27

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
им. Г.И. Будкера СО РАН

З.К. Силагадзе

МОДЕЛЬ ВИКА–КАТКОВСКОГО: ВВЕДЕНИЕ

ИЯФ 92-33

НОВОСИБИРСК

ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ БЕТЕ–СОЛПИТЕРА

В подходе Бете-Солпитера к релятивистской проблеме связанного состояния двух частиц подразумевается, что информацию о связанном состоянии содержит B.S. волновая функция

$$\Phi\,(x_1,\, x_2;\, P_B) = \langle 0|\, T\phi_1(x_1)\,\phi_2\,(x_2)\,|B\rangle \tag{1}$$

и ее сопряжения

$$\bar{\Phi}\,(x_1,\, x_2;\, P_B) = \langle B|\, T\phi_1^+\,(x_1)\,\phi_2^+(x_2)\,|0\rangle\,. \tag{2}$$

Здесь P_B—есть 4-импульс связанного состояния $|B\rangle$, а для операторов поля подразумевается Гейзенберговское представление.

Заметим, что

$$\langle B|\, T\phi_1^+\,(x_1)\,\phi_2^+(x_2)\,|0\rangle \;= \langle 0|\,\bar{T}\phi_1\,(x_1)\,\phi_2\,(x_2)\,|B\rangle^*\,,$$

$\bar{T}$—антихронологический оператор. Поэтому можем сказать что $\bar{\Phi}$ получается из Φ при обращении времени.

Ясно, что вместо x_1, x_2 индивидуальных координат более удобны переменные, которые характеризуют относительное движение двух частиц и движение системы как целой. Координата, соответствующая относительному движению, есть $x = x_1 - x_2$. Тогда любую комбинацию $X = \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2$, линейно независимую от x, можно использовать для описания движения системы как целой. Линейная независимость означает $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} = \eta_1 + \eta_2 \neq 0$. Чтобы иметь соответствие нерелятивистскому определению центра инерции, мы возьмем:

$$\eta_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\,, \quad \eta_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\,. \tag{3}$$

Равенства $x_1 = X + \eta_2 x$, $x_2 = X - \eta_1 x$ и то, что $\hat{P}$—оператор 4-импульса является генератором трансляций в пространстве-времени, позволяет написать

$$\phi_1(x_1) = e^{i\hat{P}X}\phi_1(\eta_2 x)\, e^{-i\hat{P}X}\ ,\ \ \phi_2(x_2) = e^{i\hat{P}X}\phi_2(-\eta_1 x)\, e^{-i\hat{P}X}\ .$$

Подставим это выражение в (1) и получим:

$$\langle 0|\, T\phi_1(x_1)\,\phi_2(x_2)\,|B\rangle = \Theta(x_0)\langle 0|\,\phi_1(x_1)\,\phi_2(x_2)\,|B\rangle +$$

$$+\Theta(-x_0)\langle 0|\,\phi_2(x_2)\,\phi_1(x_1)\,|B\rangle =$$

$$= \Theta(x_0)\langle 0|\, e^{i\hat{P}X}\phi_1(\eta_2 x)\,\phi_2(-\eta_1 x)\, e^{-i\hat{P}X}\,|B\rangle +$$

$$+\Theta(-x_0)\langle 0|\, e^{i\hat{P}X}\phi_2(-\eta_1 x)\,\phi_1(\eta_2 x)\, e^{-i\hat{P}X}\,|B\rangle =$$

$$= e^{-iP_B X}\left\{\Theta(x_0)\langle 0|\,\phi_1(\eta_2 x)\,\phi_2(-\eta_1 x)\,|B\rangle +\right.$$

$$\left.+\Theta(-x_0)\langle 0|\,\phi_2(-\eta_1 x)\,\phi_1(\eta_2 x)\,|B\rangle\right\} =$$

$$= e^{-iP_B X}\,\langle 0|\, T\phi_1(\eta_2 x)\,\phi_2(-\eta_1 x)\,|B\rangle .$$

Таким образом, если введем редуцированную B.S. амплитуду

$$\Phi(x;\, P_B) = (2\pi)^{3/2}\langle 0|\, T\phi_1(\eta_2 x)\,\phi_2(-\eta_1 x)\,|B\rangle, \tag{4}$$

