

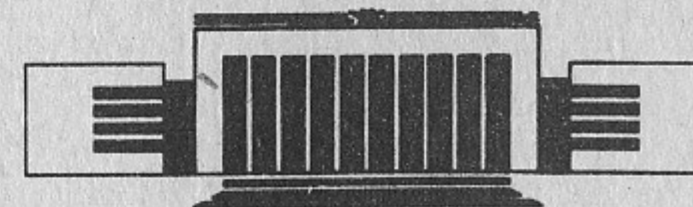


64
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
им. Г.И. Будкера СО РАН

Д.Н. Шатилов

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ЭФФЕКТОВ ВСТРЕЧИ
НА БОЛЬШИХ АМПЛИТУДАХ
И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ ЖИЗНИ

ИЯФ 92-79



НОВОСИБИРСК

Компьютерное моделирование эффектов встречи
на больших амплитудах и определение времени жизни

Д.Н.Шатилов

Институт Ядерной Физики им. Г.И.Будкера
630090, Новосибирск 90, Россия

АННОТАЦИЯ

Компьютерное моделирование эффектов встречи требует очень большого процессорного времени для определения времени жизни. При классическом подходе почти все оно уходит на бесполезное улучшение статистики на малых амплитудах. Предлагаемый новый метод постепенного, шаг за шагом, построения распределения частиц в пространстве амплитуд позволяет сократить время моделирования на несколько порядков. Одним из главных достоинств метода является возможность контролировать его точность. Приводится физическое обоснование, алгоритм и условия применимости, а также некоторые полученные результаты.

© Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера, СО РАН

ВВЕДЕНИЕ

Мы будем рассматривать только некогерентные эффекты взаимодействия встречных электрон-позитронных сгустков. Сильная нелинейность этого взаимодействия приводит к появлению нелинейных резонансов и стохастических областей в местах их перекрытия, в результате чего движение в фазовом пространстве становится очень сложным и, вообще говоря, не поддающимся аналитическому описанию. В связи с этим большое значение приобрело компьютерное моделирование, которое стало одним из основных методов изучения эффектов встречи. Существенным достоинством моделирования является возможность рассматривать нереальные ситуации, искусственно "выключая" различные эффекты и выявляя таким образом их вклад и взаимное влияние. Новый подход, позволяющий значительно сократить затраты времени при моделировании, будет предметом нашего дальнейшего рассмотрения.

Искажение равновесной функции распределения, вызванное эффектами встречи, можно условно разделить на две части: на малых амплитудах ("ядро" распределения) и на больших ("хвосты"). Первое приводит к увеличению среднеквадратичных размеров пучков, второе - к уменьшению времени жизни. Оба эти эффекта ограничивают максимально допустимые токи пучков и, таким образом, светимость. Причем между собой они связаны слабо, т.е. можно иметь сильно раздутый пучок при хорошем времени жизни и, наоборот, очень плохое время жизни при небольшом среднеквадратичном размере пучков. Определение времени жизни является здесь наиболее трудоемкой задачей. Проблема состоит в том, что для получения

достоверной статистики в "хвостах" требуется очень большое процессорное время. И почти все оно окажется потраченным практически впустую на улучшение статистики в "ядре", которая будет многократно превышать требуемую. Такое положение побудило искать пути, позволяющие перераспределить время моделирования в пользу больших амплитуд. При этом, естественно, возникает вопрос о возможной потере точности при искусственном изменении алгоритма. Точность метода является одной из главных его характеристик и этому вопросу будет уделено в дальнейшем особое внимание.

Метод развит для случая "сильный-слабый" пучок. Но эта особенность не является принципиальной и после небольшой модификации он может быть использован и в модели "сильный-сильный" пучок.

ОПИСАНИЕ МЕТОДА

Можно выделить два подхода к моделированию равновесного распределения. Первый состоит в рассмотрении большого ансамбля из N независимых друг от друга частиц. Если время наблюдения за каждой из них много больше времени затухания, то начальные условия (координаты и импульсы в момент старта) будут несущественны. В противном случае они могут отразиться на результате и надо специально заботиться об их правильном выборе. При другом подходе моделируется движение только одной частицы. Если время наблюдения за ней в N раз превышает аналогичное время в первом варианте, то оба они становятся эквивалентны. При этом в последнем отсутствует проблема начальных условий. В то же время при наличии параллельного процессора первый подход дает выигрыш во времени. Собственно говоря, для дальнейшего изложения не имеет значения, какой из двух вариантов используется, но для определенности будем рассматривать движение одной частицы в течение большого времени (как правило, несколько сот времен затуханий).

Наряду с координатами и импульсами мы будем широко использовать другой набор переменных - нормализованные амплитуды и фазы, определяемые следующими соотношениями:

$$x_{\beta} = \sigma_{\beta} A_x \cos \varphi_x \quad x'_{\beta} = -\frac{\sigma_{\beta x}}{\beta_x} A_x (\sin \varphi_x + \alpha_x \cos \varphi_x)$$

$$z_{\beta} = \sigma_{\beta z} A_z \cos \varphi_z \quad z'_{\beta} = -\frac{\sigma_{\beta z}}{\beta_z} A_z (\sin \varphi_z + \alpha_z \cos \varphi_z), \quad (1)$$

$$s = \sigma_1 A_s \cos \varphi_s \quad \frac{\Delta E}{E_0} = \sigma_E A_s \sin \varphi_s.$$

Здесь все параметры (σ , β , α) относятся к невозмущенному пучку.

В процессе моделирования частица совершает сложное движение в шестимерном фазовом пространстве. Равновесная функция распределения и плотность потока в этом пространстве являются, видимо, наиболее полной информацией, которую можно извлечь, но не вся она будет равноценной. Наибольший интерес представляет распределение в пространстве амплитуд, так как амплитуда является "медленной" переменной. Именно амплитуды определяют нелинейный сдвиг частот и, таким образом, попадание в область нелинейного резонанса. Распределение по фазам менее информативно, так как это "быстрая" переменная. Вместе с тем, оно тоже существенно для движения в резонансной области. Что же касается потоков в фазовом пространстве, то наиболее важным является поток частиц на аперттуру (задаваемую как предельные значения амплитуд). Именно он определяет время жизни, а не распределение в пространстве амплитуд, хотя они и взаимосвязаны.

Для простоты предположим на время, что мы имеем дело с двумерной задачей (детальное обсуждение трехмерности проводится ниже в специальной главе) и рассмотрим более подробно движение частицы в амплитудной плоскости. Мы будем фиксировать ее положение не непрерывно, а лишь в определенные моменты времени на каждом обороте (в месте встречи), так что она будет двигаться скачкообразно от точки к точке. Эти скачки вызываются затуханием, шумом и преобразованием в месте встречи (толчок от встречного сгустка), а также возможной нелинейностью преобразования через структуру накопителя.

Проведем в плоскости амплитуд линию, которая делит ее на две односвязные области (рис.1). Назовем эти области внутренней (I) и внешней (II). На первом шаге нового алгоритма мы будем фиксировать все случаи перехода частицы из внутренней области во внешнюю (будем называть их "вылетами") и запоминать ее координаты и импульсы в этот момент. На амплитудной плоскости эти точки образуют своеобразное гало вокруг линии раздела (рис.2). Через некоторое время мы будем располагать статистикой таких вылетов, достаточной для того, чтобы правильно воспроизвести

потоки из внутренней области. Это позволит нам перейти к следующему шагу.

Представим, что внутренняя область - это "черный ящик", т.е. мы не можем наблюдать за частицей, когда она туда попадает. Тогда ее истинная траектория будет состоять из большого количества отрезков, начинающихся в одной из точек вылета и заканчивающихся на линии раздела двух областей. Причем движение частицы на каждом таком отрезке не зависит от того, какие отрезки траектории были пройдены перед этим и как двигалась частица внутри черного ящика. Итак, на втором шаге, как только частица попадает в черный ящик, она сразу же принудительно сажается в одну из точек вылета (будем называть это "рестартом") и продолжает движение во внешней области. Точки для рестарта выбираются случайным образом из полного набора всех вылетов, запомненных на предыдущем шаге.

Следует отметить, что этот алгоритм нарушает ход событий во времени. Дело в том, что реально существует корреляция между пространственным расположением отрезков траектории на амплитудной плоскости и временем их прохождения. Это связано с тем, что после попадания во внутреннюю область частица некоторое время проводит вблизи линии раздела и имеется большая вероятность выскочить опять наружу недалеко от этого места. Другими словами, из-за хаотичности движения частица может произвести целую группу вылетов на каком то локальном участке, прежде чем ей удастся совершить далекое путешествие, углубившись в ту или другую сторону. Если же выбирать точки рестарта случайным образом, то эта корреляция будет отсутствовать. К счастью, такая перестановка отрезков траектории во времени никак не отразится на характере движения частицы во внешней области, т.е. мы получим совершенно правильное распределение и потоки в фазовом пространстве. Это связано с важным свойством рассматриваемой системы - отсутствием у нее памяти. Последнее означает, что движение частицы определяется только ее координатами и импульсами в данный момент времени (а также шумом) и никак не зависит от того, каким образом частица попала в данную точку, какие координаты и импульсы были у нее до этого. Единственное, что требуется - это правильно воспроизвести статистику вылетов во внешнюю область, т.е. соотношение между вероятностями попасть при вылете в определенные области фазового пространства.

Теперь легко понять механизм дальнейшего продвижения в область больших амплитуд. На втором шаге проводится еще одна линия (рис.3), которая делит внешнюю область на две части (II и III), причем общая граница есть только у областей с соседними номерами. В процессе моделирования на каждом обороте устанавливается, в какой из трех областей находится частица. Если она попадает в I-ю область, делается рестарт. Если же она совершает переход из II-й области в III-ю, то запоминаются ее координаты и импульсы в этот момент (таким образом накапливается статистика вылетов через новую линию раздела). В дальнейшем мы будем придерживаться следующей терминологии: область амплитудной плоскости, где движение частицы не моделируется и откуда производится рестарт, будем называть черным ящиком. Новая линия раздела, которая станет границей черного ящика на следующем шаге, делит оставшуюся часть амплитудной плоскости на внутреннюю и внешнюю области (на втором шаге это II-я и III-я области соответственно). На третьем шаге проводится очередная линия, разделяющая III-ю область на две, а I-я и II-я области объединяются в один новый черный ящик и алгоритм повторяется. Выигрыш во времени, который дает такой метод, вычисляется как отношение числа рестартов к числу соответствующих вылетов и составляет, как правило, 5 - 10 раз на каждом шаге.

