17

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
им. Г.И. Будкера СО РАН

К.В. Лотов, Д.Д. Рютов

ПЛАЗМЕННЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В СХЕМЕ КИЛЬВАТЕРНОГО УСКОРЕНИЯ

ИЯФ 94-32

НОВОСИБИРСК

1 Введение

Относительно недавно был предложен новый метод ускорения частиц до сверхвысоких энергий, идея которого состоит в том, что частица ускоряется не полем внешних проводников, а полем, возникающим в плазме. При этом напряжённость ускоряющего поля может достигать огромных значений (более 10^7 В/см для плазмы с плотностью $10^{16} \div 10^{18}$ см$^{-3}$), на один-два порядка превышающих характерные значения полей в традиционных ускоряющих системах ([1], [2]).

В настоящее время наиболее интенсивно исследуются три возможных способа создания в плазме столь сильного электрического поля (см. обзор [3] и литературу, указанную в нём). Первый из них основан на возбуждении плазменных колебаний с помощью двух лазерных лучей, частоты которых различаются на плазменную частоту. Другие два (известные как методы кильватерного ускорения) предполагают использовать для ускорения частиц поля́, остающиеся в плазме после прохождения сквозь неё либо короткого лазерного импульса, либо одного или нескольких сгустков заряженных частиц (ведущих сгустков). В данной работе будет рассматриваться только возбуждение полей сгустками частиц.

Важным параметром, характеризующим эффективность кильватерного ускорения, является коэффициент передачи R, определяемый как отношение максимального ускоряющего электрического поля позади ведущего сгустка к максимальному замедляющему полю, действующему на этот сгусток (см. [4], [5]). Чем больше R, тем до более высокой энергии может быть ускорена пробная частица при заданном числе циклов ускорения с заданной энергией ведущих сгустков.

В случае ведущего сгустка, симметричного в продольном направлении (т.е. в направлении движения), коэффициент передачи не может быть больше 2 ([6], см. также [4]). В то же время для практического применения кильватерного ускорения желательно иметь как минимум R порядка 10. Получить такие значения коэффициента передачи оказывается возможным при использовании сгустка с асимметричным распределением плотности заряда, например, "треугольного" сгустка ([4], [2], [7]), плотность которого сначала плавно нарастает, потом резко падает до нуля (рис.1а). Коэффициент передачи для такого сгустка пропорционален его длине L:

$$R = L\omega_p/c \tag{1}$$

(здесь ω_p — плазменная частота, c — скорость света). Следовательно, увеличивая длину переднего фронта, можно достичь требуемых значений R.

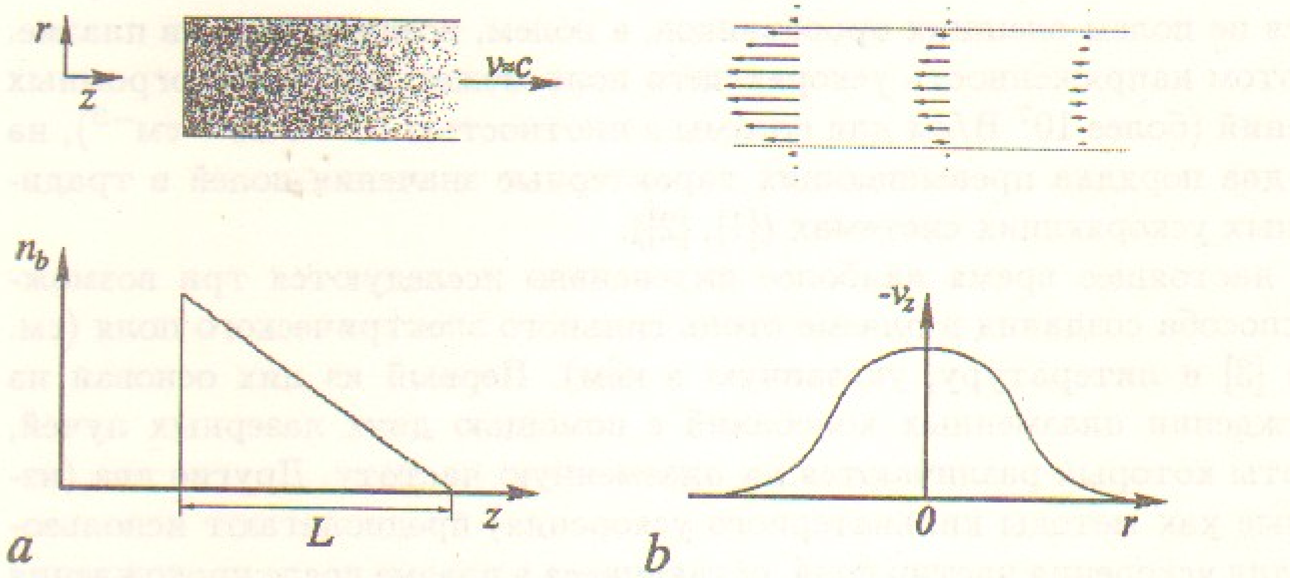

Рис. 1: Схема кильватерного ускорения с инжекцией "треугольного" сгустка (a); соответствующее движение электронов плазмы (b).

Резонансная раскачка плазменных колебаний последовательностью коротких сгустков (рис.2) также позволяет сообщить ускоряемой частице энергию, существенно превышающую энергию ускоряющих частиц ([8]).

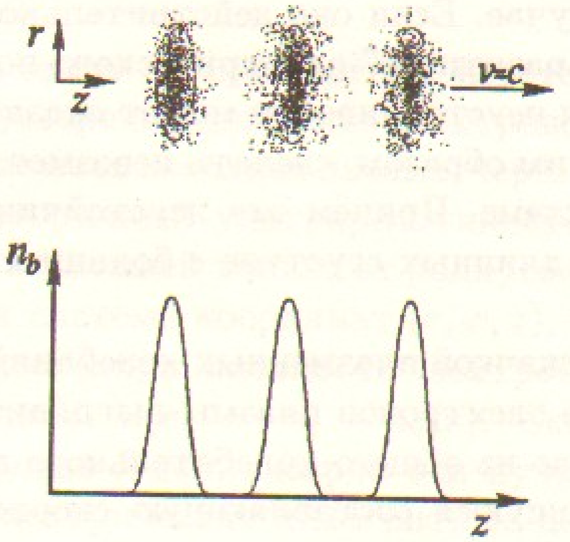

Рис. 2: Схема кильватерного ускорения с инжекцией последовательности электронных сгустков.

При оптимальном выборе расстояний между сгустками амплитуда ускоряющего электрического поля растёт пропорционально корню квадратному из числа прошедших сгустков, что соответствует линейному росту запасённой в плазме энергии (см. [6]).

Таким образом, длинные сгустки или длинные последовательности коротких сгустков могут оказаться более выгодными с точки зрения эффективности кильватерного ускорения.

Ведущие сгустки, наряду с плазменными колебаниями, вызывают в плазме неоднородное поступательное движение электронов, которое может быть неустойчивым. Рассмотрим, для примера, схему с инжекцией "треугольного" сгустка. При прохождении пологого переднего фронта электроны плазмы вследствие зарядовой компенсации (см., например, [9]) постепенно выталкиваются[1] из области сгустка, и это — эффект полезный, так как ускоряющее поле появляется именно благодаря недостатку электронов позади сгустка.

Наряду с зарядовой компенсацией имеется также компенсация токовая, приводящая к движению электронов плазмы навстречу сгустку со скоростью, зависящей от радиуса (рис.1b). Из гидродинамической теории известно (см., например, [10] – [12]), что движение обыкновенной жидкости с неоднородным профилем скорости может быть неустойчивым. Естественно предположить, что подобная неустойчивость, обусловленная проскальзыванием одного слоя электронов относительно другого, может

[1]Здесь и далее ведущие сгустки предполагаются электронными.

иметь место и в нашем случае. Если она действительно существует, то приведёт к появлению "паразитного" электрического поля, которое при условии сильного развития неустойчивости может оказаться сравнимым с полем "полезным" и, таким образом, сделать невозможным кильватерное ускорение по данной схеме. Причём эта неустойчивость будет наиболее опасной именно для длинных сгустков с большим коэффициентом передачи.

В схеме ускорения с раскачкой плазменных колебаний последовательностью сгустков движение электронов плазмы выглядит намного сложнее. Однако и в этом случае из общего колебательного движения можно выделить медленно меняющуюся составляющую скорости, которая будет зависеть от радиуса[2]. Следовательно, и в этой схеме кильватерного ускорения имеется повод для неустойчивости.

То, что неоднородное движение электронов, в принципе, может быть неустойчивым, известно давно (см., например, [14], где рассматривается неустойчивость движения электронов с тангенциальным разрывом скорости). Однако ряд специфических для кильватерного ускорения особенностей, таких как аксиальная симметрия задачи, гладкость профиля скорости и необходимость учёта непотенциальности возмущений, существенно осложняют задачу об устойчивости. Выяснению того, будет ли возникающее при кильватерном ускорении неоднородное движение электронов приводить к неустойчивости, и посвящена эта работа.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 описывается упрощённая модель кильватерного ускорения, используемая для исследования возможной неустойчивости. Здесь же выписываются полные и упрощённые уравнения движения электронов плазмы. В разделе 3 инкремент неустойчивости оценивается по порядку величины. Алгоритмы построения дисперсионных кривых и нахождения максимального значения инкремента для конкретных профилей сгустков приведены в разделах 4 и 5 для аксиально-симметричных и аксиально-несимметричных возмущений соответственно. В разделе 6 эти алгоритмы применяются к исследованию на неустойчивость некоторых характерных профилей сгустков. Наконец, раздел 7 посвящён обсуждению возможных ограничений, накладываемых этой неустойчивостью на схемы кильватерного ускорения.

[2]Причиной такого "усреднённого" движения, кроме упомянутой выше токовой компенсации, может быть также увлечение электронов плазмы переменным полем сгустков (см. [13])

2 Уравнения движения плазмы

Для выяснения, будет ли приводить к неустойчивости характерное для кильватерного ускорения движение электронов, рассмотрим следующую модель. Пусть имеется холодная плазма, через которую распространяется аксиально-симметричный ультрарелятивистский электронный пучок с плотностью n_b, зависящей только от радиуса (здесь и далее используется цилиндрическая система координат (r, φ, z), см. рис.1а). Плотность ионов плазмы n_i постоянна, плотность электронов n также зависит только от радиуса, причём $n(r) = n_i - n_b(r)$. Скорость ионов равна нулю, скорость электронов $\vec{v}$ коллинеарна оси пучка, $\vec{v} = (0, 0, v_z(r))$, причём $v_z = -cn_b/n$. Электрические и магнитные поля в такой системе отсутствуют (поля пучка компенсируются полями плазмы). Такая полностью скомпенсированная модель соответствует инжекции в плотную плазму ($n_i \gg n_b$) "треугольного" сгустка с очень пологим передним фронтом и позволяет исследовать неустойчивость неоднородного движения электронов "в чистом виде", не осложняя задачу учётом зависимости скорости электронов от z.

Поскольку в проводившихся ([13], [15]) и планируемых ([7], [16]) экспериментах по кильватерному ускорению плотность сгустка (или усреднённая по z плотность инжектируемых частиц в случае последовательности сгустков) выбиралась порядка $(2 \cdot 10^{-4} \div 3 \cdot 10^{-2})\, n_i$, то возмущение плотности плазмы будем считать малым:

$$n_i - n \ll n_i, \tag{2}$$

а движение электронов — нерелятивистским:

$$\frac{|v_z|}{c} \sim \frac{n_b}{n_i} \ll 1. \tag{3}$$

Что касается радиуса инжектируемого в плазму пучка (или инжектируемой последовательности сгустков), то он выбирался порядка c/ω_p или менее, поэтому в дальнейшем будем полагать, что движение электронов локализовано в области $r \lesssim a$, где $a \sim c/\omega_p$.

Электроны плазмы обладают некоторой тепловой скоростью $v_{Te} = \sqrt{2T_e/m}$. Имеется два типа эффектов, связанных с конечностью v_{Te}. Первый — влияние теплового движения на проникновение полей из области пучка в окружающее пространство (см., например, [17]), связанное с переносом направленного импульса электронов поперёк оси пучка.

Условие, когда этим эффектом можно пренебречь, очевидно, имеет вид $a/v_{Te} \ll L/c$, или

$$v_{Te} \ll c\,\frac{a}{L}. \tag{4}$$

В области параметров планируемых экспериментов это условие выполнено с большим запасом.

Второй (независимый) эффект связан с возможными резонансами между электронами плазмы и неустойчивой волной. Как будет показано ниже, характерная фазовая скорость колебаний порядка скорости направленного движения электронов. Чтобы резонансами можно было пренебречь, должно соблюдаться условие

$$v_{Te} \ll |v_z|. \tag{5}$$

Его мы также будем считать выполненным (оно может нарушаться только в экспериментах с пучком малой плотности, [13]).

На описанное невозмущённое состояние накладываются малые возмущения плотности и скорости электронов плазмы, а также связанные с ними возмущения электрического и магнитного полей. Имея в виду рассмотрение быстропротекающих процессов, будем пренебрегать движением ионов и диссипацией. Также пренебрежём возмущением пучка[3].

В указанных предположениях поведение плазмы может быть описано следующими уравнениями (где индексом "1" отмечены возмущения соответствующих величин):

$$\operatorname{rot}\vec{H}_1 = -\frac{4\pi e}{c}\left(n\vec{v}_1 + n_1\vec{v}\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}, \tag{6}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}_1 = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}_1}{\partial t}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \operatorname{div}\left(n\vec{v}_1 + n_1\vec{v}\right) = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial(\gamma\vec{v})_1}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)(\gamma\vec{v})_1 + (\vec{v}_1\nabla)(\gamma\vec{v}) = -\frac{e}{m}\vec{E}_1 - \frac{e}{mc}\left[\vec{v}\times\vec{H}_1\right]. \tag{9}$$

Здесь e — элементарный заряд ($e > 0$), и использованы обозначения

$$(\gamma\vec{v})_1 = \frac{\vec{v}+\vec{v}_1}{\sqrt{1-(\vec{v}+\vec{v}_1)^2/c^2}} - \gamma\vec{v} = \gamma\vec{v}_1 + \gamma^3\vec{v}\frac{(\vec{v}\vec{v}_1)}{c^2}, \tag{10}$$

[3]Это оправдывается тем, что ультрарелятивистские частицы, вследствие большой инерционной массы, не успевают заметно отреагировать на плазменные поля за время пролёта через интересующую нас область пространства.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}. \tag{11}$$

Ввиду малости возмущений удерживаются лишь линейные по их амплитуде члены.

