

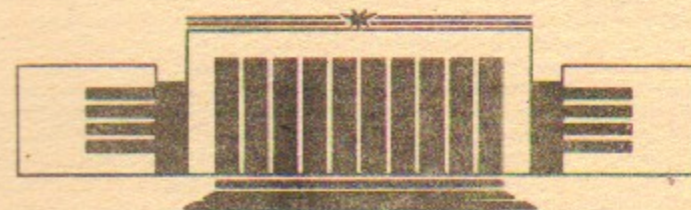


43
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
им. Г.И. Будкера СО РАН

Р.М. Лапик, И.Н. Мешков, В.Н. Поляков,
И.А. Селезнев, А.В. Смирнов, Е.М. Сыресин,
Ж. Боссер, Р. Лей, Ж. Транквиль

ЭЛЕКТРОННАЯ ПУШКА
С РЕГУЛИРУЕМЫМ ТОКОМ.
СТЕНДОВЫЕ ИСПЫТАНИЯ
И ПЕРВЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ НА LEAR

ИЯФ 93-78



НОВОСИБИРСК

ВВЕДЕНИЕ

Формирование электронного пучка с малым угловым разбросом является ключевой проблемой в методе электронного охлаждения [1-5]. С целью совершенствования системы электронного охлаждения антипротонов накопителя LEAR в ЦЕРН разработана новая электронная пушка [6], позволяющая генерировать пучок в широкой области значений параметров (Таблица 1).

Таблица 1

Параметры электронной пушки

Энергия электр., кэВ	2.3	7	20	30
Ток пучка, А	0.01 – 0.53	0.07 – 2.93	0.35 – 2.83	0.65 – 2.6
Первеанс, $\mu\text{A}/\text{B}^{3/2}$	0.125 – 5	0.125 – 5	0.125 – 1.0	0.125 – 0.5
Диаметр пучка, мм	50	50	50	50
Потенциал упр. электрода, кВ	-1.45 – +8.1	-4.3 – +25.6	-12.5 – +11.5	-18.6 – +17.3

Пушка (рис.1), имеет катод и 3 электрода—фокусирующий (поз.1), управляющий (поз.2) и анодный (поз.3). Выполнена она по схеме адиабатической оптики [2,4,6]. Особенностью данной конструкции является возможность ее использования в относительно низком сопровождающем магнитном поле [6], что отличает ее от ранее известных [4,5]. Кроме того, эта пушка создает качественно новые возможности в работе системы электронного охлаждения LEAR:

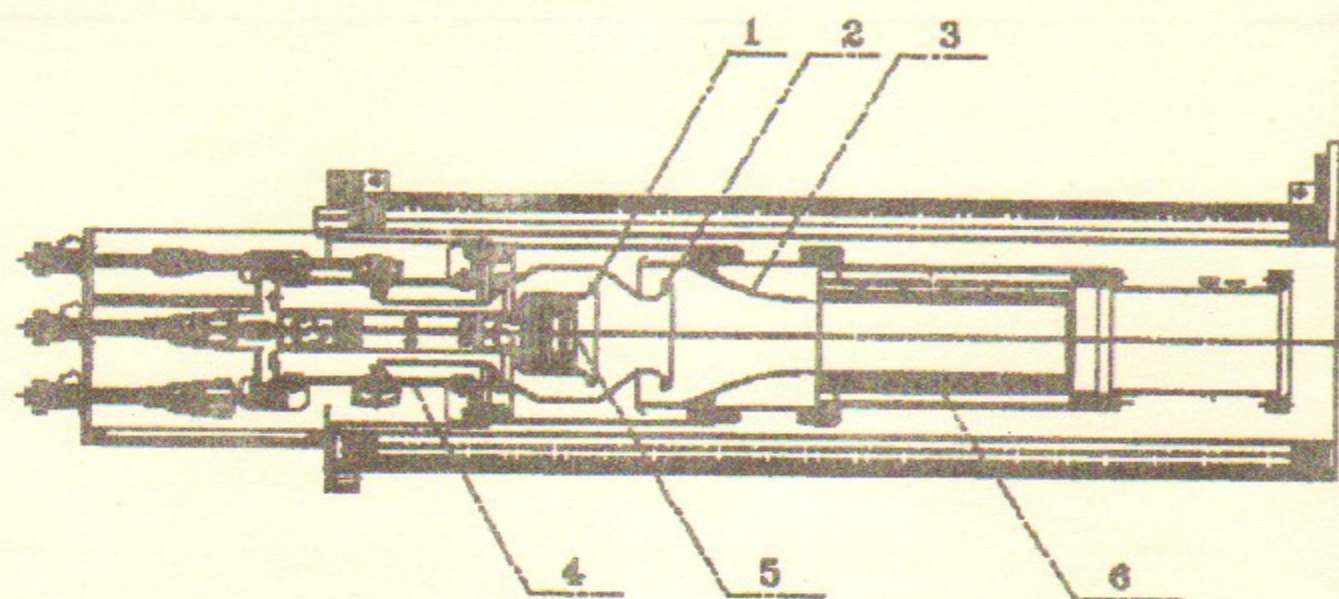


Рис. 1. Конструкция электронной пушки LEAR. 1—фокусирующий электрод, 2—управляющий электрод, 3—анод, 4—высоковольтные металлокерамические изоляторы, 5—катод, 6—насос типа "нераспыляемый геттер".

- оперативное включение и выключение электронного пучка без возмущения ионного пучка, циркулирующего в накопителе,
- существенное увеличение тока электронного пучка при энергии электронов ниже 20 кэВ, что позволяет уменьшить время охлаждения,
- управление током электронного пучка в процессе охлаждения ионного пучка.

Расчет оптики пушки и ее конструирование выполнены в ФТЦ ИЯФ в течение 1991 года, изготовлена она в экспериментальном производстве Института Ядерной Физики. С ноября 1992 года по январь 1993 года в ФТЦ проведены стендовые испытания пушки, включавшие в себя: прогрев до температуры 250°C, получение вакуума до давления 1 нТорр, генерация электронного пучка в импульсном и стационарном режимах с параметрами, приведенными в таблице 1, измерение углового разброса электронного пучка.

После дополнительной процедуры вакуумной очистки пушка была установлена на накопителе LEAR. В апреле 1993 года выполнены первые эксперименты и успешно проведено охлаждение пучка протонов. Результаты экспериментов представлены в таблице 2.

Таблица 2

Импульс протонов МэВ/с	300
Интенсивность протонного пучка	$2 \cdot 10^{10}$
Энергия электронов, кэВ	27
Ток электронов, А	2.5
Разброс по импульсу в охлажденном пучке протонов	$\pm 1.5 \cdot 10^{-4}$
Вакуум в накопителе	$3 \cdot 10^{-11}$
Эффективность рекуперации :	
потенциал коллектора, кВ	3.3
относительный ток потерь	$3 \cdot 10^{-4}$

В данной работе описываются эксперименты по испытанию пушки LEAR и обсуждаются полученные результаты. Значительный интерес, на наш взгляд, представляет экспериментально обнаруженная и исследованная особенность пушки—режим с накоплением вторичных электронов при положительном (относительно земли) потенциале управляющего электрода.

Особенность конструкции пушки—наличие управляющего электрода, позволяющего варьировать ток пучка при постоянном потенциале катода. Это означает, что энергия электронов при таком изменении тока изменяется слабо—лишь на величину изменения "провала" потенциала в электронном пучке. В связи с этой особенностью удобно характеризовать пушку двумя параметрами:

— первансом первого зазора, или "перванс пушки"

$$P_{gun} = \frac{I_b}{U_0^{3/2}} \quad (1)$$

где I_b —ток пучка, $U_0 = U_{st} + U_c$ —напряжение между катодом и управляющим ("steering") электродом ("вытягивающее напряжение");

— первансом пучка

$$P_b = \frac{I_b}{U_c^{3/2}} \quad (2)$$

где U_c —потенциал катода. Перванс пушки почти не зависит от U_c и имеет для данной конструкции расчетное значение $0.56 \mu A/V^{3/2}$.

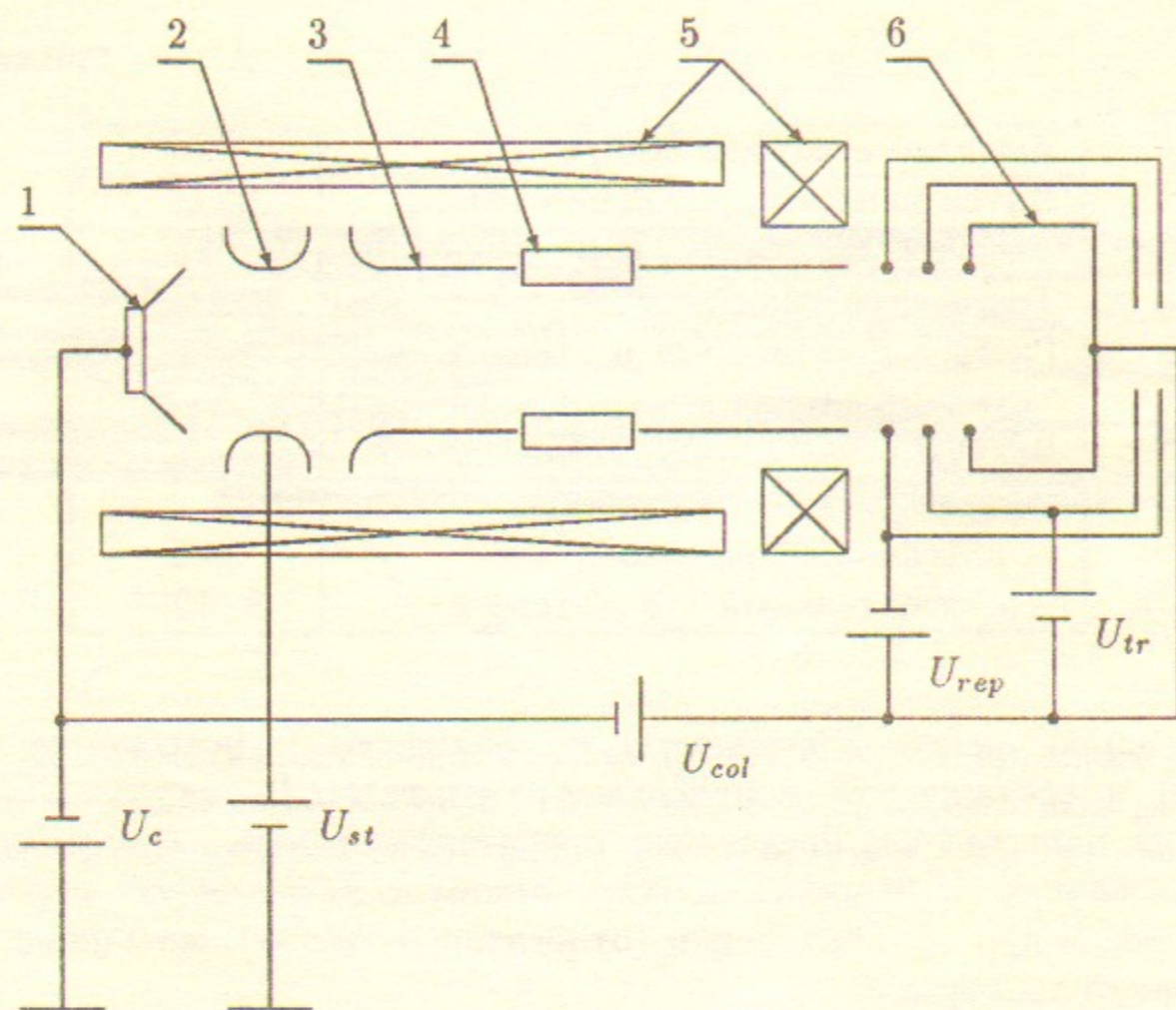


Рис. 2. Схема стенда "Рекуператор". 1—катод электронной пушки, 2—управляющий электрод, 3—анод и вакуумная камера, 4—электростатическая ионная ловушка ("пробка"), 5—катушки магнитного поля, 6—коллектор.