будем иметь

$$\Phi(x_1,\, x_2;\, P_B) = (2\pi)^{-3/2} e^{-iP_B X}\,\Phi(x;\, P_B) \tag{5}$$

аналогично

$$\bar{\Phi}(x_1,\, x_2;\, P_B) = (2\pi)^{-3/2} e^{iP_B X}\,\bar{\Phi}(x;\, P_B)\ , \tag{6}$$

где

$$\bar{\Phi}(x;\, P_B) = (2\pi)^{3/2}\langle B|\, T\phi_1^+(\eta_2 x)\,\phi_2^+(-\eta_1 x)\,|0\rangle\ .$$

Уравнение для волновой функции Бете-Солпитера можно получить при помощи четырехточечной функции Грина.

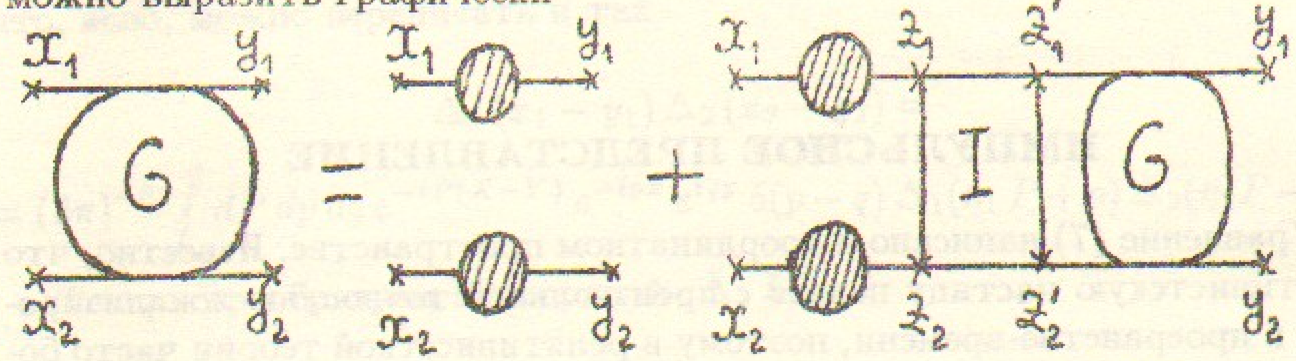
УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ ГРИНА

Рассмотрим четырехточечную функцию Грина

$$G(x_1,\, x_2;\, y_1,\, y_2) = \langle 0|\, T\phi_1(x_1)\,\phi_2(x_2)\,\phi_1^+(y_1)\,\phi_2^+(y_2)\,|0\rangle .$$

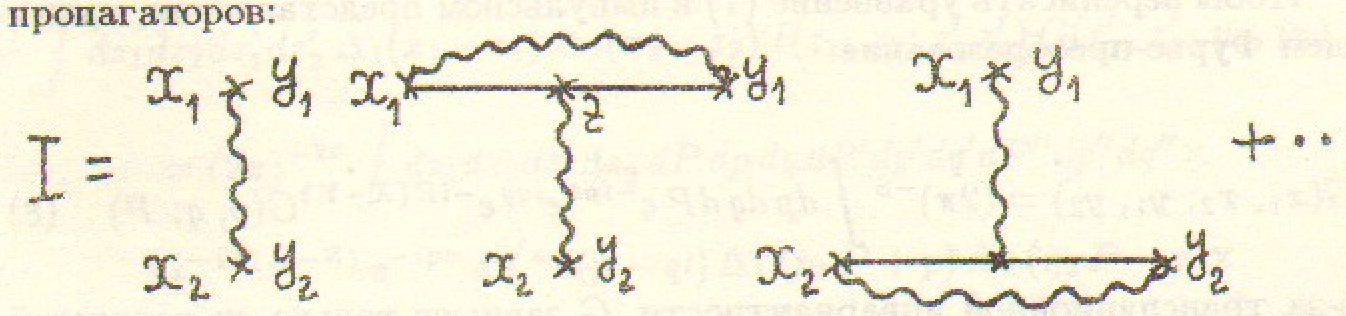
Операторы поля здесь в Гейзенберговском представлении, поэтому имеем полную функцию Грина, которую можно разложить в бесконечный ряд теории возмущений. Перегруппируем члены этого ряда: сначала просуммируем собственно-энергетические вставки в пропагаторе каждой частицы, что даст для них полные пропагаторы, а потом из оставшихся диаграмм выделим двухчастичнонеприводимые, сумма которых будет играть роль оператора взаимодействия (диаграмма двухчастичноприводима, если имеет следующую структуру 