Будем искать возмущения в виде

$$A_1(r,\varphi,z,t) = \tilde{A}(r)\exp(\imath kz + \imath l\varphi - \imath\omega t). \tag{12}$$

Тогда система уравнений (6) – (9) в покомпонентной записи примет вид

$$\frac{\imath l}{r}\tilde{H}_z - \imath k\tilde{H}_\varphi = -\frac{4\pi e}{c}n\tilde{v}_r - \frac{\imath\omega}{c}\tilde{E}_r, \tag{13}$$

$$\imath k\tilde{H}_r - \frac{\partial\tilde{H}_z}{\partial r} = -\frac{4\pi e}{c}n\tilde{v}_\varphi - \frac{\imath\omega}{c}\tilde{E}_\varphi, \tag{14}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\tilde{H}_\varphi - \frac{\imath l}{r}\tilde{H}_r = -\frac{4\pi e}{c}n\tilde{v}_z - \frac{4\pi e}{c}\tilde{n}v_z - \frac{\imath\omega}{c}\tilde{E}_z, \tag{15}$$

$$\frac{\imath l}{r}\tilde{E}_z - \imath k\tilde{E}_\varphi = \frac{\imath\omega}{c}\tilde{H}_r, \tag{16}$$

$$\imath k\tilde{E}_r - \frac{\partial\tilde{E}_z}{\partial r} = \frac{\imath\omega}{c}\tilde{H}_\varphi, \tag{17}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\tilde{E}_\varphi - \frac{\imath l}{r}\tilde{E}_r = \frac{\imath\omega}{c}\tilde{H}_z, \tag{18}$$

$$-\imath\omega\tilde{n} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rn\tilde{v}_r + \frac{\imath l}{r}n\tilde{v}_\varphi + \imath kn\tilde{v}_z + \imath kv_z\tilde{n} = 0, \tag{19}$$

$$-\imath(\omega - kv_z)\gamma\tilde{v}_r = -\frac{e}{m}\tilde{E}_r + \frac{e}{mc}v_z\tilde{H}_\varphi, \tag{20}$$

$$-\imath(\omega - kv_z)\gamma\tilde{v}_\varphi = -\frac{e}{m}\tilde{E}_\varphi - \frac{e}{mc}v_z\tilde{H}_r, \tag{21}$$

$$-\imath(\omega - kv_z)\gamma^3\tilde{v}_z + \gamma^3\frac{\partial v_z}{\partial r}\tilde{v}_r = -\frac{e}{m}\tilde{E}_z. \tag{22}$$

Система (13) – (22) сложна для анализа в общем виде, однако она существенно упрощается, если положить (учитывая (2), (3))

$$\gamma \equiv 1, \qquad n \equiv n_i, \qquad \omega \ll \omega_p. \tag{23}$$

Будем называть решение системы (13) – (22) в предположениях (23) квазипотенциальным приближением, так как последнее в (23) условие позволяет пренебречь током смещения в уравнениях Максвелла.

В квазипотенциальном приближении вместо (13) – (22) имеем

$$\tilde{n} = 0, \tag{24}$$

$$\frac{\imath l}{r}\tilde{H}_z - \imath k\tilde{H}_\varphi = -\frac{4\pi e}{c}n\tilde{v}_r, \tag{25}$$

$$\imath k\tilde{H}_r - \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial r} = -\frac{4\pi e}{c}n\tilde{v}_\varphi, \tag{26}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\tilde{H}_\varphi - \frac{\imath l}{r}\tilde{H}_r = -\frac{4\pi e}{c}n\tilde{v}_z, \tag{27}$$

$$\frac{\imath l}{r}\tilde{E}_z - \imath k\tilde{E}_\varphi = \frac{\imath\omega}{c}\tilde{H}_r, \tag{28}$$

$$\imath k\tilde{E}_r - \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial r} = \frac{\imath\omega}{c}\tilde{H}_\varphi, \tag{29}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\tilde{E}_\varphi - \frac{\imath l}{r}\tilde{E}_r = \frac{\imath\omega}{c}\tilde{H}_z, \tag{30}$$

$$\frac{\imath}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\tilde{v}_r = k\tilde{v}_z + \frac{l}{r}\tilde{v}_\varphi, \tag{31}$$

$$\imath\Omega\tilde{v}_r = \frac{e}{m}\tilde{E}_r - \frac{ev_z}{mc}\tilde{H}_\varphi, \tag{32}$$

$$\imath\Omega\tilde{v}_\varphi = \frac{e}{m}\tilde{E}_\varphi + \frac{ev_z}{mc}\tilde{H}_r, \tag{33}$$

$$\imath\Omega\tilde{v}_z = \frac{e}{m}\tilde{E}_z + \frac{\partial v_z}{\partial r}\tilde{v}_r, \tag{34}$$

где использовано обозначение

$$\Omega = \omega - kv_z. \tag{35}$$

Ещё более простые уравнения получаются, если в (13) – (22) положить скорость света бесконечно большой (что соответствует так называемому потенциальному приближению). Такое упрощение справедливо, если выполнены условия

$$c \gg |v_z|, \qquad c \gg \frac{\omega_p}{k}, \qquad c \gg \frac{\omega}{k}. \tag{36}$$

Опуская в (13) – (22) слагаемые с c в знаменателе, получаем

$$\tilde{H}_\varphi = \frac{l}{kr}\tilde{H}_z, \qquad \tilde{H}_r = -\frac{\imath}{k}\frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial r}, \tag{37}$$

$$\tilde{E}_\varphi = \frac{l}{kr}\tilde{E}_z, \qquad \tilde{E}_r = -\frac{\imath}{k}\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial r}, \tag{38}$$

$$-\Omega\tilde{n} - \frac{\imath}{r}\frac{\partial}{\partial r}rn\tilde{v}_r + \frac{l}{r}n\tilde{v}_\varphi + kn\tilde{v}_z = 0, \tag{39}$$

$$\imath\Omega\tilde{v}_r = \frac{e}{m}\tilde{E}_r, \qquad \imath\Omega\tilde{v}_\varphi = \frac{e}{m}\tilde{E}_\varphi, \qquad \imath\Omega\tilde{v}_z = \frac{e}{m}\tilde{E}_z + \frac{\partial v_z}{\partial r}\tilde{v}_r. \tag{40}$$

При этом (15) и (18) обратились в тождества. Вместо них к системе (37) – (40) нужно добавить уравнения

$$\operatorname{div}\vec{H}_1 = 0, \qquad \operatorname{div}\vec{E}_1 = -4\pi e n_1, \tag{41}$$

которые в этом приближении уже не будут следствиями других уравнений Максвелла и уравнения непрерывности. В покомпонентной записи с учётом (37) и (38) они примут вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial r} - \left(k^2 + \frac{l^2}{r^2}\right)\tilde{H}_z = 0, \tag{42}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial r} - \left(k^2 + \frac{l^2}{r^2}\right)\tilde{E}_z = -4\pi\imath ek\tilde{n}. \tag{43}$$

Из (37) и (42), вследствие условий затухания поля на бесконечности и его конечности в нуле, вытекает

$$\tilde{H}_r = \tilde{H}_\varphi = \tilde{H}_z = 0, \tag{44}$$

чем и оправдывается определение такого приближения как потенциального.

Выражая $\tilde{n}$ из (39) и (43),

$$\tilde{n} = \frac{\imath e}{mk\Omega}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{rn}{\Omega}\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial r} - \frac{l^2 n}{\Omega r^2}\tilde{E}_z - \frac{k^2 n}{\Omega}\tilde{E}_z + \frac{kn}{\Omega^2}\frac{\partial v_z}{\partial r}\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial r}\right],$$

$$\tilde{n} = \frac{\imath}{4\pi ke}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial r} - \left(k^2 + \frac{l^2}{r^2}\right)\tilde{E}_z\right],$$

получаем

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial r} - \left(k^2 + \frac{l^2}{r^2}\right)\tilde{E}_z =$$

$$= \frac{1}{\Omega r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r\omega_p^2}{\Omega}\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial r} - \frac{\omega_p^2}{\Omega^2}\left(k^2 + \frac{l^2}{r^2}\right)\tilde{E}_z - \frac{\omega_p^2}{\Omega^3}\frac{\partial\Omega}{\partial r}\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial r},$$

откуда следует уравнение, условие разрешимости которого даёт связь между ω и k:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \left(1-\frac{\omega_p^2}{\Omega^2}\right)\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial r} = \left(k^2+\frac{l^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{\omega_p^2}{\Omega^2}\right)\tilde{E}_z. \qquad (45)$$

Уравнение (45) является обобщением уравнения (1.70) из [14] на случай цилиндрической геометрии задачи.

Наконец, при одновременном выполнении (23), (36) и условия

$$k v_z \ll \omega_p, \qquad (46)$$

уравнения движения плазмы можно записать в виде, аналогичном гидродинамическому уравнению Рэлея (см., например, [10] или [12]). Пренебрегая в (45) единицей по сравнению с ω_p^2/Ω^2,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{\Omega^2}\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial r} - \left(k^2+\frac{l^2}{r^2}\right)\frac{\tilde{E}_z}{\Omega^2} = 0, \qquad (47)$$

и вводя новую функцию ψ,

$$\psi = \frac{1}{\Omega}\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial r}, \qquad (48)$$

получаем

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\Omega^2}{r(k^2+l^2/r^2)}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r\psi}{\Omega}\right] - \Omega\psi = 0,$$

откуда следует уравнение[4]

$$\psi'' + \frac{\psi'}{r}\left(1+\frac{2l}{k^2r^2+l^2}\right) - k^2\psi - \frac{\psi}{r^2}\left(1+l^2-\frac{2l}{k^2r^2+l^2}\right) =$$

$$= \frac{\psi}{\Omega}\left(\Omega''-\frac{\Omega'}{r}\right) + \frac{2l}{k^2r^2+l^2}\frac{\Omega'\psi}{\Omega r}, \qquad (49)$$

которое является обобщением уравнения Рэлея

$$\psi'' - k^2\psi + \frac{kv''}{\omega - kv}\psi = 0. \qquad (50)$$

на случай цилиндрической геометрии задачи (см. Приложение 1). Действительно, уравнение (50) получается из (49) устремлением r к бесконечности (что соответствует переходу к плоской геометрии).

[4]Здесь и далее штрих обозначает дифференцирование по r.

3 Потенциальное приближение

В этом разделе будет получена оценка инкремента неустойчивости электронного потока с неоднородным профилем скорости. Для этого рассмотрим уравнение (45) в случае простейшего ступенчатого профиля скорости[5] (рис.3):

$$\begin{aligned} r < r_0 : &\quad v = v_1, \quad \omega_p = \omega_{p1}, \\ r > r_0 : &\quad v = v_2, \quad \omega_p = \omega_{p2}. \end{aligned} \qquad (51)$$

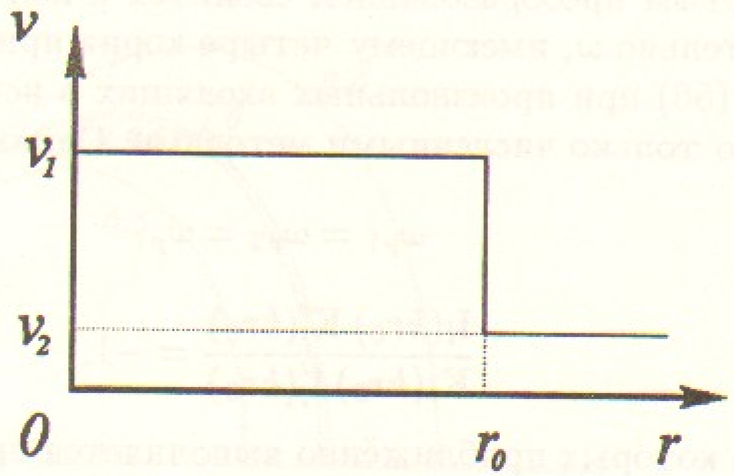

Рис. 3: Ступенчатый профиль скорости.

Решения (45) в областях $r < r_0$ и $r > r_0$, с учётом граничных условий в нуле и на бесконечности, выражаются через цилиндрические функции мнимого аргумента:

$$\begin{aligned} r < r_0 : &\quad \tilde{E}_z = \mathrm{A}\,\mathrm{I}_l(kr), \\ r > r_0 : &\quad \tilde{E}_z = \mathrm{B}\,\mathrm{K}_l(kr). \end{aligned} \qquad (52)$$

Условия сшивки решений (52) получаются интегрированием уравнения (45) по малому промежутку $[r_0-\varepsilon; r_0+\varepsilon]$ с последующим устремлением ε к нулю и принимают вид

$$\{\tilde{E}_z\} = 0, \qquad (53)$$

$$\left\{\left(1-\frac{\omega_p^2}{\Omega^2}\right)\tilde{E}_z'\right\} = 0. \qquad (54)$$

[5]Вывод дисперсионного соотношения для профиля (51) в потенциальном приближении аналогичен приведённому в [14].

Фигурные скобки здесь означают скачок соответствующих величин при прохождении через точку r_0:

$$\{f\} = f|_{r_0+0} - f|_{r_0-0}. \tag{55}$$

Из условий (53), (54) получаем искомое дисперсионное уравнение:

$$1 - \frac{\omega_{p1}^2}{(\omega - kv_1)^2} = \left(1 - \frac{\omega_{p2}^2}{(\omega - kv_2)^2}\right) \frac{\mathrm{I}_l(kr_0)\,\mathrm{K}_l'(kr_0)}{\mathrm{K}_l(kr_0)\,\mathrm{I}_l'(kr_0)}, \tag{56}$$

которое простым преобразованием сводится к полиному четвёртой степени относительно ω, имеющему четыре корня при любом k.

Решение (56) при произвольных входящих в него параметрах может быть найдено только численными методами. Однако при условиях

$$\omega_{p1} = \omega_{p2} = \omega_p, \tag{57}$$

$$\frac{\mathrm{I}_l(kr_0)\,\mathrm{K}_l'(kr_0)}{\mathrm{K}_l(kr_0)\,\mathrm{I}_l'(kr_0)} = -1, \tag{58}$$

последнее из которых приближённо выполняется при $kr_0 \gg 1$, уравнение (56) приводится к биквадратному (см. [14]) (без потери общности далее будем полагать $v_2 = -v_1$):

$$2 = \frac{\omega_p^2}{(\omega - kv_1)^2} + \frac{\omega_p^2}{(\omega + kv_1)^2},$$

$$\omega^4 - 2(kv_1)^2\omega^2 + (kv_1)^4 = \omega_p^2\left[\omega^2 + (kv_1)^2\right],$$

откуда получаем решение в аналитическом виде:

$$\omega^2 = \omega_p^2\,\frac{2\tau + 1 \pm \sqrt{8\tau + 1}}{2}, \qquad \tau = \left(\frac{kv_1}{\omega_p}\right)^2, \tag{59}$$

из которого следует, что при $\tau < 1$ один из четырёх корней имеет положительную мнимую часть:

$$\omega = \imath\omega_p\sqrt{\frac{\sqrt{8\tau + 1} - 2\tau - 1}{2}}, \qquad \tau < 1, \tag{60}$$

$$\omega \approx \imath kv_1, \qquad \tau \ll 1. \tag{61}$$

Рассмотренный частный случай весьма показателен, так как условие (57) выполнено с большой точностью в силу (2), а (58) при $r_0 \sim c/\omega_p$ требует $\tau \gg v_1/c$, что совместимо с условием неустойчивости $\tau < 1$.

Зависимость инкремента неустойчивости от k, определяемая выражением (60) при $v_1 = 0.03\,c$, $r_0 = c/\omega_p$, приведена на рисунке 4. Здесь же показаны численные решения уравнения (56) для различных значений $\omega_{p1}^2/\omega_{p2}^2$ (при $l = 0$), демонстрирующие нечувствительность инкремента к изменениям этого отношения.