1. Стенд для испытания пушки

Испытания работы пушки в режиме генерации пучка были проведена на специальном стенде "Рекуператор", где в 1991 году испытывался коллектор LEAR [7]. Для данной работы стенд был модернизирован (рис. 2). Сейчас он имеет вакуумную камеру длиной 2.5 м, новый коллектор электронов [8], систему катушек, формирующих магнитное поле, электростатические ловушки ("пробки"). Коллектор (рис.3) типа "цилиндр Фарадея" с супрессорным электродом (репеллером) имеет дополнительный транспортировочный электрод, предназначенный для транспортировки ин-

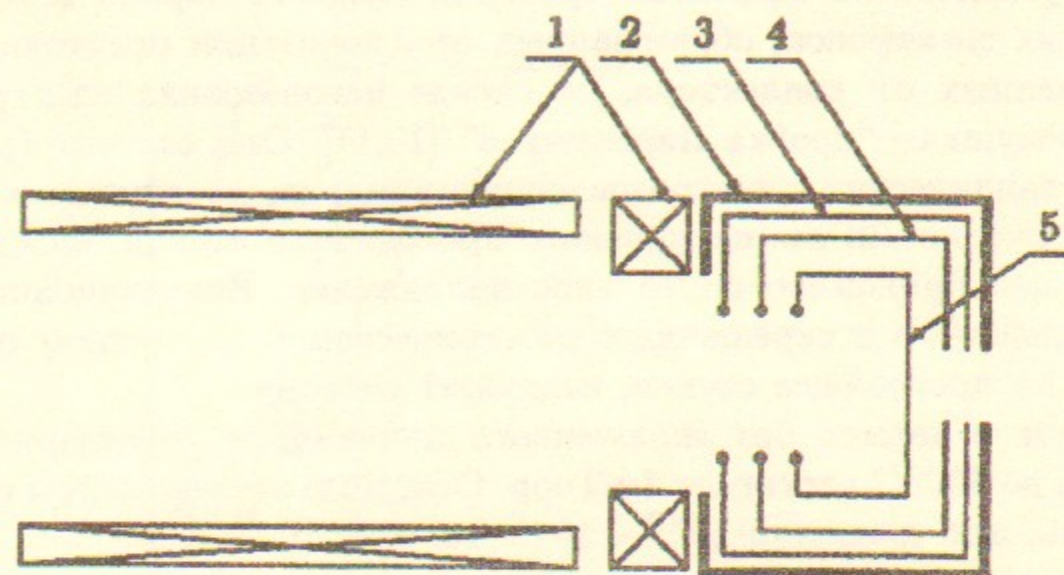


Рис. 3. Схема коллектора: 1—катушки магнитного поля, 2—магнитный экран, 3—репеллер, 4—транспортировочный электрод, 5—коллектор.

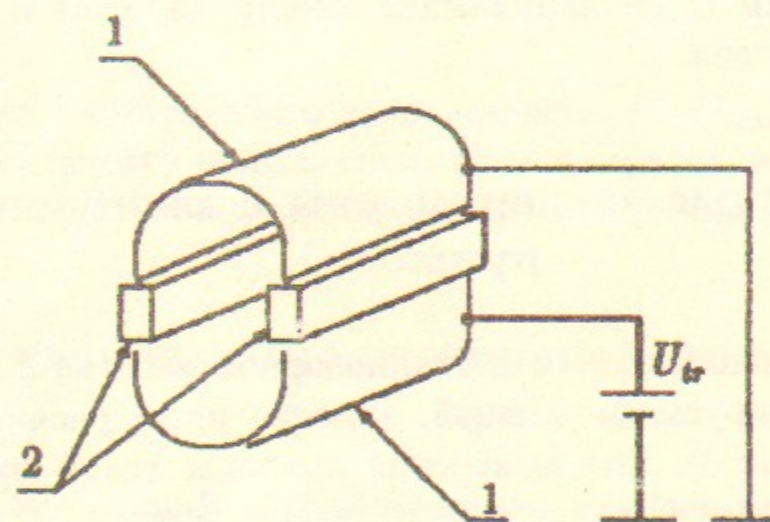


Рис. 4. Схема электростатической ловушки—"пробки Пархомчука". 1—металлический электрод, 2—пластина из проводящего стекла.

тенсивных электронных пучков с низкой энергией. В поле репеллера и пространственного заряда пучка формируется электростатический барьер, препятствующий выходу вторичных электронов из коллектора. Магнитный экран, установленный перед входом в коллектор, обеспечивает резкий спад магнитного поля и быстрое расхождение пучка. Это приводит к уменьшению эффектов объемного заряда для интенсивных пучков на входе в коллектор и создает магнитную пробку для вторичных электронов, вылетающих из него.

Для уменьшения эффектов пространственного заряда в пушке от вторичных электронов, образованных при ионизации остаточного газа и отраженных от коллектора, на стенде использована электростатическая ловушка—”пробка Пархомчука” [10,11]. Она состоит (рис.4) из двух металлических электродов—полуцилиндров, соединенных друг с другом пластинами из специального проводящего стекла. Между полуцилиндрами приложено постоянное напряжение. Ионизационные электроны дрейфуют в скрещенных электрическом и магнитном полях, и, попадая на проводящее стекло, покидают систему.

Вакуум в камере без включенного пучка после предварительного прогрева до 300°C достигает 1 нТорр . Основные эксперименты с пучком проведены при давлении $10^{-8} - 10^{-6}\text{ Торр}$.

Высоковольтная система питания стенда имеет стационарные регулируемые источники напряжения, обеспечивающие необходимые потенциалы на электродах пушки (U_c —катод, U_{st} —управляющий электрод), коллектора (U_{rep} —репеллер, U_{tr} —транспортный электрод) и напряжение рекуперации U_{col} —напряжение между катодом и приемной поверхностью коллектора.

2. Импульсные эксперименты с электронной пушкой

При первом включении пушки в стационарном режиме выяснилось, что ток пучка, генерируемого пушкой, заметно ниже расчетного значения (подробнее—см.п.3). Для выяснения природы такой потери тока решено было провести испытания в импульсном режиме, что позволило бы определить вольтамперные характеристики пушки в отсутствие каких бы то ни было эффектов накопления пространственного заряда, в частности, исключить влияние коллектора. В этих экспериментах на катод и управляющий электрод подавалось стационарное отрицательное напряжение (рис.5), так чтобы пушка в исходном состоянии была закрыта. Затем на управляющий электрод подавался импульс положительного ускоряющего напряжения длительностью $10-30\text{ мксек}$ и измерялся ток пучка. Зависимость тока пучка от напряжения на управляющем электроде и на катоде позволила определить первеанс пушки: $P_{gun} = 0.56\mu\text{A}/\text{V}^{3/2}$, что согласуется с расчетным значением.

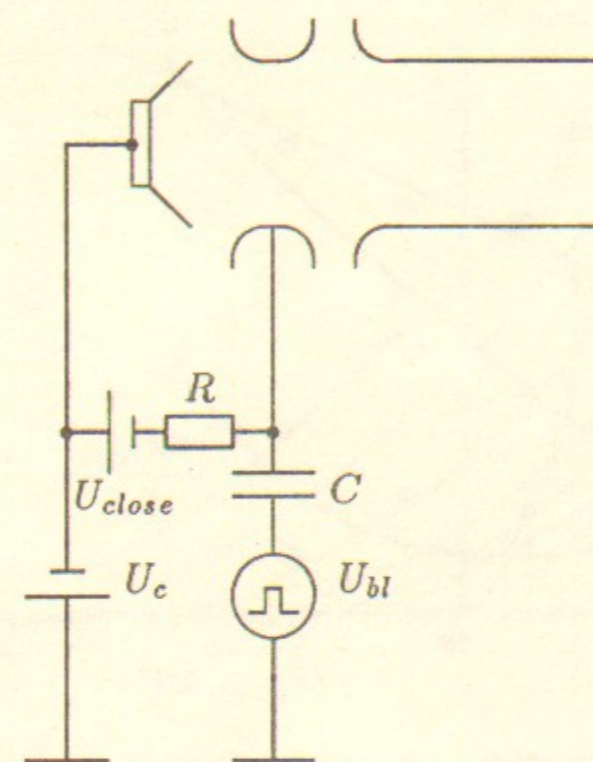


Рис. 5. Схема импульсного эксперимента. U_c, U_{close} —источники катодного и запирающего напряжения, U_{bl} —генератор импульсного напряжения, C —разделительный конденсатор, R_1C_1 —фильтр.

3. Стационарные эксперименты с электронной пушкой

В ходе испытаний в стационарном режиме исследовалось влияние коллектора, вакуумных условий, электростатической ловушки и магнитных полей на величину тока пучка и эффективность рекуперации. Результаты экспериментов, представленные на рис.6, показывают, что даже для пучка с $P_b = 5\mu\text{A}/\text{V}^{3/2}$ относительные потери тока в системе составляют меньше 10^{-4} и в основном определяются ионизацией остаточного газа электронами пучка [7,9]. Такой низкий уровень потерь для высокопервееансного пучка свидетельствует о согласовании первеансов коллектора P_c и пучка P_b :

$$I = P_b U_c^{3/2} \leq P_c \Delta U^{3/2}, \quad (3)$$

где U_c и ΔU —потенциалы катода относительно земли и коллектора относительно катода.

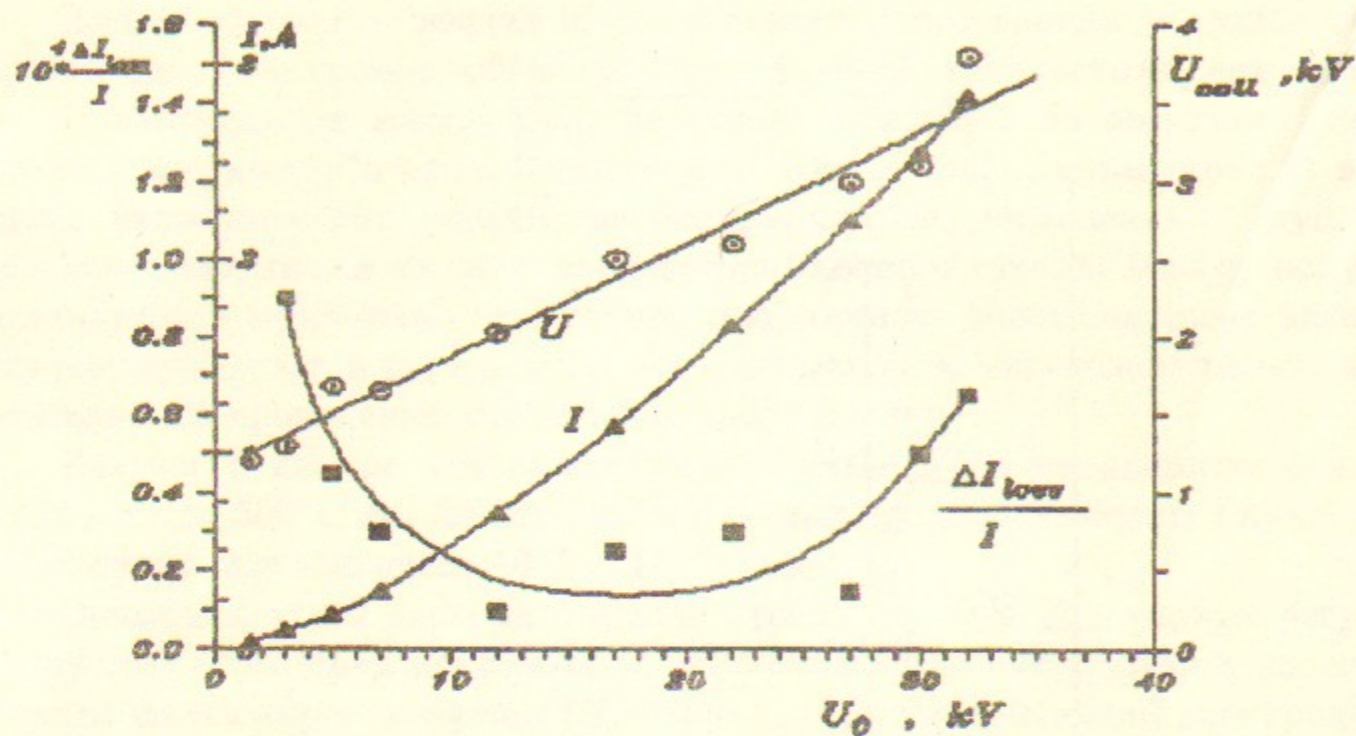


Рис. 6. Зависимость тока потерь, тока пучка и потенциала коллектора от ускоряющего напряжения между катодом и управляющим электродом $U_c + U_{st}$. $P = 4 \cdot 10^{-8}$ Торр, $U_c = -7$ кВ, $H = 480$ Г, $\Delta I_{st} < \Delta I_{loss}$, $U_{rep} = -2 \div -3$ кВ.