с произвольными заштрихованними блоками). Более наглядно эту процедуру можно выразить графически



(7)

Здесь I есть сумма двухчастичнонеприводимих диаграмм без внешних пропагаторов:

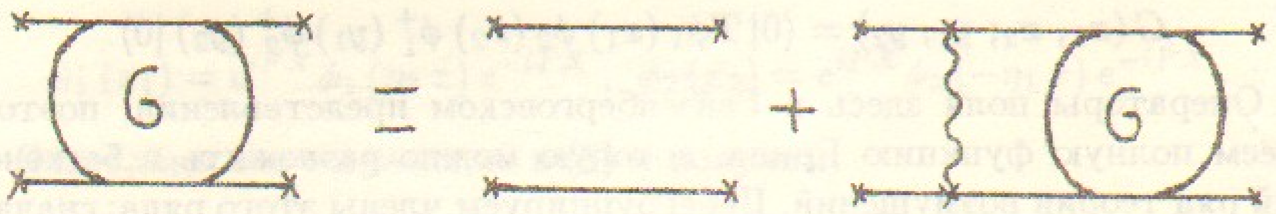


Интегральное уравнение (7) аналитически запишется следующим образом

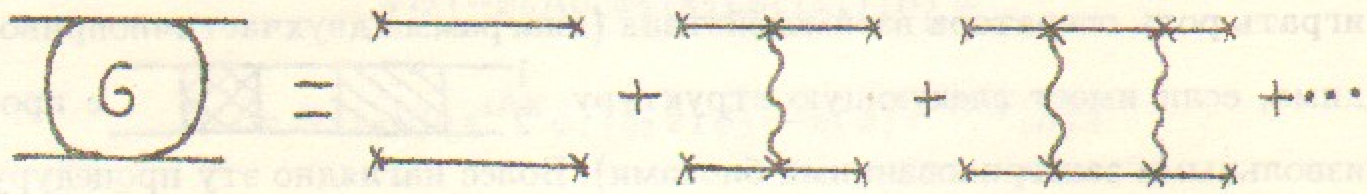
$$G(x_1,\, x_2;\, y_1,\, y_2) = \Delta_1(x_1 - y_1)\,\Delta_2(x_2 - y_2) +$$

$$+\int dz_1\, dz_2\, dz_1'\, dz_2' \Delta_1(x_1 - z_1)\Delta_2(x_2 - z_2) I(z_1,\, z_2;\, z_1'\, z_2') G(z_1',\, z_2';\, y_1,\, y_2)\ .$$

Так называемое лестничное приближение получится, если полный пропагатор $\Delta(x-y)$ заменим на свободный, а в функции взаимодействия I ограничимся первым членом:



Вид итерационного решения этого уравнения объясняет происхождение названия приближения



ИМПУЛЬСНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Уравнение (7) написано в координатном пространстве. Известно, что релятивистскую частицу нельзя с произвольной точностью локализировать в просранстве-времени, поэтому в релятивистской теории часто более удобно импульсное представление, чем координатное.

Чтобы переписать уравнение (7) в импульсном представлении, произведем Фурье-преобразование

$$G(x_1,\, x_2;\, y_1,\, y_2) = (2\pi)^{-8} \int dp\, dq\, dP\, e^{-ipx} e^{iqy} e^{-iP(X-Y)} G(p,\, q;\, P)\,. \quad (8)$$

Из-за трансляционной инвариантности, G зависит только от разностей координат. В роли независимых разностей, составленных из x_1, x_2, y_1, y_2 координат, мы взяли $x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2$, $X - Y = (\eta_1\, x_1 + \eta_2\, x_2) - (\eta_1\, y_1 + \eta_2\, y_2)$.