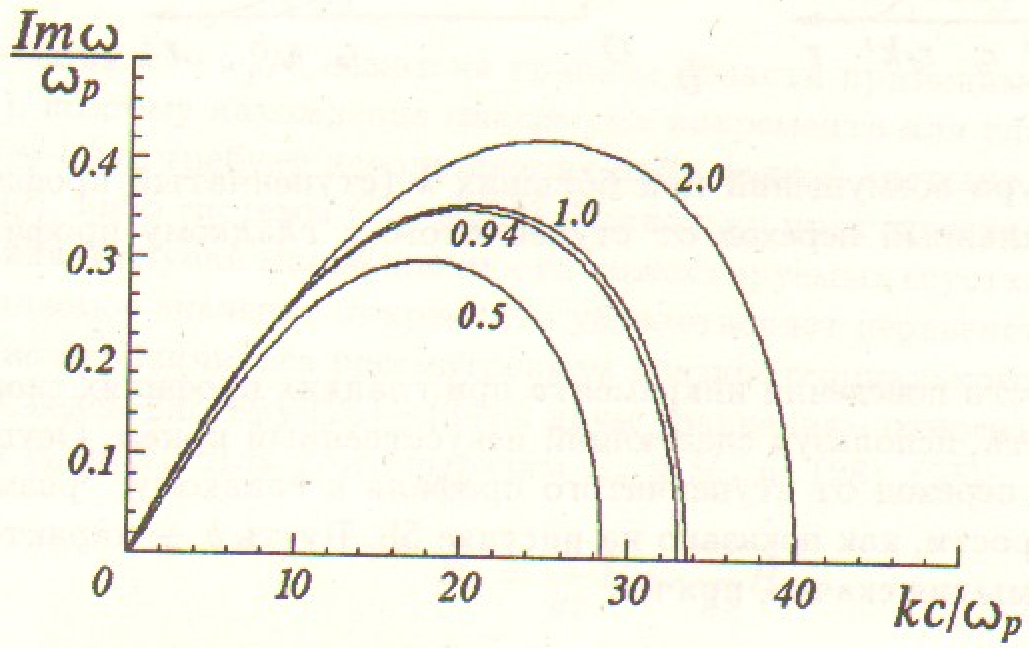

Рис. 4: Дисперсионные кривые для ступенчатого профиля скорости при различных значениях отношения $\omega_{p1}^2/\omega_{p2}^2$.

Компьютерный счёт также позволяет проанализировать поведение $Im\,\omega$ при малых k ($kr_0 < 1$). При $l = 0$ имеет место степенной (пропорциональный k^m, $m > 1$) рост инкремента, при $l \neq 0$ отличия от предсказываемого формулой (61) линейного роста ($Im\,\omega \approx kv_1$) невелики.

Из асимптотических выражений для цилиндрических функций следует, что при $kr_0 \gg 1$ возмущения $\tilde{E}_z$ сосредоточены вблизи точки разрыва скорости (рис.5а) с характерным масштабом локализации k^{-1}. Таким образом, большие (порядка ω_p) значения инкремента обусловлены наличием разрыва. Естественно ожидать, что в случае гладкого[6] про-

[6] Здесь и далее под гладким будет пониматься профиль скорости с непрерывными производными v' и v'', не имеющий других пространственных масштабов, кроме характерного масштаба локализации движения a, так что можно в оценках полагать $\frac{\partial}{\partial r} \sim \frac{1}{a}$.

филя скорости картина неустойчивости будет существенно отличаться от описанной выше.

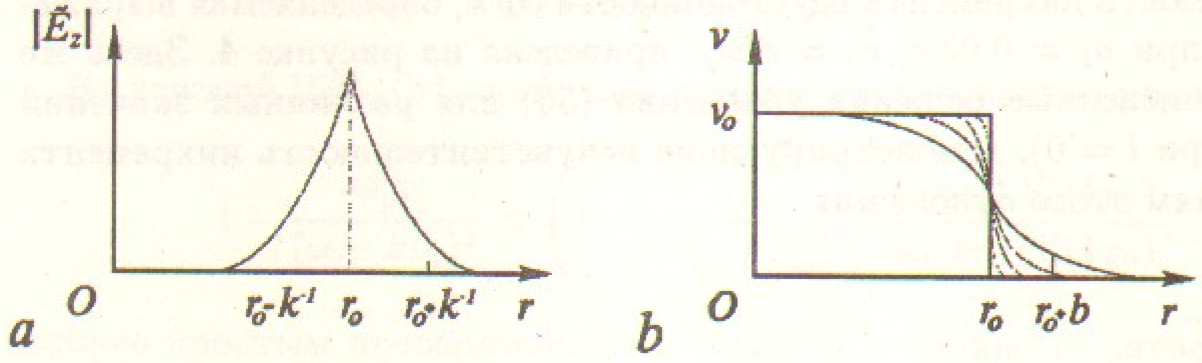

Рис. 5: Структура возмущений при больших k (ступенчатый профиль скорости) (a); плавный переход от ступенчатого к гладкому профилю скорости (b).

Закономерности поведения инкремента при гладких профилях скорости можно понять, используя следующий искусственный приём. Осуществим плавный переход от ступенчатого профиля к гладкому, "размывая" скачок скорости, как показано на рисунке 5b. Пусть b — характерный размер размытия скачка, причём

$$\frac{v_0}{\omega_p} \ll b \ll r_0. \tag{62}$$

Если возмущения "прощупывают" широкую по сравнению с b область пространства ($\omega_p/c \ll k \ll b^{-1}$), то для них отличие сглаженной ступеньки от ступеньки идеальной не существенно. Следовательно, при $k \ll b^{-1}$ мнимая часть инкремента будет линейно расти в соответствии с формулой (61).

Обратимся теперь к случаю $k \gg b^{-1}$. Можно показать (см. Приложение 2), что если выполнено условие

$$b^{-1} \ll k \ll \frac{\omega_p}{v_0}, \tag{63}$$

то уравнение (45) не имеет решений с $|\omega| \ll \omega_p$. Это значит, что линейный при малых k рост инкремента должен в области $k \sim b^{-1}$ смениться убыванием до нуля, так как только в точке нулевого инкремента (при $k = k_0$) неустойчивая мода ($Im\,\omega > 0$) может исчезнуть (соединившись со своей комплексно-сопряжённой $Im\,\omega < 0$) и тем самым обеспечить отсутствие не только неустойчивых, но и вообще любых колебаний с $|\omega| \ll \omega_p$.

Из приведённых рассуждений следует, что в случае сглаженного профиля максимальное значение инкремента достигается в области $k \sim b^{-1}$ и имеет порядок величины v_0/b. Увеличивая b до размера самого пучка a ($a \sim c/\omega_p$), получаем, что при гладком профиле скорости максимум инкремента должен достигаться в области $k \sim \omega_p/c$ и быть порядка $\omega_p v/c$.

4 Квазипотенциальное приближение, аксиально-симметричные возмущения

Значения $k \sim \omega_p/c$ лежат на границе области применимости уравнения (45), поэтому нахождение максимума инкремента для гладкого профиля с $a \sim c/\omega_p$ требует использования либо полной системы уравнений (13) – (22), либо системы (25) – (34). Поскольку практический интерес представляет случай малой плотности инжектируемых сгустков, при котором ожидаемое значение инкремента удовлетворяет неравенству (23), достаточно ограничиться рассмотрением квазипотенциального приближения.

Сведём систему (25) – (34) к двум уравнениям относительно переменных $\tilde{E}_z$ и $\tilde{H}_z$. Для этого выразим $\tilde{E}_\varphi$ и $\tilde{H}_\varphi$ из (28), (25):

$$\tilde{E}_\varphi = \frac{l}{kr}\tilde{E}_z - \frac{\omega}{kc}\tilde{H}_r, \tag{64}$$

$$\tilde{H}_\varphi = \frac{l}{kr}\tilde{H}_z - \frac{4\pi\imath ne}{kc}\tilde{v}_r, \tag{65}$$

и подставим полученные выражения в (33) и (32):

$$\imath\Omega\tilde{v}_\varphi = \frac{le}{mkr}\tilde{E}_z - \frac{e\Omega}{mkc}\tilde{H}_r, \tag{66}$$

$$\tilde{E}_r = \imath\frac{m}{e}\left(\Omega - \frac{\omega_p^2 v_z}{kc^2}\right)\tilde{v}_r + \frac{lv_z}{kcr}\tilde{H}_z. \tag{67}$$

Используя (65) и (67), преобразуем уравнение (29):

$$-\frac{km}{e}\left(\Omega - \frac{\omega_p^2 v_z}{kc^2}\right)\tilde{v}_r - \frac{4\pi ne\omega}{kc^2}\tilde{v}_r + \frac{\imath l}{kcr}(kv_z - \omega)\tilde{H}_z - \frac{\partial\tilde{E}_z}{\partial r} = 0,$$

и выразим из него $\tilde{v}_r$:

$$\tilde{v}_r = -\frac{ke}{mq^2\Omega}\frac{\partial\tilde{E}_z}{\partial r} - \frac{\imath le}{mq^2cr}\tilde{H}_z. \tag{68}$$

Здесь введено обозначение

$$q^2 = k^2 + \frac{\omega_p^2}{c^2}. \tag{69}$$

Из (26) с помощью (66) выражаем $\tilde H_r$ через $\tilde E_z$ и $\tilde H_z$:

$$\imath k\Omega \tilde H_r - \Omega\frac{\partial \tilde H_z}{\partial r} = \frac{4\pi\imath ne}{c}\left(\frac{le}{mkr}\tilde E_z - \frac{e\Omega}{mkc}\tilde H_r\right),$$

$$\tilde H_r = \frac{l\omega_p^2}{q^2\Omega cr}\tilde E_z - \frac{\imath k}{q^2}\frac{\partial \tilde H_z}{\partial r}. \tag{70}$$

Наконец, подставляя $\tilde v_r$, $\tilde v_z$, $\tilde v_\varphi$, $\tilde H_r$ из (68), (34), (66), (70) в (31), имеем

$$\imath\Omega\frac{\imath}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\left(-\frac{ke}{mq^2\Omega}\frac{\partial\tilde E_z}{\partial r} - \frac{\imath le}{mq^2cr}\tilde H_z\right) =$$

$$= k\left[\frac{e}{m}\tilde E_z + \frac{\partial \tilde v_z}{\partial r}\left(-\frac{ke}{mq^2\Omega}\frac{\partial \tilde E_z}{\partial r} - \frac{\imath le}{mq^2cr}\tilde H_z\right)\right] +$$

$$+\frac{l}{r}\left[\frac{le}{mkr}\tilde E_z - \frac{e\Omega}{mkc}\left(\frac{l\omega_p^2}{q^2\Omega cr}\tilde E_z - \frac{\imath k}{q^2}\frac{\partial\tilde H_z}{\partial r}\right)\right],$$

$$\frac{\Omega}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{\Omega}\frac{\partial \tilde E_z}{\partial r} - \frac{q^2}{k^2}\left(k^2+\frac{l^2}{r^2}\right)\tilde E_z + \frac{l^2\omega_p^2}{k^2c^2r^2}\tilde E_z + \frac{k}{\Omega}\frac{\partial v_z}{\partial r}\frac{\partial\tilde E_z}{\partial r} + \frac{\imath l}{cr}\frac{\partial v_z}{\partial r}\tilde H_z = 0,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial\tilde E_z}{\partial r} - \left(q^2+\frac{l^2}{r^2}\right)\tilde E_z - 2\frac{\Omega'}{\Omega}\frac{\partial \tilde E_z}{\partial r} - \frac{\imath l\Omega'}{kcr}\tilde H_z = 0 \tag{71}$$

или

$$\frac{\Omega^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{\Omega^2}\frac{\partial\tilde E_z}{\partial r} - \left(q^2+\frac{l^2}{r^2}\right)\tilde E_z - \frac{\imath l\Omega'}{kcr}\tilde H_z = 0. \tag{72}$$

Аналогично, подставляя $\tilde E_\varphi$, $\tilde E_r$, $\tilde H_r$ и $\tilde v_r$ из (64), (67), (70), (68) в (30), получаем

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\left[\frac{l}{kr}\tilde E_z - \frac{\omega}{kc}\left(\frac{l\omega_p^2}{q^2\Omega cr}\tilde E_z - \frac{\imath k}{q^2}\frac{\partial\tilde H_z}{\partial r}\right)\right] -$$

$$-\frac{\imath l}{r}\left[\imath\frac{m}{e}\left(\Omega - \frac{\omega_p^2 v_z}{kc^2}\right)\left(-\frac{ke}{mq^2\Omega}\frac{\partial\tilde E_z}{\partial r} - \frac{\imath le}{mq^2cr}\tilde H_z\right) + \frac{lv_z}{kcr}\tilde H_z\right] = \frac{\imath\omega}{c}\tilde H_z,$$

$$\frac{\imath}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial\tilde H_z}{\partial r} - \imath\left(q^2+\frac{l^2}{r^2}\right)\tilde H_z + \frac{l\omega_p^2}{kcr}\frac{\Omega'}{\Omega^2}\tilde E_z = 0. \tag{73}$$

В случае аксиально-симметричных возмущений ($l = 0$) система (72), (73) расщепляется на два независимых уравнения, причём второе из них с очевидностью даёт $\tilde H_z \equiv 0$ (ср. с (42), (44)). Первое же имеет такую же структуру, как и уравнение (47), что позволяет выразить дисперсионное соотношение $\omega(k)$ через функцию $\omega_{pot}(k)$, которую можно получить из (47). Действительно, производя в уравнении (72) замену

$$\omega(k) = \frac{k}{q}\omega_{pot}(q), \tag{74}$$

имеем

$$\frac{(\omega_{pot}-qv_z)^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{(\omega_{pot}-qv_z)^2}\frac{\partial\tilde E_z}{\partial r} - q^2\tilde E_z = 0, \tag{75}$$

что, с точностью до обозначений, совпадает с (47) при $l = 0$. Таким образом, задача об устойчивости неоднородного течения электронов может быть сведена к анализу уравнения (47) или эквивалентного ему (49).

Последнее обстоятельство позволяет сформулировать необходимое и достаточное условие существования неустойчивой аксиально-симметричной моды. Если данный гладкий профиль является неустойчивым, то обязательно неустойчивая область должна завершиться точкой нейтральных колебаний (см. Приложение 2 и раздел 3). И наоборот, наличие точки с $Im\ \omega = 0$ влечёт за собой неустойчивость (см. Приложение 1.4). Определить же, будут ли при данном гладком профиле существовать нейтральные колебания, можно, решая задачу о наличии связанных состояний с "энергией" $(-k^2)$ в "потенциале"

$$U(r) = \frac{3}{4r^2} + \frac{v''(r)-v'(r)/r}{v(r)-v(r_0)} \tag{76}$$

(см. уравнение (147) Приложения 1). Здесь r_0 — точка "перегиба" (см. (138)), в которой выполнено условие

$$v_z'' - \frac{v_z'}{r} = 0 \quad \text{при} \quad r = r_0 \neq 0. \tag{77}$$

Наличие связанного состояния с "энергией", большей ω_p^2/c^2 (по модулю), означает неустойчивость (в квазипотенциальном приближении) данного профиля скорости.

Таким образом, в случае $l = 0$ можно предложить следующий алгоритм исследования гладкого профиля на неустойчивость.

1. Найти точки $r_0^{(i)}$, в которых выполнено условие (77). Если таких точек нет — профиль устойчив.

2. Для каждого значения $r_0^{(i)}$ определить "энергии" $E^{(n)} = -(k_{pot}^{(n)})^2$ связанных состояний в потенциале (76). Если ни при каких $r_0^{(i)}$ нет связанных состояний с $k_{pot}^{(n)} > \omega_p/c$ — профиль устойчив, иначе — неустойчив.

3. По найденным значениям $k_{pot}^{(n)}$ восстановить частоты нейтральных колебаний, $\omega_{pot}^{(n)} = k_{pot}^{(n)} v(r_0^{(i)})$.

4. Если требуется, "вытянуть" численными методами из точек нейтральных колебаний фиктивные дисперсионные кривые $\omega_{pot}^{(n)}(k)$ (см. Приложение 3).

5. Получить дисперсионные кривые $\omega^{(n)}(k)$ из зависимостей $\omega_{pot}^{(n)}(k)$ с помощью формулы пересчёта (74).