Зависимость тока пучка от потенциала управляющего электрода при различных значениях катодного потенциала (рис.7) показывает, что пушка позволяет плавно регулировать величину тока от нулевого уровня (пушка "закрыта") до максимального, вплоть до значений первеанса пучка $5 \mu A / B^{3/2}$. При этом существуют два режима работы пушки. Если потенциал управляющего электрода относительно земли U_{st} отрицательный, пушка работает с расчетным первеансом $P_{gun} \approx 0.56 \mu A / B^{3/2}$. При положительном потенциале U_{st} в пушке накапливаются вторичные электроны, ионизованные пучком. Их появление приводит к снижению тока пучка и, соответственно, первеанса пушки. Для устранения этого эффекта используется специальный импульсный генератор—"blower" (рис.8), с помощью которого на управляющий электрод периодически подается отрицательный потенциал относительно земли— $3 \div 5$ кВ, длительность импульса 5 мс.

Во время импульса происходит "выдавливание" накопленных электронов из пушки в вакуумную камеру и восстановление тока пучка.

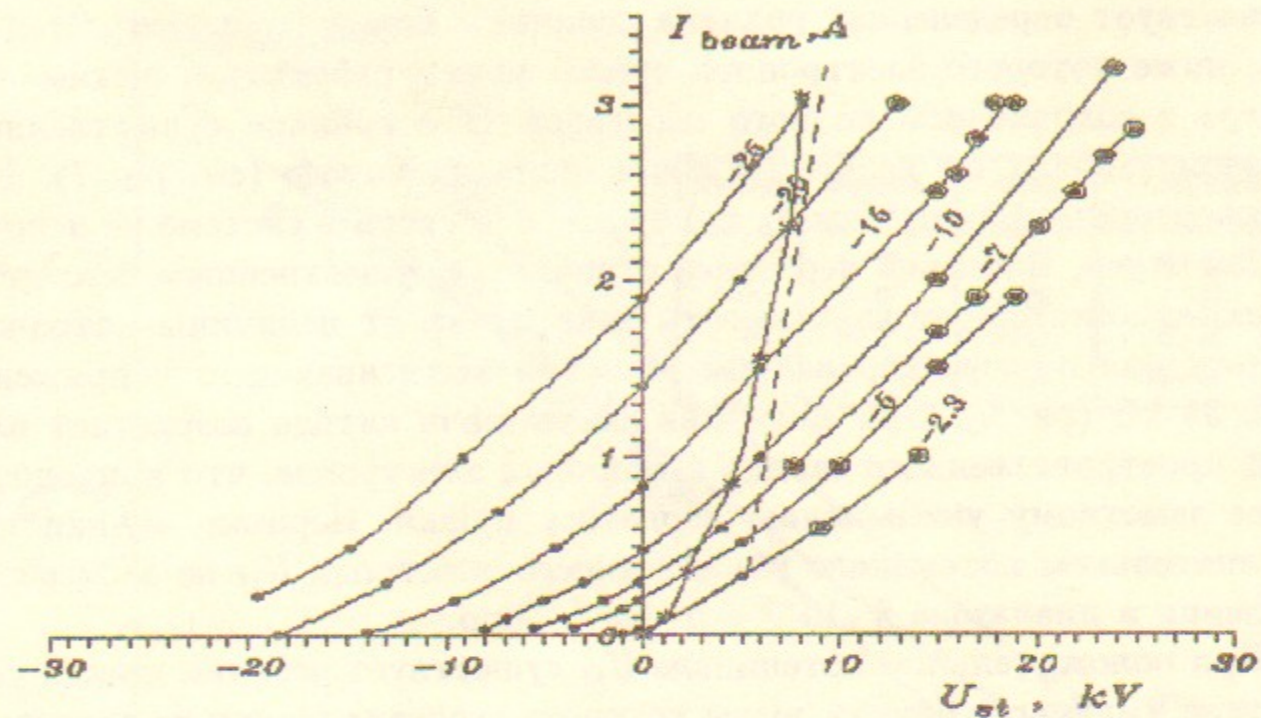


Рис. 7. Зависимость тока пучка от напряжения на управляющем электроде. ●—экспериментальные точки без блуера; ○—экспериментальные точки с использованием блуера; - - —граница работы блуера; * * *—теоретическая граница работы блуера.

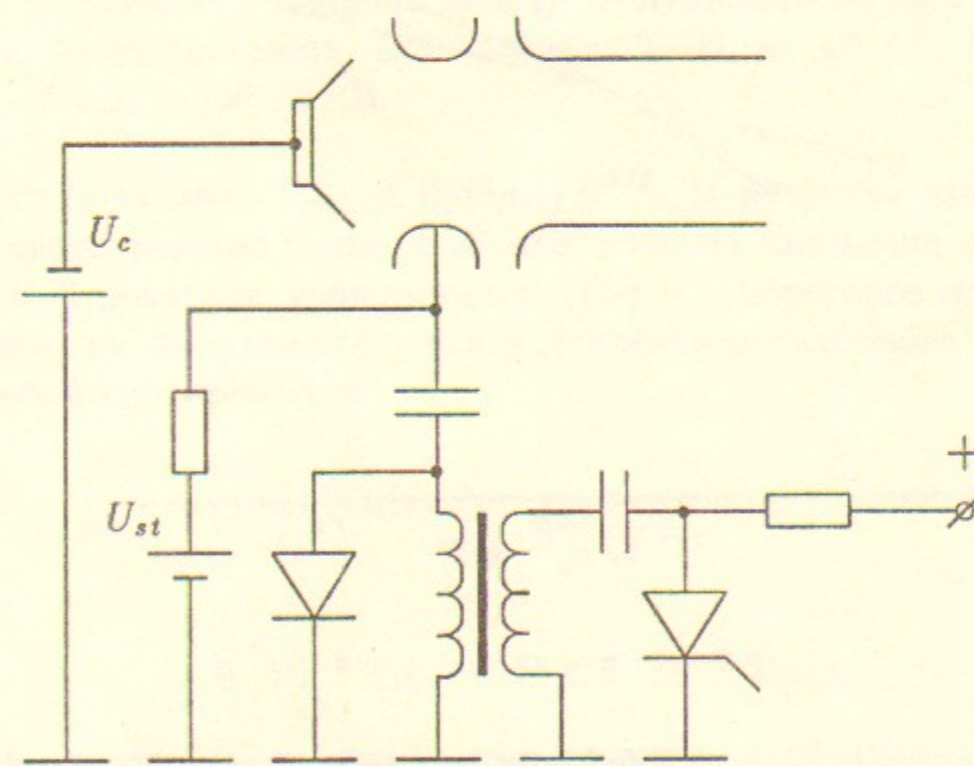


Рис. 8. Схема импульсного генератора.

Существует определенная граница величины положительного потенциала, ниже которого электронная пушка может работать в режиме без блуера с сохранением полного первеанса. Эта граница существенным образом зависит от величины потенциала на катоде (см. рис.7). Для высокопервеансных пучков $P_b \approx 1 \div 5 \mu A / B^{3/2}$, если в системе не используется блуер, снижение первеанса становится существенным, что отчетливо демонстрирует зависимость тока пучка от величины катодного напряжения при фиксированном значении вытягивающего напряжения $U_0 = 35 \text{ kV}$ (рис.9). При снижении потенциала катода возрастает влияние пространственного заряда вторичных электронов, что приводит к более заметному уменьшению первеанса пушки. Первеанс пушки при отрицательном потенциале управляющего электрода U_{st} не зависит от давления в диапазоне $8 \cdot 10^{-9} \div 5 \cdot 10^{-6} \text{ Торр}$.

При положительном потенциале U_{st} существует верхний предел следования импульсов блуера, выше которого первеанс пушки не достигает

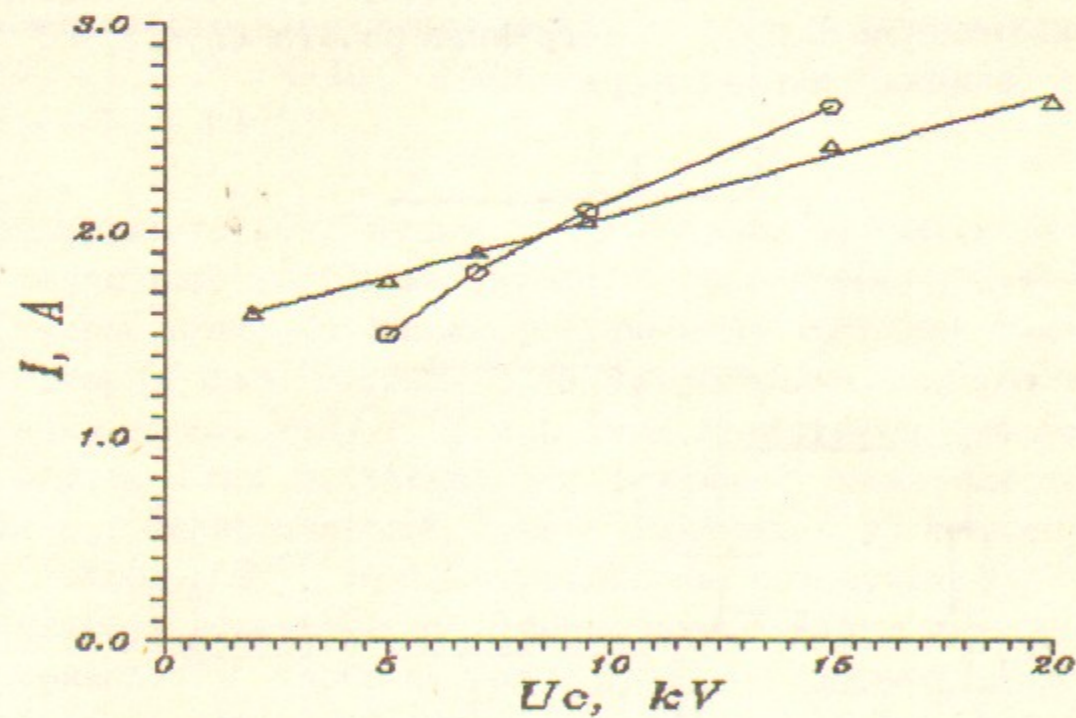


Рис. 9. Зависимость тока пучка от потенциала на катоде при фиксированном значении ускоряющего напряжения между катодом и управляющим электродом. $U_c + U_{st} = 35 \text{ kV}$. \circ —экспериментальная кривая; Δ —теоретическая кривая.

