



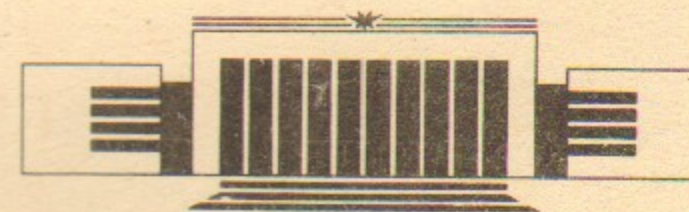
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
им. Г.И. Будкера СО РАН

7

И.В. Колоколов

МЕТОД ФУНКЦИОНАЛЬНОГО
ИНТЕГРИРОВАНИЯ
ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ,
ВЫСШИЕ КОРРЕЛЯТОРЫ
И СРЕДНИЙ ТОК В МЕЗОСКОПИЧЕСКОМ
КОЛЬЦЕ
В ПРОИЗВОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

ИЯФ 93-12



НОВОСИБИРСК

Метод функционального интегрирования
для одномерной локализации, высшие корреляторы
и средний ток в мезоскопическом кольце
в произвольном магнитном поле

И.В. Колоколов

Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера,
630090, Новосибирск 90

Аннотация

Стартуя с формулировки Абрикосова-Рыжкина задачи о частице в одномерном случайном потенциале, получены замкнутые представления для усредненных физических величин в виде функциональных интегралов, которые вычисляются точно, без использования каких-либо разложений. С их помощью получены выражения для многоточечных корреляторов высших степеней плотности и найдена среднеквадратичная дисперсия размера локализованной волновой функции. Вычислено среднее значение незатухающего тока в мезоскопической петле с произвольным магнитным потоком. (В пределе малых полей эта задача была решена недавно О.Н. Дороховым). Рассмотрен также случай конечной длины корреляции случайного потенциала.

© Институт ядерной физики СО РАН

1 Введение и формулировка модели

Андерсоновская локализация — одно из фундаментальных макроскопических квантовых явлений. Наиболее подробно исследованы одномерные системы, и для них имеются точные результаты общего характера.

Основное содержание эффекта в этом случае может быть выражено следующим образом: все собственные функции гамильтониана

$$\hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + U(x), \quad (1)$$

со случайным потенциалом $U(x)$, представляют собой локализованные волновые пакеты (подробное изложение соответствующего аппарата, библиографию и строгие формулировки см. в книге [1]). Это утверждение справедливо и в высокоэнергетическом пределе, рассматриваемом в данной работе.

Непосредственно вычислимыми величинами являются средние по ансамблю потенциалов $U(x)$. Мера этого усреднения восстанавливается по пространственным корреляционным свойствам имеющейся в распоряжении реализации, и в простейшем случае потенциала типа "белый шум" имеет вид:

$$\mathcal{D}U \exp \left(-\frac{1}{2D} \int_{-L}^L U^2(x) dx \right), \quad (2)$$

$$\langle U(x)U(x') \rangle = D\delta(x - x').$$

Здесь $(-L, L)$ — интервал прямой, занимаемый нашей системой. Андерсон [2] показал, что критерием локализации состояний с энергией может служить отличие в термодинамическом пределе от нуля коррелятора плотность-плотность:

$$\begin{aligned} p_E(x, x') &= \lim_{L \rightarrow \infty} \langle \sum_n \delta(E - E_n) |\Psi_n(x)|^2 |\Psi_n(x')|^2 \rangle = \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\epsilon}{\pi} \langle |G(x, x'|E + i\epsilon)|^2 \rangle, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\Psi_n(x)$ — собственные функции \hat{H} :

$$\hat{H}\Psi_n(x) = E_n\Psi_n(x)$$

а $G(x, x'|E + i\epsilon)$ — резольвента \hat{H} :

$$(\hat{H} - E)G(x, x'|E + i\epsilon) = \delta(x - x'). \quad (4)$$

Действительно, волновые функции непрерывного спектра в каждой точке $\sim 1/L^{1/2}$, сумма по n дает эффективно фактор L , так что $p_E(x, x') \sim 1/L \rightarrow 0$. Для пространственно-однородного в среднем потенциала вероятность обнаружить локализованное в окрестности данной точки состояние $\sim 1/L$, но сама $\Psi_n(x)$ в этом случае при $L \rightarrow \infty$ от L не зависит, так что вклад в $p_E(x, x')$ дают только нормируемые состояния. (Подразумеваются граничные условия на концах интервала $(-L, L)$, обеспечивающие эрмитовость \hat{H} .)

Для вычисления величин типа (3) были развиты два подхода. Первый, так называемый “фазовый формализм”, позволяет, в принципе, представлять всевозможные средние по ансамблю (2) при произвольных энергиях E [3, 4] в виде решений уравнений в частных производных типа Фоккера—Планка (обзор достижений см. в [1]). Однако явные ответы он дает только в квазиклассическом с точки зрения кинетики режиме

$$\frac{D}{E^{3/2}} \ll 1, \quad (5)$$

где может быть использован второй подход [5]: выделение и суммирование инфракрасно-сингулярных членов в рядах теории возмущений по параметру (5) (см. также обзор [6]). Прямое проведение такой программы требует довольно изощренных построений и трудоемких вычислений.

В работах [7, 8] было замечено, что сумма ведущих членов теории возмущений по потенциалу $U(x)$ соответствует неким средним для спина 1/2 в случайном магнитном поле с гауссовой статистикой. (По существу, такое же представление использовалось в работе [9]). Мы приведем здесь вывод этой спиновой модели, несколько видоизменив аргументацию.

На волновую функцию частицы на отрезке $(-L, L)$ наложим следующие граничные условия:

$$\frac{d}{dx}\Psi_n(x = -L) = \Psi_n(x = L) = 0. \quad (6)$$

Функция Грина (4) может быть выражена через решения $u(x), \tilde{u}(x)$ задачи Коши для уравнения

$$(\hat{H} - E)u = (\hat{H} - E)\tilde{u} = 0, \quad (7)$$

$$u'(-L) = 0, u(-L) = 1, \tilde{u}(-L) = 1, \tilde{u}(L) = 0;$$

$$G(x, x') = \frac{1}{W} \begin{cases} u(x)\tilde{u}(x'), & x < x' \\ u(x')\tilde{u}(x), & x' < x \end{cases}$$

Здесь W — вронскиан решений u и \tilde{u} :

$$W = -u'(x)\tilde{u}(x) + u(x)\tilde{u}'(x). \quad (8)$$

Все интересующие нас физические величины могут быть определены в терминах только одного решения, например, $u(x)$ (см. ниже). Для функции $u(x)$ естественно определяются “плосковолновые компоненты” $v_1(x)$ и $v_2(x)$:

$$\begin{aligned} v_1(x) &= e^{-ikx}(u'(x) + iku(x)) \\ v_2(x) &= -e^{ikx}(u'(x) - iku(x)), E = k^2 \end{aligned} \quad (9)$$

$$u(x) = \frac{1}{2ik}(v_1(x)e^{ikx} + v_2(x)e^{-ikx}),$$

так что $v_1 = 0$ ($v_2 = 0$) в случае плоской волны, бегущей справа налево (слева направо). Уравнение (7) эквивалентно следующему матричному уравнению первого порядка:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(x)/2ik, & U(x)e^{-2ikx}/2ik \\ -U(x)e^{2ikx}/2ik, & -U(x)/2ik \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix} \quad (10)$$