Примерно в таком виде метод уже был предложен ранее Джоном Ирвином (John Irwin [1]). В качестве линии раздела в амплитудной плоскости он использовал дугу окружности с центром в начале координат, а радиус окружности подбирался таким образом, чтобы частица проводила 90% времени во внутренней области и 10% во внешней. Такое решение привлекает своей простотой и может давать в ряде случаев хорошие результаты, однако при определении времени жизни возможна неконтролируемая потеря точности. Проблема сохранения точности является здесь ключевой. Ее решение осложняется тем, что мы хотим развить универсальный метод, который должен работать в широком диапазоне допустимых параметров, то есть давать правильные результаты для систем с очень разными (практически - любыми) фазовыми "портретами".

Строго говоря, имеется всего один источник возможных ошибок - это неправильная (недостаточная) статистика вылетов из черного ящика. Но то, как это будет сказываться на точности получаемого результата, зависит уже от многих факторов: время моделирования,

времени затухания, форма и место расположения линии раздела на амплитудной плоскости. Как легко догадаться, проблема точности напрямую связана с выигрышем во времени. Можно повышать точность за счет уменьшения эффективности метода, например, увеличив время моделирования на каждом шаге и уменьшив расстояние между линиями раздела. Задача состоит в том, чтобы достичь здесь оптимального компромисса, т.е. иметь высокую эффективность при достаточно хорошей гарантированной точности.

Времена затухания определяют амплитуду шума в единицах нормализованных амплитуд в соответствии с формулой:

$$\delta_A = 2\sqrt{\alpha} . \quad (2)$$

Здесь α - декремент затухания, а δ_A - среднеквадратичная величина шумового скачка амплитуды после одного оборота. При этом шум можно с хорошей точностью считать гауссовым. Время затухания определяется как $1/\alpha$ и является естественным временным масштабом системы. Для разных степеней свободы эти времена различны, но все они одного порядка. Наибольшее из них мы будем обозначать через τ , а время моделирования, измеренное в единицах τ , через T .

Для того, чтобы лучше понять влияние формы линии раздела, обратимся к примеру, изображенному на рис.4. Здесь мы видим два резонанса, которые сильно искажают равновесную функцию распределения. Первый расположен в области небольших амплитуд (его видно по искажению линий уровня). Второй, изображенный в виде резонансной линии и резонансных векторов, играет решающую роль в процессе гибели частиц. Штриховой линией показан наиболее вероятный путь ухода частицы на апертуру: сначала она добирается кратчайшим путем до второго резонанса (за счет шума), а затем, захватившись в него, довольно быстро может достичь очень больших амплитуд (такое движение вдоль резонансной линии называется стримингом [2]). Наличие первого резонанса приводит к тому, что линия раздела, выбранная в виде дуги окружности, пересекает много линий уровня, т.е. плотность распределения вдоль нее меняется на несколько порядков. В результате, из-за ограниченности времени набора статистики, все вылеты через эту линию могут оказаться сосредоточенными в одном месте (в районе первого резонанса). В области, где проходит наиболее вероятный путь ухода на апертуру, их может не оказаться вовсе. Это означает, что мы

просто исключили наиболее вероятный процесс гибели частиц из рассмотрения на всех последующих шагах. Ошибка во времени жизни может при этом составить несколько порядков! При увеличении времени T можно, конечно, дожидаться вылетов в нужном направлении. Однако, малая статистика таких вылетов приведет к неправильному определению вероятности этого процесса, что опять скажется на времени жизни.

Какой же должна быть оптимальная форма линии раздела? На первый взгляд, основным требованием является равенство потоков наружу на всем ее протяжении. Действительно, при достаточном количестве вылетов выполнение этого условия гарантирует от ситуаций типа вышеописанной. Вместе с тем, такой выбор имеет существенные недостатки. Во-первых, он не вполне соответствует нашей цели - продвижению в область больших амплитуд, т.к. возможно образование обширных областей на малых амплитудах с очень маленькими потоками, или потоками "не в ту сторону". В результате эти области в течение нескольких шагов могут оказаться "внешними" несмотря на то, что вероятность оказаться в них будет велика, и это существенно снизит эффективность метода. Кроме того, поскольку речь идет о потоках через линию в одну сторону, для определения этой линии необходимо будет запоминать потоки из каждой ячейки амплитудной плоскости в каждую сторону отдельно, что потребует очень большого объема памяти.

Более удачным оказался другой подход: вместо линии равных потоков взять линию равной плотности. На первый взгляд, такая замена может привести к серьезным неприятностям, т.к. при наличии сильной фазовой конвекции на линии уровня могут образоваться участки с очень маленькими потоками наружу, т.е. опять вылеты будут распределены очень неравномерно вдоль линии раздела. Но теперь это уже не сможет привести к потере наиболее вероятного (или любого другого) пути гибели частицы. В самом деле, на следующем шаге мы должны будем получить примерно такое же распределение снаружи этой линии раздела, то есть примерно одинаковую (и достаточно большую!) плотность на всем ее протяжении. И это уже гарантирует, что мы правильно воспроизведем вероятность любого "путешествия", которое начинается в черном ящике и пересекает полосу с хорошо определенной плотностью распределения.

Чтобы прояснить смысл последнего утверждения, обратимся к

рис.5, на котором изображена сходная с рис.4 ситуация. Пунктирными линиями здесь показаны линии токов, благодаря которым почти все вылеты опять локализованы в одном месте несмотря на то, что линия раздела совпадает с линией уровня. Наиболее вероятный путь гибели частицы, как и на рис.4, связан с захватом во второй резонанс и продвижением вдоль него на большие амплитуды. Но теперь, как мы видим, короткий путь из "ядра" к этому резонансу уже маловероятен. Тем не менее, даже если существует какой-то "канал", пересекающий линию раздела в месте, где не было зафиксировано ни одного вылета, мы сможем правильно воспроизвести вероятность попасть в него на следующем шаге, если плотность распределения на этой линии будет достаточно высокой. Под плотностью здесь подразумевается количество попаданий частицы в ячейку амплитудной плоскости в процессе моделирования. Можно по-разному оценивать ее необходимую величину (в дальнейшем будем называть ее критической плотностью¹), но наиболее надежным представляется следующий критерий: среднее расстояние между точками полученного распределения должно быть много меньше амплитуды шума δ_A . Это будет гарантией того, что мы не упустим никаких деталей фазового портрета. Кроме того, это является критерием статистической достоверности полученной линии уровня. Полезно отметить, что время моделирования T , требуемое для выполнения этого критерия, не зависит от времени затухания τ (для двумерной задачи).

Требования к точности (она определяется временем моделирования T), с которой линия раздела должна совпадать с истинной линией уровня, не слишком высоки. Даже вариация истинной плотности в два-три раза вдоль линии раздела не окажет практически никакого влияния на итоговую точность времени жизни (которая будет определяться главным образом статистикой вылетов), так как

¹ Обращаем внимание на возможную путаницу, связанную с употреблением слова "плотность". Когда речь идет о функции распределения, то плотность, конечно, падает с продвижением в сторону больших амплитуд. Когда же мы говорим о количестве попаданий частицы в ячейку амплитудной плоскости в процессе моделирования, то плотность примерно одинакова на каждом шаге. О какой именно плотности идет речь можно понять из контекста.

не нарушится главный критерий: плотность останется достаточно высокой на всем протяжении этой линии.

Нам осталось понять, каким должно быть время T и во сколько раз должна падать плотность распределения между последовательными линиями раздела. Расстояние между ними удобно измерять числом уровней k , равному логарифму изменения плотности. При этом необходимо иметь в виду следующее. Во-первых, должно выполняться условие $T \gg 1$, иначе мы не получим правильного распределения. Во-вторых, чем больше расстояние между линиями раздела, тем больше должно быть время T . В-третьих, плотность, полученная за время T на линии уровня с номером k , зависит также от конкретного вида функции распределения, т.е. заранее она не известна. В-четвертых, необходимо получить достаточно большое число вылетов. Для оценки достоверности их статистики критерий $1/\sqrt{N}$ не подходит, так как вылеты, как правило, происходят группами. Вместо этого можно взять критерий $\sqrt{d/N}$, где N - полное число всех вылетов, а d - среднее число вылетов в группе.

Для оценки оптимального расстояния между линиями раздела предположим, что на каждом шаге требуется одно и то же время $T=T_0$ для достижения критической плотности на линии с номером $k=0$ (это будет граница черного ящика). Полное время, необходимое для продвижения на m уровней, можно оценить как

$$t = \frac{m}{k} T_0 e^k. \quad (3)$$

Здесь $m/k=1$ - число шагов, а $T_0 \exp(k)=T$ - время моделирования на каждом шаге (при этом на уровне k достигается критическая плотность). Минимум t достигается при $k=1$, т.е. плотность между линиями раздела должна падать в e раз. На самом деле, если зафиксировать точность конечного результата, то надо минимизировать другую функцию. Действительно, на каждом шаге мы допускаем некоторую относительную ошибку в определении потоков через линию раздела, которую можно оценить как $\sqrt{d/N} \ll 1$. При правильном выборе линий раздела и достаточном времени моделирования точность полученного времени жизни определяется в основном статистикой вылетов и составляет $\sim 1/\sqrt{d/N}$. При этом мы неявно подразумевали (для оценки), что число групп вылетов через последовательные линии раздела примерно одинаково, если в результате на этих линиях достигается одинаковая плотность. Таким образом, при фиксированной итоговой точности, время

моделирования на каждом шаге обратно пропорционально квадрату числа шагов, а полное время моделирования

$$t \sim \frac{e^k}{k^3} \quad (4)$$

Минимум этой функции достигается уже при $k=3$. Кроме того, надо еще учесть, что часть процессорного времени тратится на обработку распределения, полученного на каждом шаге (построение линий уровня и некоторые вспомогательные действия), что приводит к незначительному увеличению оптимального значения k .