Проясним некоторые технические детали перехода к импульсному представлению. В первую очередь перепишем произведение $\Delta_1(x_1 - y_1) \times \Delta_2\,(x_2 - y_2)$ в виде (8). Пропагатор в импульсном пространстве определяется через Фурье-образ

$$\Delta(x) = (2\pi)^{-4} \int dp\, e^{-ipx}\, \Delta(p)\,.$$

Тогда

$$\Delta_1\,(x_1 - y_1)\,\Delta_2\,(x_2 - y_2) =$$

$$= (2\pi)^{-8} \int dp_1 dp_2\, e^{-ip_1(x_1-y_1)}\, e^{-ip_2(x_2-y_2)}\, \Delta_1(p_1)\, \Delta_2(p_2)\,.$$

В интеграле произведем замену переменных $p_1 = \eta_1 P + p$, $p_2 = \eta_2 P - p$ с единичным якобианом $\frac{D(p_1,\,p_2)}{D(P,\,p)} = \eta_1 + \eta_2 = 1$

$$\Delta_1\,(x_1 - y_1)\,\Delta_2\,(x_2 - y_2) =$$

$$= (2\pi)^{-8} \int dP\, dp\, e^{-iP(X-Y)}\, e^{-ipx}\, e^{ipy}\, \Delta_1(\eta_1\, P + p)\, \Delta_2(\eta_2\, P - p)\,,$$

что, ясно, можно переписать и так

$$\Delta_1\,(x_1 - y_1)\,\Delta_2\,(x_2 - y_2) =$$

$$= (2\pi)^{-8} \int dP\, dp\, dq\, e^{-iP(X-Y)}\, e^{-ipx}\, e^{iqy}\, \delta(p - q)\, \Delta_1(\eta_1\, P + p)\, \Delta_2(\eta_2 P - p)\,.$$

Теперь преобразуем интеграл $\Delta_1\,\Delta_2\, I\, G$

$$\Delta_1 \Delta_2 I G =$$

$$= \int dz_1 dz_2 dz_1' dz_2'\, \Delta_1(x_1 - z_1)\, \Delta_2(x_2 - z_2)\, I(z_1,\, z_2;\, z_1'\, z_2')\, G(z_1',\, z_2';\, y_1,\, y_2) =$$

$$= (2\pi)^{-24} \int dz_1 dz_2 dz_1' dz_2'\, dP\, dp\, dq\, dP' dp' dq' dP'' dp'' dq'' \times$$

$$\times e^{-iP(X-Z)}\, e^{-ipx}\, e^{iq'z}\, \delta(p - q')\, \Delta_1\,(\eta_1\, P + p)\, \Delta_2\,(\eta_2\, P - p) \times$$

$$\times e^{-iP'(Z-Z')}\, e^{-ip'z}\, e^{iq''z}\, I(p',\, q'';\, P')\, e^{-iP''(Z'-Y)}\, e^{-ip''z'}\, e^{iqy}\, G(p''\, q;\, P'') =$$

$$= (2\pi)^{-24} \int dz\, dz'\, dZ\, dZ'\, dP\, dp\, dq\, dP' dp' dP'' dp'' dq'' \times$$

$$\times \Delta_1(\eta_1 P + p)\, \Delta_2\,(\eta_2\, P - p)\, I(p',\, q'';\, P') \times$$

$$\times G(p'',\, q;\, P'')\, e^{-iz(p'-p)}\, e^{-iz'(p''-q'')}\, e^{-iZ(P'-P)}\, e^{-iZ'(P''-P')}\,.$$

Интегрирование по координатам даст δ-функции, и 4-импульсные интегралы тривиально вычисляются. В итоге получим

$$\Delta_1\,\Delta_2\,IG =$$

$$= (2\pi)^{-8}\int dP\,dp\,dq\,dq'\Delta_1\,(\eta_1\,P + p)\,\Delta_2\,(\eta_2\,P - p)\,I(p,\,q';\,P)\,G(q',\,q;\,P)\,.$$