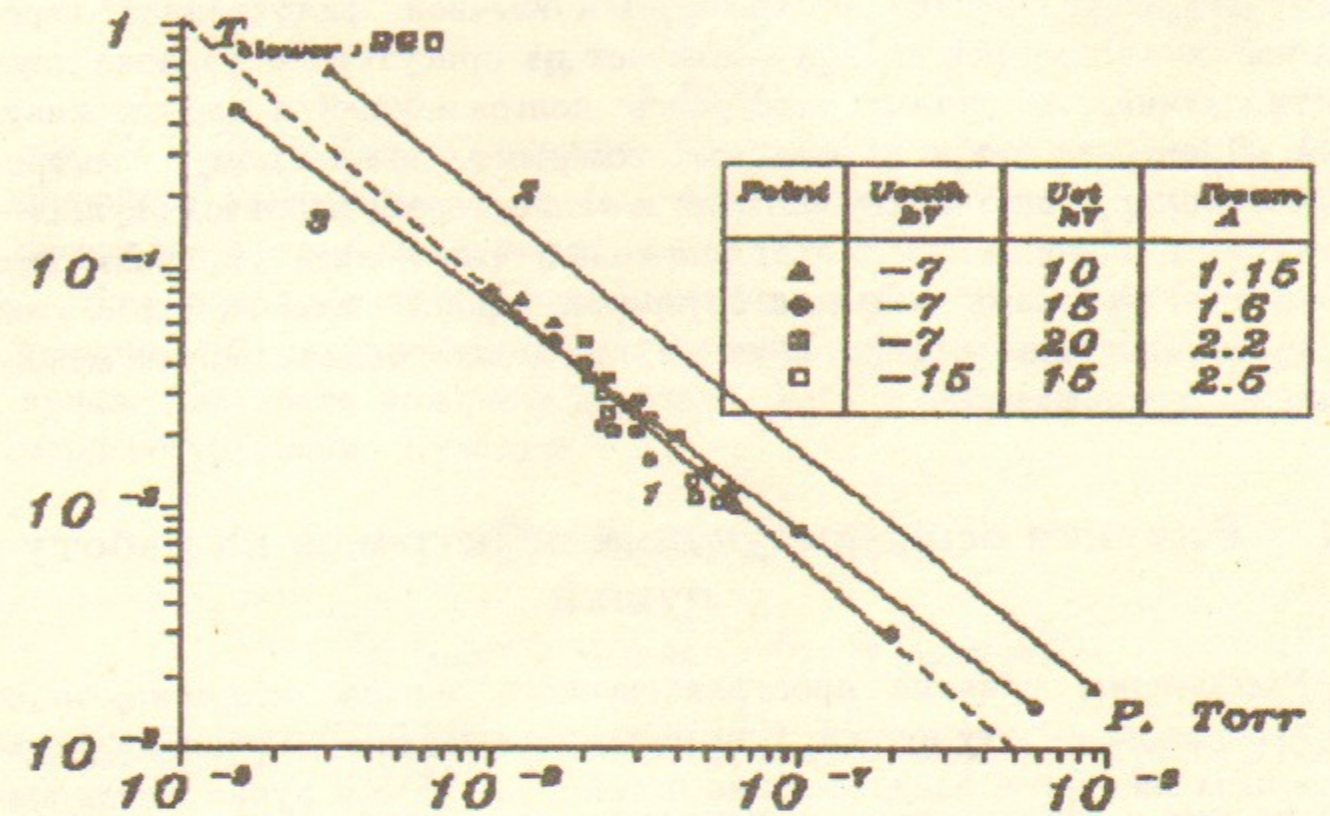


Рис. 10. Зависимость периода между импульсами блуера от давления в камере. 1—эксперимент, 2,3—расчет: 2— $U_c = -7 \text{ кВ}$, $U_{st} = 10 \text{ кВ}$; 3— $U_c = -7 \text{ кВ}$, $U_{st} = 15 \text{ кВ}$.

расчетного значения: $P_{gun} < 0.56 \mu A / B^{3/2}$. В качестве критерия такого порогового режима было выбрано условие снижение первеанса на 10–15%. Как показали эксперименты (рис.10), пороговое значение периода следования импульсов блуера и давление остаточного газа связаны между собой соотношением

$$T_{bl}(\text{sec}) = \frac{1}{10^9 P_{\text{Торр}}}$$

$$8 \cdot 10^{-9} \text{ Торр} < P < 5 \cdot 10^{-6} \text{ Торр}.$$

Время накопления вторичных электронов τ_{st} измерялось так же по спаду тока пучка при работе импульсного генератора в режиме одиночных импульсов. Неожиданный эффект наблюдался при $\tau_{st} \approx T_{bl}$, ток пучка и первеанс пушки возрастали до 90% от расчетного значения.

Этот результат, конечно, не объясняется обычной "фильтрацией" переменной составляющей тока и указывает на присутствие в пушке двух составляющих вторичных электронов: долгоживущей и короткоживущей. Долгоживущая составляющая содержит, по-видимому, электроны, осциллирующие между катодом и коллектором, короткоживущая — электроны, накопленные в потенциальной яме вблизи управляющего электрода. Во время импульса блуера электроны, захваченные в этой потенциальной яме, удаляются из нее и начинают осциллировать между катодом и коллектором.

4. Влияние осциллирующих электронов на работу пушки

Рассмотрим влияние пространственного заряда осциллирующих электронов на работу пушки. При положительном потенциале на управляющем электроде распределение потенциала на оси пучка имеет выраженный максимум (рис. 11), расстояние до которого от катода примем равным d .

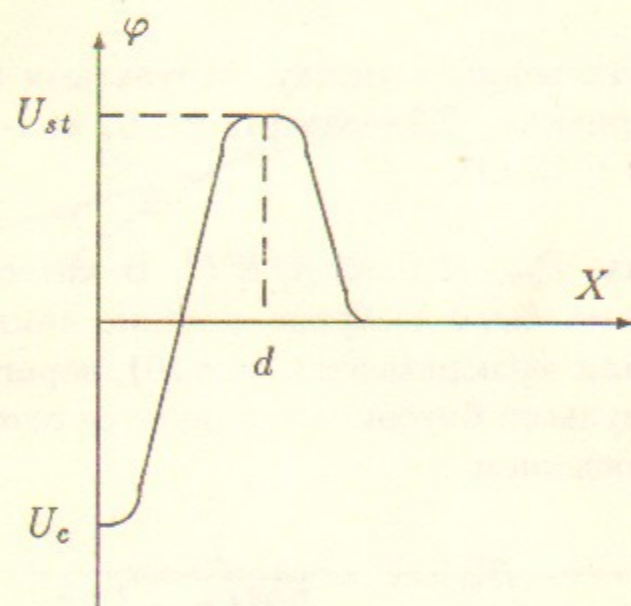


Рис. 11. Распределение потенциала на оси пучка.

В отсутствие осциллирующих электронов ток пучка I_{b0} определяется, в основном, первенсом первого, "вытягивающего", промежутка и, приблизительно, равен

$$I_{b0} = \sqrt{\frac{2e}{m}} \frac{a^2}{9d^2} U_0^{3/2}, \quad (4)$$

где $U_0 = U_c + U_{st}$ — ускоряющее напряжение между катодом и управляющим электродом, U_c и U_{st} — потенциалы катода и управляющего электрода относительно земли, a — радиус пучка.

Вторичные электроны накапливаются в области положительного потенциала. Пространственный заряд этих электронов ограничивает ток пучка, плотность которого j_b может быть найдена из решения одномерного уравнения Пуассона.

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 4\pi e[n_b(\varphi) + n(\varphi)], \quad (5)$$

$$\left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad \varphi|_{x=0} = -U_c \quad \varphi|_{x=d} = U_{st}$$

где $n_b(\varphi) = j_b \sqrt{\frac{m}{2e(U_c + \varphi)}}$ — плотность электронов пучка в точке с потенциалом φ , $n(\varphi)$ — плотность осциллирующих электронов в зависимости от потенциала φ :

$$n(\varphi) = \begin{cases} n(\varphi), & \varphi > 0, \\ 0, & \varphi < 0. \end{cases} \quad (6)$$

Для удобства дальнейших расчетов введем безразмерный потенциал

$$\psi = \frac{\varphi(x)}{U_0}, \quad U_0 = U_c + U_{st}, \quad (7)$$

безразмерную координату $x_1 = x/d$ и безразмерную плотность осциллирующих электронов $\nu(\varphi) = n(\varphi)/n_b$. Здесь n_b — плотность пучка при $x = d$.

Проинтегрировав уравнение (5) совместно с граничными условиями, получим ток пучка I_b для пушки с осциллирующими электронами

$$I_b = I_{b0} \left[\left(\frac{U_c}{U_0} \right)^{3/4} + \frac{3}{4} \int_0^{U_{st}/U_0} \frac{d\psi}{\left[\left(\psi + \frac{U_c}{U_0} \right)^{1/2} + \frac{1}{2} \int_0^\psi \nu(\psi') d\psi' \right]^{1/2}} \right]^2 \quad (8)$$

Для двух предельных случаев отсюда следует

$$I_b = \begin{cases} I_{b0}, & \nu \ll 1, \\ I_{b0} \left(\frac{U_c}{U_0}\right)^{3/2}, & \nu \gg 1. \end{cases} \quad (9)$$

(В первом случае можно пренебречь интегралом в знаменателе второго слагаемого, во втором—самим вторым слагаемым).

В отсутствие осциллирующих электронов $\nu \ll 1$ ток пучка определяется первансом вытягивающего промежутка (см.4). Для плотного облака осциллирующих электронов $\nu \gg 1$ происходит запираание тока пучка, уровень которого снижается в $\left(\frac{U_c}{U_0}\right)^{3/2}$ раза и зависит от потенциала катода.

Величина тока пучка определяется тремя параметрами, характеризующими динамику вторичных электронов:

- 1) время ионизации τ_i ,
- 2) время рассеяния на остаточном газе τ_{sc} ,
- 3) время ухода τ_{es} ,

а также временем между импульсами блуера T_{bl} .

Время ионизации

$$\tau_i = \frac{1}{N\sigma v_b} \quad (10)$$

равно времени, в течение которого плотность вторичных электронов становится сравнимой с плотностью пучка. Здесь N — плотность атомов остаточного газа, σ — сечение ионизации электронами пучка, v_b — скорость электронов пучка в области управляющего электрода. Время рассеяния вторичных электронов на атомах остаточного газа на угол порядка единицы равно

$$\tau_{sc} = \tau_{||} \bar{\theta}^2, \quad (11)$$

здесь $\tau_{||}$ — время осцилляции вторичных электронов в пушке, $\bar{\theta}^2$ — среднеквадратичный угол многократного рассеяния вторичных электронов на атомах газа за один пролет в пушке

$$\bar{\theta}^2 = \frac{4\pi e^2 Z^2 N d \Lambda_1}{(mv^2)^2}, \quad (12)$$

где v — скорость вторичных электронов, Z — заряд ядра атомов газа, e и m — заряд и масса электрона, Λ_1 — кулоновский логарифм. Время ухода

вторичных электронов из пучка определяется поперечной диффузией в магнитном поле

$$\tau_{es} \approx \tau_{||} \frac{a^2}{\rho_H^2 \bar{\theta}^2}, \quad (13)$$

здесь $\rho_H (\bar{\theta}^2)^{1/2}$ — диффузионное смещение вторичных электронов в поперечном направлении за один пролет, $\rho_H = v/\omega_H$ — ларморовский радиус, $\omega_H = eH/mc$ — циклотронная частота. Поскольку в условиях эксперимента вторичные электроны замагничены,

$$a \gg \rho_H$$

то время ухода много больше, чем время рассеяния

$$\tau_{esc} \gg \tau_{sc}. \quad (14)$$

В зависимости от времени между импульсами блуера T_{bl} можно выделить два характерных режима работы пушки с осциллирующими электронами.

Первый — когда время между импульсами много меньше время рассеяния

$$T_{bl} \ll \tau_{sc} \ll \tau_{esc}. \quad (15)$$

В этом случае рассеяние не успевает произойти между двумя последовательными импульсами блуера и за это время накопленные электроны удаляются из пушки.

Второй — когда время между импульсами блуера много больше времени ухода вторичных электронов

$$T_{bl} \gg \tau_{esc} \gg \tau_{sc}. \quad (16)$$

В этом случае рассеяние существенно сказывается на распределении накопленных электронов по скоростям, происходит накопление изотропного облака осциллирующих электронов. Оба этих режима реализованы в эксперименте и подробно рассмотрены в двух следующих параграфах.

5. Работа электронной пушки с блуером

Рассмотрим работу пушки, когда время между импульсами блуера существенно меньше времени рассеяния (15).

Плотность электронов, накопленных в точке x к моменту времени t в результате ионизации атомов пучком в точке x' равна

$$dn(x, x') = \frac{j_b N \sigma(x') dx'}{e v(x, x')} \frac{t}{\tau_{\parallel}(x')}, \quad (17)$$

где $v(x, x') = \sqrt{\frac{2e}{m}(\varphi(x) - \varphi(x'))}$ — скорость электронов в точке x , родившихся в точке x' , $\sigma(x')$ — сечение ионизации для электронов пучка в точке x' , $\tau_{\parallel}(x')$ — половина периода колебаний (между точками поворота) для электрона, рожденного в точке x' :

$$\tau_{\parallel}(x') = 2 \int_{x'}^d \frac{dx}{v(x, x')}. \quad (18)$$

Множитель $R = t/\tau_{\parallel}(x')$ отражает тот факт, что накопленные электроны дважды за период проходят через точку x , что увеличивает плотность вторичных электронов в этой точке в R раз.