и редукции

$$v_1(x) = v_2^*(x). \quad (11)$$

Из (10) видно, что производные v_1 и v_2 по x малы при малом $U(x)$, то есть $v_1(x)$ и $v_2(x)$ изменяются медленно в сравнении с $\exp(\pm ikx)$. Перепишем (10) в более компактных обозначениях:

$$\dot{\hat{v}} = (i\varphi(x) + \zeta^+(x)s^- + \zeta^-(x)s^+) \hat{v}. \quad (12)$$

Здесь

$$\hat{v} = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x) = -U(x)/k, \quad \zeta^\pm(x) = \pm U(x) \exp(\pm 2ikx), \quad (13)$$

$s^z = \sigma^z/2$, $s^\pm = (\sigma^x \pm i\sigma^y)/2$ — обычные спиновые операторы, и точка здесь и ниже обозначает производную по x . Формальное решение уравнения (12) может быть записано в виде:

$$\hat{v}(x) = T(x, -L)\hat{v}(-L)$$

$$T(x, -L) = T \exp \left(\int_{-L}^x (i\varphi(t)s^z + \zeta^+(t)s^- + \zeta^-(t)s^+) dt \right), \quad (14)$$

где символ T обозначает хронологическое упорядочение вдоль интервала $(-L, L)$. Представляя T -экспоненту (14) в виде ряда по полям $\varphi(t)$, $\zeta^\pm(t)$, мы увидим, что усредненное по $\mathcal{D}U(x)$ выражение для любого функционала от компонент $v_1(x)$, $v_2(x)$ будет комбинацией интегралов по неким интервалам от корреляционных функций полей $\varphi(t)$, $\zeta^\pm(t)$:

$$\int dt dt' \langle \varphi(t)\varphi(t') \rangle, \quad \int dt dt' \langle \zeta^+(t)\zeta^-(t') \rangle, \\ \int dt dt' \langle \varphi(t)\zeta^\pm(t') \rangle, \quad \int dt dt' \langle \zeta^+(t)\zeta^+(t') \rangle, \quad \int dt dt' \langle \zeta^-(t)\zeta^-(t') \rangle. \quad (15)$$

При этом интегралы последних трех типов будут интегралами от быстроосциллирующих функций. Их значения не растут с ростом интервала и убывают с ростом k . Интегралы же первых двух типов соответствуют инфракрасно-сингулярным вкладам и линейно растут с ростом интервала интегрирования. Таким образом, выделение существенных в термодинамическом пределе членов ряда теории возмущений сводится к пренебрежению корреляторами $\langle \zeta^+\zeta^+ \rangle$, $\langle \zeta^-\zeta^- \rangle$, и $\langle \varphi, \zeta^\pm \rangle$, что эквивалентно предположению о статистической независимости полей φ и ζ^\pm и фазовой инвариантности веса усреднения по $\mathcal{D}\zeta^\pm$. Для потенциала

типа “белый шум” соответствующая мера интегрирования по полям φ и ζ^\pm имеет вид:

$$\mathcal{D}\varphi(x)\mathcal{D}\zeta^\pm(x) \exp \left\{ -\frac{2}{\alpha} \int_{-L}^L (a\varphi^2(x) + \zeta^+(x)\zeta^-(x)) dx \right\}, \quad (16)$$

где

$$\alpha = \frac{D}{2k^2}, \quad a = \frac{1}{8}. \quad (17)$$

В дальнейшем мы будем считать параметр a произвольным (он соответствует случайному сбою фазы и, как мы убедимся ниже, в термодинамическом пределе от его конкретного значения ничего не зависит).

Формулы (14) и (16) для задачи о частице на прямой в случайном потенциале были впервые предложены в работе [7]. Наш вывод, не обращающийся к наличию уровня Ферми, позволяет предположить, что такая модель Абрикосова—Рыжкина имеет универсальные для инфракрасного поведения черты. Она легко допускает обобщение на потенциалы с конечной длиной корреляции и может быть использована для изучения спектральных свойств операторов, не являющихся в буквальном смысле случайными (см. Заключение).

Отброшенные при выводе формул (14), (16) члены меньше оставленных в $\sim 1/(kL)$ раз. Следовательно, эта модель применима и для мезоскопических систем (см. п.5), поскольку неравенство $1/(kL) \ll 1$ при больших k совместимо с $l \geq L$, где l — длина свободного пробега.

В работе [7] с помощью представления (14), (16) вычислялась проводимость одномерного металла. К сожалению, был вновь использован метод теории возмущений и связанные с ним громоздкие и малопрозрачные построения, не адекватные простоте исходной модели. В данной работе мы покажем, что модель Абрикосова—Рыжкина точно решается с помощью метода функционального интегрирования, вычислим многоточечные корреляторы высших степеней плотности, найдем среднеквадратичную дисперсию размера локализованной волновой функции и зависимость длины локализации от корреляционной длины потенциала.

В качестве физического приложения метода вычислено среднее значение абсолютной величины незатухающего тока в мезоскопической петле с произвольным магнитным потоком Φ . (В пределе малых Φ эта задача была решена в недавней работе [9]).

2 Функциональное представление средних от $\hat{v}(x)$

Явное вычисление функции $\hat{v}(x)$ по формулам (12), (14) в виде функционала полей $\varphi(x)$, $\zeta^\pm(x)$, невозможно. Буквально такая же проблема возникает при попытке написать замкнутое функциональное представление для статсуммы квантового ферромагнетика. Она была решена в работах [10]—[12], и методом, предложенным в них, мы и воспользуемся.

Упорядоченная операторная экспонента $T(x, -L)$ определяется уравнением

$$\dot{T} = (i\varphi(t)s^z + \zeta^+(t)s^- + \zeta^-(t)s^-)T \quad (18)$$

и начальным условием

$$T(x = -L, -L) = 1. \quad (19)$$

Рассмотрим оператор, заданный в виде произведения обычных матричных экспонент:

$$\tilde{T}(x, -L) = \exp(s^+ \psi^-(x)) \exp\left(is^z \int_{-L}^x \rho dt\right) \times \quad (20)$$

$$\times \exp\left(s^- \int_{-L}^x dt \psi^+(t) \exp\left(\int_{-L}^t \rho d\tau\right)\right) \exp(-s^+ \psi^-(-L)).$$

Здесь $\psi^\pm(x)$, $\rho(x)$ — некие новые поля. Он удовлетворяет уравнению:

$$\dot{T} = \left\{ (i\rho + 2\psi^+ \psi^-)s^z + \psi^+ s^- + (\psi^- - i\rho\psi^- - \psi^+(\psi^-)^2)s^+ \right\} T, \quad (21)$$

и последний фактор в (20) обеспечивает выполнение начального условия

$$\tilde{T}(-L, -L) = 1. \quad (22)$$

Таким образом, замена переменных в функциональном интеграле по мере (16):

$$\begin{aligned} i\varphi &= i\rho + 2\psi^+ \psi^-, \\ \zeta^- &= \dot{\psi}^- - i\rho\psi^- - \psi^+(\psi^-)^2 \\ \zeta^+ &= \dot{\psi}^+ \end{aligned} \quad (23)$$

приводит упорядоченную экспоненту $T(x, -L)$ к форме (20):

$$T(x, -L) = \tilde{T}(x, -L), \quad (24)$$

и позволяет построить явное функциональное представление для любых усредняемых величин. (Параметризация полей со значениями в группе $SL(2, C)$, аналогичная (23), использовалась также в работе [13]). Для вычисления якобиана важно, что замену (23) достаточно знать только в одну сторону: от (ϕ, ζ^\pm) к (ρ, ψ^\pm) . Якобиан $J[\rho, \psi^\pm]$:

$$D\varphi D\zeta^+ D\zeta^- = J[\rho, \psi^\pm] D\rho D\psi^+ D\psi^- \quad (25)$$

зависит от регуляризации отображения (23) и того, какие условия на поле ψ^- мы наложили: начальные или граничные. Обычные периодические граничные условия делают замену (23) необратимой. Следуя работам [11], [12], будем считать, что поле $\psi^-(x)$ подчиняется начальному условию:

$$\psi^-(-L) = \psi_0, \quad (26)$$

однако, в отличие от [11], [12], конкретное значение ψ_0 будем выбирать в зависимости от ситуации.