После всего этого уравнение (7) легко перепишется в импульсном пространстве:

$$G(p,\,q;\,P) = \delta(p-q)\,\Delta_1(\eta_1 P + p)\,\Delta_2(\eta_2 P - p) +$$

$$+\Delta_1(\eta_1 P + p)\,\Delta_2(\eta_2 P - p)\int dq'\,I(p,\,q';\,P)\,G(q',\,q;\,P)$$

или

$$[\Delta_1(\eta_1 P + p)\Delta_2(\eta_2 P - p)]^{-1}\,G(p,\,q;\,P) =$$

$$= \delta(p-q) + \int dq'\,I(p,\,q';\,P)\,G(q',\,q;\,P)\,. \qquad (9)$$

Если введем определения

$$(A\cdot B)(p,\,q;\,P) = \int dq'\,A(p,\,q';\,P)\,B(q',\,q;\,P)\,,$$

$$K(p,\,q;\,P) = [\Delta_1(\eta_1\,P + p)\,\Delta_2(\eta_2 P - p)]^{-1}\,\delta(p-q)\,,$$

это уравнение примет вид:

$$K\cdot G = 1 + I\,G\,. \qquad (10)$$

ВКЛАД ДВУХЧАСТИЧНЫХ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ В ФУНКЦИЮ ГРИНА

С помощью полного набора $\sum|n\rangle\langle n| = 1$, функцию Грина можно переписать так

$$G(x_1,\,x_2;\,y_1,\,y_2) \equiv \langle 0|\,T\phi_1(x_1)\,\phi_2(x_2)\,\phi_1^+\,(y_1)\,\phi_2^+\,(y_2)\,|0\rangle =$$

$$= \Theta(\min\,[(x_1)_0,\,(x_2)_0] - \max[(y_1)_0,\,(y_2)_0])\times$$

$$\times\sum\langle 0|\,T\phi_1(x_1)\,\phi_2(x_2)\,|n\rangle\langle n|\,T\phi_1^+\,(y_1)\,\phi_2^+\,(y_2)|0\rangle +$$

$$+\Theta(\min\,[(x_1)_0,\,(y_1)_0] - \max[(x_2)_0,\,(y_2)_0])\times$$

$$\times\sum\langle 0|\,T\phi_1(x_1)\,\phi_1^+(y_1)\,|n\rangle\langle n|\,T\phi_2\,(x_2)\,\phi_2^+\,(y_2)\,|0\rangle +$$

$$+\Theta(\min\,[(x_1)_0,\,(y_2)_0] - \max[(x_2)_0,\,(y_1)_0])\times$$

$$\times\sum\langle 0|\,T\phi_1(x_1)\,\phi_2^+(y_2)\,|n\rangle\langle n|\,T\phi_2\,(x_2)\,\phi_1^+\,(y_1)\,|0\rangle +$$

$$+\Theta(\min\,[(x_2)_0,\,(y_1)_0] - \max[(x_1)_0,\,(y_2)_0])\times$$

$$\times\sum\langle 0|\,T\phi_2(x_2)\,\phi_1^+(y_1)\,|n\rangle\langle n|\,T\phi_1\,(x_1)\,\phi_2^+\,(y_2)\,|0\rangle +$$

$$+\Theta(\min\,[(x_2)_0,\,(y_2)_0] - \max[(x_1)_0,\,(y_1)_0])\times$$

$$\times\sum\langle 0|\,T\phi_2(x_2)\,\phi_2^+(y_2)\,|n\rangle\langle n|\,T\phi_1\,(x_1)\,\phi_1^+\,(y_1)\,|0\rangle +$$

$$+\Theta(\min\,[(y_1)_0,\,(y_2)_0] - \max[(x_1)_0,\,(x_2)_0])\times$$

$$\times\sum\langle 0|\,T\phi_1^+(y_1)\,\phi_2^+(y_2)\,|n\rangle\langle n|\,T\phi_1\,(x_1)\,\phi_2\,(x_2)\,|0\rangle\,. \qquad (11)$$

Выделим вклад двухчастичных связанных состоянии $|B\rangle$, заменив

$$\sum|n\rangle\langle n| \longrightarrow \int dP\,\delta(P^2 - m_B^2)\,\Theta(P_0)\,|B\rangle\langle B|\,.$$