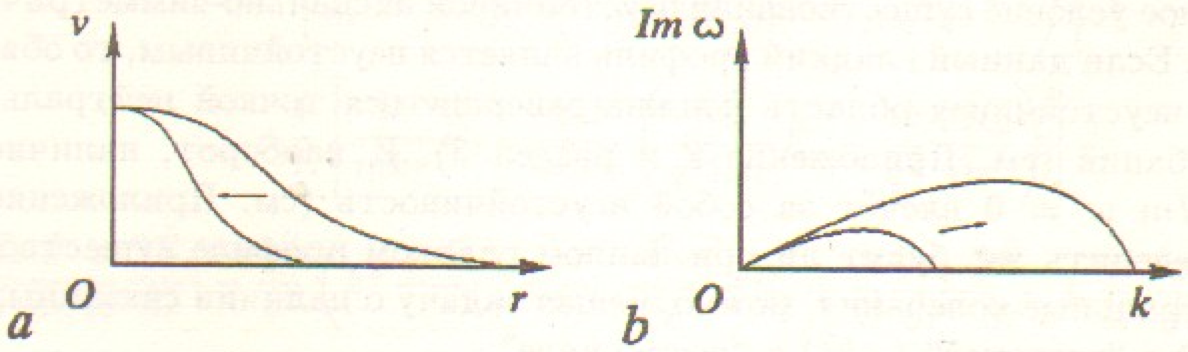

Рис. 6: Сжатие профиля скорости (a), и соответствующее видоизменение дисперсионной кривой (b).

Заметим, что, располагая набором дисперсионных кривых $\omega_{pot}(k)$, полученных из уравнения (49) для некоторого профиля $v(r)$, можно простым пересчётом получить аналогичные кривые для растянутого или сжатого по радиусу профиля той же формы[7]. Производя замену

$$v(r) \to \hat{v}(r) = v(\alpha r), \qquad k \to \hat{k} = \alpha k, \qquad \omega \to \hat{\omega} = \alpha\omega, \qquad (\alpha > 0), \quad (78)$$

мы не изменяем структуру уравнения (49). Поэтому дисперсионные кривые $\hat{\omega}(\hat{k})$ для сжатого в α раз профиля (рис.6a) получатся растяжением

[7]Это утверждение верно для любых l.

исходных кривых $\omega(k)$ по осям ω и k в α раз (рис.6b):

$$\hat{\omega}(\hat{k}) = \alpha\omega\left(\frac{k}{\alpha}\right). \quad (79)$$

5 Аксиально-несимметричные возмущения

В случае аксиально-несимметричных возмущений анализ положения точки нейтральных колебаний мало что может дать для исследования профиля скорости на устойчивость-неустойчивость, поскольку не удаётся найти простого способа отыскания этой точки. Взамен этого оказывается возможным судить о неустойчивости по её инкременту при малых k (при $k = 0$, $l \neq 0$ он не обращается в нуль).

Действительно, полагая в уравнениях (72), (73)

$$k = 0, \qquad \Omega = \omega, \qquad \frac{\Omega'}{k} = -v_z', \quad (80)$$

имеем

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial r} - \left(\frac{\omega_p^2}{c^2} + \frac{l^2}{r^2}\right)\tilde{E}_z + \frac{\imath l v_z'}{cr}\tilde{H}_z = 0, \quad (81)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial r} - \left(\frac{\omega_p^2}{c^2} + \frac{l^2}{r^2}\right)\tilde{H}_z + \frac{\imath l \omega_p^2 v_z'}{\omega^2 cr}\tilde{E}_z = 0. \quad (82)$$

Систему (81), (82) можно переписать в симметричной (относительно замены $\omega_p \tilde{E}_z$ на $\omega \tilde{H}_z$ и наоборот) форме:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial (\omega_p \tilde{E}_z)}{\partial r} - \left(\frac{\omega_p^2}{c^2} + \frac{l^2}{r^2}\right)(\omega_p \tilde{E}_z) + \frac{\imath l \omega_p v_z'}{\omega cr}(\omega \tilde{H}_z) = 0, \quad (83)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial (\omega \tilde{H}_z)}{\partial r} - \left(\frac{\omega_p^2}{c^2} + \frac{l^2}{r^2}\right)(\omega \tilde{H}_z) + \frac{\imath l \omega_p v_z'}{\omega cr}(\omega_p \tilde{E}_z) = 0. \quad (84)$$

Вычитание (84) из (83) даёт[8]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial W}{\partial r} - \left(\frac{\omega_p^2}{c^2} + \frac{l^2}{r^2}\right) W - \frac{\imath l \omega_p v_z'}{\omega cr} W = 0, \quad (85)$$

[8]Сложение уравнений (83) и (84) приведёт к комплексно-сопряжённым собственным значениям ω, соответствующим затуханию возмущений.

где введено обозначение

$$W = \omega_p \tilde{E}_z - \omega \tilde{H}_z. \tag{86}$$

Если при некотором значении ω уравнение (85) имеет нетривиальное решение $W(r)$, то система (83), (84) также будет иметь нетривиальное решение:

$$\omega_p \tilde{E}_z = -\omega \tilde{H}_z = \frac{W}{2}. \tag{87}$$

И наоборот, собственное значение ω системы (83), (84), очевидно, будет собственным значением и для уравнения (85). Таким образом, симметрия системы (83), (84) позволяет свести задачу о собственных частотах при $k = 0$ к исследованию одного дифференциального уравнения второго порядка (85).

Кроме того, из (85) следует, что при монотонном профиле скорости электронов частота ω должна быть чисто мнимой, что ещё больше облегчает её нахождение. Действительно, обозначим

$$\gamma_0 = -\imath\omega, \qquad \omega = \imath\gamma_0. \tag{88}$$

Умножим (85) на rW^* и вычтем из результата комплексно-сопряжённое уравнение:

$$W^* \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial W}{\partial r} - W \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial W^*}{\partial r} - \frac{l\omega_p v_z'}{c} \left(\frac{1}{\gamma_0} - \frac{1}{\gamma_0^*} \right) |W|^2 = 0. \tag{89}$$

При интегрировании (89) по r от нуля до бесконечности первые два слагаемых обращаются в нуль. Последнее же слагаемое даёт

$$\left(\frac{1}{\gamma_0} - \frac{1}{\gamma_0^*} \right) \int\limits_0^\infty v_z' |W|^2 \, dr = 0, \tag{90}$$

откуда и следует вещественность γ_0 при знакоопределённой функции $v_z'(r)$.

Очевидно, что инкремент γ_0 может быть найден как решение вариационной задачи, обеспечивающей экстремум функционала

$$\int\limits_0^\infty v_z' W^2 \, dr \tag{91}$$

при условии

$$\int\limits_0^\infty \left[\left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\omega_p^2}{c^2} + \frac{l^2}{r^2} \right) W^2 \right] r \, dr = \text{const}. \tag{92}$$

Анализ уравнения (85) начнём с рассмотрения ступенчатого профиля скорости (51) (дополнительно положив $v_2 = 0$, $\omega_{p1} = \omega_{p2} = \omega_p$). Производя, по аналогии с разделом 3, сшивку решений уравнения (85) в областях $r < r_0$ и $r > r_0$

$$\begin{aligned} r < r_0: \quad & W = \mathrm{A}\, \mathrm{I}_l(r\omega_p/c), \\ r > r_0: \quad & W = \mathrm{B}\, \mathrm{K}_l(r\omega_p/c) \end{aligned} \tag{93}$$

посредством вытекающих из (85) условий

$$\{W\} = 0, \tag{94}$$

$$\{W'\} - \frac{l\omega_p}{\gamma_0 c r_0}(-v_1) W = 0, \tag{95}$$

находим

$$\gamma_0 = \frac{l v_1}{r_0} G, \tag{96}$$

где G — число порядка единицы,

$$G = \frac{\mathrm{I}_l(\omega_p r_0/c)\, \mathrm{K}_l(\omega_p r_0/c)}{\mathrm{I}_l'(\omega_p r_0/c)\, \mathrm{K}_l(\omega_p r_0/c) - \mathrm{I}_l(\omega_p r_0/c)\, \mathrm{K}_l'(\omega_p r_0/c)}. \tag{97}$$

В формуле (97) штрих означает производные цилиндрических функций по аргументу, а не по r_0.

Итак, в случае ступенчатого профиля скорости для каждого значения l существует только одна неустойчивая мода, имеющая инкремент (при $r_0 \sim \omega_p/c$, $l \sim 1$) порядка $l\omega_p v_1/c$.

Обратимся теперь к гладким профилям скорости. Будем искать решение уравнения (85) в виде квазиклассического волнового пакета:

$$W = \tilde{W}(r) \exp(\imath\kappa r), \tag{98}$$

где

$$\kappa \gg \frac{l}{a}, \qquad \kappa \gg \frac{\omega_p}{c}, \tag{99}$$

а характерный масштаб изменения $\tilde{W}(r)$ много больше κ^{-1}. Пренебрегая в силу (99) малыми членами в (85), после сокращения на $\tilde{W}(r)$ имеем

$$-\kappa^2 - \frac{l\omega_p v_z'(r)}{\gamma_0 cr} = 0,$$

$$\gamma_0 = -\frac{l\omega_p v_z'(r)}{\kappa^2 cr}, \tag{100}$$

где r — радиус, на котором локализован волновой пакет. Учёт в (85) членов следующего порядка малости и граничных условий в нуле и на бесконечности выделит из непрерывного спектра (100) дискретные значения γ_0. Какими будут эти значения — зависит от конкретного профиля скорости. Однако, в любом случае, каждому значению l будет соответствовать бесконечное количество неустойчивых мод с убывающими (с ростом κ) инкрементами. Для обозначения этих мод введём дополнительное квантовое число $m \geq 1$ (радиальное квантовое число) так, чтобы меньшим значениям m соответствовали моды с бóльшим при $k = 0$ инкрементом.

Экстраполируя формулу (100) в область минимально возможных при условии (99) значений κ ($\kappa \sim l/a$), находим, что любой гладкий профиль будет неустойчивым, и максимальное значение инкремента по порядку величины будет $\omega_p v_z/c$ (при $l = 1$, см. также сноску на стр. 15).

Определить же точное значение максимального инкремента возможно лишь с помощью численного счёта. Для этого предлагается следующий алгоритм.

1. Задавшись конкретным профилем скорости, найти из уравнения (85) значения инкремента при $k = 0$ (что по сложности эквивалентно определению энергий связанных состояний в некотором потенциале).

2. Вычислить предел отношения

$$\lim_{r\to 0} \frac{\tilde{H}_z(r)}{\tilde{E}_z(r)} = \hat{\mathrm{H}}_0. \tag{101}$$

Этот предел всегда существует, поскольку при малых r решения системы (72), (73) ведут себя как функции Бесселя,

$$\tilde{E}_z(r) \approx \mathrm{E}_0\, r^l, \qquad \tilde{H}_z(r) \approx \mathrm{H}_0\, r^l. \tag{102}$$

При $k = 0$ предел (101) равен $\omega_p/\imath\gamma_0$ (что следует из (87)).

3. "Вытянуть" из точки $k = 0$ дисперсионную кривую методом, аналогичным описанному в Приложении 3. Эта процедура оказывается более сложной, чем при $l = 0$, поскольку для каждого значения k нужно вычислять уже два комплексных параметра ω и $\hat{\mathrm{H}}_0$. Кроме того, необходимость обращения в нуль двух комплексных величин $\tilde{E}_z(r_{max})$ и $\tilde{H}_z(r_{max})$ требует другого, нежели в Приложении 3, метода нахождения нулей функции $F(\omega, \hat{\mathrm{H}}_0, k) = |\tilde{E}_z(r_{max})|^2 + |\tilde{H}_z(r_{max})|^2$.

6 Исследование конкретных профилей скорости

Применим развитую в предыдущих разделах теорию к анализу некоторых классов гладких профилей скорости.

6.1 Гауссовский профиль скорости

$$v_z(r) = v_0 \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right), \tag{103}$$

— классический пример гладкого профиля с одним пространственным масштабом.

Вычисляя $v_z'(r)$ и $v_z''(r)$,

$$v_z'(r) = -\frac{2r}{a^2}\, v_z(r), \qquad v_z''(r) = \left(\frac{4r^2}{a^4} - \frac{2}{a^2}\right) v_z(r),$$

находим, что условие (77) не выполнено ни в одной точке. Следовательно, профиль (103) устойчив по отношению к аксиально-симметричным возмущениям.

В случае же $l \neq 0$, как и предсказывалось ранее, существует бесконечное количество неустойчивых мод. Характерное для данного профиля семейство дисперсионных кривых, обладающих одним и тем же азимутальным квантовым числом l, показано на рисунке 7. Из рисунка 7, в частности, следует, что мода с $m = 1$ (для анализа которой квазиклассическое приближение не может быть использовано) и при $k \neq 0$ обладает максимальным инкрементом (а значит, представляет наибольший интерес).

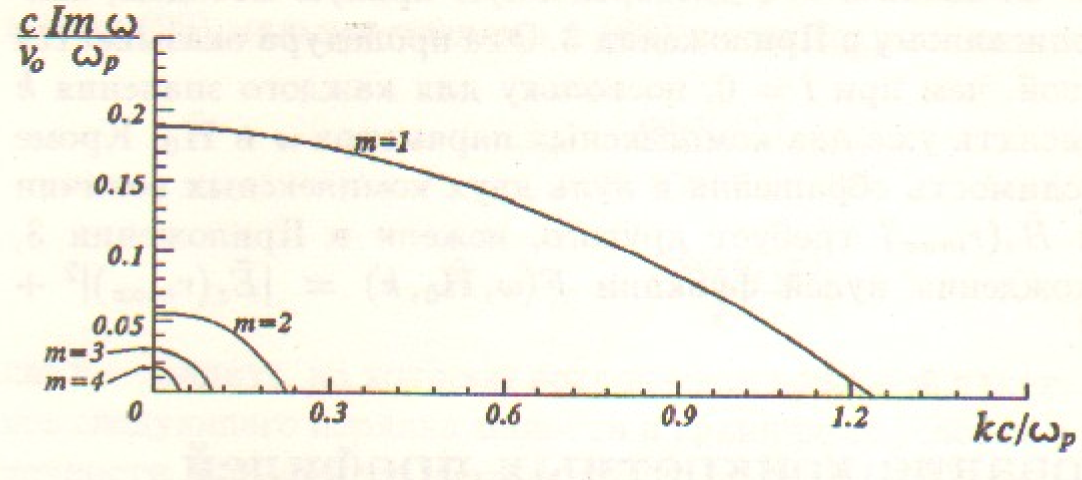

Рис. 7: Семейство дисперсионных кривых с $l = 1$ для гауссовского профиля скорости ($a = c/\omega_p$).

Дисперсионные кривые для мод с $m = 1$ и различными l приведены на рисунке 8. Естественно ожидать, что аналогичная картина неустойчивости будет иметь место и для других гладких профилей скорости[9].