Регуляризация отображения (23) определяется физическим смыслом модели: δ -функциональный коррелятор (2) является предельным значением симметричной корреляционной функции с конечной корреляционной длиной. При любом таком способе доопределения δ -функции, предельное значение корреляторов

$$\langle \zeta^+(t) \int_0^t \zeta^-(t') dt' \rangle = \langle \zeta^-(t) \int_0^t \zeta^+(t') dt' \rangle \quad (27)$$

будет равно $\frac{1}{2} \frac{\alpha}{2}$, и соответствует доопределению ступенчатой функции $\theta(x)$:

$$\theta(0) = 1/2. \quad (28)$$

Дискретизация преобразования (23), обеспечивающая выполнение равенств (27), имеет вид: $(\zeta_n^\pm = \zeta^\pm(t_n), \rho_n = \rho(t_n), \dots, n = 1, \dots, M, t_n = -L + \frac{2Ln}{M}, h = \frac{2L}{M} \rightarrow 0, M \rightarrow \infty)$

$$\begin{aligned} i\phi_n &= i\rho_n + \psi_n^+(\psi_n^- + \psi_{n-1}^-), \\ \zeta_n^- &= \frac{1}{h}(\psi_n^- - \psi_{n-1}^-) - \frac{1}{2}i\rho_n(\psi_n^- + \psi_{n-1}^-) - \frac{1}{4}\psi_n^+(\psi_n^- + \psi_{n-1}^-)^2, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\zeta_n^+ = \psi_n^+.$$

Дифференциал отображения (29) — нижнетреугольная матрица, и ее детерминант — якобиан \mathcal{J} — равен произведению диагональных элементов:

$$\mathcal{J} = \text{const} \exp \left(-\frac{i}{2} \int_{-L}^L \rho dt \right). \quad (30)$$

Подставляя замену (23) и якобиан (25), (30) в меру (16), получим вес усреднения по полям (ρ, ψ^\pm) в виде:

$$\begin{aligned} & N \mathcal{D}\rho \mathcal{D}\psi^+ \mathcal{D}\psi^- \exp(-S(\rho, \psi^\pm)), \\ & S(\rho, \psi^\pm) = \\ & = \frac{2}{\alpha} \int_{-L}^L dx \left(a\rho^2 + \psi^+ \psi^- - (1+4a)i\rho\psi^+\psi^- - (1+4a)(\psi^+\psi^-)^2 \right) + \\ & + \frac{i}{2} \int_{-L}^L dx \rho. \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь N — нормировочный фактор, зависящий от L и α .

При вычислении якобиана (25) мы рассматривали (ρ, ψ^\pm) и (ϕ, ζ^\pm) как наборы независимых комплексных переменных, иначе говоря, как разные системы координат в пространстве полевых конфигураций \mathcal{C}^{3M} . Условия же

$$\text{Im}\varphi = 0, \zeta^+ = (\zeta^-)^*, \quad (32)$$

изначально заложенные в модели, определяют поверхность Σ в \mathcal{C}^{3M} , вдоль которой интегрируется форма $\mathcal{D}\varphi \wedge \mathcal{D}\zeta^+ \wedge \mathcal{D}\zeta^-$ или $\mathcal{D}\rho \wedge \mathcal{D}\psi^+ \wedge \mathcal{D}\psi^-$. Уравнение (32) для Σ , с точки зрения переменных (ρ, ψ^\pm) — неявное, но если мы интегрируем голоморфную функцию в пространстве \mathcal{C}^{3M} , то, по теореме Коши—Пуанкаре, поверхность интегрирования можно деформировать в области сходимости произвольным образом. Существует непрерывное семейство поверхностей, включающее Σ и “стандартную” поверхность Σ' :

$$\Sigma' = \{ \text{Im}\rho = 0, \psi^+ = (\psi^-)^* \}, \quad (33)$$

которое целиком лежит в области “пертурбативной” сходимости (в каждом порядке теории возмущений) интеграла по мере (31) (явный вид

такой гомотопии приведен в работе [10]). Таким образом, рассматривая функциональный интеграл как сумму ряда теории возмущений [14], мы можем заменить поверхность интегрирования Σ на стандартную Σ' .

Однако для возможности перехода от Σ к Σ' необходимо, чтобы усредняемые величины (а не только действие) были записаны в виде, допускающем аналитическое продолжение с поверхности Σ . Конструктивно это означает, что при определении какой-либо физической величины в терминах элементов матрицы $T(x, -L)$ нигде не должно встречаться комплексное сопряжение.

3 Выражение коррелятора плотность-плотность через функции $\hat{v}(x)$

Формула (3) выражает коррелятор $p_E(x, x')$ через сингулярную при $\epsilon \rightarrow +0$ часть функции Грина $G(x, x'|E + i\epsilon)$. В представлении (8) сингулярность возникает за счет нулей вронскиана $W(E)$ на вещественной оси. Пренебрегая величиной ϵ в числителе (8) и подставляя

$$W(E \pm i\epsilon) = W(E) \pm i\epsilon W'(E) \quad (34)$$

в знаменатель, получим

$$p_E(x, x') = \left\langle \frac{u^2(x)\tilde{u}^2(x')}{W'(E)} \delta(W) \right\rangle, x' > x. \quad (35)$$

$W(E)$ не зависит от x , и, следовательно, мы можем положить в (8) $x = L$:

$$W = u(L) \quad (36)$$

В произведении с $\delta(W) = \delta(u(L))$ решение $\tilde{u}(x)$ пропорционально $u(x)$ и коэффициент пропорциональности определяется условиями (7). Таким образом, для произвольного функционала $\mathcal{F}[\tilde{u}(x)]$ имеет место равенство:

$$\mathcal{F}[\tilde{u}(x)] \delta(u(L)) = \mathcal{F} \left[\frac{u(x)}{u'(L)} \right] \delta(u(L)). \quad (37)$$

Величина $W'(E)$, согласно (36), может быть выражена через производную решения $u(x)$ по энергии E :

$$W'(E) = \frac{\partial u(L)}{\partial E}. \quad (38)$$

Функция $g(x) = \partial u(x)/\partial E$ удовлетворяет уравнению:

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + U(x) - E\right) g(x) = u(x), \quad (39)$$

и начальному условию:

$$g(x = -L) = g'(x = -L) = 0. \quad (40)$$

Подстановка $g(x) = q(x)u(x)$ приводит к линейному уравнению первого порядка на $q'(x)$; решая его, получим:

$$g(x) = u(x) \int_{-L}^x \frac{dy}{u^2(y)} \int_{-L}^y dy_1 u^2(y_1). \quad (41)$$