Для оценки величины T_0 рассмотрим невозмущенный пучок. функция распределения для него имеет вид

$$\rho(A_x, A_z) = C_0 \exp\left(-\frac{A_x^2 + A_z^2}{2}\right) \quad (5)$$

Нас, однако, интересует вероятность попасть не в элемент фазового объема, а в ячейку амплитудной плоскости. Она будет равна

$$W(A_x, A_z) = A_x A_z \exp\left(-\frac{A_x^2 + A_z^2}{2}\right) \quad (6)$$

Максимальная плотность² достигается в точке $A_x = A_z = 1$ и равна $1/e$. Число точек в квадрате со стороной δ_A (предположим равенство декрементов затухания) будет равно $n=4T/e$. Если определить критическую плотность так, чтобы $n=100$, то тогда $T_0 \approx 70$. На практике расстояние между линиями раздела выбиралось равным $k=2.5$. При этом время моделирования составляет $T \sim 700$ времен затухания и требовалось, как правило, 6-8 шагов для определения времени жизни в несколько часов. Даже при 5-процентной точности на каждом шаге мы получим время жизни с точностью до 50%, что вполне достаточно для практических целей.

Одним из достоинств предлагаемого метода является возможность контролировать его точность прямо в процессе моделирования: время T может не задаваться изначально, а варь-

2 На рис.4,5 показано распределение для функции ρ . Это сделано намеренно, чтобы не отвлекать внимание на несущественные детали. На самом деле под плотностью распределения в пространстве амплитуд нужно понимать функцию W , для которой линии уровня представляют собой замкнутые кривые, не касающиеся осей (см. рис. 6-15).

ироваться на каждом шаге таким образом, чтобы трекинг заканчивался при достижении критической плотности на новой линии раздела и необходимого числа вылетов (точнее, групп вылетов). Кроме того, можно получить представление о точности метода непосредственно по результатам, как это видно на рис.6. Здесь изображены линии уровня, полученные на нескольких последовательных шагах, а также три линии раздела. Первый шаг состоит из двух частей, которые можно условно назвать нулевым шагом и собственно первым. Нулевой шаг нужен для того, чтобы получить начальное распределение на малых амплитудах и провести первую линию раздела. На первом шаге набирается статистика вылетов через нее и к тому же улучшается точность полученной функции распределения, так что первая линия раздела уже не будет совпадать с итоговой линией уровня. Вторая линия раздела строится по завершении первого шага и проходит по линии уровня с номером $2k$. На следующем шаге мы получим новые линии уровня (на рис.6 - штриховые), которые имеют лучшую статистическую точность. Вблизи первой линии раздела они почти совпадают с линиями уровня первого шага, что говорит об их хорошей достоверности. По мере удаления от линии раздела эти различия возрастают, что связано в первую очередь с недостаточностью статистики, полученной на первом шаге в области больших амплитуд. Как видно на рис.6, вторая линия раздела была определена достаточно хорошо, т.к. она близка к линии уровня, полученной на втором шаге. Точно так же, третья линия раздела, построенная по окончании второго шага, близка к линии уровня, полученной на третьем шаге (они изображены пунктиром).

На рис.7 показаны итоговые линии уровня для этой рабочей точки, составленные по результатам нескольких шагов. В области до первой линии раздела взяты результаты первого шага, между 1-й и 2-й линиями раздела - результаты второго шага, между 2-й и 3-й линиями раздела - результаты третьего шага и т.д. Как мы видим, продвижение в сторону больших амплитуд происходит каждый раз в той области, где функция распределения была хорошо определена еще на предыдущем шаге, что обеспечивает их хорошую "сшивку". Программа LIFETRAC, реализующая описанный метод вычисления времени жизни, позволяет не только строить линии уровня, но и надежно идентифицировать резонансы, вызывающие искажение функции распределения. В целом, такое сочетание методов расчета и контроля позволяет гарантировать точность получаемых результатов.

В заключение, исследуем вопрос, на какие максимальные амплитуды можно "забраться" таким способом. До сих пор мы неявно подразумевали, что в ячейке размером δ_A частицы распределены достаточно равномерно. Однако, на очень больших амплитудах, где линии уровня сгущаются, это уже не так и критерий точности полученного распределения, а также значение критической плотности должны определяться по-другому. Мы не будем углубляться в эту область, поскольку для практических целей это вряд ли может потребоваться. Действительно, типичное значение времени затухания составляет $3 \cdot 10^3 - 10^4$ оборотов, что соответствует амплитуде шума $\delta_A \leq 1/30$. Таким образом, даже для невозмущенного распределения расстояние между соседними линиями уровня сравнивается с величиной δ_A только на амплитудах $A \sim 30$, что редко превышает реальные значения апертуры.

РАССЕЯНИЕ НА ОСТАТОЧНОМ ГАЗЕ

Рассеяние на газе оказывает существенное влияние на функцию распределения, особенно на больших амплитудах. В отсутствие эффектов встречи именно оно определяет время жизни. При наличии встречного сгустка может, кроме того, наблюдаться сильная "интерференция" эффектов встречи и рассеяния. Например, возможна ситуация, при которой сильные резонансы находятся на большом удалении от невозмущенного "ядра". Частица, достигшая некоторой границы, захватывается в резонанс и за короткое время может оказаться на апертуре. Рассеяние может увеличить вероятность такого процесса на несколько порядков, обеспечив попадание частицы сразу из ядра в нужную область. В связи с этим, было бы целесообразно включить рассеяние в процесс моделирования эффектов встречи. При этом прямое использование описанного выше метода расчета времени жизни становится уже невозможным, так как он приводит к потере точности на больших амплитудах.

Чтобы понять, как это происходит, достаточно рассмотреть упругое рассеяние на остаточном газе без эффектов встречи. Угол рассеяния обратно пропорционален прицельному параметру, так что вероятность получить при этом скачок амплитуды ΔA обратно пропорциональна квадрату этого скачка. В то же время, без учета рассеяния, плотность распределения падает как $\exp(-A^2/2)$. Отсюда видно, что начиная с некоторого значения амплитуды

(определяемого плотностью газа и средними значениями β -функции и размеров пучка) функция распределения будет определяться только однократным рассеянием из ядра на большие амплитуды. При использовании нашего метода это ядро окажется как раз внутри первой линии раздела, а процесс рассеяния на большие амплитуды можно рассматривать как частный случай вылета. Другими словами, гало, изображенное на рис.2, при учете рассеяния простирается на очень большие расстояния, вплоть до апертуры. Проблема состоит в том, что вероятность рассеяться на большой угол одновременно достаточно велика, чтобы играть решающую роль для распределения на больших амплитудах, и слишком мала, чтобы за время T получить на первом шаге правильную статистику таких особых вылетов. В результате мы как-бы возвращаемся к ситуации, изображенной на рис.4: потеря наиболее вероятного пути гибели частицы и неправильное время жизни.

Тем не менее, небольшая модификация метода позволила корректно учитывать рассеяние на большие углы и получать при этом правильные результаты. Идея состоит в том, чтобы моделировать процесс рассеяния из черного ящика независимо от статистики вылетов. Мы имеем возможность сделать это, поскольку нам известна функция распределения внутри него.

Прежде, чем приступить к решению этой задачи, остановимся подробнее на обычном рассеянии (когда частица находится снаружи черного ящика). Мы будем рассматривать только упругое рассеяние, поскольку его сечение существенно больше, но при желании можно включить в процесс моделирования и неупругое рассеяние по той же схеме. Сечение рассеяния для $\gamma \gg 1$ и $\theta \ll 1$ дается классической формулой:

$$d\sigma = 4Z \frac{r_c^2}{\gamma^2} \frac{d\theta}{\theta^4}, \quad \text{откуда следует} \quad \theta = 2Z \frac{r_c}{\gamma \rho}. \quad (7)$$

Здесь Z - заряд иона, θ - угол рассеяния, а ρ - обычный прицельный параметр. Каждый акт рассеяния вызывает изменение импульса электрона, которое в нормализованных переменных имеет величину:

$$\Delta p_x = \frac{\beta_x}{\sigma_x} \cdot \theta \cos \varphi, \quad \Delta p_z = \frac{\beta_z}{\sigma_z} \cdot \theta \sin \varphi, \quad (8)$$

где β и σ должны браться в точке рассеяния, а φ - угол между плоскостью рассеяния и горизонтальной плоскостью. Из этих формул видно, что рассеяние, как и сами эффекты встречи, влияет в

основном на вертикальную функцию распределения, поскольку, как правило, выполняется соотношение $\beta_z/\sigma_z \gg \beta_x/\sigma_x$. Многократные акты рассеяния на очень малые углы дают небольшой нормальный (гауссовый) шум, который можно объединить с квантовыми флуктуациями синхротронного излучения в некий общий шум, определяющий среднеквадратичные размеры пучка. Особый подход необходим при рассеянии на большие (по сравнению с δ_A) амплитуды, там, где оно вызывает сильное изменение функции распределения. Здесь имеется в виду распределение по амплитудам шумовых скачков на одном обороте, поскольку сам процесс рассеяния удобно рассматривать как особый случай шума с очень длинными хвостами.