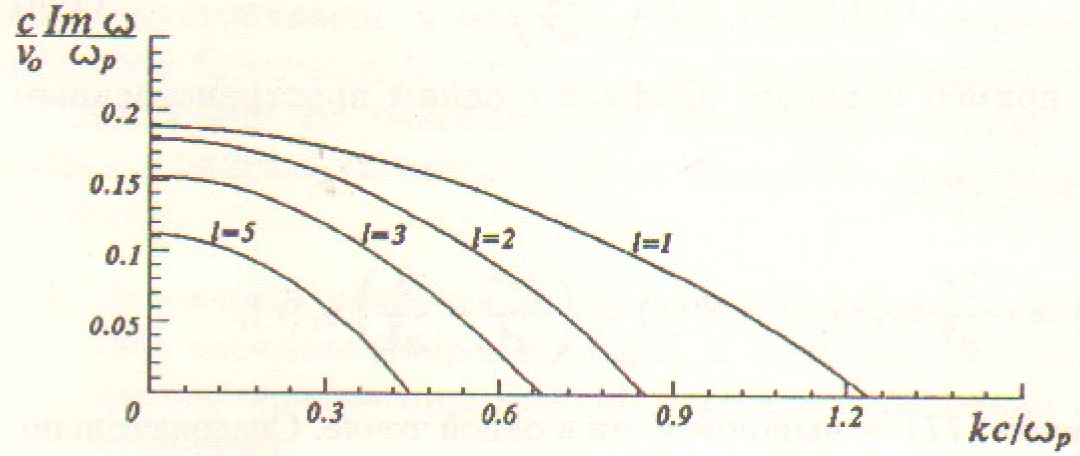

Рис. 8: Семейство дисперсионных кривых с $m = 1$ для гауссовского профиля скорости ($a = c/\omega_p$).

На рисунке 9a значения инкрементов при $k = 0$ и различных l и m собраны в единую диаграмму. Поскольку для каждой из неустойчивых мод максимальное значение инкремента достигается вблизи точки $k = 0$ (что следует из графиков на рис. 7 и 8), то по рисунку 9a можно судить о зависимости максимального инкремента моды от l и m, то есть, об иерархии мод.

[9]Что подтверждается результатами исследования других профилей скорости, не включёнными в настоящую работу.

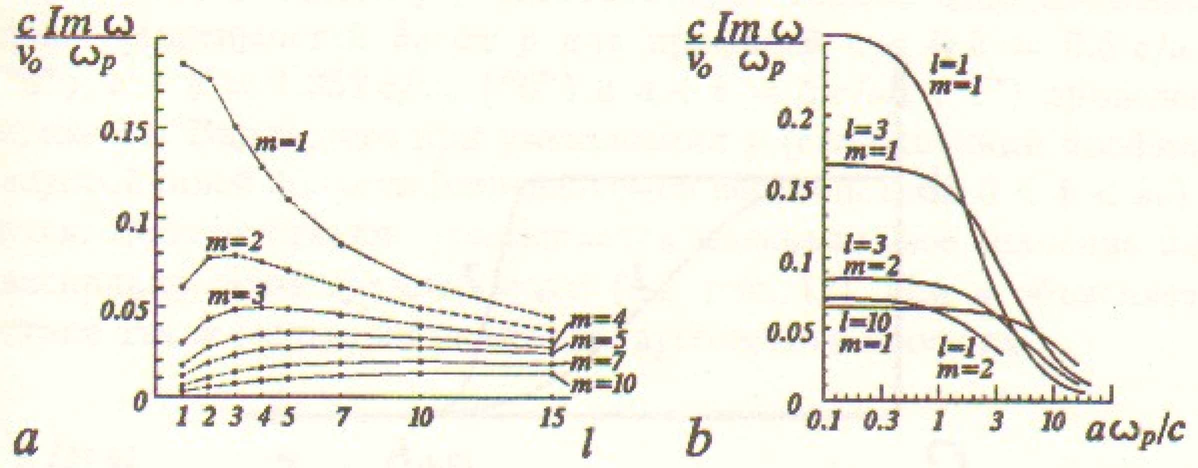

Рис. 9: Значения инкрементов при $k = 0$ для гауссовского профиля скорости с $a = c/\omega_p$ (a), зависимости инкрементов при $k = 0$ от параметра a для того же профиля (b).

На примере гауссовского профиля можно проследить, как меняется картина неустойчивости при изменении ширины электронного потока. На рисунке 9b изображены зависимости инкремента от параметра a (при $k = 0$) для некоторых характерных мод. Интересно отметить, что при уменьшении радиуса потока нет свойственного гидродинамической неустойчивости неограниченного роста инкремента.

6.2 Профиль скорости с косинусом (рис. 10)

$$\frac{v_z(r)}{v_0} = \begin{cases} 1, & 0 \le r < a \\ 0.5 + 0.5\cos(\pi(r-a)/b), & a \le r < a+b \\ 0, & a+b \le r \end{cases} . \qquad (104)$$

С помощью (104) можно проследить за эволюцией неустойчивых мод при плавном переходе от гладкого профиля скорости к ступенчатому (51). Будем характеризовать форму профиля параметром $p = a/b$. Малым значениям p соответствует плавный профиль, похожий на гауссовский (кривая “1” на рис. 10). При больших p профиль скорости приближается к ступенчатому (кривая “2”).

В области $a < r < a + b$ имеем

$$\frac{v_z'(r)}{v_0} = -\frac{\pi}{2b}\sin\left(\frac{\pi}{b}(r-a)\right),$$

$$\frac{v_z''(r)}{v_0} = -\frac{\pi^2}{2b^2}\cos\left(\frac{\pi}{b}(r-a)\right),$$

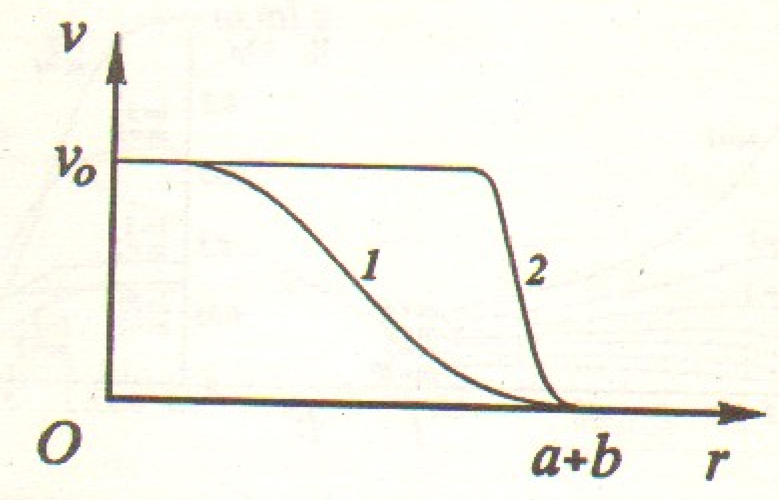

Рис. 10: Профиль скорости с косинусом.

откуда получаем условие резонанса:

$$\frac{\pi r}{b} = \tan\left(\frac{\pi}{b}(r-a)\right). \qquad (105)$$

Условие (77) также тождественно выполняется на промежутках $r < a$ и $r > a + b$. Это связано с нефизичностью выбранного профиля (в действительности, условие резонанса может выполняться лишь в отдельных точках), поэтому будем искать резонансные точки только на интервале $a < r < a + b$.

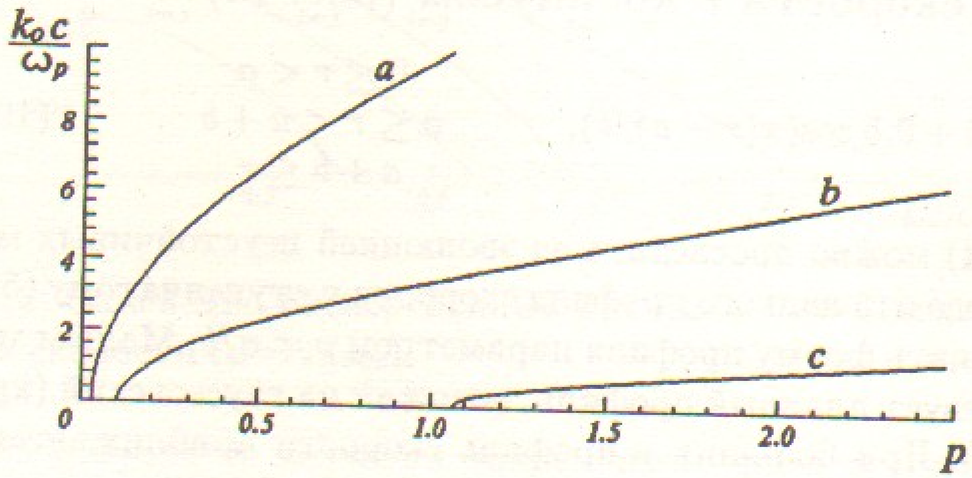

Рис. 11: Зависимости положения точки нейтральных колебаний k_0 от парамера гладкости p.

Для любых a и b уравнение (105) имеет единственное решение $r = r_0$, причём $a < r_0 < a + b/2$. Численный анализ показывает, что при значениях p, больших некоторого (см. рис. 11), существуют незатухающие

колебания, и каждому p соответствует только одно значение k_0. Графики зависимостей k_0 от p для профилей с $a + b = 0.5\, c/\omega_p$ (кривая “a”), $a + b = 1.352\, c/\omega_p$ (“b”) и $a + b = 5\, c/\omega_p$ (“c”) приведены на рисунке 11. Видно, что при уменьшении p (сглаживании профиля) размер неустойчивой области (определяемой неравенством $0 < k < k_0$) уменьшается. Соответственно уменьшается максимальное значение инкремента аксиально-симметричной моды (см. рис. 12), чем и объясняется отсутствие такой моды для гладкого гауссовского профиля.

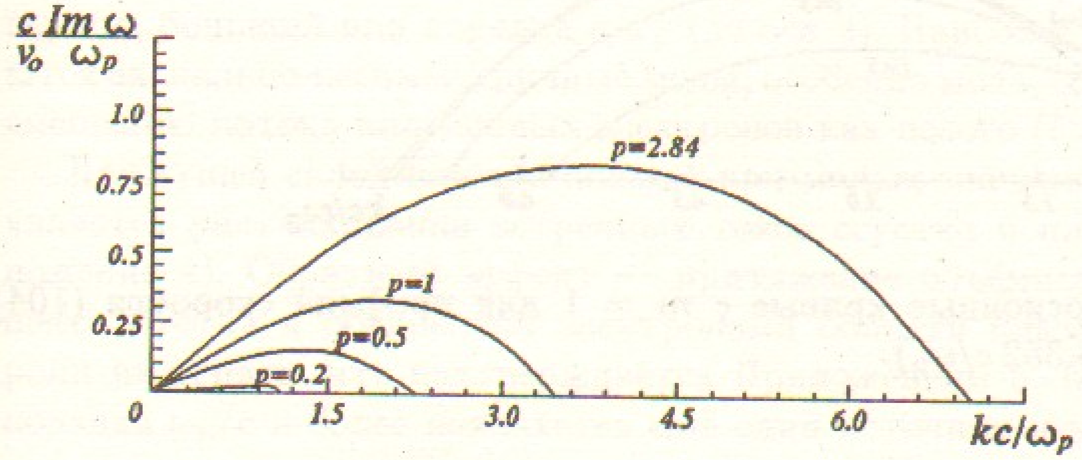

Рис. 12: Семейство дисперсионных кривых с $l = 0$ и различными значениями p для профиля скорости (104) с $a + b = 1.352\, c/\omega_p$.

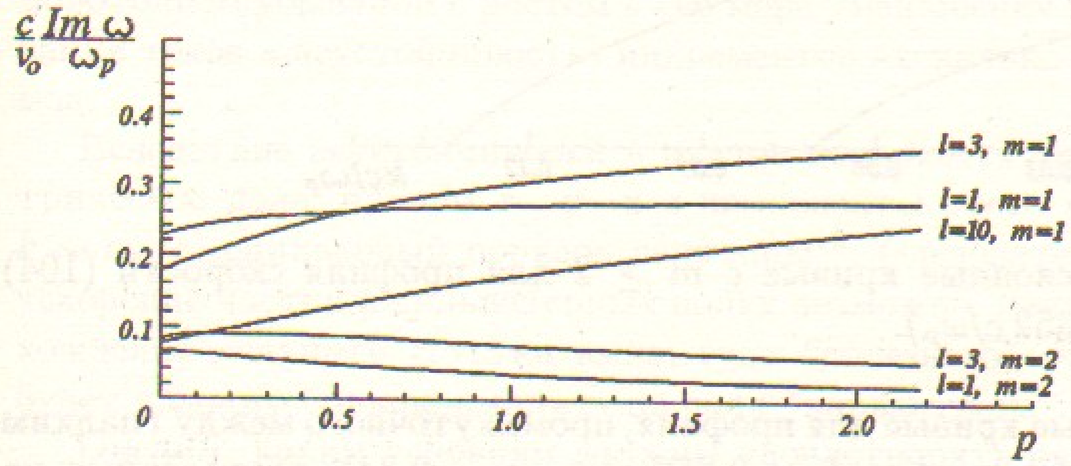

Рис. 13: Зависимость от p инкрементов (при $k = 0$) типичных неустойчивых мод ($a + b = 1.352\, c/\omega_p$).

Эволюция аксиально-несимметричных мод при изменении профиля скорости отражена на рисунке 13, где приведены графики зависимости от p инкрементов (при $k = 0$) типичных неустойчивых мод. В то время как для мод с $m = 1$ при увеличении p имеет место рост инкремента (причём тем больший, чем больше l), инкременты остальных мод ($m \geq 2$) убывают, так что при $p = \infty$ ("идеальная ступенька") остаётся только одна неустойчивая мода ($m = 1$) для каждого l (ср. с (96)).

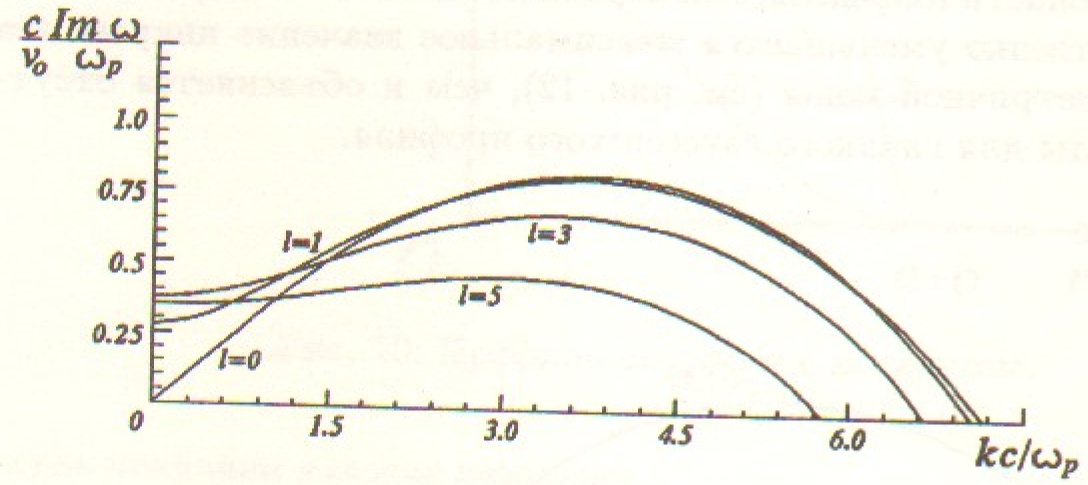

Рис. 14: Дисперсионные кривые с $m = 1$ для профиля скорости (104) ($a = c/\omega_p$, $b = 0.352\, c/\omega_p$).