и:

$$\frac{1}{W'(E)} \delta(u(L)) = \frac{1}{g(L)} \delta(u(L)) = \frac{u'(L)}{\int_{-L}^L u^2(y) dy} \delta(u(L)). \quad (42)$$

Таким образом, коррелятор $p_E(x, x')$ выражается через решение $u(x)$ задачи Коши (7) следующим образом:

$$p_E(x, x') = \left\langle \frac{u^2(x)u^2(x')}{u'(L) \int_{-L}^L u^2(y) dy} \delta(u(L)) \right\rangle, \quad x' > x. \quad (43)$$

Однако в высокоэнергетическом пределе (5) мы можем избавиться от δ -функции и получить простую формулу для $p_E(x, x')$ в терминах медленных амплитуд $v_{1,2}(x)$. Действительно, в окрестности любой данной точки x_0 функция $u(x)$ может быть записана в виде:

$$u(x) = u_{sl}(x) \sin(kx + \delta), \quad (44)$$

где огибающая $u_{sl}(x)$ и фаза δ изменяются мало на расстояниях $\sim 1/k$. Усредним выражение (43) по интервалу ΔL положений правого края нашего отрезка $(-L, L)$:

$$\tilde{p}_E(x, x') = \frac{1}{\Delta L} \int_L^{L+\Delta L} p_E(x, x') dL \quad (45)$$

$$\frac{1}{k} \ll \Delta L \ll \frac{2}{\alpha} \equiv l. \quad (46)$$

(Здесь мы ввели стандартное обозначение l для длины локализации). В термодинамическом пределе $\tilde{p}_E(x, x')$ и $p_E(x, x')$ совпадают. С другой стороны, значение функции $u(x)$ в данной точке от положения правого края L , по построению, не зависит. Интеграл в знаменателе (43) определяется только огибающей $u_{sl}(x)$ и при вариации L от L до $L + \Delta L$ изменяется на относительно малую величину. Усреднение (45) существенно только для фактора $\delta(u(L))/u'(L)$:

$$\frac{1}{\Delta L} \int_L^{L+\Delta L} dL \frac{1}{u'(L)} \delta(u(L)) = \frac{1}{\pi k u_{sl}^2(L)}, \quad (47)$$

поскольку условия (46) эквивалентны тому, что $u_{sl}(x)$ в интервале усреднения можно считать постоянной величиной. Аналогично получается соотношение между $u_{sl}^2(x)$ и $u^2(x)$, в частности:

$$u_{sl}^2(L) \approx \frac{2}{\Delta L} \int_L^{L+\Delta L} dL u^2(L). \quad (48)$$

Подставляя в (43)–(48) выражение $u(x)$ через амплитуды $\hat{v}(x)$, пренебрегая малыми при $k \rightarrow \infty$ вкладами, и оставляя в числителе формулы (43) только “резонансные” слагаемые, получим:

$$p_E(x, x') \approx \tilde{p}_E(x, x') \approx \frac{1}{2\pi k} \left\langle \frac{v_1(x)v_2(x)v_1(x')v_2(x')}{v_1(L)v_2(L) \int_{-L}^L v_1(y)v_2(y) dy} \right\rangle, \quad x' > x. \quad (49)$$

Можно проверить, что отброшенные “нерезонансные” слагаемые, содержащие осциллирующие множители $\exp \pm 2ik(x - x')$, после усреднения по случайным полям дадут экспоненциально малый по αL вклад, и ими можно пренебречь.

4 Функциональные интегралы для корреляторов типа плотность-плотность их вычисление

Выражение (49) имеет вид, допускающий аналитическое продолжение по функциям $v_{1,2}(x)$ с поверхности $v_1 = (v_2)^*$. Для простоты положим

$\exp(ikL) = 1$ (в термодинамическом пределе это не является ограничением). Тогда начальные условия для $\hat{v}(x)$ имеют вид:

$$\hat{v}(-L) = ik \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Чтобы определить $\hat{v}(x)$, подставим в (14) оператор эволюции $T(x, -L)$ в виде (20), выбрав при этом величину ψ_0 равной 1:

$$\psi_0 = \psi^-(-L) = 1. \quad (51)$$

В результате получим:

$$\hat{v}(x) = \exp\left(-\frac{i}{2} \int_{-L}^x \rho dt\right) \begin{pmatrix} \psi^-(x) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (52)$$

и выражение для $p_E(x, x')$:

$$p_E(x, x') \approx \frac{1}{2\pi k} \left\langle \frac{\psi^-(x)\psi^-(x') \exp\left(-i \int_{-L}^x \rho dt - i \int_{-L}^{x'} \rho dt + i \int_{-L}^L \rho dt\right)}{\psi^-(L) \int_{-L}^L \psi^-(y) \exp\left(-i \int_{-L}^y \rho dt\right) dy} \right\rangle, \quad (53)$$

$x' > x,$

где усреднение по мере $\mathcal{D}\rho \mathcal{D}\psi^+ \mathcal{D}\psi^-$ проводится с весом (31). Для вычисления получившегося функционального интеграла используем прием, аналогичный так называемой "бозонизации" в моделях теории поля [15]: используя тождество

$$\exp(-S(\rho, \psi^\pm)) = \int \mathcal{D}\eta \exp(-\tilde{S}(\eta, \rho, \psi^\pm)),$$

$$\tilde{S}(\eta, \rho, \psi^\pm) =$$

$$= \frac{2}{\alpha} \int_{-L}^L dx \left((1+4a)\eta^2 + a\rho^2 + \psi^+\psi^- + (1+4a)(2\eta - i\rho)\psi^+\psi^- \right) + \frac{i}{2} \int_{-L}^L dx \rho. \quad (54)$$

и калибровочное преобразование:

$$\psi^\pm(x) = \chi^\pm \exp\left(\pm(1+4a) \int_{-L}^x dt (2\eta - i\rho)\right), \quad (55)$$

мы избавимся от нелинейных членов в действии. Якобиан поворота (55), с учетом регуляризации (29), равен:

$$\mathcal{J}_R = \text{const} \exp\left(-\frac{1+4a}{2} \int_{-L}^L (2\eta - i\rho) dt\right). \quad (56)$$

В усредненное выражение (53) поля η и ρ входят лишь в комбинации

$$\int_{-L}^x (2(1+4a)\eta - 4i\rho) dt$$

Естественно считать ее новой переменной интегрирования:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= 2(1+4a)\eta - 4i\rho, \\ \xi(-L) &= 0 \\ \mathcal{D}\rho \mathcal{D}\eta &= \text{const} \mathcal{D}\rho \mathcal{D}\xi \end{aligned} \quad (57)$$

после чего гауссово $\mathcal{D}\rho$ — интегрирование легко выполняется, и мы приходим к выражениям для меры:

$$\text{const} \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\chi^+ \mathcal{D}\chi^- \exp\left(-\frac{1}{2\alpha} \int_{-L}^L dx \dot{\xi}^2 - \frac{2}{\alpha} \int_{-L}^L dx \chi^+ \dot{\chi}^- - \frac{\xi(L)}{2}\right) \quad (58)$$

и для усредненной величины:

$$p_E(x, x') = \frac{1}{2\pi k} \left\langle \frac{\chi^-(x)\chi^-(x') \exp(-\xi(x) - \xi(x') + \xi(L))}{\chi^-(L) \int_{-L}^L \chi^-(y) e^{-\xi(y)} dy} \right\rangle, \quad x' > x, \quad (59)$$