Чтобы получить состояние с квантовыми числами вакуума, надо на $|B\rangle$ подействовать двумя операторами уничтожения. Только в этом случае получим ненулевой матричный элемент в (11). Таким образом, вклад связанного состояния $|B\rangle$ в функцию Грина есть

$$B = \int dP\langle 0|\,T\phi_1(x_1)\,\phi_2\,(x_2)\,|B\rangle\langle B|\,T\phi_1^+\,(y_1)\,\phi_2^+\,(y_2)\,|0\rangle\times$$

$$\times\delta(P^2 - m_B^2)\,\Theta(P_0)\,\Theta(\min\,[(x_1)_0,\,(x_2)_0] - \max[(y_1)_0,\,(y_2)_0])\,.$$

Интеграл по dP_0 возьмем с помощью

$$\delta(P^2 - m_B^2)\,\Theta(P_0) =$$

$$= \frac{\Theta(P_0)}{2P_0}\,\{\delta(P_0 - \sqrt{\vec{P}^2 + m_B^2}\,) + \delta(P_0 + \sqrt{\vec{P}^2 + m_B^2}\,)\,\} =$$

$$= \frac{\Theta(P_0)}{2P_0}\,\delta(P_0 - \sqrt{\vec{P}^2 + m_B^2}\,)$$

и вспомнив (5) и (6):

$$B = (2\pi)^{-3}\int\frac{d\vec{P}}{2\omega_B}\,\Phi(x;\,P_B)\,\bar{\Phi}(y;\,P_B)\,e^{-i\omega_B(X_0 - Y_0)}\,e^{-i\vec{P}(\vec{X}-\vec{Y})}\times$$

$$\times\Theta(\min[(x_1)_0,\,(x_2)_0]-\max[(y_1)_0,\,(y_2)_0])\,.$$

Здесь $P_B=(\omega_B,\,\vec{P})$ и $\omega_B=\sqrt{\vec{P}^2+m_B^2}$; m_B—есть масса связанного состояния.

Преобразуем аргумент Θ-функции так:

$$\min[(x_1)_0,\,(x_2)_0]-\max[(y_1)_0,\,(y_2)_0])=$$

$$=\min[X_0+\eta_2\,x_0,\,X_0-\eta_1\,x_0]-\max[Y_0+\eta_2\,y_0,\,Y_0-\eta_1\,y_0]=$$

$$=\left\{\begin{array}{ll} X_0-Y_0-\eta_1\,x_0-\eta_2\,y_0\,, & \text{если}\quad x_0>0\,,y_0>0\\ X_0-Y_0-\eta_1\,x_0+\eta_1\,y_0\,, & \text{если}\quad x_0>0\,,y_0<0\\ X_0-Y_0+\eta_2\,x_0-\eta_2\,y_0\,, & \text{если}\quad x_0<0\,,y_0>0\\ X_0-Y_0+\eta_2\,x_0+\eta_1\,y_0\,, & \text{если}\quad x_0<0\,,y_0<0\end{array}\right\}=$$

$$=X_0-Y_0-\frac{1}{2}\,|x_0|-\frac{1}{2}\,|y_0|+\frac{1}{2}\,(\eta_2-\eta_1)(x_0-y_0)\,.$$

Кроме того воспользуемся его интегральным представлением

$$\Theta(z)=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dk\,\frac{e^{-ikz}}{k+i\varepsilon}\,,$$

в котором сделаем замену переменных $k\to P_0-\omega_B$. Тогда

$$\Theta\Big(X_0-Y_0-\frac{1}{2}\,|x_0|-\frac{1}{2}\,|y_0|+\frac{1}{2}\,(\eta_2-\eta_1)(x_0-y_0)\Big)=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dP_0}{P_0-\omega_B+i\varepsilon}\times$$

$$\times\exp\{-i\,(P_0-\omega_B)[X_0-Y_0-\frac{1}{2}\,|x_0|-\frac{1}{2}\,|y_0|+\frac{1}{2}\,(\eta_2-\eta_1)(x_0-y_0)]\}\,.$$