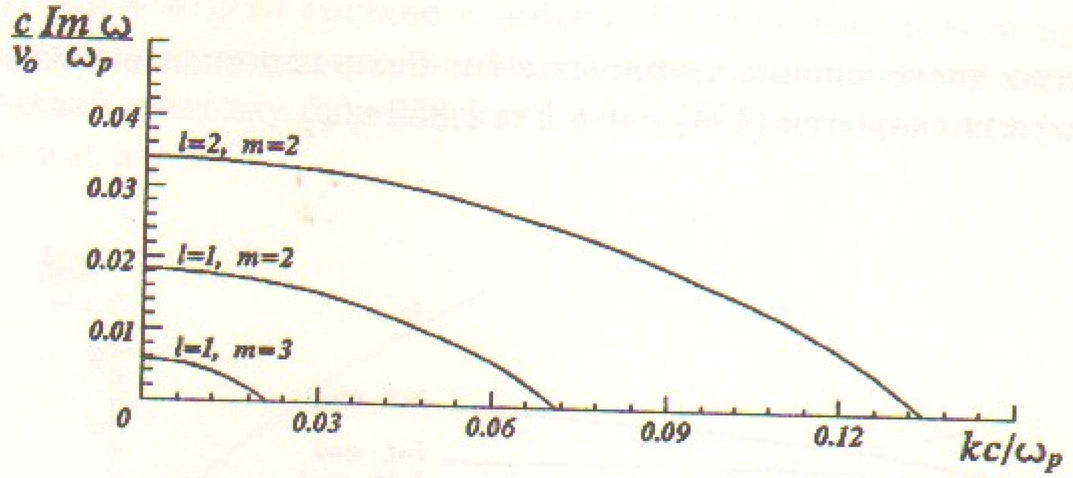

Рис. 15: Дисперсионные кривые с $m \geq 2$ для профиля скорости (104) ($a = c/\omega_p$, $b = 0.352\, c/\omega_p$).

Дисперсионные кривые для профиля, промежуточного между гладким и ступенчатым ($a = c/\omega_p$, $b = 0.352\, c/\omega_p$, $p = 2.84$), приведённые на рисунках 14 и 15, иллюстрируют сказанное выше об изменении картины неустойчивости при увеличении p (то есть, при появлении у профиля скорости второго пространственного масштаба).

7 Влияние обнаруженной неустойчивости на кильватерное ускорение

Итак, проведённое исследование показало, что при инжекции в плазму длинного ведущего сгустка в возникающем потоке плазменных электронов развивается неустойчивость. Характерное значение γ_m инкремента данной неустойчивости порядка $A\omega_p n_b(z)/n_i$, где A — численный коэффициент (A $\approx$ 0.2 для гладкого профиля скорости электронов плазмы, см. рис.9, рис.13). Неустойчивые возмущения имеют пространственный период, больший или порядка c/ω_p (по оси z). Наиболее опасными являются аксиально-несимметричные моды, особенно мода, соответствующая смещению потока плазменных электронов как целого ($l = 1$).

Движущей силой неустойчивости при малых значениях k ($k \ll \omega_p/c$) является расталкивание встречных токов сгустка и плазмы (см. Приложение 4). Обратный эффект — притяжение объёмных зарядов ведущего сгустка и обеднённой электронами области плазмы — заметной роли не играет, что подтверждается Приложением 5. При значениях k порядка ω_p/c и более появляется ещё один источник неустойчивости — проскальзывание одного слоя электронов относительно другого. Однако в случае гладкого профиля скорости с одним пространственным масштабом сдвиговое течение играет второстепенную роль. Это проявляется в отсутствии неустойчивости аксиально-симметричных возмущений (которая может быть вызвана только течением с проскальзыванием), а также в монотонном убывании с ростом k (по мере уменьшения вклада расталкивания токов в неустойчивость) инкрементов аксиально-несимметричных мод.

Вследствие неустойчивости в плазме появляется "паразитное" электрическое поле, причём r-, φ- и z-компоненты этого поля имеют (при $k \sim \omega_p/c$) одинаковый порядок величины[10]. Следовательно, регулярное ускорение частиц в кильватерных полях возможно, лишь если после прохождения ведущего сгустка амплитуда "полезного" ускоряющего поля будет намного больше амплитуды поля "паразитного".

Оценим, каким условиям должны удовлетворять параметры сгустка и плазмы для того, чтобы неустойчивость не успела развиться до опасной величины. Пусть в плазму плотности n влетает "треугольный" сгусток длины L, сечения a^2 и с полным зарядом Q. Перед сгустком движется

[10]Этот факт может быть выведен из выражений для полей (64), (67).

узкий предвестник (см. [4]) с зарядом

$$q_p = \frac{2Qc^2}{L^2\omega_p^2}. \qquad (106)$$

Выберем направление оси $\vec{z}$ таким образом, чтобы зависимость плотности основного сгустка от z имела следующий вид:

$$n_b(z) = n_{b0}\frac{z}{L} = \frac{2Q}{eLa^2}\cdot\frac{z}{L}. \qquad (107)$$

Согласно [5], за задним фронтом ведущего сгустка возбудятся плазменные колебания с амплитудой "полезного" электрического поля

$$E_+ = \frac{n_{b0}}{n}\cdot\frac{m\omega_p c}{e} = \frac{8\pi Q\omega_p}{Lc}. \qquad (108)$$

"Паразитное" же электрическое поле за время прохождения сгустка вырастет до величины порядка

$$E_p = E_0 \exp\left(\int\limits_0^{L/c}\gamma_m(t)dt\right) = E_0\exp\left(\frac{\mathrm{A}\omega_p}{c}\int\limits_0^L \frac{n_b(z)}{n}dz\right). \qquad (109)$$

Здесь E_0 — исходная напряжённость поля, от уровня которой начинает расти неустойчивость. В качестве E_0 нужно взять поле, возникающее вследствие переходных процессов в момент инжекции начала сгустка:

$$E_0 = \frac{\alpha q_p\omega_p^2}{c^2} = \frac{2\alpha Q}{L^2}, \qquad (110)$$

где постоянный коэффициент α определяется формой предвестника.

Пусть F — "запас прочности", то есть минимально допустимое отношение напряжённостей E_+ и E_p, определяемое требуемыми характеристиками ускорителя. Тогда длина и заряд сгустка должны удовлетворять неравенству

$$\frac{8\pi Q\omega_p}{Lc} > \mathrm{F}\cdot\frac{2\alpha Q}{L^2}\cdot\exp\left(\frac{\mathrm{A}Q\omega_p}{nea^2c}\right)$$

или[11]

$$\frac{Q}{e} < \frac{na^2c}{\mathrm{A}\omega_p}\ln\left(\frac{4\pi\omega_p L}{\alpha c\mathrm{F}}\right) \sim 25\,n\,\frac{a^2c}{\omega_p}. \qquad (111)$$

[11] Численные оценки сделаны для $\mathrm{A} = 0.2$, $a = c/\omega_p$, $L\omega_p/c = 100$, $\mathrm{F} = 100$, $\alpha = 0.1$.

Таким образом, рассмотренная неустойчивость ограничивает количество частиц ведущего сгустка, и это ограничение почти не зависит от длины сгустка, формы предвестника и требуемого "запаса прочности". Заметим, что максимально допустимый заряд ведущего сгустка убывает с ростом плотности плазмы.

Условие (111) можно переписать в виде ограничения на полезное ускоряющее поле:

$$eE_+ < eE_{+,max} \equiv \frac{8\pi ne^2a^2}{\mathrm{A}L}\ln\left(\frac{4\pi\omega_p L}{\alpha c\mathrm{F}}\right) \sim \frac{50\,mc^2}{L} \approx \frac{25\text{ МэВ}}{L}. \qquad (112)$$

При постоянном отношении

$$N_L = \frac{L\omega_p}{2\pi c} \qquad (113)$$

поле $E_{+,max}$ с увеличением плотности плазмы растёт:

$$eE_{+,max} = \frac{4ne^2a^2\omega_p}{\mathrm{A}N_L c}\ln\left(\frac{4\pi\omega_p L}{\alpha c\mathrm{F}}\right) \sim \frac{8\,m\omega_p c}{N_L}. \qquad (114)$$

Как следует из сравнения формул (108) и (114), накладываемые неустойчивостью ограничения становятся существенными при условии

$$N_L \gtrsim \frac{a^2\omega_p^2}{\pi\mathrm{A}c^2}\ln\left(\frac{4\pi\omega_p L}{\alpha c\mathrm{F}}\right) \sim 8. \qquad (115)$$

Обратимся теперь к схеме ускорения с инжекцией последовательности сгустков. В этом случае поступательное движение электронов плазмы будет лишь малой добавкой к движению колебательному. Поэтому перенесение на данную схему результатов исследования введённой в разделе 2 модели, строго говоря, неправомерно даже на качественном уровне.

В то же время имеется экспериментально наблюдаемый эффект, который мог бы быть объяснён неустойчивостью неоднородного течения, если предположить, что таковая существует и имеет инкремент порядка $\mathrm{A}\omega_p v_z/c$. В работе [13] обнаружено, что линейный рост ускоряющего поля E_{z+} после прохождения $(4\div 5)\cdot 10^3$ сгустков сменяется быстрым убыванием. Параметры плазмы и сгустков в описанном эксперименте были следующими:

плотность плазмы, n_p :	10^{11} см$^{-3}$;
число электронов в сгустке, N_{b0} :	$2\cdot 10^9$;

$$\begin{aligned}
&\text{размеры сгустка: длина, } l_0: && 1.7\text{ см} = c/\omega_p;\\
&\text{радиус, } r_0: && 0.5\text{ см} = 0.3\,c/\omega_p;\\
&\text{число сгустков, } N_{max}: && 6\cdot 10^3;\\
&\text{средняя плотность сгустков, } \bar{n}_b \sim \frac{N_{b0}\omega_p}{\pi r_0^2\cdot 2\pi c}: && 2.4\cdot 10^8\text{ см}^{-3}.
\end{aligned}$$

Пусть первый сгусток возбуждает позади себя кильватерное поле напряжённости E_0. Тогда после прохождения N сгустков "полезное" и "паразитное" поля будут, соответственно, равны

$$E_+ = NE_0, \tag{116}$$

$$E_p = \alpha E_0 \exp\left(\frac{2\pi N\bar{\gamma}}{\omega_p}\right), \tag{117}$$

где $\bar{\gamma}$ — усреднённое по длине последовательности сгустков значение инкремента.

Если причиной резкого убывания ускоряющего поля является развитие неустойчивости, то из условия $E_+ = \mathrm{F}E_p$ можно найти её инкремент:

$$\bar{\gamma} = \frac{\omega_p}{2\pi N}\ln\frac{N}{\alpha \mathrm{F}}. \tag{118}$$

Подставляя в качестве N значение $5\cdot 10^3$ и полагая логарифм равным 8 ($\alpha\mathrm{F} = 0.6$), имеем

$$\bar{\gamma} = 2.5\cdot 10^{-4}\omega_p. \tag{119}$$

С другой стороны, скорость поступательного движения электронов плазмы можно оценить как

$$v_z \sim G^*\frac{\bar{n}_b}{n_p}\cdot\frac{r_0^2\omega_p^2}{c^2}\cdot c \sim 8.5\cdot 10^{-4}c. \tag{120}$$

Здесь G^* — коэффициент увеличения тока, появление которого обусловлено эффектом увлечения электронов плазмы полем сгустков[12] (подробнее см. [13]). Следуя [13], положим $G^* = 4$. Множитель $r_0^2\omega_p^2/c^2$ введён, поскольку движение происходит в более широком, нежели сгустки, слое плазмы.

Сравнение (119) и (120) даёт

$$\bar{\gamma} \approx 0.3\,\omega_p\frac{v_z}{c}. \tag{121}$$

[12] Соответственно, скорость усреднённого поступательного движения будет знакопеременной функцией от r.

Таким образом, для разрушения регулярного ускоряющего поля после прохождения
$5\cdot 10^3$ сгустков требуется неустойчивость с таким же, как у рассмотренной неустойчивости неоднородного течения электронов, инкрементом.

В пользу существования неустойчивости говорит также тот факт, что ускоренные частицы на выходе кильватерного ускорителя наблюдались в [13] только в момент начала уменьшения E_{z+}. Действительно, поскольку пробные частицы не вносились в плазму извне, ими могли стать только плазменные электроны, выпавшие из общего согласованного движения под действием развитóй неустойчивости.

Всё сказанное выше о схеме с инжекцией последовательности сгустков, конечно же, не является доказательством существования неустойчивости, аналогичной неустойчивости неоднородного течения электронов в случае инжекции "треугольного" сгустка. Однако полученные результаты свидетельствуют о необходимости исследовать эту схему ускорения на предмет наличия такой неустойчивости.

8 Приложения

8.1 Приложение 1: Обобщение уравнения Рэлея на случай цилиндрической геометрии задачи

Уравнения движения идеальной жидкости, из которых в частном случае плоскопараллельного течения следует уравнение Рэлея (50), имеют вид (см., например, [10], [12])

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} = -\frac{\nabla p_1}{\rho}, \tag{122}$$

$$\operatorname{div}\vec{v}_1 = 0. \tag{123}$$

Уравнения же, в которые переходит система (6) – (9) после вытекающих из (23), (36) и (46) упрощений, отличаются от (122), (123) лишь заменой возмущения давления p_1 на возмущение электростатического потенциала φ_1 и изменением постоянного множителя ρ^{-1} на $(-e/m)$:

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} = -\frac{e}{m}\vec{E}_1 = \frac{e}{m}\nabla\varphi_1, \tag{124}$$

$$\operatorname{div}\vec{v}_1 = 0. \tag{125}$$

На основании замеченного сходства и делается заключение о том, что уравнение (49), являющееся прямым следствием системы (124), (125), описывает также возмущения неоднородного течения жидкости. Роль переменной ψ в этом случае играет величина

$$\psi = \frac{1}{\Omega}\frac{\partial^2 p_1}{\partial r \partial z} = \frac{\imath k}{\Omega}\frac{\partial p_1}{\partial r}. \tag{126}$$

В принципе, уравнение (49) (или эквивалентное ему (47)) может быть получено из системы (122), (123) и непосредственным образом. Применяя к уравнению (122) операцию rot для возмущений вида (12), имеем

$$\frac{\imath l}{r}\left(\Omega\tilde{v}_z + \imath\frac{\partial v_z}{\partial r}\tilde{v}_r\right) - \imath k\Omega\tilde{v}_\varphi = 0, \tag{127}$$

$$\imath k\Omega\tilde{v}_r - \frac{\partial}{\partial r}\left(\Omega\tilde{v}_z + \imath\frac{\partial v_z}{\partial r}\tilde{v}_r\right) = 0, \tag{128}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\Omega\tilde{v}_\varphi - \frac{\imath l\Omega}{r}\tilde{v}_r = 0, \tag{129}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\tilde{v}_r + \frac{\imath l}{r}\tilde{v}_\varphi + \imath k\tilde{v}_z = 0. \tag{130}$$

Обозначая

$$y = \Omega\tilde{v}_z + \imath\frac{\partial v_z}{\partial r}\tilde{v}_r = -\frac{\imath}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial z} \tag{131}$$

и опуская уравнение (129) как следствие (127), (128), преобразуем систему (127) – (130):

$$\Omega\tilde{v}_r = \frac{1}{\imath k}\frac{\partial y}{\partial r}, \qquad \Omega\tilde{v}_\varphi = \frac{l}{kr}y, \tag{132}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial y}{\partial r} - \frac{2\Omega'}{\Omega}\frac{\partial y}{\partial r} - \left(k^2 + \frac{l^2}{r^2}\right)y = 0. \tag{133}$$

Как легко убедиться, последнее уравнение эквивалентно (47).

Для уравнения (49) оказывается возможным доказать ряд утверждений в точности так же, как это делается в [11], [12] для уравнения Рэлея. Поскольку эти результаты могут представлять самостоятельный интерес, приведём их доказательства в общем случае произвольных l (хотя к кильватерному ускорению применим лишь случай $l = 0$).