(Подразумевается равенство в пределе (5)). Начальное условие для поля $\chi^-(x)$, следующее из (51):

$$\chi^-(-L) = 1. \quad (60)$$

означает, что в $\chi^-(x)$ содержится как флуктуационная $\chi_f^-(x)$, так и регулярная части:

$$\chi^-(x) = 1 + \chi_f^-(x), \quad \chi_f^-(-L) = 0. \quad (61)$$

Составляющая $\chi_f^-(x)$ не дает вклада в $p_E(x, x')$, поскольку (59) не содержит сопряженного поля. Таким образом, осталось только усреднение по полю $\xi(x)$ с весом:

$$\exp\left(-\frac{\alpha L}{4}\right) N' \mathcal{D}\xi \exp\left(-\frac{1}{2\alpha} \int_{-L}^L dx \dot{\xi}^2 - \frac{\xi(L)}{2}\right) \quad (62)$$

Нормировочная константа N' определяется квадратичным по $\dot{\xi}$ членом:

$$N' \mathcal{D}\xi \exp\left(-\frac{1}{2\alpha} \int_{-L}^L dx \dot{\xi}^2\right) = 1, \quad (63)$$

а фактор $\exp(-\alpha L/4)$ обеспечивает выполнение равенства $\langle 1 \rangle = 1$ для среднего по полной мере (62). Согласно вышесказанному, коррелятор $p_E(x, x')$ может быть представлен в виде интеграла по $\mathcal{D}\xi$ следующим образом:

$$\begin{aligned} p_E(x, x') &= \\ &= \frac{1}{2\pi k} N' \exp\left(-\frac{\alpha L}{4}\right) \int_{\xi(-L)=0} \mathcal{D}\xi \exp\left(-\frac{1}{2\alpha} \int_{-L}^L dt \dot{\xi}^2 - \frac{\xi(L)}{2}\right) \times \\ &\quad \times \exp(-\xi(x) - \xi(x') + \xi(L)) \left\{ \int_{-L}^L \exp(-\xi(t)) dt \right\}^{-1} = \\ &= \frac{N'}{4\pi k \alpha} \exp\left(-\frac{\alpha L}{4}\right) \times \\ &\quad \times \int_0^\infty d\lambda \int_{\xi(-L)=0} \mathcal{D}\xi \exp\left(-\frac{1}{2\alpha} \int_{-L}^L dt (\dot{\xi}^2 + \lambda e^{-\xi}) + \frac{\xi(L)}{2}\right) \times \\ &\quad \times \exp(-\xi(x) - \xi(x')) = \\ &= N' (4\pi k \alpha)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma d\sigma' \exp\left(\frac{\sigma + \sigma'}{2}\right) \times \\ &\quad \times \int_{\xi(-L)=\sigma', \xi(L)=\sigma} \mathcal{D}\xi \exp\left(-\frac{1}{2\alpha} \int_{-L}^L dt (\dot{\xi}^2 + e^{-\xi}) - \frac{\alpha L}{4}\right) e^{-\xi(x) - \xi(x')}. \end{aligned} \quad (64)$$

К последнему выражению мы пришли, совершив замены переменных:

$$\lambda = e^{-\sigma'}, \quad \xi \rightarrow \xi - \sigma' \quad (65)$$

и явно выделив интегралы по значениям $\xi(t)$ в конечных точках $t = L$ и $t = -L$. Последний интеграл по траекториям является стандартным интегралом типа Фейнмана—Каца [16] и равен следующему матричному элементу:

$$p_E(x, x') = \exp\left(-\frac{\alpha L}{4}\right) (4\pi k \alpha)^{-1} \times \\ \times \langle e^{\xi/2} | e^{-(L-x')\hat{H}} e^{-\xi} e^{-(x'-x)\hat{H}} e^{-\xi} e^{-(x+L)\hat{H}} | e^{\xi/2} \rangle, \quad (66)$$

с гамильтонианом:

$$\hat{H} = \frac{\alpha}{2} \partial_\xi^2 - \frac{1}{2\alpha} e^{-\xi}. \quad (67)$$

Функция $e^{\xi/2}$ растет при $\xi \rightarrow \infty$ и поэтому ее нельзя представить в виде линейной суперпозиции собственных функций \hat{H} :

$$\hat{H} f_\nu(\xi) = -\frac{\alpha}{2} \nu^2 f_\nu(\xi), \quad f_\nu(\xi) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\nu \operatorname{sh} 2\pi\nu} K_{2i\nu} \left(\frac{2}{\alpha} e^{-\xi/2} \right), \quad (68)$$

$$\langle f_\nu | f_{\nu'} \rangle = \delta(\nu - \nu').$$

Однако явное решение соответствующего эволюционного уравнения приводит к следующему асимптотическому соотношению:

$$\exp(-T\hat{H}) e^{\xi/2} \rightarrow \exp\left(\frac{\alpha T}{8}\right) \Upsilon_0(\xi) = \frac{2}{\alpha} \exp\left(\frac{\alpha T}{8}\right) K_1 \left(\frac{2}{\alpha} e^{-\xi/2} \right). \quad (69)$$

Здесь $K_\mu(z)$ — стандартное обозначение для модифицированной функции Бесселя. Функцию

$$\Upsilon_0(\xi) e^{-\xi} = \frac{2}{\alpha} K_1 \left(\frac{2}{\alpha} e^{-\xi/2} \right) e^{-\xi}$$

уже можно разложить по полному набору (68); таким образом, коррелятор $p_E(x, x')$ равен:

$$p_E(x, x') = \\ = \frac{1}{4\pi k \alpha} \exp\left(-\frac{\alpha|x-x'|}{8}\right) \langle \Upsilon_0(\xi) e^{-\xi} | \exp(-|x-x'|\hat{H}) | \Upsilon_0(\xi) e^{-\xi} \rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha}{\pi^3 k} \exp\left(-\frac{\alpha|x-x'|}{8}\right) \times \\
&\times \int_0^\infty d\nu \nu \operatorname{sh} 2\pi\nu \exp\left(-\frac{\alpha\nu^2}{2}|x-x'|\right) \left\{ \int_0^\infty dy y K_1(y) K_{2i\nu}(y) \right\}^2 = \\
&= \frac{\alpha\pi}{2k} \exp\left(-\frac{\alpha|x-x'|}{8}\right) \int_0^\infty \frac{d\nu \nu \operatorname{sh} \pi\nu}{\operatorname{ch}^3 \pi\nu} (\nu^2 + \frac{1}{4})^2 \exp\left(-\frac{\alpha\nu^2}{2}|x-x'|\right) \quad (70)
\end{aligned}$$