Проинтегрировав по всем точкам x' , где родились вторичные электроны, найдем полную плотность накопленных электронов в точке x

$$n(x, t) = 2 \int_{x_0}^d \frac{j_b N \sigma(x') dx'}{e v(x, x')} \frac{t}{\tau_{\parallel}(x')}, \quad (19)$$

где $\varphi(x_0) = 0$.

Для того чтобы рассчитать плотность накопленных электронов, необходимо знать зависимость потенциала на оси $\psi = \varphi/U_0$ от координаты x . Эту зависимость выбираем в форме, соответствующей закону Чайлда-Ленгмюра,

$$\frac{x}{d} = \left(\psi + \frac{U_c}{U_0} \right)^{3/4} \quad (20)$$

и примем, что в области $\psi > 0$ эта функция симметрична относительно точки $x = d$:

$$\psi(x) = \psi(2d - x) \quad (21)$$

В этом случае τ_{\parallel} равно

$$\tau_{\parallel}(\psi') = \frac{3d}{2v_0} \int_{\psi'}^{\frac{U_{st}}{U_0}} \frac{d\psi''}{\left(\psi'' + \frac{U_c}{U_0}\right)^{1/4} (\psi'' - \psi')^{1/2}} \approx \frac{3d}{v_0} \left(\frac{U_{st}}{U_0} - \psi' \right)^{1/2}, \quad (22)$$

где $v_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}$.

Энергия электронов пучка внутри пушки изменяется с координатой x' , что приводит к зависимости сечения ионизации от координаты. Эту зависимость можно принять в виде

$$\sigma(x') = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\frac{U_c}{U_0} + \psi(x')}}, \quad (23)$$

где σ_0 — сечение ионизации электронов пучка в точке с потенциалом $\psi = \frac{U_{st}}{U_0}$.

Подставив в (19) результаты (20)–(23) найдем плотность накопленных электронов в точке с потенциалом ψ :

$$n(\psi) = \frac{j_b N \sigma_0 t}{2e} \int_0^{\psi} \frac{d\psi'}{\left(\psi' + \frac{U_c}{U_0}\right)^{3/4} \left(\frac{U_{st}}{U_0} - \psi'\right)^{1/2} \sqrt{\psi - \psi'}}. \quad (24)$$

Так как ток пучка ограничивается в первую очередь вторичными электронами, рожденными вблизи $\psi \simeq 0$, то зависимость $n(\psi)$ разложим в ряд по ψ . После интегрирования выражение (24) с точностью до членов порядка $\psi^{3/2}$ окончательно получаем

$$n(\psi) = n_b S \psi^{1/2} \quad (25)$$

где

$$S(t) = N \sigma_0 v_0 t \left(\frac{U_0}{U_c} \right)^{3/4} \left(\frac{U_0}{U_{st}} \right)^{1/2}.$$

Подставив $n(\psi)$ (25) в соотношение (8), найдем ток пучка от времени

$$I_b(t) = I_{b0} \left[\left(\frac{U_c}{U_0} \right)^{3/4} + \frac{3}{4} \int_0^{\frac{U_{st}}{U_0}} \frac{d\psi}{\left[\left(\psi + \frac{U_c}{U_0} \right)^{1/2} + \frac{S(t)}{3} \psi^{3/2} \right]^{1/2}} \right]^2 \quad (26)$$

Из соотношения (26) определим время t^* , через которое ток пучка уменьшится до уровня $0.95 I_{b0}$. Тем самым получим расчетное значение времени между импульсами блуера $t^* = T_{bl}$, когда ток снижается на 5% по сравнению с "законом 3/2". Результаты расчетов $t^* = T_{bl}$ в зависимости от давления остаточного газа, приведенные на рис.10, находятся в разумном согласии с экспериментальными результатами.

6. Стационарный режим работы пушки с осциллирующими электронами

Для стационарного режима работы электронной пушки с положительным потенциалом обычно выполнены условия, когда время ухода вторичных электронов больше времени рассеяния (см.(16)). Плотность электронов в точке с потенциалом ψ для этого случая найдена в приложении и равна

$$n(\psi) = n_b S_1 \psi^{3/2}, \quad (27)$$

где $S_1 = \frac{\sigma_0}{3\sigma_e} \frac{\beta_0^2}{Z^2 \Lambda_2 \Lambda_1} \frac{U_0}{U_{st}} \frac{\omega_H^2}{c^2} a^2$, $\sigma_e = \pi \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2$ — сечение электрона, Λ_2 — логарифмическая величина, $\beta_0 = v/c$.

Зная $n(\psi)$, определим ток пучка (8)

$$I_b = I_{b0} \left[\left(\frac{U_c}{U_0} \right)^{3/4} + \frac{3}{4} \int_0^{U_{st}} \frac{d\psi}{\left[\left(\psi + \frac{U_c}{U_0} \right)^{1/2} + \frac{S_1}{5} \psi^{5/2} \right]^{1/2}} \right]^2 \quad (28)$$

Зависимость тока пучка от величины катодного напряжения для $U_0 = 35$ кВ показана на рис.9. Результаты расчетов ($Z = 7$, $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 10$, $\sigma_0 = 2.5 \cdot 10^{-18}$) и данные эксперимента находятся в разумном согласии. Запирание тока пучка в эксперименте может быть объяснено накоплением осциллирующих электронов в пушке. Зависимость тока пучка от величины напряжения на управляющем электроде приведена на рис.7. Для положительного потенциала на управляющем электроде существует два режима работы пушки: с блуером и без него. Граница между двумя этими режимами может быть определена из формулы (28). Полагая, что блуер включается когда ток пучка уменьшается до величины $0.95 I_{b0}$, можем найти значение U_c и U_{st} когда это происходит, воспользовавшись соотношением (28). На рис.7 показана расчетная зависимость тока пучка от величины управляющего напряжения, которая может быть еще получен без блуера. При дальнейшем увеличении управляющего напряжения становятся существенны эффекты объемного заряда осциллирующих электронов. Для достижения полного тока пучка приходится периодически подавать отрицательное напряжение на управляющий электрод и выдавливать облако накопленных электронов в дрейфовую камеру.

7. Измерение поперечной энергии электронов пучка

После испытаний пушки на стенде "Рекуператор" были проведены измерения поперечной энергии электронов пучка на специально созданном стенде "Анализатор". Для этого использовались два метода измерений — с энергетическим [12] и оптическим [13] анализаторами. Подробному описанию стенда и методов измерений посвящена специальная публикация. В настоящем сообщении кратко изложены лишь основные принципы измерений и полученные результаты.

Энергетический анализатор позволяет измерять поперечную энергию электронов и среднеквадратичный разброс их продольной энергии. Метод [10] основан на анализе энергетического разброса в тонком пучке электронов, вырезанном из основного с помощью малого отверстия в вырезающей диафрагме (рис.12, поз.7). Вырезанный пучок тормозится в электрическом поле анализирующей диафрагмы, находящейся под потенциалом U_d относительно катода. Изменяя этот потенциал и од-

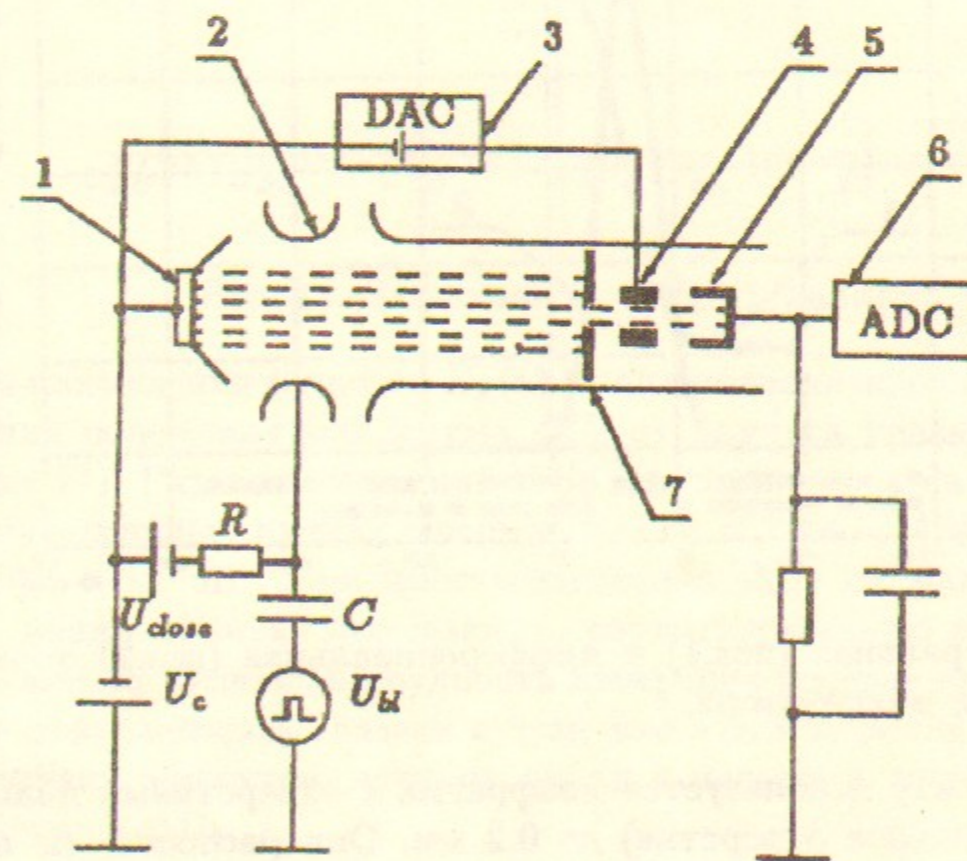


Рис. 12. Схема энергетического анализатора. 1—катод, 2—управляющий электрод, 3—"подвешенный" источник питания анализирующей диафрагмы с ЦАП'ом, 4—анализирующая диафрагма, 5—коллектор электронов, 6—интегратор и АЦП, 7—вырезающая диафрагма.

одновременно измеряя ток пучка, принимаемый коллектором (поз.5), можно получить интегральную (а по ней и дифференциальную) функцию распределения электронов по продольной энергии. Наличие поперечной скорости при постоянстве полной энергии приводит к смещению центра тяжести (дифференциальной) функции распределения на величину поперечной энергии, зависящую от расстояния между вырезанным пучком и осью системы (рис.13, кривая 1). Производная сигнала с коллектора как функция напряжения U_d , описывается выражением (рис.13, кривая 2)

$$\frac{dI}{dU_d} = \frac{I_0}{2\delta U} e^{-\varphi(U_d, E_{\perp})}, \quad \varphi(U_d, E_{\perp}) = \frac{(eU_d - E_{\perp})^2}{4(e\delta U)^2} \quad (29)$$

где $E_{\perp}(r)$ — поперечная энергия электронов, δU — среднеквадратичный разброс продольной энергии. Положение максимума дифференциальной функции $\Delta U_0 = E_{\perp}(r)$ позволяет найти величину поперечной энергии электронов.

