,$$

$$g_{h2}^{(1)} = -P_2(\eta_0)C^{-1}e^{-\eta_0/2}(1 - g^{(0)}),$$

$$g_{h3}^{(1)} = -\frac{1}{6}(\zeta - 2)(\eta_0 - 2)\frac{e^{-\eta_0/2}\psi(\eta)}{C\psi(\eta_0)}, \quad \psi(\eta) = -(\eta + 2)(1 - g^{(0)}) + 2\chi.$$

Таким образом, искомая функция $g^{(1)}$ имеет вид:

$$g^{(1)} = \kappa_0 \sum_{k=1}^3 (g_{pk}^{(1)} + g_{hk}^{(1)}).$$

Литература

1. Post R.F. — Nucl. Fusion, 1987, vol. 27, p.1577.
2. Pastukhov V.P. — Nucl. Fusion, 1974, vol.14, p.3.
3. Chernin D.P., Rosenbluth M.N. — Nucl. Fusion, 1978, vol. 18, p. 47.
4. Cohen R.H., Rensink M.E., Cutler T.A., Mirrin A.A. — Nucl. Fusion, 1978, vol. 18, p. 1229.
5. Сувухин Д.В. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып.4/Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1964, с. 81.
6. Пастухов В.П. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып.13/Под ред. Б.Б. Кадомцева. М.: Энергоатомиздат, 1984, с.160.
7. Кори Г. и Кори Т. — Справочник по математике. М.: Наука, 1973.