Итак, мы будем моделировать только рассеяние на углы, больше некоторого. В качестве граничного значения возьмем такой угол θ_0 , чтобы при рассеянии в вертикальной плоскости $\Delta p_z = \delta_A/10$, и оценим вероятность рассеяться на угол $\theta \geq \theta_0$ (в произвольной плоскости) за один оборот. Для примера возьмем параметры ВЭПП-4: $\gamma = 10^4$, $\tau \sim 3000$ оборотов, периметр $P = 366$ м, $\langle \beta_z/\sigma_z \rangle \sim 10^5$, $\langle \beta_x/\sigma_x \rangle = 6 \cdot 10^3$, $Z = 7.5$, давление остаточного газа 10^{-8} торр. Искомая вероятность будет $W_s \sim 10^{-2}$. Это означает, во-первых, что рассеяние на углы, большие θ_0 , не даст вклада в среднеквадратичную амплитуду шумового толчка δ_A . Во-вторых, поскольку $\Delta p_z \ll \delta_A$, мы гарантируем правильное воспроизведение тех искажений шума, которые вызываются рассеянием и приводят к медленно спадающим хвостам. В-третьих, можно не учитывать многократное рассеяние на такие углы на одном обороте, т.к. вероятность такого рассеяния очень мала. И, наконец, моделирование рассеяния на углы большие θ_0 почти не отразится на затратах процессорного времени, по той же причине.

Теперь можно кратко описать алгоритм моделирования с учетом рассеяния. Вначале по исходным данным (плотность остаточного газа, периметр кольца, гамма-фактор, декременты затухания, среднее значение β_z/σ_z на кольце) вычисляется вероятность рассеяться на углы, большие θ_0 . Затем в процессе моделирования с помощью датчика случайных чисел на каждом обороте разыгрывается, делать или нет такое рассеяние. Если выпало делать, то опять с помощью датчика случайных чисел определяется конкретный угол рассеяния. Формула для него дается простой зависимостью угла от прицельного параметра и имеет вид: $\theta = \theta_0/\sqrt{R}$, где $0 < R < 1$ - случайное число. Далее случайным образом определяется угол наклона

плоскости рассеяния ϕ и азимут накопителя, на котором оно произошло. Чтобы определить изменение импульса в нормализованных переменных, надо домножить полученные углы θ_x и θ_z на соответствующие отношения β/σ , взятые в точке рассеяния. На практике подставлялись средние по кольцу значения этих отношений, хотя не представляет труда задать структуру накопителя, а также зависимость плотности ионов от азимута (она может быть сильно неоднородной), и учесть все это при моделировании.

Вернемся теперь к движению частицы внутри черного ящика. На каждом обороте у нее имеется три возможности, одна из которых реализуется:

- 1) Частица покидает черный ящик без рассеяния (обычный вылет).
- 2) Частица рассеивается на угол $\theta \geq \theta_0$. При этом она может совершить вылет, но может и остаться внутри.
- 3) Частица не рассеивается и остается внутри черного ящика.

Последний вариант наиболее вероятен и суть описанного выше метода ускорения расчета состояла в том, чтобы не тратить на него время, а рассматривать только первую возможность, делая рестарт согласно полученной ранее статистике вылетов. Сейчас необходимо просто учесть еще одну возможность вылета за счет рассеяния. Вероятность W_s рассеяться на угол $\theta \geq \theta_0$ за один оборот нам известна и теперь для того, чтобы правильно разыграть процесс вылета, нужно определить вероятность за один оборот покинуть черный ящик без рассеяния. Это легко можно сделать, зная, сколько вылетов в среднем совершает частица в единицу времени.

Опишем подробнее весь алгоритм с самого начала. На первом шаге (рис.1) за время T_1 мы получим некоторое количество вылетов N_1 , часть из которых произошла за счет рассеяния на углы, большие θ_0 (N_{1s}). В качестве статистики для последующих рестартов мы будем запоминать лишь оставшуюся часть вылетов (N_{1r}): $N_1 = N_{1s} + N_{1r}$. Кроме того, производится подсчет, какую часть времени $V_1 < 1$ частица находится во внешней области. На втором шаге (рис.3) вероятность за один оборот вылететь из черного ящика без рассеяния равна:

$$W_1 = N_{1r} / ((1 - V_1) \cdot T_1 \cdot \tau), \quad (9)$$

а процесс вылета моделируется следующим образом: сначала с помощью датчика случайных чисел в соответствии с вероятностями

W_1 и W_2 разыгрывается, какой из двух вариантов (1 или 2) реализуется в данный момент. Если выпал 1-й вариант, то производится обычный рестарт согласно статистике вылетов без рассеяния (число таких вылетов N_{1r}). Если же выпал второй вариант, то сначала случайным образом выбирается точка для рассеяния внутри черного ящика (согласно уже известной функции распределения в нем), затем по обычной схеме определяется угол рассеяния θ , наклон плоскости рассеяния φ и азимут точки рассеяния. Далее, вычисляются координаты и импульсы частицы после рассеяния и делается проверка, осталась ли она внутри черного ящика или нет. Если она не вылетела из него, то весь алгоритм повторяется начиная с выбора между 1-м и 2-м вариантом. В результате "процесс вылета" несколько удлиняется, так как есть вероятность совершить несколько "холостых" рассеяний внутри черного ящика, прежде чем частица покинет его каким-либо способом. Но это никак не отразится на времени T_2 , где учитывается только движение за пределами черного ящика.

В итоге, на втором шаге частица за время T_2 совершит R_2 рестартов и $N_2 = N_{2s} + N_{2r}$ вылетов, при этом часть времени V_2 она будет проводить во внешней (теперь уже III-й) области. Время, которое необходимо для получения такой же статистики при обычном моделировании, мы будем называть эквивалентным временем. На втором шаге оно будет равно:

$$T_{2eq} = T_1 \cdot \frac{R_2}{N_1}, \quad (10)$$

а выигрыш во времени за счет применения нового метода равен T_{2eq}/T_2 . На третьем шаге вероятность обычного вылета составит:

$$W_2 = N_{2r} / ((1 - V_1 \cdot V_2) \cdot T_{2eq} \cdot \tau). \quad (11)$$

Процесс вылета на этом шаге разыгрывается по тому же сценарию, что и на предыдущем. Эквивалентное время здесь будет:

$$T_{3eq} = T_{2eq} \cdot \frac{R_3}{N_2}, \quad (12)$$

а выигрыш во времени составит уже $T_{3eq}/T_3 = (T_1 \cdot R_2 \cdot R_3) / (T_3 \cdot N_1 \cdot N_2)$. Таким образом, мы имеем рекуррентные формулы для определения как времени жизни, так и вероятности обычного вылета за один оборот W_k , что позволяет правильно учесть процесс рассеяния на большие углы.

Здесь необходимо сделать одно замечание относительно

корректности определенной выше величины W_k , которая используется для моделирования вылета из черного ящика. На первый взгляд, она вообще кажется несуразной, поскольку только в непосредственной близости от границы черного ящика у частицы имеется ненулевая вероятность совершить обычный вылет, в то время как большую часть времени (и это время входит в определение W_k) частица проводит вдали от этой границы, в ядре. Чтобы понять смысл величины W_k , давайте еще раз посмотрим на движение частицы с точки зрения наблюдателя, находящегося снаружи черного ящика и не знающего, что там происходит внутри. Наблюдение ведется в течение длительного периода (много времен затухания), при этом частица много раз попадает в черный ящик и вылетает из него. Часть вылетов происходит за счет рассеяния на большие углы, а другая часть за счет диффузии и эффектов встречи. Предположим, что наблюдатель может каким-то образом различать между собой эти два варианта. Как уже говорилось в первой части препринта ("Описание метода"), для того, чтобы правильно воспроизвести распределение снаружи черного ящика, необходимо и достаточно повторить исходное соотношение между вероятностями попасть при вылете в различные области фазового (вообще говоря, шестимерного) пространства. При этом перестановка во времени различных отрезков траектории не имеет значения. Два возможных варианта вылета имеют существенно различные распределения: в одном случае все они сосредоточены вблизи границы раздела, а в другом такая граница вообще отсутствует. Кроме того, вероятность их реализации зависит от того, где именно находится частица в черном ящике непосредственно перед вылетом: в ядре или вблизи границы. Однако, для правильного моделирования движения снаружи нам достаточно воспроизвести только соотношение между вероятностями этих двух вариантов вылета (не забывая, конечно, о правильном распределении вылетов для каждого варианта), не заботясь о том, откуда собственно она вылетает. И в этом контексте вполне оправданным выглядит определение средней вероятности вылета за один оборот.

Нам осталось все же сделать еще один шаг для того, чтобы включить рассеяние в процесс моделирования. Необходимость этого шага вызывается тем, что по мере продвижения в область больших амплитуд эффективность метода начнет резко уменьшаться. В самом деле, вероятность обычного вылета за один оборот будет экспо-

ненциально падать с каждым шагом, в то время как вероятность рассеяться на угол больше θ_0 остается неизменной. В результате для $k > 1$ мы будем иметь $W_s \gg W_k$. С другой стороны, по мере удаления границы черного ящика от ядра требуются все большие углы рассеяния для того, чтобы вылететь из него. Все это приведет к тому, что при моделировании процесса вылета будет расходоваться очень много времени на "холостые" акты рассеяния на малые углы, большие θ_0 , но недостаточные для вылета. С этой точки зрения оптимальным был бы вариант, при котором для каждой ячейки амплитудной плоскости определяется минимальный угол рассеяния, позволяющий достичь границы черного ящика, и в качестве W_s берется интеграл от функции распределения, умноженной на вероятность рассеяться на соответствующий угол. На практике оказалось удобным несколько видоизменить эту идею, используя то деление черного ящика на области, которое производится последовательными линиями раздела на предыдущих шагах. Именно, для каждой такой области довольно быстро можно найти минимальный угол рассеяния θ_{km} , приводящий к вылету из m -ой области на k -ом шаге ($m < k$). Кроме того, легко получить соотношение между вероятностями для частицы оказаться в той или иной области, зная абсолютную вероятность находиться в области с номером m :

$$p_m = V_0 \cdot V_1 \cdots V_{m-1} \cdot (1 - V_m), \quad V_0 = 1. \quad (13)$$

Это позволяет вычислить для каждой такой области вероятность w_{km} оказаться в ней и рассеяться на угол $\theta \geq \theta_{km}$ за один оборот пребывания в черном ящике. Полная вероятность рассеяться на угол, больше минимального для данной (неважно - какой) области, вычисляется как сумма таких вероятностей для всех внутренних областей, и должна использоваться в процессе моделирования вылета из черного ящика в качестве W_s :

$$W_s = \sum_m w_{km}. \quad (14)$$

Теперь уже W_s и W_k будут примерно одного порядка на всех шагах. Алгоритм вылета из черного ящика при этом слегка видоизменяется: сначала разыгрывается тип вылета (с рассеянием или без). Если выпало делать рассеяние, то согласно вероятностям w_{km} разыгрывается область, из которой оно происходит, затем уже внутри этой области выбирается случайным образом точка рассеяния и определяется конкретный угол рассеяния по формуле $\theta = \theta_{km} / \sqrt{R}$, где

$0 < R < 1$ - случайное число. Далее, как обычно, определяется угол наклона плоскости рассеяния и азимут накопителя, на котором оно произошло. В конце делается проверка, вылетела частица из черного ящика или нет (рассеяние на угол θ_{km} еще не гарантирует вылета, т.к. точка рассеяния может находиться в глубине области, а направление рассеяния может быть произвольным). Если вылета не произошло, весь алгоритм повторяется с самого начала.