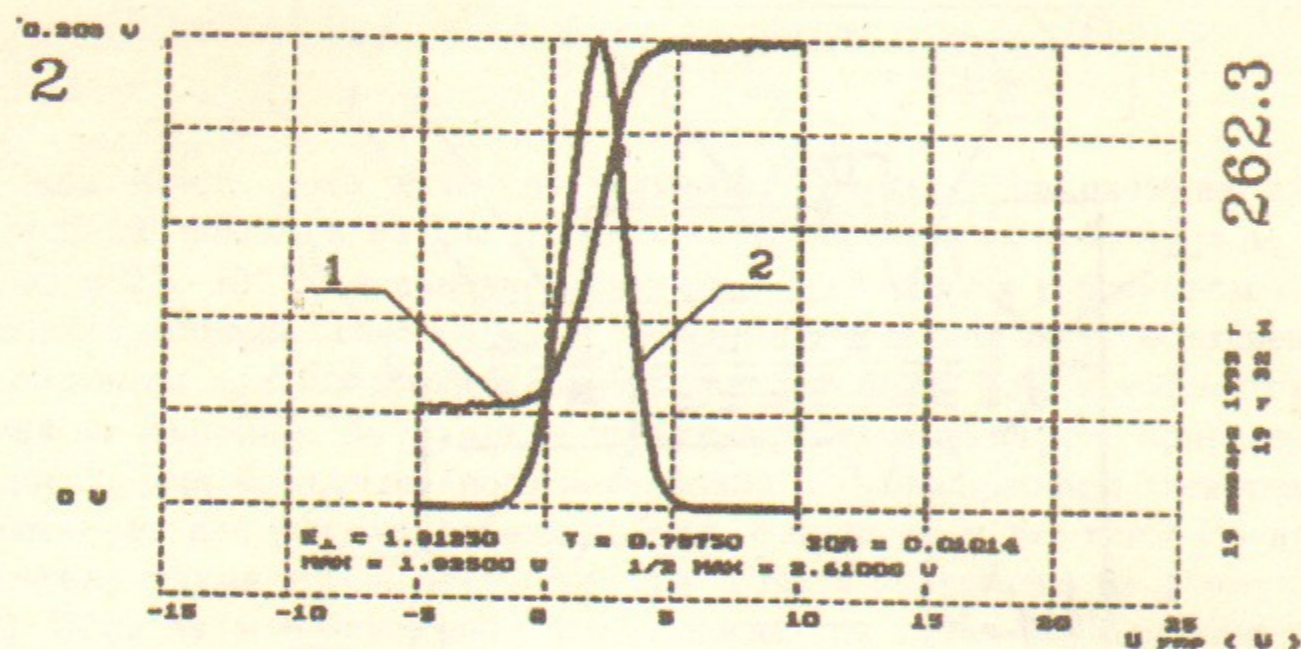


Рис. 13. Интегральная (поз.1) и дифференциальная (поз.2) тормозные характеристики анализатора.

В эксперименте используется диафрагма с отверстиями диаметром от 0.03 (центральное отверстие) до 0.2 мм. Они расположены на разных расстояниях от центра диафрагмы (оси системы), что позволяет одновременно измерять зависимость параметров от разной координаты электрона. Диаметр проходных каналов в анализирующей диафрагме равен 4 мм их длина 40 мм. Во время измерений потенциал катода

поддерживается постоянным, а на управляющий электрод подается запирающее напряжение; пушка открывается импульсом длительностью 20 мкс, подаваемым на ускоряющий электрод с "земли" (рис.8). Разность потенциалов между катодом и анализирующими каналами U_d варьируется в пределах $-5 \div +15$ В от источника, "подвешенного" вместе с управляющим ЦАП'ом под потенциал катода. Связь с ЭВМ осуществляется через оптронную развязку.

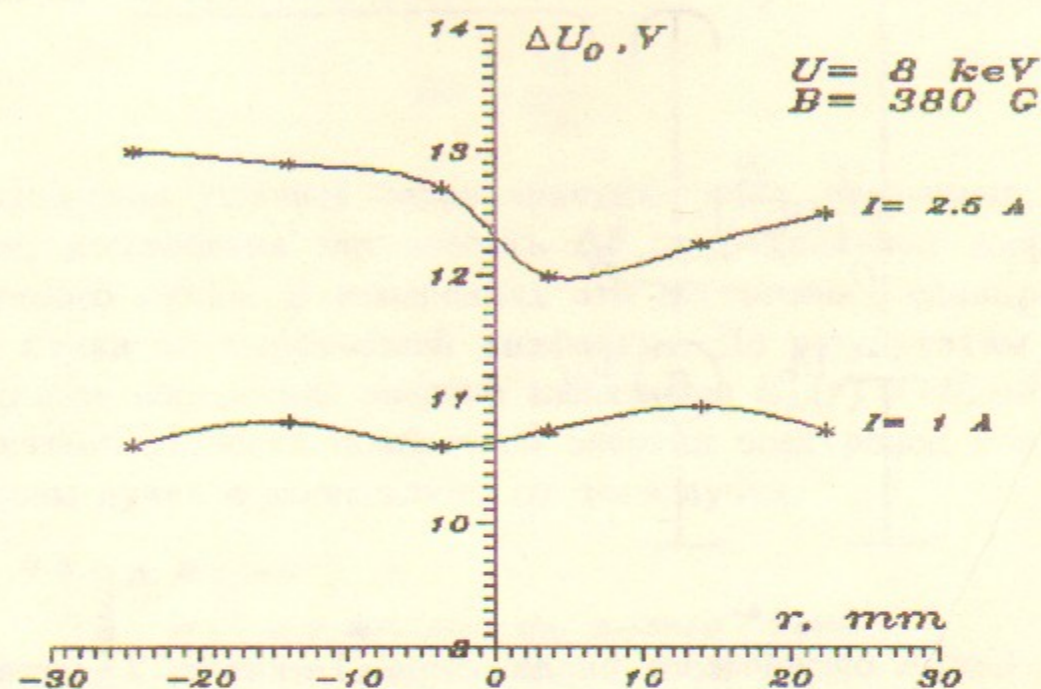


Рис. 14. Зависимость ΔU_0 от радиуса.

Для нахождения функции $E_{\perp}(r)$ была проанализирована зависимость смещения положения максимума ΔU_0 от радиуса траекторий электронов (рис.14). Разность значений ΔU_0 для электронов на разных радиусах в интенсивных пучках с первансом $P_b = 1.5 \div 5 \mu A / B^{3/2}$ составляет $E_{\perp} \approx 0.3 \div 0.7$ эВ. Зависимость смещения ΔU_0 от радиуса имеет не всегда квадратичную зависимость, соответствующую парааксиальному приближению. Основная трудность измерения поперечной энергии электронов этим методом связана с тем, что эти измерения проводятся на фоне других эффектов, дающих вклад в полезный сигнал того же порядка, что и ΔU_0 .

Оптический анализатор (рис.15) позволяет измерять E_{\perp} по величине поперечного ларморовского радиуса электрона [13]. Как и в энергетическом анализаторе пушка работает в импульсном режиме. Также из исходного электронного пучка вырезается тонкий пучок (диаметром

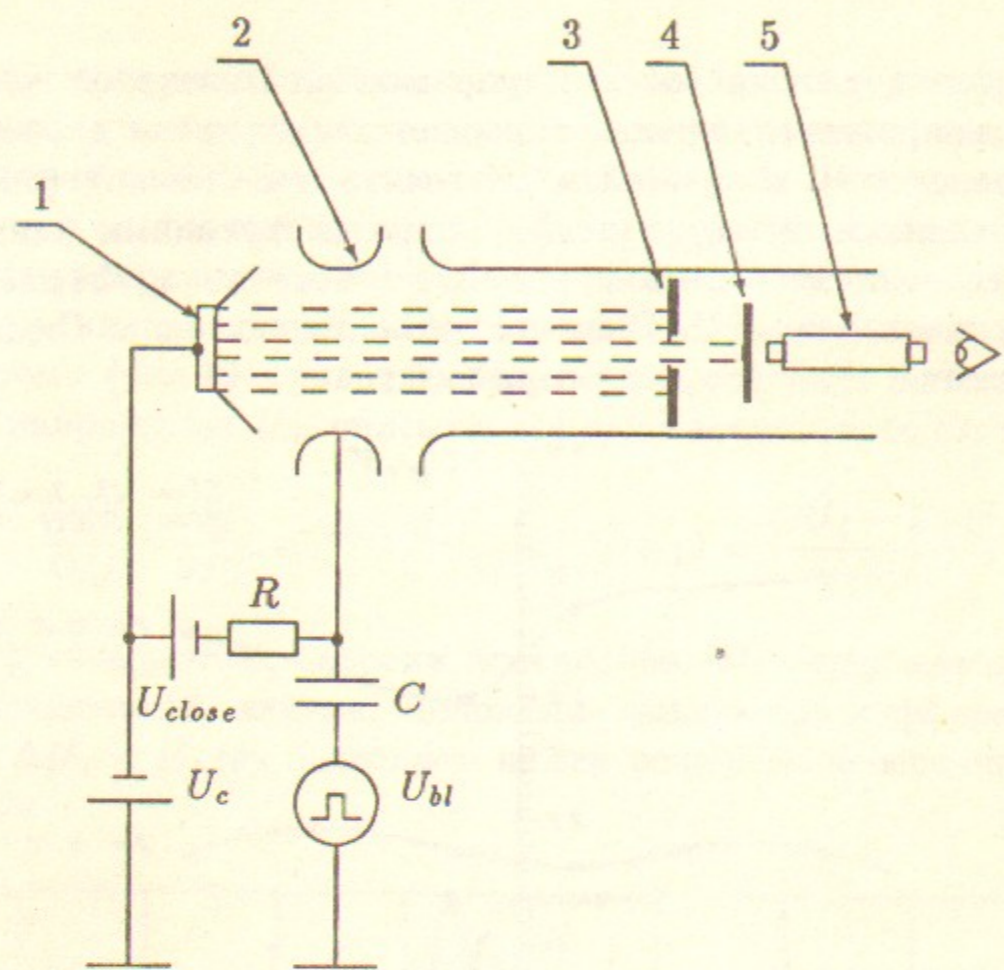


Рис. 15. Схема оптического анализатора. 1—катод, 2—управляющий электрод, 3—вырезающая диафрагма, 4—люминесцентный экран, 5—микроскоп.

0.06 мм), который сбрасывается на люминесцентный экран. Размер светящегося пятна на экране измеряется с помощью микроскопа. Электронная пушка и оптический анализатор находятся в продольном магнитном поле. Если скорость электронов V_0 такова, что на расстоянии d от диафрагмы до экрана укладывается целое число циклотронных длин волн, т.е.

$$d = 2\pi n \rho_0, \quad \rho_0 = \frac{mV_0 c}{eH}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (30)$$

то изображение отверстия вырезающей диафрагмы без искажений переносится на люминесцентный экран ("фокусировка"). При изменении скорости электрона до величин V_1 , такой что

$$d = 2\pi(n + \frac{1}{2})\rho_1, \quad \rho_1 = \frac{V_1}{\omega_H} \quad (31)$$

на экране наблюдается пятно максимального размера ("дефокусировка"), смещенное от оси изображения. Размер пятна D позволяет определить некогерентный угловой разброс $\delta\theta$

$$\delta\theta = \frac{D}{4\rho_1}, \quad (32)$$

а смещение Δ —когерентный угол

$$\Delta\theta = \frac{\Delta}{2\rho_1} \quad (33)$$

Для выделения угловых характеристик пучка, связанных с оптикой пушки, исследована зависимость $\Delta\theta$ от радиальной координаты анализируемого пучка. В измерениях это достигалось скапированием основного пучка по вырезающей диафрагме. По результатам измерений находилась поперечная энергия электронов $E_{\perp}(r) = eU_c \Delta\theta^2(r)$. На рис.16 показана разность поперечной энергии электронов между центром и краем пучка в зависимости от тока пучка.

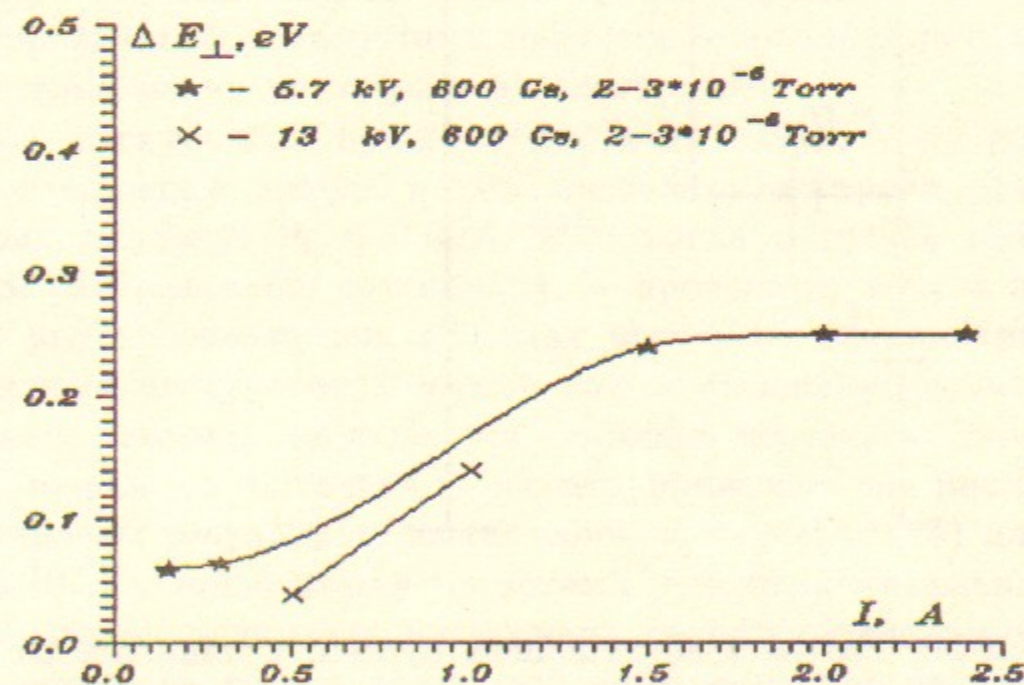


Рис. 16. Зависимость ΔE_{\perp} от радиуса.