Подстановка этого в B даст

$$B(x,\,y;\,X-Y)=i\,(2\pi)^{-4}\int dP\,\Phi(x;\,P_B)\,\bar{\Phi}(y;\,P_B)\,\frac{e^{-iP\,(X-Y)}}{2\omega_B(P_0-\omega_B+i\varepsilon)}\times$$

$$\times\exp\{-i\,(P_0-\omega_B)[-\frac{1}{2}\,|x_0|-\frac{1}{2}\,|y_0|+\frac{1}{2}\,(\eta_2-\eta_1)(x_0-y_0)]\}=$$

$$=i\,(2\pi)^{-12}\int dP\,dp\,dq\,e^{-iP\,(X-Y)}\,e^{-ip\,x}\,e^{iq\,y}\,\frac{\Phi(p;\,P_B)\,\bar{\Phi}(q;\,P_B)}{2\omega_B(P_0-\omega_B+i\varepsilon)}\times$$

$$\times\exp\{-i\,(P_0-\omega_B)[-\frac{1}{2}\,|x_0|-\frac{1}{2}\,|y_0|+\frac{1}{2}\,(\eta_2-\eta_1)(x_0-y_0)]\}\,,$$

где мы в редуцированных волновых функциях перешли к импульсному представлению

$$\Phi(x;\,P_B)=(2\pi)^{-4}\int dp\,e^{-ip\,x}\,\Phi(p;\,P_B)$$

и

$$\bar{\Phi}(y;\,P_B)=(2\pi)^{-4}\int dq\,e^{iq\,y}\,\bar{\Phi}(q;\,P_B)\,.$$

Обозначим для краткости

$$A(p,\,q;\,P)=\frac{\Phi(p;\,P_B)\,\bar{\Phi}(q;\,P_B)}{2\omega_B(P_0-\omega_B+i\varepsilon)}\,,$$

$$f(x_0,\,y_0)=\frac{1}{2}\,(\eta_2-\eta_1)(x_0-y_0)-\frac{1}{2}\,|x_0|-\frac{1}{2}\,|y_0|$$

и найдем образ B в импульсном пространстве

$$B(p,\,q;\,P)=(2\pi)^{-4}\int e^{ip\,x}\,e^{-iq\,y}\,e^{iP\,X}\,B(x,\,y;\,X)\,dx\,dy\,dX=$$

$$=i\,(2\pi)^{-16}\int dx\,dy\,dX\,dP'dp'dq'\,e^{i\,(p-p')x}\,e^{-i\,(q-q')y}\times$$

$$\times e^{i\,(P-P')X}\,A(p'\,q';\,P')\,\exp\{-i\,(P_0'-\omega_B')\,f\,(x_0,\,y_0)\}=$$

$$=i\,(2\pi)^{-12}\int dx\,dy\,dp'dq'\,e^{i\,(p-p')x}\,e^{-i\,(q-q')y}A(p'\,q';\,P')\times$$

$$\times\exp\{-i\,(P_0-\omega_B)\,f\,(x_0,\,y_0)\}\simeq i\,(2\pi)^{-4}\,A(p,\,q;\,P)\ \text{при}\ P_0\to\omega_B\,.$$

Таким образом, вблизи точки $P_0=\omega_B$:

$$B(p,\,q;\,P)=\frac{i}{(2\pi)^4}\,\frac{\Phi(p;\,P_B)\,\bar{\Phi}(q;\,P_B)}{2\omega_B(P_0-\omega_B+i\varepsilon)}\,,$$

т.е. вклад двухчастичного связанного состояния в $G(p,\,q;\,P)$ имеет полюсное поведение около $P_0=\omega_B$. Остальные промежуточные состояния

$|n\rangle$, если их массы отличаются от m_B (а мы предположим, что это так) дадут вклад с регулярным поведением около точки $P_0 = \omega_B$ Таким образом

$$G(p,\, q;\, P) \xrightarrow[P_0 \to \omega_B]{} \frac{i}{(2\pi)^4}\, \frac{\Phi(p;\, P_B)\, \bar{\Phi}(q;\, P_B)}{2\omega_B (P_0 - \omega_B + i\varepsilon)} . \qquad (12)$$