Здесь необходимо сказать несколько слов о том, что собой представляет точка рассеяния. Дело в том, что одного распределения в пространстве амплитуд недостаточно для ее выбора, нужны еще и фазы. Они здесь действительно могут играть существенную роль, т.к. при наличии резонансов появляется корреляция фаз с амплитудами, что приведет к сильной зависимости расстояния точки рассеяния до границы черного ящика от соотношения между фазами. Для того, чтобы учесть все это, пришлось ограничиться конечным числом точек для рассеяния из черного ящика. На практике, в каждой из внутренних областей запоминалось по 1000 точек, аналогичных вылетам (амплитуды и фазы), которые хранились в специальном файле. При моделировании вылета, если выпало делать рассеяние, сначала определялась область рассеяния согласно вероятностям w_{km} , затем уже случайным образом выбиралась одна из 1000 точек в этой области и из нее производилось рассеяние. Число точек представляется вполне достаточным, т.к. при рассеянии на большие углы скачок амплитуды будет много больше среднего расстояния между ними, а случайность величины угла и направления рассеяния компенсирует ограниченность выбора среди этих точек.

В целом, такой подход позволил корректно и эффективно включить рассеяние в процесс моделирования равновесной функции распределения наряду с эффектами встречи. Единственным источником возможных ошибок служит, как и раньше, точность статистики вылетов. В качестве примера на рис. 9 показана функция распределения с учетом упругого рассеяния без эффектов встречи для ВЭПП-4 (давление газа 10^{-8} торр., остальные необходимые параметры приведены выше). Время жизни получилось около $4 \cdot 10^{10}$ оборотов для вертикальной апертуры в $30 \sigma_z$, в то время как расчетная вероятность однократного рассеяния из ядра на апертуру составляет примерно $3.5 \cdot 10^{-11}$. Увеличение затрат процессорного времени, связанное с более сложным и длинным алгоритмом вылета, не превысило 1%. Выигрыш во времени моделирования за счет

применения нового метода составил $\sim 10^5$. На рис.10 представлен также результат совместного действия эффектов встречи и рассеяния.

"СИЛЬНЫЙ-СИЛЬНЫЙ" ПУЧОК

При учете взаимного влияния обоих пучков друг на друга появляются новые эффекты, которые можно разделить на когерентные и некогерентные. Последние сводятся просто к искажению функции распределения для сильного пучка, что отразится на зависимости силы толчка, испытываемого пробной частицей от встречного сгустка, от ее координат. Как мы увидим ниже, такое усложнение не является препятствием для того, чтобы включить его в программу моделирования, использующую новый метод. Что же касается когерентных эффектов встречи, то для них этот метод не подходит в принципе, т.к. нарушается одно из условий его применимости: отсутствие у системы памяти. В данном случае это означает, что функция распределения для обоих пучков не постоянна и движение частицы зависит не только от ее координат и импульсов, но и от состояния системы в данный момент времени. С другой стороны, когерентные эффекты определяются главным образом функцией распределения на небольших амплитудах, так что необходимость в использовании здесь нового метода вообще отсутствует.

При моделировании в случае "сильный-сильный" пучок необходимо рассматривать одновременно большое количество частиц в обоих сгустках (или в одном, если они одинаковы по всем параметрам и отсутствуют когерентные эффекты). Будем обозначать число таких частиц через N (как правило, $N \sim 10^3$). При расчете толчка, который испытывает пробная частица от встречного сгустка, можно использовать различные подходы: просто суммировать все толчки от каждой из N частиц, строить двумерную сетку зависимости сил от координат, или аппроксимировать эту зависимость, подбирая подходящие для этого функции. Но в любом случае предполагается, что встречный сгусток состоит из N "макрочастиц", заряд каждой из которых равен $1/N$ от полного заряда сгустка. Вообще говоря, возможен и другой подход, при котором заряды этих макрочастиц не одинаковы, но здесь это не принципиально.

Попробуем теперь применить новый метод моделирования в этих условиях. На первом шаге, как обычно, алгоритм трекинга не нарушается и происходит только запоминание вылетов через первую

линию раздела (регистрируются вылеты каждой из N частиц). Кроме того, определяется доля времени V_1 , которую частицы проводят во внешней области, а также выбираются случайным образом N точек в этой области для старта на втором шаге (запоминаются и амплитуды, и фазы). Если встречные сгустки не одинаковы (например, имеют различные энергии или суммарный заряд), то линии раздела, статистика вылетов и все остальное определяется для каждого из них отдельно.

Поскольку на первом шаге частицы находятся главным образом в ядре, влияние хвостов распределения на силу толчка от встречного сгустка пренебрежимо мало, так что на втором шаге распределение в I-й области (рис.3) можно считать хорошо определенным. Доля заряда, который находится внутри черного ящика, равна $1 - V_1$ (и может быть различной для каждого сгустка). Таким образом, вклад черного ящика в силу толчка нам известен и наиболее эффективным здесь представляется построение двумерной сетки зависимости этих сил от координат пробной частицы, что позволит вычислять их достаточно быстро. Кроме того, нужно еще учесть вклад в силу от остальной части сгустка. Для этого на втором шаге мы продолжаем наблюдение за N частицами, причем заряд каждой из них теперь уже равен V_1/N от полного заряда сгустка. Как только какая либо из них попадает внутрь черного ящика, делается рестарт, так что число частиц за его пределами постоянно и равно N . Как и раньше, наряду с вылетами запоминаются точки во внешней области для старта на следующем шаге и определяется доля времени V_2 , которую частицы проводят там.

Для третьего шага надо заново построить сетку для вычисления вклада черного ящика в силу толчка (можно просто добавить к старой сетке вклад от II-й области). Заряд каждой из N частиц снаружи черного ящика будет равен теперь $V_1 \cdot V_2 / N$ от полного заряда сгустка. Дальнейшее продвижение в область больших амплитуд очевидно. Все критерии точности, которые обсуждались выше, остаются в силе. При этом надо помнить, что для получения такой же статистики время моделирования T для каждой частицы должно быть в N раз меньше.

Для пучков низкой энергии и большой интенсивности возрастает роль рассеяния частиц сгустка друг на друге (эффект Тушека). Его вероятность зависит от плотности в точке рассеяния,

поэтому здесь также необходимо рассматривать большой ансамбль частиц, даже в модели "сильный-слабый" пучок. Об'единив естественным образом идеи последних двух разделов, этот эффект также можно включить в моделирование без ущерба для нового метода.

В настоящее время программа для двух сильных пучков еще не реализована на практике, так что никаких результатов мы здесь не приводим. Видимо, это дело ближайшего будущего.

ТРЕХМЕРНАЯ ЗАДАЧА

До сих пор мы рассматривали только двумерное пространство амплитуд. Теперь пришло время более детально обсудить проблему, связанную с трехмерностью задачи. Очевидно, все полученные выше результаты легко можно обобщить и на этот случай, если строить функцию распределения в трехмерном пространстве амплитуд и вместо линий использовать поверхности раздела. Единственное отличие будет в определении критической плотности (см. "Описание метода"): во-первых, появится зависимость времени T_0 от декрементов затухания; во-вторых, потребуется значительно большее время моделирования для достижения критической плотности на поверхности раздела. Кроме того, появляются дополнительные трудности чисто технического характера, которые не позволяют в настоящее время реализовать трехмерный вариант метода в полном об'еме. В качестве компромисса был выбран "трехмерный трекинг с двумерным распределением". Этот подход имеет ограниченную область применения, но в любом случае (даже за ее пределами) дает весьма существенную информацию.

Описанный в этом препринте алгоритм моделирования можно схематично представить в виде трех независимых друг от друга частей: собственно моделирование движения частицы (снаружи черного ящика); получение распределения в амплитудном пространстве и процесс вылета при попадании внутрь черного ящика. Первая часть отражает физическую суть изучаемого явления и, разумеется, должна быть "трехмерной", поскольку продольное движение частиц в ступке играет важную роль. Что касается второй части, нужной для построения границы раздела, то ничто не мешает нам найти функцию распределения в плоскости двух амплитуд (проинтегрировав трехмерное распределение по третьей амплитуде) и в качестве

границы взять линию в этой плоскости. Это просто означает, что в трехмерном пространстве амплитуд граница черного ящика представляет собой цилиндрическую поверхность, параллельную третьей оси. При этом каждая точка вылета включает в себя шесть величин (три амплитуды и три фазы), и все они запоминаются в специальном файле для последующих рестартов. То же самое относится и к точкам рассеяния из черного ящика: надо выбирать их согласно распределению в шестимерном фазовом пространстве.