8. Технические проблемы

Одна из достаточно серьезных технических проблем, присущих такой пушке—разряд Пеннинга, который возникал после прогрева камеры

до температуры 300°C при вакууме 10^{-8} Торр. При положительном потенциале на управляющем электроде в пушке образуются пеннинговские ловушки. Для устранения пеннинговского разряда проводилась тренировка пушки, в ходе которой напряжение на катоде и управляющем электроде постепенно увеличивалось по мере снижения тока разряда. Обычно тренировка проводилась 5–7 часов, после каждого вскрытия на атмосферу. После чего пушка работала без сколько-нибудь заметного тока разряда в течение многих часов с многократными включениями-выключениями. Следует особо подчеркнуть, что возникновение разряда существенно зависит от чистоты поверхности электродов (наличие органических и оксидных пленок и т.п.): после проведения процедуры вакуумной чистки в ЦЕРН разряд Пеннинга практически не наблюдался.

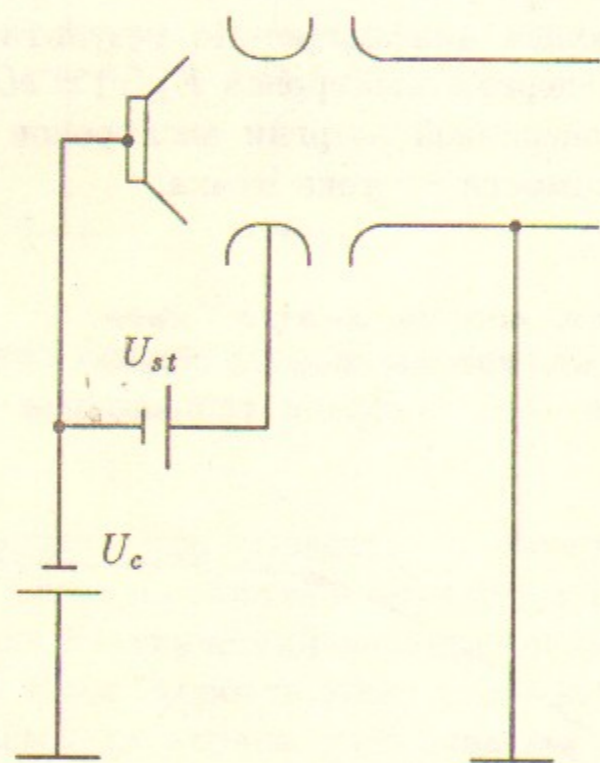


Рис. 17. Схема питания электронной пушки, с защитой от пробоев управляющего напряжения.

Другие проблемы связаны со случайными пробоями в высоковольтных цепях. Случайные пробой в источнике катодного напряжения не представляются опасными, так как при снятии напряжения с катода пушка запирается даже при положительном потенциале управляющего электрода. Проблема пробоев в цепи управляющего электрода более

существенна. Пробой в системе его питания приводят к изменению тока пучка, в результате чего могут возникать потери из коллектора. Эти трудности можно обойти, если изменить схему коммутации источников, как это показано на рис.16. Если источник питания отключается, в такой схеме потенциал анода уменьшается до некоторого отрицательного напряжения и ток пучка уменьшается. Именно такая схема, предложенная в ФТЦ, используется на накопителе LEAR.

9. Первые эксперименты с электронной пушкой на LEAR

После установки электронной пушки на LEAR были проведены 22.03–15.04.93 первые эксперименты по изучению режимов ее работы и электронному охлаждению пучка протонов.

Одной из задач экспериментов было исследование совместной работы пушки и коллектора системы электронного охлаждения; конструкция последнего отличалась от коллектора стенда (см.[8]). Устройство электронного охлаждения LEAR, имеет по сравнению со стендом ФТЦ, по крайней мере, две особенности: сверхвысокий вакуум $1 \div 5 \cdot 10^{-11}$ Торр и наличие тороидальных поворотных магнитов, которые могут приводить к дополнительному уходу вторичных электронов.

Первеанс электронной пушки существенно зависел от режима ее работы—потенциалов катода и управляющего электрода. Для низкопервеансных режимов $P_b \leq 0.6 \mu\text{A}/\text{B}^{3/2}$, когда в пушке реализуется монотонное распределение потенциала, не происходит потерь первеанса пушки. В высокопервеансных режимах возникает потенциальная яма для вторичных электронов и также как в стендовых испытаниях в определенных режимах наблюдается снижение первеанса. Зависимость первеанса пушки от потенциала катода приведена на рис.18. Здесь же представлены результаты вычислений по формуле (28) для $Z = 7$, $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 10$. Различие между расчетами и экспериментальными данными при низких значениях потенциала катода обусловлено влиянием критического первеанса вакуумной камеры на прохождение пучка в дрейфовом пространстве. Граничное значение величины потенциала управляющего электрода, при котором еще не происходит потерь первеанса, практически совпадает измеренным в стендовых испытаниях (рис.7).

В таблице 3 приведены параметры системы электронного охлаждения во время первых экспериментов с интенсивным электронным пучком.

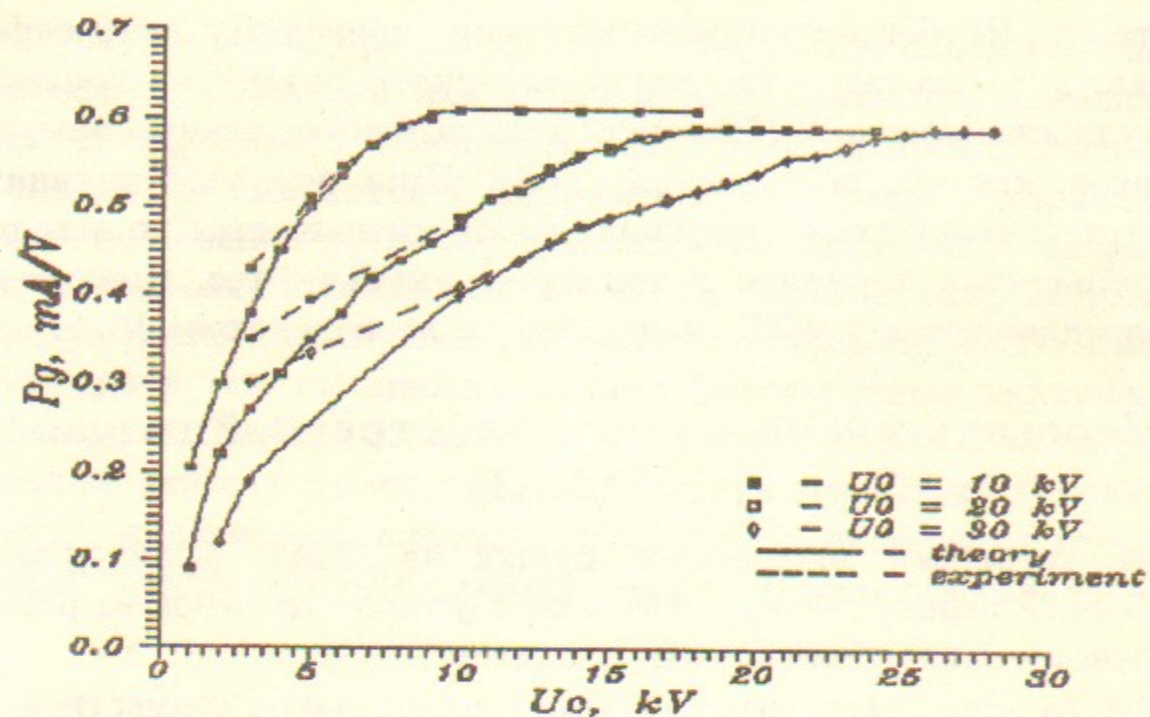


Рис. 18. Зависимость первеанса пушки от катодного напряжения.

Таблица 3

Энергия электронов, кэВ	-7	-7	-7
Ток пучка, А	2.8	1.6	1.37
Первеанс пучка, $\mu\text{A}/\text{B}^{3/2}$	4.8	2.73	2.3
Первеанс пушки, $\mu\text{A}/\text{B}^{3/2}$	0.54	0.565	0.485
Потенциал управл. электрода относительно катода, кВ	30	20	20
Ток потерь, мА	1.8	0.15	0.25
Потенциал коллектора, кВ	3.05	2.9	3
Потенциал репеллера, кВ	2.3	1.5	1
Напряженность магнит. поля, кГс	0.6	0.6	0.6
Время следования импульсов блуера, сек	600	3	6
Давление $\times 10^{10}$ Торр в			
пушке	0.3	0.2	0.12
коллекторе	0.6	0.3	0.15

В экспериментах на LEAR работа пушки с высоким первеансом более существенно зависела от настройки коллектора. При оптимально выбранных параметрах коллектора снижение не происходило первеанса в течение 10–20 минут, даже когда он достигал $5\mu\text{A}/\text{B}^{3/2}$. При

этом пушка работала в следующем режиме. Сразу же после подачи ускоряющего напряжения на управляющий электрод наблюдалось понижение значения тока пучка (потеря первеанса). Если затем от блуера на этот электрод подавался одиночный импульс отрицательного напряжения достаточно большой амплитуды, восстанавливался ток пучка, соответствующий полному первеансу пушки. После этого в течение 10–20 минут пушка работала с полным первеансом (до $5\mu\text{A}/\text{B}^{3/2}$), а затем происходил срыв тока и пушка возвращалась в исходное состояние пониженного первеанса до момента включения импульса блуера. Повторный запуск блуера включал следующий цикл и т.д.

Триггерный режим работы пушки, в котором происходит самопроизвольный переход из квазистационарного состояния с полным первеансом в стационарный режим с потерей первеанса, по-видимому, связан с захватом незначительной части электронов, осциллирующих между катодом и коллектором, в потенциальную яму в пушке. Процесс перехода во времени носит случайный характер, длительность квазистационарного состояния варьируется от единиц до нескольких десятков минут.

Во введении и в таблице 4 приведены результаты экспериментов по электронному охлаждению протонов на LEAR, проведенные с новой пушкой. Их подробный анализ—тема другой публикации. Здесь же отметим, что в этих экспериментах пушка использовалась в "стандартных" для LEAR режимах, когда первеанс пучка и пушки был около $0.5\mu\text{A}/\text{B}^{3/2}$. Из-за крайней ограниченности времени, выделенного для эксперимента, охлаждение с более интенсивным электронным пучком не проводилось. Тем не менее, определенные достоинства новой пушки—возможность независимой регулировки тока и т.п.—уже проявились достаточно явно.

Первые эксперименты по охлаждению новой пушкой выполнены для протонного пучка с импульсами 300 МэВ/с, 200 МэВ/с, 100 МэВ/с. Параметры электронного и протонного пучков приведены в таблице 4.

10. Заключение

С целью совершенствования системы электронного охлаждения накопителя LEAR разработана новая электронная пушка с изменяемым первеансом, энергией электронов до 35 кВ и током до 3,3 А. Первеанс пучка варьируется до $5\mu\text{A}/\text{B}^{3/2}$. Пушка выполнена по схеме адиабатической оптики. Особенностью является возможность ее использования в магнитном поле с напряженностью 0,5 кГс.

Таблица 4

Энергия электронов, кэВ	27	11.6	2.9
Напряжение между катодом и управляющим электродом, кВ	25	12	3
Ток электронного пучка, А	2.5	0.65	0.08
Число протонов в пучке	$2 \cdot 10^{10}$	$5 \cdot 10^{10}$	10^{10}
Импульс протонов, МэВ/с	300	200	100
Продольный разброс по импульсам после охлаждения $\Delta P/P$	$\pm 1.5 \cdot 10^{-4}$	$\pm 1 \cdot 10^{-4}$	$\pm 1 \cdot 10^{-4}$
Время охлаждения по продольным импульсам $\tau_{\Delta P_{ }}$, сек	3		
Время охлаждения по поперечным импульсам τ_{nV} , сек	15		
Эмитанс	4π		
Время жизни протонного пучка τ , сек	20		
Давление в системе электронного охлаждения, Торр	$3 \cdot 10^{-11}$	$3 \cdot 10^{-11}$	$3 \cdot 10^{-11}$

Авторы благодарны А.Н.Скринскому, Л.Монтане, Д.Мелу за поддержку этой работы.