Формула (70) с точностью до переобозначения $\alpha/2 = l^{-1}$ совпадает с известным результатом [1], [6]. С помощью данного метода могут быть вычислены и многоточечные корреляторы высших степеней плотности, например: $(x_1 < x_2 < \dots < x_{2m}, m > 1)$

$$\begin{aligned}
&2\pi k p_E^{(q,m)}(x_1, x_2, \dots, x_{2m-1}, x_{2m}) = \\
&= 2\pi k \lim_{L \rightarrow \infty} \left\langle \sum_n \delta(E - E_n) |\Psi_n(x_1)|^{2q} |\Psi_n(x_2)|^{2q} \times \right. \\
&\quad \times \dots \times |\Psi_n(x_{2m-1})|^{2q} |\Psi_n(x_{2m})|^{2q} \left. \right\rangle = \\
&= \frac{2^{2qm} (qm-1)! k}{(2qm-2)!} \times \\
&\times \lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \epsilon^{2qm-1} \langle |G(x_1, x_2|E+i\epsilon) \dots G(x_{2m-1}, x_{2m}|E+i\epsilon)|^{2q} \rangle = \\
&= \left\langle \left(\prod_{j=1}^m u^{2q}(x_{2j-1}) \tilde{u}^{2q}(x_{2j}) \right) \frac{2\pi k}{(W'(E))^{2qm-1}} \delta(W(E)) \right\rangle = \quad (71) \\
&= \left\langle \left(\prod_{j=1}^m u^{2q}(x_{2j-1}) u^{2q}(x_{2j}) \right) \frac{2\pi k}{\left(\int_{-L}^L u^2(y) dy \right)^{2qm-1}} \delta(u(L)) \right\rangle \approx \\
&\approx \left\langle \prod_{j=1}^{2m} (v_1(x_j) v_2(x_j))^q \left(\int_{-L}^L v_1(y) v_2(y) dy \right)^{-2qm+1} (v_1(L) v_2(L))^{-1} \right\rangle = \\
&= \frac{N'}{(2\alpha)^{2qm-1} (2qm-2)!} \exp\left(-\frac{\alpha L}{4}\right) \times \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma d\sigma' e^{(\sigma+\sigma')/2} \int_{\xi(-L)=\sigma', \xi(L)=\sigma} \mathcal{D}\xi \exp\left(-\frac{1}{2\alpha} \int_{-L}^L dt (\dot{\xi}^2 + e^{-\xi})\right) \times \\
&\quad \times \exp\left(-\sum_{j=1}^{2m} q\xi(x_j)\right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\alpha)^{2qm-1} (2qm-2)!} \exp\left(-\frac{\alpha(x_{2m}-x_1)}{8}\right) \times \\
&\quad \times \langle \Upsilon_0(\xi) | \prod_{j=1}^{2m-1} e^{-q\xi} e^{-(x_{j+1}-x_j)\hat{H}} | \Upsilon_0(\xi) e^{-q\xi} \rangle = \\
&= \left(\frac{\alpha}{8}\right)^{2mq-1} 2^{4(q+m)-6} \frac{\pi^{m+1}}{\Gamma(2mq-1) (\Gamma(2q))^2} \left(\frac{\Gamma(q)}{\Gamma(q+1/2)}\right)^{2m-2} \times \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{\alpha(x_{2m}-x_1)}{8}\right) \times \\
&\quad \times \int_0^\infty \int_0^\infty \prod_{j=1}^{2m-1} d\nu_j \exp\left(-\frac{\nu_j^2 \alpha}{2} \Delta x_j\right) \nu_j \operatorname{sh} 2\pi\nu_j P^{(q)}(\nu_1) P^{(q)}(\nu_{2m-1}) \times \\
&\quad \times \prod_{s=1}^{2m-2} Q^{(q)}(\nu_s, \nu_{s+1}),
\end{aligned}$$

где $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$ и функции $P^{(q)}(\nu)$ и $Q^{(q)}(\nu, \nu')$ определены следующим образом:

$$P^{(q)}(\nu) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \pi\nu} [(q-1/2)^2 + \nu^2] \prod_{j=1}^{q-1} ((j-1/2)^2 + \nu^2)^2, \quad (72)$$

$$Q^{(q)}(\nu, \nu') = \frac{\nu^2 - \nu'^2}{\operatorname{ch} 2\pi\nu - \operatorname{ch} 2\pi\nu'} \prod_{j=1}^{q-1} \left[1 + \frac{2}{j^2} (\nu^2 + \nu'^2) + \frac{1}{j^4} (\nu^2 - \nu'^2) \right]. \quad (73)$$

Выражение для $p_E^{(q,1)}(x_1, x_2)$ получается из (71) формальной заменой произведения по s от 1 до $2m-2$ на единицу и подстановкой $m=1$ в оставшийся интеграл.

Как одно из возможных приложений формул (71)–(72) рассмотрим дисперсию размера локализованных волновых функций. Из (71) видно, что далекая экспоненциальная асимптотика плотности вероятности не флуктуирует. С другой стороны, в качестве размера пакета R_E естественно выбрать какую-нибудь интегральную характеристику, например, определить величину R_E так:

$$R_E^{-1} = \frac{4}{3} \int_{-L}^L dx |\psi(x)|^4. \quad (74)$$

Фактор $4/3$ сокращает среднее значение быстро осциллирующего множителя $\sin^4(kx + \delta)$ (см. (44)). Тогда

$$\langle R_E^{-1} \rangle = \frac{4}{3\rho(E)} \int_{-L}^L dx p_E(x, x) = \frac{2\alpha}{9} = \frac{4}{9l}. \quad (75)$$

В формуле (75) $\rho(E)$ обозначает плотность состояний в области больших E :

$$\rho(E) = \frac{L}{\pi k}. \quad (76)$$

Среднее значение квадрата R_E^{-1} определяется корреляционной функцией $\langle |\psi(x)\psi(x')|^4 \rangle$:

$$\langle R_E^{-2} \rangle = \frac{32}{9\rho(E)} \int_{-L}^L dx \int_{-L}^x dx' p_E^{(2,1)}(x', x). \quad (77)$$

Подставляя сюда явное выражение для $p_E^{(2,1)}(x', x)$:

$$p_E^{(2,1)}(x', x) = \frac{\pi\alpha^3}{576} \times \\ \times e^{-\alpha(x-x')/8} \int_0^\infty d\nu \exp\left(-\frac{\alpha\nu^2}{2}(x-x')\right) \frac{\text{sh}\pi\nu}{\text{ch}^3\pi\nu} \nu \left(\frac{9}{4} + \nu^2\right)^2 \left(\frac{1}{4} + \nu^2\right)^4. \quad (78)$$

и вычисляя интегралы по dx' и $d\nu$, получим:

$$\langle R_E^{-2} \rangle \approx 0.23 \frac{1}{l^2}. \quad (79)$$

Вместе с (75) это дает значение среднеквадратичной относительной дисперсии величины R_E^{-1} :

$$\frac{\langle R_E^{-2} \rangle - \langle R_E^{-1} \rangle^2}{\langle R_E^{-2} \rangle} \approx 0.13. \quad (80)$$

5 Средний ток в одномерном мезоскопическом кольце с магнитным потоком Φ

Рассмотрим одномерное металлическое кольцо в поперечном магнитном поле. Среднее значение оператора тока для одного электрона по стационарному состоянию в произвольном потенциале становится отличным

от нуля, в энергии появляется T -нечетный член, и поверхности Ферми для левых и правых направлений средней скорости оказываются сдвинутыми друг относительно друга. В результате в основном состоянии по кольцу будет течь незатухающий ток [17]. Имеются аргументы ([19], [9]) в пользу того, что полный ток в кольце будет порядка среднего тока I ; переносимого одноэлектронным состоянием на уровне Ферми. Мы будем считать, что размер кольца $2L$ сравним с длиной свободного пробега. В этом случае эффекты локализации не приведут к полному подавлению I , но сделают зависимость I от магнитного поля весьма нетривиальной (см. ниже). (Случай упорядоченного неоднородного проводника рассматривался в работе [20]).