8.1.1 Необходимое условие неустойчивости

Введём обозначения

$$f = \left(k^2 + \frac{l^2}{r^2}\right)^{-1} = \frac{r^2}{k^2r^2 + l^2}, \qquad F = f\left(\Omega'' - \frac{\Omega'}{r}\right) + f'\Omega', \tag{134}$$

позволяющие переписать (49) в более компактной форме:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rf\psi' - \frac{f}{r^2}\psi + \frac{f'}{r}\psi - \frac{F}{\Omega}\psi - \psi = 0. \tag{135}$$

Домножим (135) на ψ^* и вычтем из полученного результата комплексно-сопряжённое выражение:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rf\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial r} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial r}\right) = \left(\frac{1}{\Omega} - \frac{1}{\Omega^*}\right)F\psi\psi^*. \tag{136}$$

При интегрировании (136) по r^2 от нуля до бесконечности левая часть равенства обращается в нуль. Правая же даёт

$$\int_0^\infty \frac{4\imath\, Im\,\omega}{|\Omega|^2}F|\psi|^2 r dr = 0. \tag{137}$$

Интеграл (137) при $Im\,\omega \neq 0$ может обратиться в нуль, лишь если функция $F(r)$ знакопеременна, а значит, обращается в нуль в какой-то точке r_0 (назовём её точкой “перегиба”). Отсюда следует необходимое условие неустойчивости:

$$v_z'' - \frac{v_z'}{r}\left(1 - \frac{2l}{k^2r^2 + l^2}\right) = 0 \quad \text{при} \quad r = r_0 \neq 0. \tag{138}$$

Поскольку при $l \neq 0$ в условие (138) входит параметр k, гарантировать условие неустойчивости можно только в том случае, если при любом r выражения

$$v_z'' - \frac{v_z'}{r} \quad \text{и} \quad v_z'' + \frac{v_z'}{r} \tag{139}$$

имеют один и тот же знак.

8.1.2 Неизбежность выполнения резонансного условия в случае нейтральных колебаний

По аналогии с [11], [12] введём новую функцию $\tilde{\psi} = \psi/\Omega$, для которой уравнение (135) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{f\Omega^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\tilde{\psi} - \Omega^2\tilde{\psi} = 0. \tag{140}$$

(Это уравнение легче всего получить из (47), заметив, что $\tilde{\psi} = \tilde{E}'_z/\Omega^2$). Домножая (140) на $r\tilde{\psi}^*$ и интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^\infty \left(r\tilde{\psi}^*\frac{\partial}{\partial r}\frac{f\Omega^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\tilde{\psi} - \Omega^2 r\tilde{\psi}^*\tilde{\psi}\right)dr =$$

$$= -\int_0^\infty \Omega^2\left(\frac{f}{r}\left|\frac{\partial r\tilde{\psi}}{\partial r}\right|^2 + r|\tilde{\psi}|^2\right)dr = 0. \tag{141}$$

Из выражения для мнимой части (141),

$$Im\,\omega\int_0^\infty (Re\,\omega - kv_z)\left(\frac{f}{r}\left|\frac{\partial r\tilde{\psi}}{\partial r}\right|^2 + r|\tilde{\psi}|^2\right)dr = 0, \tag{142}$$

находим, что при $Im\omega \neq 0$ на некотором радиусе r_s должно выполняться равенство

$$Re\,\omega = kv_z(r_s). \tag{143}$$

Если нейтральные колебания рассматривать как предел колебаний с $Im\,\omega \neq 0$, то из (143) заключаем, что колебания с $Im\,\omega = 0$ могут существовать, лишь если в какой-то точке выполнено резонансное условие $\omega = kv_z(r)$.

8.1.3 Совпадение резонансной точки нейтральных колебаний с точкой "перегиба" в случае монотонного профиля скорости

Обратимся к формуле (137). При устремлении $Im\,\omega$ к нулю (так, что $Im\,\omega > 0$) интеграл в (137) переходит в сумму вкладов от резонансных точек r_s^i:

$$\lim_{Im\,\omega\to 0}\int_0^\infty \frac{4\imath\, Im\,\omega}{(Re\,\omega - kv_z)^2 + (Im\,\omega)^2}F|\psi|^2 r dr =$$

$$= \int_0^\infty 4\pi\imath\,\delta(Re\,\omega - kv_z)F|\psi|^2 r dr = \frac{4\pi\imath}{k}\sum_{r=r_s^i} F\frac{|\psi|^2 r}{v'_z} = 0. \tag{144}$$

Такая сумма может обратиться в нуль либо при взаимной компенсации вкладов от нескольких точек, либо при тождественном равенстве нулю всех слагаемых в (144). В случае монотонного профиля скорости с единственной резонансной точкой может осуществиться только вторая возможность, откуда и следует необходимость выполнения равенства (138) в этой точке.

8.1.4 Поведение дисперсионной кривой вблизи точки нейтральных колебаний в случае аксиально-симметричных возмущений

При $l = 0$ уравнение (49) существенно упрощается:

$$\psi'' + \frac{\psi'}{r} - k^2\psi - \frac{\psi}{r^2} = \frac{\psi}{\Omega}\left(\Omega'' - \frac{\Omega'}{r}\right). \tag{145}$$

Переходя к новой функции $z(r)$,

$$z(r) = \sqrt{r}\,\psi(r), \tag{146}$$

избавимся от первой производной:

$$z'' - k^2 z - \frac{3}{4r^2}z - \left(\Omega'' - \frac{\Omega'}{r}\right)\frac{z}{\Omega} = 0. \tag{147}$$

Можно показать, что если уравнение (147) при некотором $k = k_0$ допускает существование незатухающих колебаний, то при значениях k, несколько меньших k_0 ($k = k_0 - \Delta k; |\Delta k| \ll k_0$), существуют как нарастающие ($Im\,\omega > 0$), так и затухающие ($Im\,\omega < 0$) колебания. При значениях же k, несколько больших k_0, не существует решений $\omega(k)$, таких что $\lim_{k\to k_0}(\omega(k) - \omega(k_0)) = 0$ ([12], п. 1.5). Доказательство этого факта аналогично доказательству, приведённому в [11] для уравнения Рэлея, если учесть, что

$$\lim_{r\to r_0}\frac{v''_z(r) - v'_z(r)/r}{v_z(r) - v_z(r_0)} = \frac{v'''_z(r_0)}{v'_z(r_0)}. \tag{148}$$

8.2 Приложение 2: Об отсутствии неустойчивых колебаний при больших k

Покажем, что уравнение (45) не имеет решений с $|\omega|$, много меньшими ω_p, при условиях (62), (63). Пренебрегая в уравнении (49) малыми членами на основании неравенств (62) и (63), имеем

$$\psi'' + \frac{\psi'}{r} - k^2\psi = \frac{\psi}{\Omega}\left(\Omega'' - \frac{\Omega'}{r}\right). \tag{149}$$

Оценим правую часть уравнения (149):

$$\Omega'' - \frac{\Omega'}{r} \sim \frac{kv_0}{b^2} - \frac{kv_0}{br_0} \sim \frac{kv_0}{b^2},$$

$$\frac{\psi}{\Omega}\left(\Omega'' - \frac{\Omega'}{r}\right) \sim \frac{v_0}{b^2\,|\omega/k - v_z(r)|}\,\psi. \tag{150}$$

Она будет существенно влиять на поведение решения (149) только при условии

$$k^2 \le \frac{v_0}{b^2\,|\omega/k - v_z(r)|} \quad \Longleftrightarrow \quad \left|\frac{\omega}{k} - v_z(r)\right| \le \frac{v_0}{k^2b^2} \ll v_0, \tag{151}$$

которое выполнено на промежутке длины

$$\delta r \sim \frac{v_0}{v_z' k^2 b^2} \sim \frac{1}{k^2 b} \ll \frac{1}{k} \tag{152}$$

в окрестности резонансной точки r_* (такой, что $v_z(r_*) = Re\,\omega/k$).

Таким образом, решение (149), если оно существует, должно состоять из двух экспонент (получающихся при пренебрежении правой частью (149)), сшитых в узкой резонансной области δr (см. рис.16).

Производная ψ' может так резко измениться только в том случае, если вблизи резонансной точки правая часть (149) существенно превосходит $k^2\psi$. Следовательно, в окрестности r_* можно записать:

$$\psi'' = \frac{v_z''(r_*) - v_z'(r_*)/r_*}{v_z(r) - \omega/k}\,\psi = \frac{g}{r - r_* + i\gamma_*}\,\psi, \tag{153}$$

где

$$\gamma_* = -\frac{Im\,\omega}{v_z'(r_*)}, \qquad g = \frac{v_z''(r_*) - v_z'(r_*)/r_*}{v_z'(r_*)} \sim \frac{1}{b}. \tag{154}$$

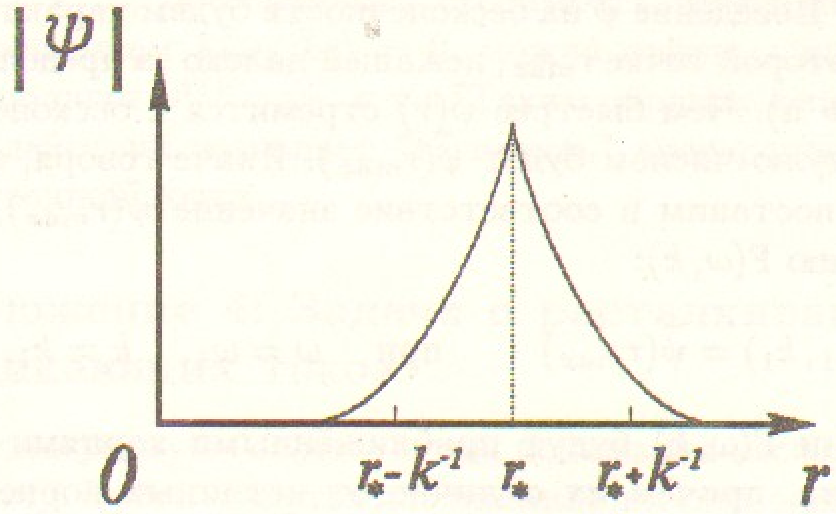

Рис. 16:

Решения (153) выражаются через функции Бесселя (см., например, [18]):

$$\psi = \sqrt{r - r_* + i\gamma_*}\; Z_1(2\sqrt{-g}\,\sqrt{r - r_* + i\gamma_*}\,). \tag{155}$$

В силу оценки (154) характерный масштаб изменения решений (155) есть величина порядка b, поэтому никакой комбинацией функций вида (155) две экспоненты на отрезке $\delta r \sim b/(kb)^2$ не могут быть сшиты[13]. Отсюда заключаем, что в предположениях (62), (63) решения уравнения (45) с $|\omega| \ll \omega_p$ отсутствуют.

8.3 Приложение 3: Построение дисперсионной кривой $\omega(k)$ численным методом

Описываемая ниже процедура основана на предположении о непрерывности дисперсионной кривой:

$$\lim_{k_2 \to k_1} (\omega(k_2) - \omega(k_1)) = 0. \tag{156}$$

Рассмотрим, например, уравнение (145). Если взять некоторые произвольные значения ω и k и решить с помощью известного численного метода (например, метода Рунге-Кутта, [19]) задачу Коши для уравнения (145) с надлежащими начальными условиями в нуле ($\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 1$),

[13] Это утверждение можно доказать более строго, выписав решение (149) вблизи резонансной точки в виде ряда (см., например, [19]).

то получившаяся функция $\tilde\psi(r)$, вообще говоря, при $r \to \infty$ к нулю стремиться не будет. Поведение $\tilde\psi$ на бесконечности будем характеризовать её значением в некоторой точке r_{max}, лежащей далеко за пределами области течения ($r_{max} \gg a$). Чем быстрее $\tilde\psi(r)$ стремится к бесконечности, тем большим по модулю числом будет $\tilde\psi(r_{max})$. Иначе говоря, каждой паре значений (ω, k) поставим в соответствие значение $\tilde\psi(r_{max})$, тем самым построив функцию $\mathrm{F}(\omega, k)$:

$$\mathrm{F}(\omega_1, k_1) = \tilde\psi(r_{max}) \qquad \text{при} \quad \omega = \omega_1, \quad k = k_1. \tag{157}$$

Нули функции $\mathrm{F}(\omega, k)$ будут приближёнными корнями дисперсионного соотношения, причём их отличие от истинных корней будет тем меньше, чем точнее мы построим функцию $\tilde\psi(r)$.

Остаётся проблема при заданном k найти на комплексной плоскости $(Re\ \omega, Im\ \omega)$ нуль ω_0 функции $\mathrm{F}(\omega, k)$, и эту проблему предположение (156) помогает решить следующим образом. Если нам из каких-то дополнительных соображений приближённо известно местоположение нуля (то есть, известно, что $\omega^{(1)} \approx \omega_0$), то можно отыскать ω_0 последовательными итерациями с помощью следующего алгоритма.

1. Выбирается начальный шаг итераций ε (подбирается экспериментально).

2. Определяется направление и шаг "спуска":

$$\Delta\omega^{(i)} = -\varepsilon \arg\left(\frac{\mathrm{F}(\omega^{(i)}, k)}{\partial \mathrm{F}(\omega^{(i)}, k)/\partial\omega^{(i)}}\right) \sim$$

$$\sim -\varepsilon \arg\left(\frac{\mathrm{F}(\omega^{(i)}, k)\cdot 0.1\varepsilon}{\mathrm{F}(\omega^{(i)} + 0.1\varepsilon,\ k) - \mathrm{F}(\omega^{(i)}, k)}\right). \tag{158}$$

3. Вычисляется $\mathrm{F}(\omega^{(i)} + \Delta\omega^{(i)}, k)$, $\mathrm{F}(\omega^{(i)} + 2\Delta\omega^{(i)}, k)$ и так далее, пока при $\omega = \omega^{(i)} + N\Delta\omega^{(i)}$ не будет достигнуто минимальное по модулю значение.

4. Уменьшается шаг ε; $\omega^{(i+1)}$ полагается равным $\omega^{(i)} + N\Delta\omega^{(i)}$.

5. Последовательность операций 2 – 4 повторяется до тех пор, пока решение не будет найдено с требуемой точностью (определяемой ε).

Близость $\omega^{(1)}$ к ω_0 обеспечивает сходимость итераций именно к ω_0. Располагая решением $\mathrm{F}(\omega_0, k_0) = 0$, можно найти ω для $k = k_0 + \Delta k$ ($|\Delta k| \ll k_0$), полагая $\omega^{(1)} = \omega_0$, и т.д. Таким образом, описанная последовательность действий позволяет "вытянуть" дисперсионную кривую из одной единственной точки.

8.4 Приложение 4: Задача о расталкивании взаимопроникающих токов

Рассмотрим следующую (полезную для понимания исследуемой неустойчивости) задачу. Пусть имеются два цилиндрических электронных пучка радиуса R_0 и плотности n. Пучки двигаются навстречу друг другу со скоростями $\vec v$ и $-\vec v$, причём расстояние между их осями равно ξ ($\xi \ll R_0$). Требуется определить силу, с которой собственное магнитное поле пучков действует на частицы одного из них.

Введём декартову систему координат так, как показано на рисунке 17. В точке, отстоящей от осей пучков на расстояния r_1 и r_2 соответственно, каждый из пучков в отдельности создаёт поле

$$H_i = |\vec H_i| = \frac{2\pi r_i j}{c}, \qquad i = 1, 2, \tag{159}$$

где $j = |\vec j_i| = ne|\vec v|$ — плотность тока пучка. Суммарное же поле обоих пучков $\vec H = \vec H_1 + \vec H_2$ будет направлено по оси y (см. рис. 17), поскольку

$$H_x = H_1 \sin\alpha_1 - H_2 \sin\alpha_2 = \frac{2\pi j}{c}(r_1 \sin\alpha_1 - r_2 \sin\alpha_2) = 0, \tag{160}$$

$$H_y = H_1 \cos\alpha_1 - H_2 \cos\alpha_2 = \frac{2\pi j}{c}(r_1 \cos\alpha_1 - r_2 \cos\alpha_2) = \frac{2\pi j\xi}{c}. \tag{161}$$

Это поле будет действовать на каждую из частиц первого пучка с одинаковой силой

$$F_x = \frac{j|\vec H|}{nc} = \frac{2\pi j^2 \xi}{nc^2}, \tag{162}$$

направленной по оси x.