11. Литература

1. Г.И.Будкер, А.Н.Скринский. *Электронное охлаждение и новые возможности в физике элементарных частиц*. УФН, 1978, N124, с.561.
2. Y.Derbehev, I.Meshkov. *Studies on electron cooling of heavy particle beams, made by the VAPP-NAP group at the Nuclear Physics Institute of the Siberian branch of the USSR Academy of Science at Novosibirsk*, CERN 77-08 (1977).
3. H.Poth. *Theory, experiment, application*, CER-EP 90-04 (1990)
4. В.А.Лебедев, А.Н.Шарапа. *Формирование электронного пучка с малой поперечной скоростью в системах с продольным магнитным полем*. ЖТФ, 1987, N5, с.975.

5. В.И.Куделайнен, И.Н.Мешков, Р.А.Салимов. *Формирование интенсивного электронного пучка в продольном магнитном поле*. ЖТФ, 1971, T41, N11 с.2294
6. J.Bosser, I.Meshkov, V.Poljakov, I.Seleznev, E.Syresin, A.Smirnov, G.Tranquille, A. Zapunjako. *Project for a variable current electron gun for the LEAR electron cooler*. CERN/ps-92-03(ar), 1992
7. J.Bosser, R.Ley, G.Tranquille, V.Bykovsky, V.Funtikov, I.Meshkov, A.Rogozin, V. Polyakov, I.Seleznev, V.Sinitsky, A.Smirnov, E.Syresin. *The new collector for the electron cooling device at LEAR*. Nucl. Ins. and Meth. A311(1992)465.
8. И.Н.Мешков, С.А.Агишев, В.Ф.Быковский, В.П.Поляков, И.А.Селезнев, А.В.Смирнов, Е.М.Сыресин и др. *Система электронного охлаждения комплекса К4 - К10*. В кн. *Накопительный комплекс тяжелых ионов К4 - К10*. Дубна, 1992.
9. В.И.Куделайнен, И.Н.Мешков, В.В.Пархомчук, Р.А.Салимов, Ф.Н.Скринский, В.Г. Файнштейн. *Глубокое торможение электронного пучка в системе с продольным магнитным полем*. ЖЭТФ, 1976, N46, с.1678.
10. А.В.Буров, В.И.Куделайнен, В.А.Лебедев, В.В.Пархомчук, А.В.Серый, В.Д.Шильцев. *Экспериментальное исследование компенсированного состояния электронного пучка*. Препринт ИЯФ 89-116, 1989.
11. J.Bosser, D.Moil, G.Tranquille, I.Meshkov, E.Syresin, V.Parkhomchuk. *Neutralisation of the LEAR E-cool electron beam space charge*. CERN/PS.93
12. Н.С.Диканский, В.И.Куделайнен, В.А.Лебедев и др. *Предельные возможности электронного охлаждения*. Препринт ИЯФ 88-61, 1988.
13. В.П.Гипкин, И.Н.Мешков, А.Н.Скринский, В.Г.Файнштейн. ПТЭ, N6, стр.26, 1972.
14. Г.В.Ступаков, Е.М.Сыресин. *Формирование облака осциллирующих электронов в диоде с тонкой анодной фольгой*. Физика плазмы 1986, N1, с.81.

12. Приложение

Плотность осциллирующих электронов в точке с потенциалом ψ может быть найдена, если известна их функция распределения в импульсном пространстве [14]. Вид функции распределения определяется ионизацией атомов газа электронами пучка, рассеянием вторичных электронов атомами газа и диффузионным уходом электронов поперек магнитного поля.

Найдем функцию распределения в точке $x = d$ для электронов ионизованных в точке x' . Кинетическое уравнение для них имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\nu}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} D \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{dn_i}{4\pi P^2 \tau_{\parallel}} \delta(P - P') \frac{\delta(\theta)}{\sin\theta}, \quad (34)$$

где θ —угол между вектором импульса и осью системы, $\nu = \tau_{\parallel}^{-1}(x') \bar{\theta}^2$ —частота рассеяния вторичных электронов на атомах газа, $\tau_{\parallel}(x')$ —время движения электрона между точками поворота, рожденного в точке x' , $\bar{\theta}^2$ —средний квадрат угла рассеяния за время $\tau_{\parallel}(x')$, r —радиус траектории вторичных электронов, относительно оси пучка, $D = \rho_H^2 \nu$ —коэффициент диффузии вторичных электронов поперек магнитного поля, $dn_i = \frac{j_b N \sigma(x') dx'}{e v'(x', d)}$ —плотность электронов в точке $x = d$, ионизованных в точке x' , $P' = P_0 \left(\frac{U_{st}}{U_0} - \psi' \right)^{1/2}$ —импульс электронов в точке $x = d$, рожденных в точке x' с потенциалом ψ' , $v' = P'/m$, $P_0 = \sqrt{2emU_0}$.

Решим это уравнение для двух предельных случаев (15) и (16). В случае (15), когда $T_{bl} \ll \tau_{sc} \ll \tau_{es}$ рассеянием и уходом электронов можно пренебречь, то есть первым и вторым слагаемым в правой части уравнения (34). Тогда функция распределения одномерна ($\theta \equiv 0$), и кинетическое уравнение (34) имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{j_b N \sigma(x') dx'}{e v'(x', d) \tau_{\parallel}(x')} \delta(P - P') \quad (35)$$

Решив уравнение (35), получаем

$$f(P, x') = \frac{j_b N \sigma(x') t dx'}{e \tau_{\parallel}(x') v'} \delta(P - P') \quad (36)$$

Поскольку накопление электронов и изменение формы потенциала происходит медленно по сравнению с периодом осцилляции, то функция

распределения является функцией координаты ионизации x' и полной энергии электрона и не зависит от текущей координаты x .

Поэтому плотность накопленных электронов в точке с координатой x равна [14]

$$dn(x, x') = \int f(P'' x') dP'' \quad (37)$$

где P'' —импульс электрона в точке x , если при $x = d$ он имел импульс P

$$\frac{P''^2}{2m} - e\varphi(x) = \frac{P^2}{2m} - eU_{st} \quad (38)$$

Подставив в интеграл функцию (36) и переходя под знаком интеграла от переменной P'' к P , получаем

$$dn(x, x') = \frac{j_b N \sigma(x') dx'}{e v'} \frac{t}{\tau_{\parallel}(x')} \int \frac{\delta(P - P') P dP}{\sqrt{P^2 - P_0^2 \left(\frac{U_{st}}{U_0} - \psi \right)}} \quad (39)$$

После интегрирования находим плотность электронов в точке x с потенциалом φ

$$dn(x, x') = \frac{j_b N \sigma(x') dx' t}{e \tau_{\parallel}(x') v(x, x')} \quad (40)$$

где $v(x, x') = \sqrt{\frac{2e}{m}(\varphi(x) - \varphi(x'))}$ —скорость электронов в точке x родившихся в точке x' . Таким образом, приходим к результату, приведенному в формуле (17).

Для стационарного случая, когда выполнено условие (16) $T_{bl} \gg \tau_{es} \gg \tau_{sc}$ левая часть уравнения (34) равна нулю. Поскольку функция распределения накопленных электронов изотропна $f(P, \theta) = f(|P|)$, то обращается в ноль и первое слагаемое в правой части уравнения (34). Умножив уравнение на $\sin\theta$ и проинтегрировав по всем углам θ , приходим к результату

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} D \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{dn_i}{4\pi P^2 \tau_{\parallel}} \delta(P - P') = 0 \quad (41)$$

Полагая, что

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} D \frac{\partial f}{\partial r} \simeq \frac{Df}{a^2},$$

где a —радиус пучка, находим функцию распределения в точке $x = d$, для электронов ионизованных в точке x'

$$f = \frac{a^2}{D(x')} \frac{dn_i \delta(P - P')}{\tau_{\parallel}(x')} = \frac{a^2}{D(x')} \frac{j_b N \sigma(x') dx' \delta(P - P')}{e v' \tau_{\parallel}(x') 4\pi P^2} \quad (42)$$

Плотность электронов в точке x для изотропной функции распределения будет равна [14]

$$dn(x, x') = 4\pi \int f(P'', x') P''^2 dP'' \quad (43)$$

где P'' —импульс в точке x , определяемый соотношением (38).

Переходя к новой переменной P , можем записать для плотности $dn(x, x')$ следующее выражение

$$dn(x, x') = 4\pi \int f(P, x') \sqrt{P^2 - P_0^2} \left(\frac{U_{st}}{U_0} - \psi(x) \right) P dP \quad (44)$$

Подставив в интеграл (44) выражение (42) получим

$$dn(x, x') = 4\pi \frac{j_b N \sigma(x') dx' a^2}{e D(x') v' \tau_{\parallel}(x')} \int \frac{\delta(P - P')}{4\pi P^2} \sqrt{P^2 - P_0^2} \left(\frac{U_{st}}{U_0} - \psi(x) \right) P dP$$

Проинтегрировав по P , приходим к результату

$$dn(x, x') = \frac{j_b N \sigma(x') dx' a^2}{e D(x') v_0 \tau_{\parallel}} \frac{\sqrt{\psi(x) - \psi'(x')}}{\left(\frac{U_{st}}{U_0} - \psi' \right)} \quad (45)$$

Коэффициент диффузии $D(x')$ в соотношении (45) равен

$$D = \frac{2}{\tau_{\parallel}(x')} \int_{x'}^d \rho_H^2(x'') \frac{4\pi e^2 N Z^2 \Lambda_1}{(m^2 v'^2(x''))^2} dx'' \quad (46)$$

где $\rho_H(x'') = v'/\omega_H$, $v' = v_0 \sqrt{\psi(x'') - \psi(x')}$ —скорость электрона в точке x'' , рожденного в точке x' . Воспользовавшись соотношением (20) для зависимости потенциала от координаты, получаем

$$D(x') = \frac{\rho_0^2}{\tau_{\parallel}(x')} \frac{\bar{\theta}_0^2 \Lambda_2}{\left[\frac{U_{st}}{U_0} + \psi'(x') \right]^{1/4}} \quad (47)$$

где $\rho_0 = v_0/\omega_H$, $\bar{\theta}_0^2 = \frac{3\pi e^4 Z^4 N d \Lambda_1}{m^2 v_0^4}$, $\Lambda_2 = \ln(1/\bar{\theta}_0^2)$

Проинтегрировав (45) по всем точкам x' , где родились вторичные электроны, найдем их полную плотность в точке x с потенциалом $\psi(x)$. Воспользовавшись соотношением (20) для $\psi(x')$, зависимостью (23) для $\sigma(\psi(x'))$ и формулой (47) для D , приходим к следующему результату

$$n(\psi) = \frac{3}{2} \frac{n_b N \sigma_0 d a^2}{\rho_0^2 \theta_1^2} \int_0^{\psi} \frac{(\psi - \psi')^{1/2}}{\left(\frac{U_{st}}{U_0} - \psi' \right)} d\psi', \quad (48)$$

где $\theta_1^2 = \bar{\theta}_0^2 \Lambda_2$. Также как в соотношении (24) разложим $n(\psi)$ в ряд по ψ .

После интегрирования (48) с точностью до членов порядка $\psi^{5/2}$ получаем плотность вторичных электронов

$$n(\psi) = n_b S_1 \psi^{3/2}, \quad (49)$$

где

$$S_1 = N \sigma_0 d \frac{U_0}{U_{st}} \frac{a^2}{\rho_0^2 \theta_1^2} = \frac{\sigma_0}{3\sigma_e} \frac{\omega_H^2 a^2}{c^2} \frac{U_0}{U_{st}} \frac{\beta_0^2}{Z^2 \Lambda_2 \Lambda_1},$$

$\sigma_e = \pi \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2$ —сечение электрона, $\beta_0 = v_0/c$.