Имеется калибровка, в которой волновая функция электрона в кольце с магнитным потоком Φ подчиняется граничному условию:

$$\psi(L) = \exp(2\pi i\Phi) \psi(-L), \quad (81)$$

а гамильтониан по-прежнему имеет вид (1). Среднее абсолютное значение тока, переносимого состоянием с энергией E , в пределе (5) можно представить в виде [18], [9]:

$$I = \left\langle \frac{\pi k}{L} \sum_n \delta(E - E_n) |j_n| \right\rangle, \\ j_n = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial E_n}{\partial \Phi}, \quad (82)$$

($\hbar = c = e = 1$, квант магнитного потока равен единице). Условие (81) нелокально, и поэтому формулу (82) для I нельзя переписать в терминах функций типа $u(x)$, $\tilde{u}(x)$ из предыдущего параграфа. Однако, как показано в работе [9], I может быть выражен непосредственно через элементы T -матрицы (14), для которых, собственно, мы и имеем функциональное представление.

Действительно, матрица $T \equiv T(-L, L)$, по построению, удовлетворяет соотношениям:

$$\sigma^z T^\dagger \sigma^z = T^{-1}, \det T = 1, \quad (83)$$

и, следовательно, может быть параметризована следующим образом:

$$T = \begin{pmatrix} \text{ch}\Gamma e^{i\alpha_s} & \text{sh}\Gamma e^{i\beta_s} \\ \text{sh}\Gamma e^{-i\beta_s} & \text{ch}\Gamma e^{-i\alpha_s} \end{pmatrix}, \quad (84)$$

где Γ , α_s и β_s — медленно изменяющиеся вещественные функции L . Отображение пространства начальных данных в точке $x = -L$ для уравнения (7) в пространство решений в точке $x = L$ в базисе $(u' \pm iku)$ осуществляется трансфер-матрицей T :

$$T = \exp(ikL\sigma^z) T \exp(ikL\sigma^z) = \begin{pmatrix} \text{ch}\Gamma e^{i(\alpha_s + kL)}, & \text{sh}\Gamma e^{i\beta_s} \\ \text{sh}\Gamma e^{-i\beta_s}, & \text{ch}\Gamma e^{-i(\alpha_s + kL)} \end{pmatrix}. \quad (85)$$

Условие (81) эквивалентно существованию у матрицы T собственного значения $e^{i\theta}$, $\theta = 2\pi\Phi$, то есть:

$$\det(T - e^{i\theta}) = 1,$$

или

$$\tau(E) \equiv \text{ch}\Gamma \cos(\alpha_s + kL) = \cos\theta. \quad (86)$$

Последнее равенство определяет собственные значения энергии $E = k^2$, и, согласно формуле (82) для j_n , мы имеем:

$$\sum_n \delta(E - E_n) |j_n| = \sum_n \delta(E - E_n) \left| \frac{\sin\theta}{\tau'(E)} \right| = \delta(\tau(E) - \cos\theta) |\sin\theta|. \quad (87)$$

Аналогично предыдущему параграфу, от δ -функции можно избавиться усреднением по малому интервалу ΔL длин L ($1/k \ll \Delta L \ll l$):

$$I = \left\langle \frac{\pi k}{L} \delta(\tau(E) - \cos\theta) \right\rangle |\sin\theta| \approx \left\langle \frac{1}{\sqrt{\text{sh}^2\Gamma + \sin^2\theta}} \right\rangle \left| \frac{k}{L} \sin\theta \right| = \left| \frac{k}{L} \sin\theta \right| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu \exp(-\mu^2(\text{sh}^2\Gamma + \sin^2\theta)) \right\rangle. \quad (88)$$

Важно, что величина $\text{sh}^2\Gamma$ может быть выражена через элементы матрицы T в виде, допускающем аналитическое продолжение с поверхности Σ :

$$\text{sh}^2\Gamma = (1, 0) T^t s^{-1} T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (89)$$

Здесь, как обычно, значок t обозначает транспонирование (без комплексного сопряжения!). Выражение для $\text{sh}^2\Gamma$ в терминах полей ρ, ψ^\pm будет

наиболее простым, если выбрать нулевые начальные условия для поля ψ^- :

$$\psi^-(-L) = 0. \quad (90)$$

В этом случае после подстановки (20) в (89) мы получим:

$$\text{sh}^2\Gamma = \psi^-(L) \int_{-L}^L dt \psi^+(t) \exp\left(-i \int_t^L \rho d\tau\right). \quad (91)$$

Правая часть (91) билинейна по полям ψ^\pm , но нелокальна. Поэтому, прежде чем проводить $\mathcal{D}\psi^\pm$ -интегрирование, удобно преобразовать $\exp(-\mu^2 \text{sh}^2\Gamma)$ в интеграл от линейной по ψ^\pm комбинации:

$$I = \left| \frac{k \sin\theta}{\sqrt{\pi L}} \right| \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu \exp(-\mu^2 \sin^2\theta) \times \left\langle \exp\left\{ -\mu^2 \psi^-(L) \int_{-L}^L dt \psi^+(t) \exp\left(-i \int_t^L \rho d\tau\right) \right\} \right\rangle = \left| \frac{k \sin\theta}{\sqrt{\pi L}} \right| \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu \int dz dz^* \exp(-\mu^2 \sin^2\theta - |z|^2) \times \left\langle \exp\left\{ -i\mu z \psi^-(L) - i\mu z^* \int_{-L}^L dt \psi^+(t) \exp\left(-i \int_t^L \rho d\tau\right) \right\} \right\rangle. \quad (92)$$

Повторяя шаги (54)—(56) предыдущего параграфа, вводя переменную $\xi(t)$ аналогично (57):

$$\dot{\xi} = -2(1 + 4a)\eta + 4ia\rho, \quad \xi(L) = 0 \quad (93)$$

$$\mathcal{D}\rho \mathcal{D}\eta = \text{const } \mathcal{D}\rho \mathcal{D}\xi$$

и выполняя гауссовы интегрирования по $\mathcal{D}\rho$ и $\mathcal{D}\eta$, мы приходим к следующему выражению для I :

$$I = \exp\left(-\frac{\alpha L}{4}\right) \left| \frac{k}{L} \sin\theta \right| \frac{1}{\pi^{3/2}} N' \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu \int dz dz^* \exp(-\mu^2 \sin^2\theta - |z|^2) \times \int_{\xi(L)=0} \mathcal{D}\xi \exp\left(-\frac{1}{2\alpha} \int_{-L}^L dx \left(\dot{\xi}^2 + \alpha^2 \mu^2 |z|^2 e^{-\xi}\right) - \frac{\xi(-L)}{2}\right). \quad (94)$$

Перейдем от μ к переменной интегрирования σ :

$$\alpha^2 \mu^2 |z|^2 = e^{-\sigma}, \quad (95)$$

и сдвинем траекторию $\xi(x)$ на $-\sigma$:

$$\xi(x) \rightarrow \xi(x) - \sigma.$$

Тогда интеграл по $dz dz^*$ вычисляется, и мы получаем представление для I в виде матричного элемента:

$$I = \exp\left(-\frac{\alpha L}{4}\right) \left| \frac{k}{\sqrt{\pi\alpha L}} \sin\theta \right| \langle \Upsilon_2(\xi) | \exp(-2L\hat{H}) | \Upsilon_1(\xi) \rangle, \quad (96)$$