Что мы теряем из-за двумерности границы раздела? Если статистика вылетов через нее достаточно хорошая, то, вообще говоря, ничего. Однако, ограниченность этой статистики может приводить к ситуациям типа той, что изображена на рис.4. Например, если имеется трехмерный резонанс, который начинается на средних амплитудах (по третьей оси) и служит каналом для ухода на большие амплитуды, то мы можем неправильно воспроизвести вероятность такого процесса. Кроме того, время жизни может определяться апертурой для третьей степени свободы, а здесь мы на каждом шаге будем оставаться в области небольших амплитуд. Все это будет приводить к невозможной потере точности, что ограничивает возможности применения метода.

Имеются, однако, некоторые области параметров, при которых задача становится и в самом деле двумерной (или почти двумерной). В частности, для круглых пучков функция распределения симметрична относительно любых поворотов в плоскости (A_x, A_z) , так что построив распределение в плоскости (A_s, A_r) , где $A_r = \sqrt{A_x^2 + A_z^2}$, мы сможем рассчитывать на хорошую точность. Кроме того, в настоящее время большой интерес вызывает идея монохроматизации [3], которая достигается за счет большой дисперсии в месте встречи. При этом синхротронный поперечный размер пучка становится много больше бетатронного размера, так что горизонтальная координата частицы в месте встречи определяется главным образом только ее продольным движением. В этом случае задача становится "почти двумерной", и функцию распределения надо строить в плоскости (A_s, A_z) . Вероятность хитрых путей ухода частицы, связанных с третьей степенью свободы, становится здесь пренебрежимо мала, хотя резонансы являются действительно трехмерными (рис.7-8).

Если дисперсия в месте встречи равна нулю, влияние продольного движения все равно остается довольно ощутимым. В

первую очередь это связано с модуляцией бетатронной фазы в момент толчка. Кроме того, для плоского пучка появится модуляция параметра эллиптичности встречного сгустка из-за сильного отличия в величине вертикальной и горизонтальной β -функций в месте встречи. Тем не менее, определяющую роль здесь будет играть бетатронное движение и распределение надо строить в плоскости (A_x, A_z) . Наиболее сложной будет ситуация при небольшой дисперсии в месте встречи, когда синхротронный и бетатронный поперечные размеры пучка примерно одного порядка. В этом случае все три степени свободы важны и применение нового метода наименее эффективно.

Тем не менее, даже при таких неблагоприятных условиях он может оказаться полезным. Дело в том, что возможные ошибки, связанные с потерей некоторых путей ухода частиц на большие апертуры, приводят к искажениям времени жизни только в одну сторону - в сторону его увеличения. Таким образом, метод можно использовать для быстрого поиска плохих рабочих точек. Топология плохих областей в пространстве различных параметров может послужить важным источником информации для дальнейших исследований. Что же касается хороших областей, то гарантий здесь никаких нет и необходимо использовать прямое (без ухищрений) моделирование для определения здесь правильного времени жизни.

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДА

Толчком к созданию метода послужило изучение эффектов встречи для проекта Новосибирской В-фабрики с монохроматизацией. Как показано в [3], для плоских пучков ширина изолированного резонанса $l \cdot v_x + m \cdot v_z + n \cdot v_s = k$ имеет следующую зависимость от номера гармоники l и степени монохроматизации λ (она определяется как отношение синхротронного поперечного размера в месте встречи к бетатронному):

$$\Delta A_z \sim \lambda^{-1/2} \quad (15)$$

Эта формула в математическом виде выражает тот факт, что с увеличением степени монохроматизации влияние горизонтального бетатронного движения на эффекты встречи должно уменьшаться. Однако, отсутствие практического опыта эксплуатации установок с большой дисперсией в месте встречи вызывало опасения, что новая серия синхро-бетатронных резонансов может сильно осложнить

ситуацию. Новый метод позволил за короткое время провести на компьютерах типа VAX целую серию численных экспериментов, которые опровергли эти сомнения. В настоящее время проект Новосибирской В-фабрики с монохроматизацией является основным. Кроме того, обсуждается возможность использования монохроматизации в проекте С-т фабрики в Севилье (Испания).

Главной особенностью В-фабрики является большое число сгустков в пучках, что приводит к появлению дополнительных "паразитных" мест встречи (МВ). Как правило, имеется два таких МВ на удалении около двух метров от основного МВ (все последующие паразитные МВ экранируются вакуумной камерой). Несмотря на значительное разведение пучков (несколько десятков поперечных размеров), паразитные МВ могут оказывать сильное воздействие на динамику движения частиц из-за больших величин β -функций в них. Существенную роль здесь играет также направление, в котором разводятся пучки. С помощью нового метода было проведено исследование с целью поиска минимальных допустимых величин разведения пучков в паразитных МВ. В результате было обнаружено, что при вертикальном разведении появляется своеобразная динамическая неустойчивость (рис.14), которая приводит к быстрой гибели частиц при достижении ими некоторого порогового значения вертикальной амплитуды, причем этот порог в несколько раз меньше величины разведения. При горизонтальном разведении (рис.15) влияние паразитных МВ становится существенно меньше. На рис.16 представлена зависимость времени жизни (вертикальная апертура $30 \sigma_z$, горизонтальная - $10 \sigma_x$) от величины разведения в паразитном МВ для обоих вариантов.

Одной из первых установок с большой дисперсией в месте встречи станет ВЭПП-4М. Конструктивно эта дисперсия связана с системой регистрации рассеянных электронов [4] и первоначально рассматривалась как недостаток. Однако, в настоящее время есть основания ожидать, что она не снизит заметным образом предельных значений ξ . На рис. 7 и 8 показаны результаты моделирования для ВЭПП-4М. Единственное отличие этих рисунков состоит в параметре монохроматизации. Как видно, ширины резонансов с $l > 0$ действительно падают с увеличением λ . Окончательную ясность здесь должны скоро внести экспериментальные результаты.

Еще одной областью применения метода стал проект Новосибирской Ф-фабрики с круглыми пучками. Большая интенсивность

пучков и невысокая энергия приводят здесь к появлению так называемых "продольных" эффектов встречи [5], которые на других установках, как правило, пренебрежимо малы. Одной из особенностей этих эффектов является возможность образования сильных потоков в фазовом пространстве, ведущих к одновременному росту как бетатронной, так и синхротронной амплитуд (рис.11). В этой связи очень интересной оказалась высказанная В.В. Даниловым и Е.А. Переведенцевым идея об отрицательном коэффициенте уплотнения орбит [6], при котором такие потоки невозможны. На рис.12 приведены результаты для той же рабочей точки, что и на рис.11, но только с другим знаком этого коэффициента. При моделировании здесь использовалось продольное разбиение "сильного" сгустка на 10 частей, что имеет большое значение в данном случае.

Кроме этого, большое влияние на функцию распределения для φ -фабрики и на время жизни будет оказывать эффект Тушека. Включение его в программу моделирования планируется в скором времени.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемый метод моделирования применялся только для изучения эффектов встречи в электрон-позитронных коллайдерах. Ничто, однако, не мешает использовать его в других задачах, где требуется построить функцию распределения на больших амплитудах или найти потоки через удаленные поверхности. Все предложения о таких альтернативных возможностях применения метода будут встречены с благодарностью.

На начальном этапе работы ряд ценных замечаний относительно этого метода сделал А.Л. Герасимов. Особую признательность автор выражает А.А. Моленцу, многочисленные обсуждения с которым принесли неоценимую пользу.

1. J. Irwin. "Simulation of Tail Distributions in Electron-Positron Circular Colliders". SSC Central Design Group, LBL, 1989.
2. J.L. Tennyson. "Resonance Transport in Near Integrable Systems with Many Degrees of Freedom". Physika D, 1982, v.5, p.123.
3. A.L. Gerasimov et al. "Beam-beam Effects with Big Dispersion Function at the Interaction Point", Nucl. Instr. & Meth., v.A305 (1991), p.25.
4. В.М. Дульченко и др. "Система регистрации рассеянных электронов детектора КЕДР для изучения двухфотонных процессов". Препринт ИЯФ 91-49, Новосибирск, 1991.
5. V.V. Danilov et al. "Longitudinal Beam-Beam Effects for an Ultra-High Luminosity Regime". IEEE Part. Acc. Conf., San-Francisco, May 6-9, 1991.
6. V.V. Danilov et al. "Negative Momentum Compaction in the Longitudinal Beam-Beam Effects". Int. Conf. on High Energy Acc., Hamburg, July 20-24, 1992.

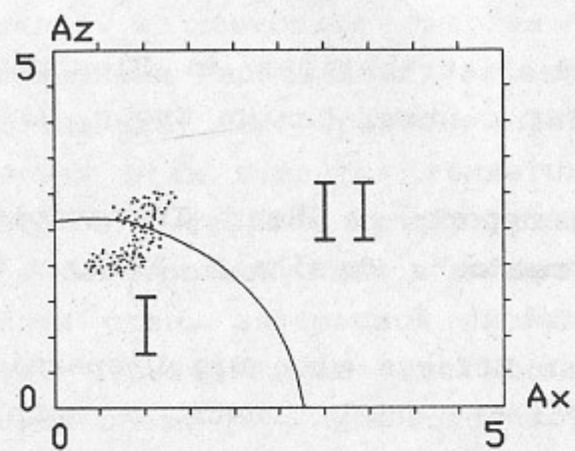


Рис.1 Амплитудная плоскость разделена на две области. Точками показан отрезок траектории частицы.

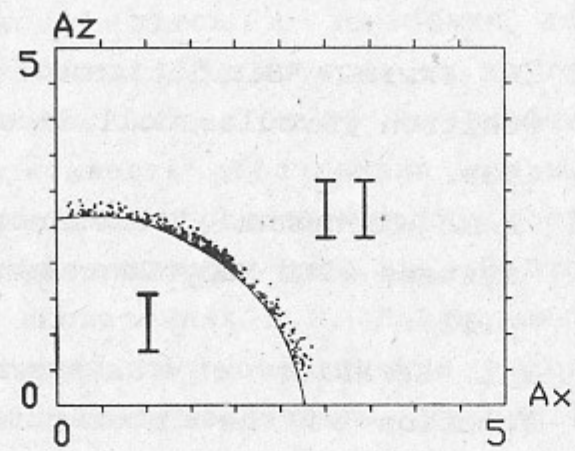


Рис.2 Точками показаны вылеты через линию раздела, образующие своеобразное гало. В дальнейшем они будут использованы для рестартов.