Предположим теперь, что второй пучок имеет скорость c (является ультрарелятивистским) и плотность $n_b = nv/c \ll n$, так что плотность тока в нём по-прежнему равна $j = ne|\vec v|$. Также предположим, что объёмные заряды пучков скомпенсированы неподвижными ионами (вследствие чего электростатическое взаимодействие пучков отсутствует), а пространство вокруг пучков заполнено плазмой плотности

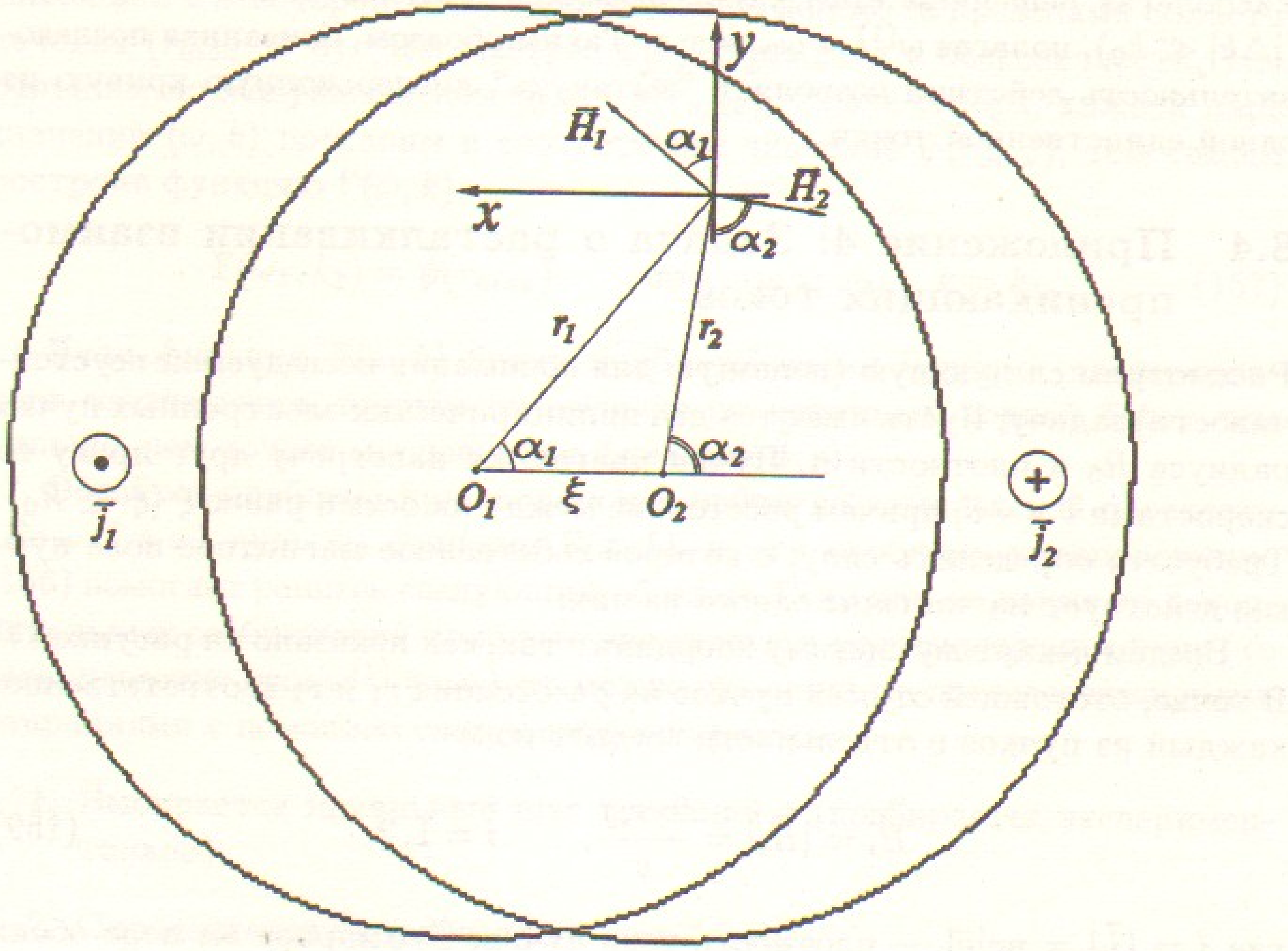

Рис. 17:

$n + n_b$, причём $R_0 \ll c/\omega_p$ (что позволяет пренебречь экранировкой поля плазмой). Тогда под действием силы (162) первый пучок будет двигаться с ускорением

$$\ddot{\xi} = \frac{F_x}{2m} = \frac{\pi j^2 \xi}{mnc^2}. \tag{163}$$

Появление двойки в знаменателе (163) связано с эффектом присоединённой массы, поскольку смещение первого (много более плотного) пучка сопровождается смещением электронов окружающей плазмы.

Движение по закону (163) может быть интерпретировано как развитие неустойчивости с инкрементом

$$\gamma_0 = \sqrt{\frac{\pi j^2}{mnc^2}} = \sqrt{\frac{\pi n v^2 e^2}{mc^2}} = \frac{\omega_p v}{2c}. \tag{164}$$

Полученное выражение совпадает с (96) в случае $l = 1$, $r_0\omega_p/c \ll 1$. Отсюда можно заключить, что при малых k движущей силой исследуемой в настоящей работе неустойчивости является расталкивание токов плазмы и ведущего сгустка.

8.5 Приложение 5: Уравнения возмущений при $k = 0$ (общий случай)

В настоящем Приложении система (13) – (22) будет сведена к двум уравнениям относительно переменных $\tilde{E}_z$ и $\tilde{H}_z$. При этом будут использованы только два упрощающих предположения, а именно, $k = 0$ и $|\vec{v}| \ll c$ ($\gamma = 1$).

Опуская в (13) – (22) содержащие k слагаемые, имеем

$$\frac{\imath l}{r}\tilde{H}_z = -\frac{4\pi e}{c} n\tilde{v}_r - \frac{\imath\omega}{c}\tilde{E}_r, \tag{165}$$

$$\frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial r} = \frac{4\pi e}{c} n\tilde{v}_\varphi + \frac{\imath\omega}{c}\tilde{E}_\varphi, \tag{166}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r\tilde{H}_\varphi - \frac{\imath l}{r}\tilde{H}_r = -\frac{4\pi e}{c} n\tilde{v}_z - \frac{4\pi e}{c}\tilde{n} v_z - \frac{\imath\omega}{c}\tilde{E}_z, \tag{167}$$

$$\tilde{H}_r = \frac{lc}{\omega r}\tilde{E}_z, \tag{168}$$

$$\tilde{H}_\varphi = \frac{\imath c}{\omega}\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial r}, \tag{169}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r\tilde{E}_\varphi - \frac{\imath l}{r}\tilde{E}_r = \frac{\imath\omega}{c}\tilde{H}_z, \tag{170}$$

$$\tilde{n} = \frac{1}{\imath\omega r}\frac{\partial}{\partial r} rn\tilde{v}_r + \frac{l}{\omega r} n\tilde{v}_\varphi, \tag{171}$$

$$\tilde{v}_r = \frac{e}{\imath m\omega}\tilde{E}_r + \frac{\imath e v_z}{m\omega c}\tilde{H}_\varphi, \tag{172}$$

$$\tilde{v}_\varphi = \frac{e}{\imath m\omega}\tilde{E}_\varphi - \frac{\imath e v_z}{m\omega c}\tilde{H}_r, \tag{173}$$

$$\tilde{v}_z = \frac{e}{\imath m\omega}\tilde{E}_z + \frac{1}{\imath\omega}\frac{\partial v_z}{\partial r}\tilde{v}_r. \tag{174}$$

Исключим переменные $\tilde{v}_r$, $\tilde{v}_\varphi$, $\tilde{v}_z$ и $\tilde{n}$, выразив их с помощью (171) – (174) через поля, вследствие чего уравнения (165) – (167) примут вид

$$\frac{l}{r}\tilde{H}_z = \frac{\omega_p^2}{\omega c}\tilde{E}_r - \frac{\omega_p^2 v_z}{\omega c^2}\tilde{H}_\varphi, \tag{175}$$

$$\frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial r} = \frac{\omega_p^2}{\imath\omega c}\tilde{E}_\varphi + \frac{\omega_p^2 v_z}{\imath\omega c^2}\tilde{H}_r, \tag{176}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\tilde{H}_\varphi - \frac{\imath l}{r}\tilde{H}_r = \frac{\imath\omega_p^2}{\omega c}\tilde{E}_z - \frac{\omega_p^2 v_z}{\omega^2 c^2}\frac{\partial v_z}{\partial r}\tilde{H}_\varphi + \frac{\omega_p^2}{\omega^2 c}\frac{\partial v_z}{\partial r}\tilde{E}_r - \frac{\imath\omega}{c}\tilde{E}_z +$$

$$+ \frac{v_z}{\omega^2 c r}\frac{\partial}{\partial r}r\omega_p^2\tilde{E}_r - \frac{v_z}{\omega^2 c^2 r}\frac{\partial}{\partial r}r\omega_p^2 v_z\tilde{H}_\varphi + \frac{\imath l\omega_p^2 v_z}{\omega^2 c r}\tilde{E}_\varphi + \frac{\imath l\omega_p^2 v_z^2}{\omega^2 c^2 r}\tilde{H}_r. \tag{177}$$

Подчеркнём, что здесь величина ω_p^2 зависит от радиуса, и потому не может быть вынесена из под знака производной.

Следующим шагом выразим $\tilde{E}_r$ и $\tilde{E}_\varphi$ через $\tilde{E}_z$ и $\tilde{H}_z$. Для этого воспользуемся уравнениями (175), (176), (168) и (169):

$$\tilde{E}_r = \frac{l\omega c}{\omega_p^2 r}\tilde{H}_z + \frac{\imath v_z}{\omega}\frac{\partial\tilde{E}_z}{\partial r}, \tag{178}$$

$$\tilde{E}_\varphi = -\frac{l v_z}{\omega r}\tilde{E}_z + \frac{\imath\omega c}{\omega_p^2}\frac{\partial\tilde{H}_z}{\partial r}. \tag{179}$$

Наконец, используя выражения для полей (168), (169), (178) и (179), из уравнений (177) и (170) получаем искомую систему:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial\tilde{E}_z}{\partial r} - \left(\frac{\omega_p^2+\omega^2}{c^2} + \frac{l^2}{r^2}\right)\tilde{E}_z + \frac{\imath l v_z'}{cr}\tilde{H}_z = 0, \tag{180}$$

$$\frac{\imath\omega_p^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{\omega_p^2}\frac{\partial\tilde{H}_z}{\partial r} - \imath\left(\frac{\omega_p^2}{c^2} + \frac{l^2}{r^2}\right)\tilde{H}_z - \frac{l\omega_p^2 v_z'}{\omega^2 c r}\tilde{E}_z = 0. \tag{181}$$

Сравнение (180), (181) с аналогичной системой (81), (82) показывает, что учёт слабой зависимости плотности электронов плазмы n от r не может привести к существенному изменению картины неустойчивости, поскольку эти системы различаются лишь малыми членами, не стоящими перед старшими производными.

Список литературы

[1] *Joshi C., Mori W. B. et al.* Ultrahigh gradient particle acceleration by intense laser-driven plasma density waves. — Nature, 1984, v. 311, p. 525 – 529.

[2] *Dawson J. M.* Plasma Accelerators and Lenses. — Plasma Physics and Controlled Fusion, 1992, v. 34, N 13, p. 2039 – 2046.

[3] *Wurtele J. S.* The role of plasma in advanced accelerators. — Phys. Fluids B, 1993, v. 5, N 7, p. 2363 – 2370.

[4] *Chen P., Su J. J. et al.* Energy Transfer in a Plasma Wake-Field Accelerator. — Phys. Rev. Lett., 1986, v. 56, N 12, p. 1252 – 1255.

[5] *Katsouleas T.* Physical mechanism in the plasma wake-field accelerator. — Phys. Rev. A., 1986, v. 33, N 3, p. 2056 – 2064.

[6] *Ruth R. D., Chao A. W., Morton P. L., Wilson P. B.* A Plasma Wake-Field Accelerator. — Part. Accel., 1985, v. 17, N 3–4, p. 171 – 189.

[7] *Breizman B. N., Chebotaev P. Z. et al.* A Proposal for the Experimental Study of Plasma Wake-Field Acceleration at the "BEP" Electron Storage Ring. — In: Proc. 8th Intern. Conf. on High-Power Particle Beams, Novosibirsk, 1990, v. 1, p. 272 – 279.

[8] *Chen P., Dawson J. M., Huff R. W., Katsouleas T.* Acceleration of Electrons by the Interaction of a Bunched Electron Beam with a Plasma. — Phys. Rev. Lett., 1985, v. 54, N 7, p. 693 – 708.

[9] *Рухадзе А. А., Богданкевич Л. С., Росинский С. Е., Рухлин В. Г.* Физика сильноточных релятивистских пучков. М.: Атомиздат, 1980.

[10] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1988.

[11] *Lin C. C.* The Theory of Hydrodynamic stability. Cambridge, 1955. *Линь Цзя-Цзяо.* Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.

[12] *Тимофеев А. В.* Резонансные эффекты в колебаниях неоднородных течений сплошных сред. — В сб.: Вопросы теории плазмы (Под ред. Б. Б. Кадомцева). М.: Атомиздат, 1989, вып. 17, с. 157 – 244.

[13] *Березин А. К., Киселёв В. А. и др.* Экспериментальные исследования возбуждения кильватерных полей в плазме периодической последовательностью сгустков релятивистских частиц. — Препринт ХФТИ 91 – 45, Харьков: ХФТИ, 1991.

[14] *Михайловский А. Б.* Теория плазменных неустойчивостей, т. 1. М.: Атомиздат, 1970.

[15] *Nakajima K., Enomoto A. et al.* Plasma Wake-Field Accelerator Experiments at KEK. — Nuclear Instrument and Method in Phys. Res. A, 1990, v. 292, N 1, p. 12 – 20.
Ogata A. Plasma Lens and Wake Experiments in Japan. — In: Advanced Accelerator Concepts, AIP Conf. Proc. 279, American Institute of Physics, New York, 1992, p. 420 – 449.

[16] *Bechtenev A. A., Breizman B. N. et al.* On the Possibility for Experiments on Plasma Wake-Field Acceleration in Novosibirsk. — In: Advanced Accelerator Concepts, AIP Conf. Proc. 279, American Institute of Physics, New York, 1992, p. 466 – 476.
Militsyn B. L., Bechtenev A. A. et al. Experimental plasma wake-field acceleration project. — Phys. Fluids B, 1993, v. 5, N 7, p. 2714 – 2718.

[17] *Силин В. П., Рухадзе А. А.* Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. — М.: Госатомиздат, 1961, с. 116 – 133.

[18] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.

[19] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1968.

Содержание

К.В. Лотов, Д.Д. Рютов

Плазменные неустойчивости в схеме кильватерного ускорения

Ответственный за выпуск С.Г. Попов
Работа поступила 24 марта 1994 г.

Сдано в набор 12 апреля 1994 г.
Подписано в печать 15 апреля 1994 г.
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2.6 печ.л., 2.1 уч.-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ N° 32

Обработано на IBM PC и отпечатано на
ротапринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.