где \hat{H} определен формулой (67), а функции $\Upsilon_{1,2}(\xi)$ равны:

$$\Upsilon_1(\xi) = \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) \quad (97)$$

и

$$\Upsilon_2(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left\{-\frac{2}{\alpha} \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) |\sin\theta|\right\}. \quad (98)$$

Используя разложение по полному набору (68) собственных функций \hat{H} и интегральное представление для $K_{2i\nu}(y)$, мы приходим к явному выражению для тока I : ($l^{-1} = \alpha/2$)

$$I = \frac{k}{L} \left(\frac{l}{L}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{L}{4l}\right) \sin^2\theta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt \operatorname{ch}t}{\sin^2\theta + \operatorname{sh}^2t} \exp\left(-\frac{l}{L}t^2\right) \quad (99)$$

При изменении $\sin^2\theta$ от 0 до 1, I монотонно возрастает от 0 до I_{\max} . Первый порядок разложения по θ при $\theta \rightarrow 0$ согласуется с результатом работы [9]. Заметим, однако, что параметр l/L определяет не только абсолютную величину I , но и зависимость I от магнитного поля:

$$\frac{I}{I_{\max}} = \frac{\sin^2\theta}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\operatorname{ch}y} \exp\left(-\frac{l}{L}y^2\right)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt \operatorname{ch}t}{\sin^2\theta + \operatorname{sh}^2t} \exp\left(-\frac{l}{L}t^2\right) \quad (100)$$

что позволяет, в принципе, определить l/L из хода экспериментальной кривой $I(\theta)$.

6 Заключение

Если случайный потенциал $U(x)$ имеет малую, но конечную длину корреляции κ^{-1} :

$$\langle U(x)U(x') \rangle = \frac{1}{2} D\kappa \exp(-\kappa|x-x'|), \quad (101)$$

так что $1 \ll \kappa l$, но $k/\kappa \sim 1$, то в пределе больших энергий ее влияние учитывается просто перенормировкой параметра α , или, что то же, длины локализации l :

$$\alpha_\kappa = \frac{\alpha_0}{1 + 4k^2/\kappa^2}. \quad (102)$$

Действительно, коррелятору (101) соответствует мера усреднения по полям ζ^\pm (см. (13)):

$$D\zeta^\pm \exp\left\{-\frac{2}{\alpha} \int_{-L}^L \left(\frac{1}{\kappa^2} |\zeta|^2 + 2i \frac{k}{\kappa^2} (\zeta^+ \zeta^- - \zeta^- \zeta^+) + \left(1 + \frac{4k^2}{\kappa^2}\right) |\zeta|^2\right) dx\right\}. \quad (103)$$

После проведения "бозонизации" и перехода к переменной ξ , мы приходим к некоему эффективному действию, в котором членам с производными ζ^\pm в (103) будут соответствовать слагаемые с тем же количеством производных поля ξ . Поскольку невозмущенная задача содержит единственный параметр размерности длины — l , то вклады этих "немарковских" членов в различные корреляторы будут подавлены соответствующей степенью величины $(\kappa l)^{-1}$, и ими можно пренебречь.

Переменная σ' , возникшая в (64), (65), может рассматриваться как глобальный параметр порядка, отвечающий явлению локализации. Действительно, отличие от нуля в термодинамическом пределе коррелятора $p_E(x, x')$, с точки зрения формул (64), (65), есть следствие того, что:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\sigma'}{\alpha L} = \frac{1}{2} > 0. \quad (104)$$

С другой стороны, величина $\lambda = \exp(-\sigma')$ сопряжена к норме волновой функции, и неравенство (104) соответствует экспоненциальному в среднем росту решений уравнения (7).

В заключение заметим, что инфракрасно-сингулярные члены ряда теории возмущений, определяющие поведение волновых функций на больших расстояниях, зависят только от неких усредненных характеристик

потенциала $U(x)$. В частности, если величина

$$b_{\Delta}(x, d) = \int_{x-\Delta}^{x+\Delta} dx' \exp(ik(x-x')) U(x)U(x') \quad (105)$$

начиная с некоторого $\Delta : k^{-1} \ll \Delta \ll l$, перестает зависеть от x , то свойства волновых функций в таком потенциале в термодинамическом пределе могут изучаться в рамках модели Абрикосова-Рыжкина (14)—(16) с эффективными параметрами a и α .

Отметим, что с помощью метода, аналогичного использованному в данной работе, можно получить явные функциональные представления для средних по ансамблю (2) от любых комбинаций функций Грина при произвольных энергиях E [21]. К сожалению, эффективный способ вычисления этих интегралов по траекториям удастся найти только в простейших случаях.

7 Благодарности

Я благодарен П.Г.Сильвестеру, В.В. Соколову, И.Б. Хрипловичу и М. Черткову за многочисленные стимулирующие дискуссии и О.П. Сушкову и Б.В. Чирикову за полезные вопросы и советы. Я хотел бы поблагодарить А. Гамба и М. Мартеллини за теплый прием в Миланском университете, где была сделана важная часть данной работы и М. Мартеллини также за одно, весьма ценное, замечание. Я благодарен Фонду Сороса за финансовую поддержку данной работы.

Список литературы

- [1] И.М. Лифшиц, С.А. Гредескул, Л.А. Пастур. Введение в теорию неупорядоченных систем. М.: Наука, 1982.
- [2] P. Anderson. Phys. Rev. 1958, v.109, 1492.
- [3] B.I. Halperin. Phys. Rev. 1965, v.139A, 104.
- [4] Frish H.L., Lloyd S.R. Phys. Rev. 1960, v.120, 1179.
- [5] В.Л. Березинский. ЖЭТФ, 1973, т.65, с.125.
- [6] A.A. Gogolin. Phys. Rept., 1982, v.86, p.1.
- [7] А.А. Абрикосов, И.А. Рыжкин. ЖЭТФ, 1976, т.71, с.1204.
- [8] A.A. Abrikosov, I.A. Ryzhkin. Adv. in Phys., 1978, v.27, p.146.
- [9] О.Н. Дорохов. ЖЭТФ, 1992, т.101, с.966.
- [10] I.V. Kolokolov. Phys. Lett. 1986, v.114A, p.99.
- [11] И.В. Колоколов, Е.В. Подивилов. ЖЭТФ, 1989, т.95, с.211.
- [12] I.V. Kolokolov. Ann. of Phys. (NY), 1990, v.202, p.165.
- [13] A. Gerasimov, A. Morozov, M. Olshanetsky, A. Marshakov, S. Shatashvili. Int. J. of Mod. Phys. (NY), 1990, v.5A, p.2495.
- [14] В.Н. Попов. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М.: Атомиздат, 1976.
- [15] A.M. Polyakov, P.B. Wiegmann. Phys. Lett. 1983, v.131B, p.121.
- [16] R.P. Feynmann, A.B. Hibbs, Quantum mechanics and path integrals. McGr.-Hill B.C., New York, 1965.
- [17] M. Buttiker, Y. Imry, R. Landauer. Phys. Lett. 1983, v.96A, p.365.
- [18] N. Byers, C.N. Yang. Phys. Rev. Lett. 1961, v.7, p.46.
- [19] H.-F. Cheung, F.K. Riedel. Phys. Rev. B, 1989, v.40, 9498.
- [20] Е.М. Серебряный, В.Д. Скаржинский. Труды ФИАН, 1989, т.197, М.: Наука, с.186.
- [21] I.V. Kolokolov. In Proc. of the Milan University Seminar, Milano, 1992.