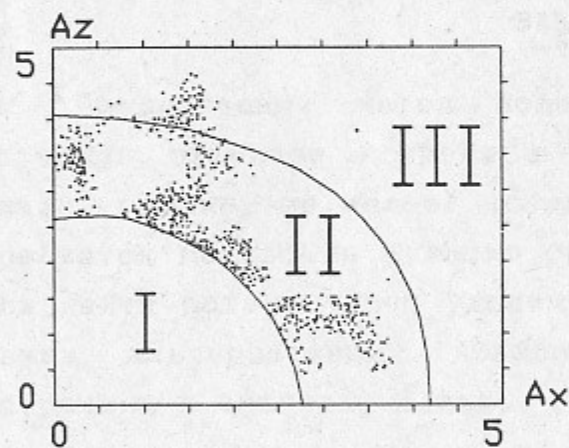


Рис.3 Траектория движения частицы на втором шаге, состоящая из большого числа независимых отрезков. I - черный ящик, II - внутренняя, III - внешняя область.

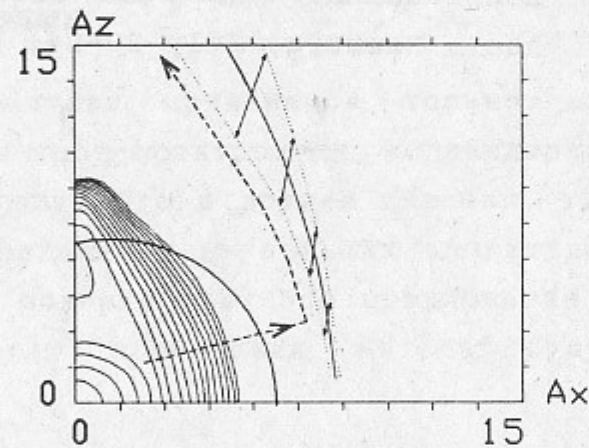


Рис.4 Пример неправильного выбора линии раздела, что приводит к потере точности. Штриховой линией показан наиболее вероятный путь ухода частицы на апертуру.

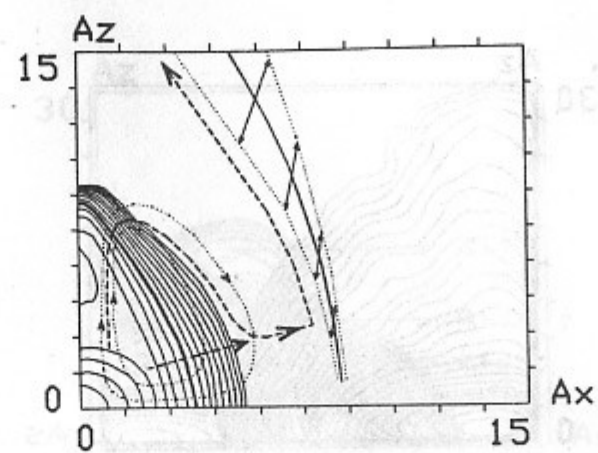


Рис.5 Линия раздела (жирная) совпадает с линией уровня. Из-за потоков (пунктир) вылеты через нее распределены неравномерно. Короткой штриховой линией показан один из маловероятных путей ухода на апертуру.

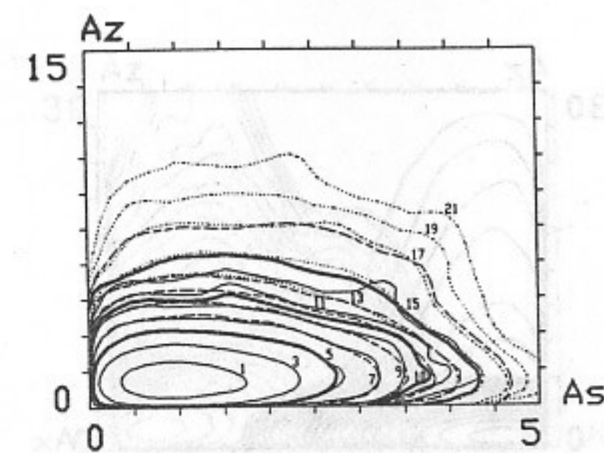


Рис.6 Показаны линии уровня, полученные на трех первых шагах. Увеличение номера линии на двойку соответствует уменьшению плотности в e раз. Линии раздела (5, 10, 15) выделены жирным цветом.

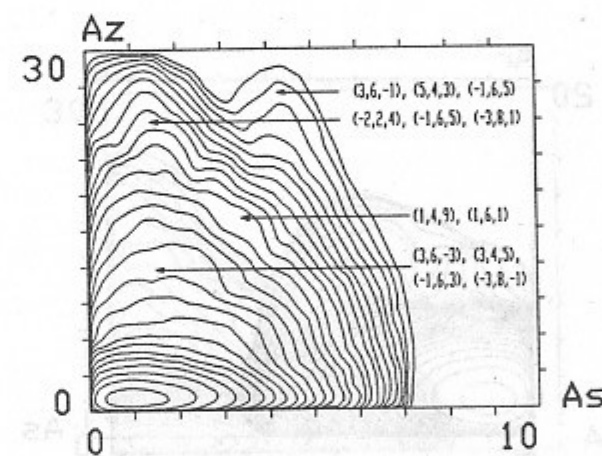


Рис.7 Функция распределения для рабочей точки ВЭПП-4: $\nu_x = .53$, $\nu_z = .57$, $\nu_s = .02$, $\lambda = 2$, $\xi_x = .005$, $\xi_z = .06$. Цифрами в скобках показаны резонансы $(l, m, n) \cdot (\nu_x, \nu_z, \nu_s) = k$.

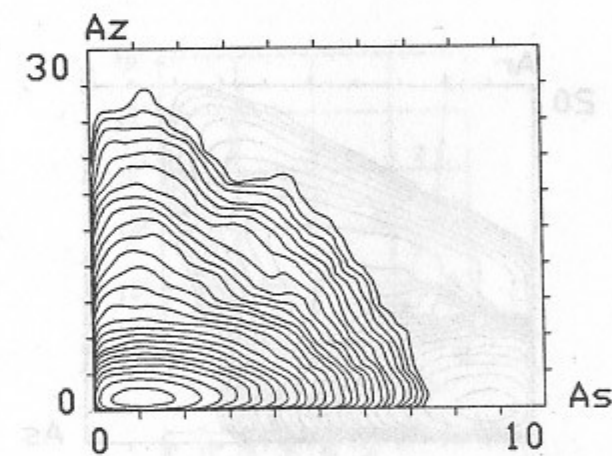


Рис.8 Та же рабочая точка, что и на рис.7. Единственное отличие - параметр монохроматизации $\lambda = 5$. При этом уменьшается ширина резонансов с номером $l \neq 0$.

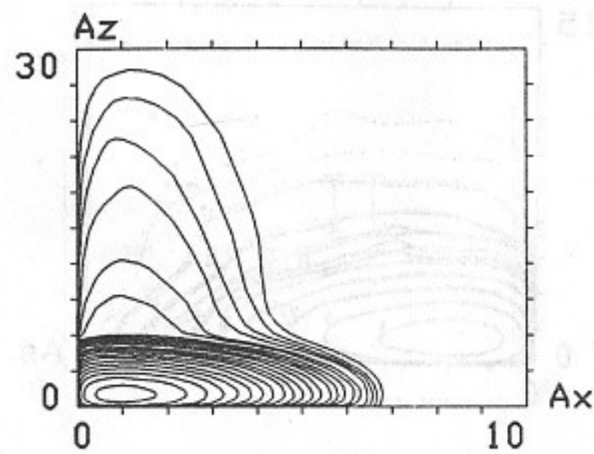


Рис.9 Функция распределения для ВЭПП-4 без эффектов встречи. Плотность остаточного газа 10^{-8} торр.

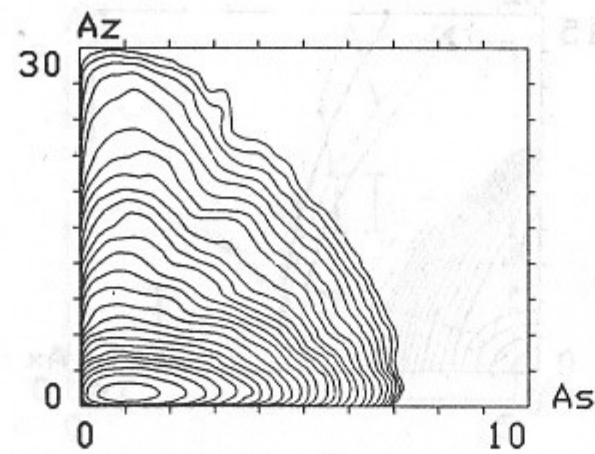


Рис.10 Та же рабочая точка, что и на рис.8, но с учетом упругого рассеяния на остаточном газе. Время жизни при этом уменьшается почти на два порядка.

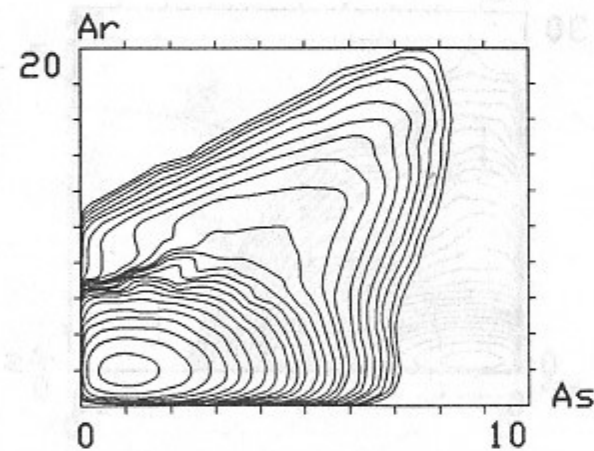


Рис.11 Рабочая точка для φ -фабрики с круглыми пучками: $\nu_{x,z}=0.04$, $\nu_s=0.02$, $\xi=2$. Хорошо виден поток на большие амплитуды, возникающий из-за продольных эффектов встречи.

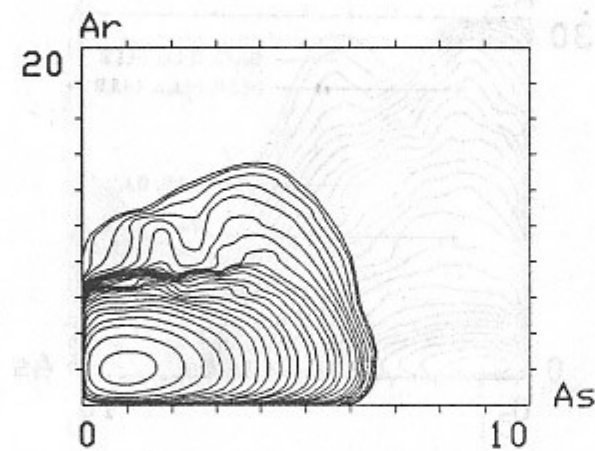


Рис.12 Та же самая рабочая точка, что и на предыдущем рисунке, но с отрицательным коэффициентом уплотнения орбит.

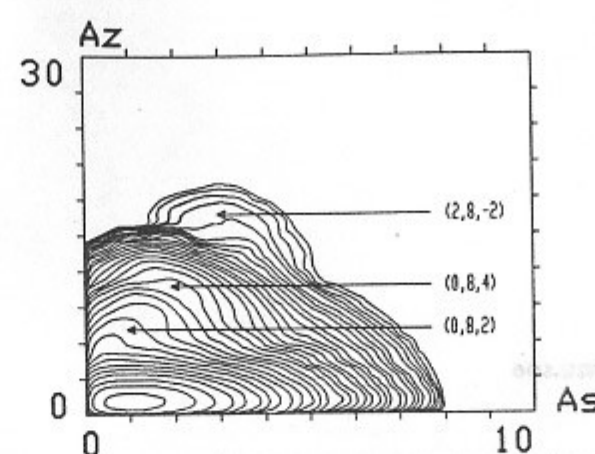


Рис.13 Рабочая точка для В-фабрики без паразитных МВ: $\nu_x=0.08$, $\nu_z=0.11$, $\nu_s=0.02$, $\lambda=10$, $\xi_x=0.01$, $\xi_z=0.05$. Цифры в скобках показаны резонансы $(l, m, n) \cdot (\nu_x, \nu_z, \nu_s) = k$.

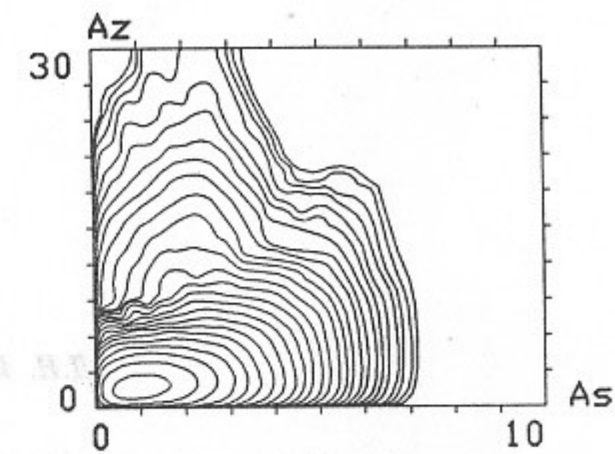


Рис.14 Эта же рабочая точка, но с паразитными МВ (вертикальное разведение на $50\sigma_z$). Появилась динамическая неустойчивость, приводящая к быстрой гибели частиц.

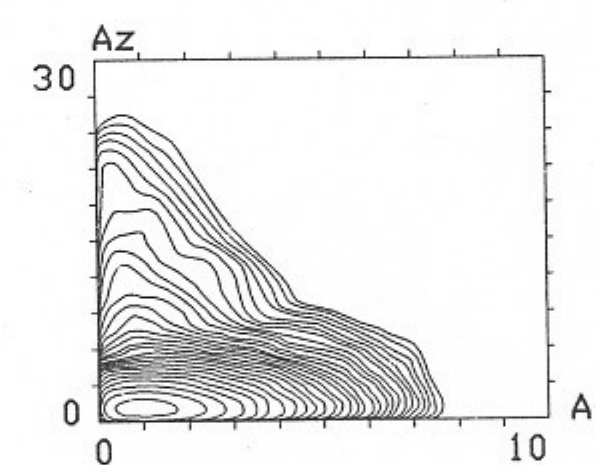


Рис.15 Та же самая рабочая точка, но с горизонтальным разведением в паразитных МВ на $20\sigma_x$.

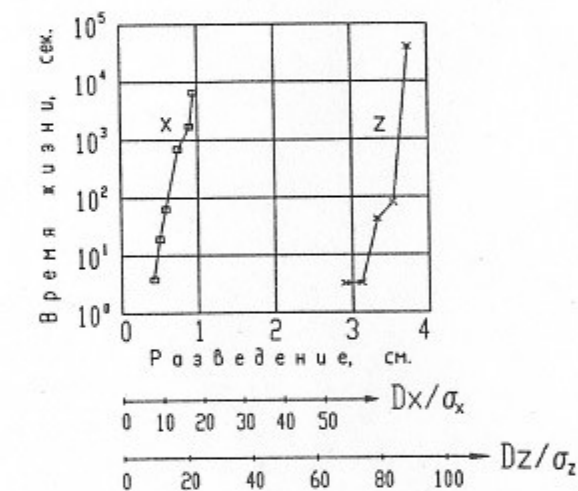
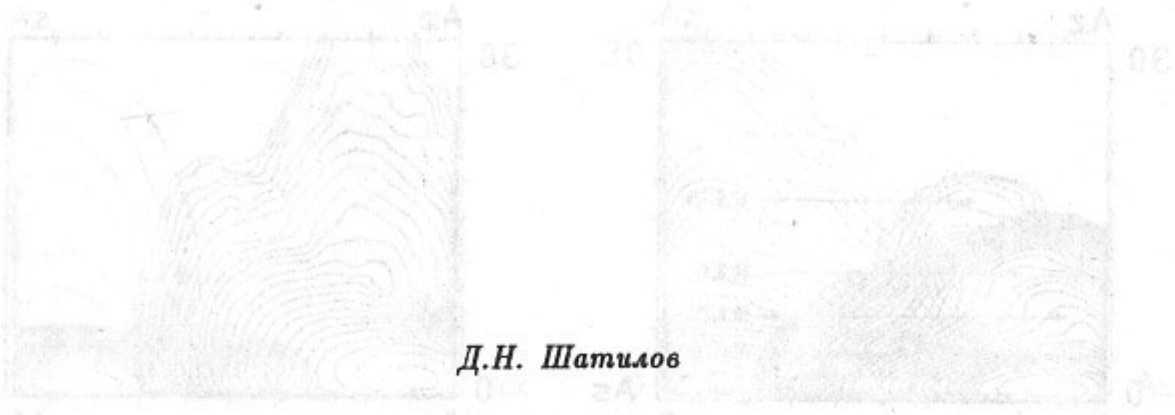


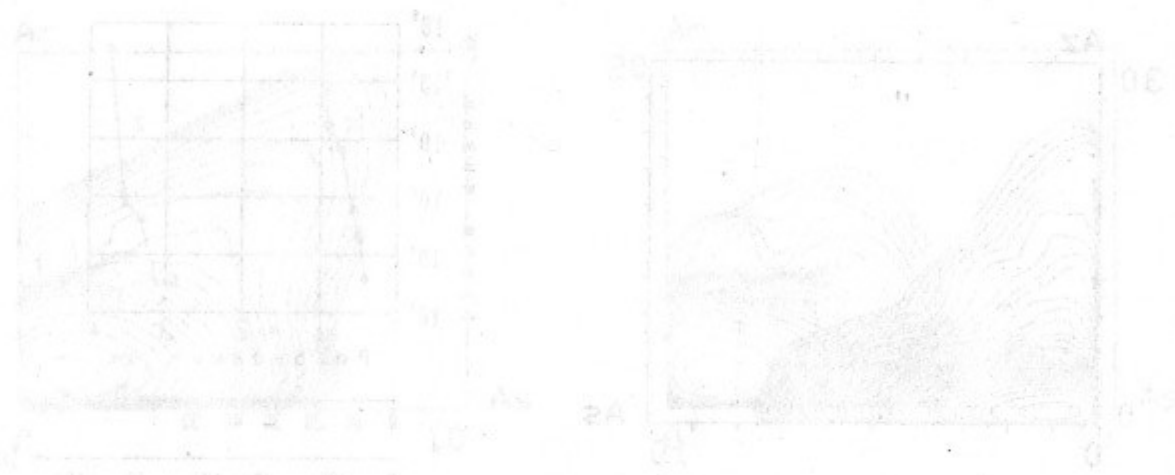
Рис.16 Зависимость времени жизни для В-фабрики от разведения (горизонтального или вертикального) в паразитных местах встречи.



Д.Н. Шатилов

**Компьютерное моделирование эффектов встречи
на больших амплитудах и определение времени жизни**

ИЯФ 92-79



Ответственный за выпуск С.Г. Попов

Работа поступила 3 ноября 1992 г.
Подписано в печать 4.XI. 1992 г.
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1,8 печ.л., 1,5 уч.-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ N 79

Обработано на IBM PC и отпечатано
на ротапринтере ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.