УРАВНЕНИЕ БЕТЕ-СОЛПИТЕРА

В уравнении для функции Грина (9) возьмем $p \neq q$, $P \to P_B$, тогда, учитывая (12), получим

$$[\Delta_1(\eta_1 P_B + p)\, \Delta_2(\eta_2 P_B - p)]^{-1}\, \frac{i}{(2\pi)^4}\, \frac{\Phi(p;\, P_B)\, \bar{\Phi}(q;\, P_B)}{2\omega_B (P_0 - \omega_B + i\varepsilon)} =$$

$$= \int dq' I(p,\, q';\, P_B)\, \frac{i}{(2\pi)^4}\, \frac{\Phi(q';\, P_B)\, \bar{\Phi}(q;\, P_B)}{2\omega_B (P_0 - \omega_B + i\varepsilon)} ,$$

отсюда следует уравнение Бете-Солпитера для волновой функции

$$[\Delta_1(\eta_1 P_B + p) \Delta_2(\eta_2 P_B - p]^{-1}\, \Phi(p;\, P_B) = \int dq' I(p,\, q';\, P_B)\, \Phi(q';\, P_B). \quad (13)$$

УСЛОВИЕ НОРМИРОВКИ B.S. ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ

Нормировка волновой функции $\Phi(p;\, P_B)$ не определяется из однородного уравнения Бете-Солпетера. Ее можно получить так. Из (10) $G \cdot (K - I) = 1$. Продифиренцируем по P_0:

$$\frac{\partial G}{\partial P_0}\, (K - I) + G \left(\frac{\partial K}{\partial P_0} - \frac{\partial I}{\partial P_0} \right) = 0 ,$$

т.е.

$$\frac{\partial G}{\partial P_0} = -G \left(\frac{\partial K}{\partial P_0} - \frac{\partial I}{\partial P_0} \right) G .$$

Рассмотрим это равенство около точки $P_0 = \omega_B$, где для функции Грина имеем (12):

$$-\frac{i}{(2\pi)^4}\, \frac{\Phi(p;\, P_B)\, \bar{\Phi}(q;\, P_B)}{2\omega_B (P_0 - \omega_B + i\varepsilon)^2} = -\int dq'\, dq''\, \frac{i}{(2\pi)^4}\, \frac{\Phi(p;\, P_B)\, \bar{\Phi}(q';\, P_B)}{2\omega_B (P_0 - \omega_B + i\varepsilon)} \times$$

$$\times \left[\frac{\partial}{\partial P_0}\, (K - I) \right] (q',\, q'')\, \frac{i}{(2\pi)^4}\, \frac{\Phi(q'';\, P_B)\, \bar{\Phi}(q;\, P_B)}{2\omega_B (P_0 - \omega_B + i\varepsilon)} ,$$

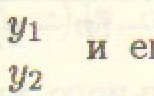
что дает следующее условие нормировки

$$\frac{i}{(2\pi)^4} \int dp\, dq\, \bar{\Phi}(p;\, P_B) \left[\frac{\partial}{\partial P_0}\, (K - I) \right]_{P_0 = \omega_B} (p;\, q) \Phi(q;\, P_B) = 2\omega_B \equiv 2(P_B)_0 \qquad (14)$$

или символически

$$\frac{i}{(2\pi)^4}\, \bar{\Phi} \left(\frac{\partial K}{\partial P_0} - \frac{\partial I}{\partial P_0} \right)_{P_0 = \omega_B} \Phi = 2\omega_B .$$

B.S. УРАВНЕНИЕ В ЛЕСТНИЧНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Напишем уравнение Бете-Солпитера в лестничном приближении для двух скалярных частиц, взаймодействующих посредством обмена скалярным квантом. В этом приближении ядром интегрального уравнения является $I(x,\, y,\, X - Y) =$ 

и его можно вычислить с помощью стандартных правил Фейнмана: каждой вершине соответствует ig, каждому скалярному пропагатору

$$\Delta(x) = (2\pi)^{-4} \int \frac{e^{-ip\,x}\, dp}{i\, [\mu^2 - p^2 - i\varepsilon]} .$$

Таким образом

$$I(x,\, y;\, X - Y) = -g_1\, g_2\, \Delta(x)\, \delta(x_1 - y_1)\, \delta(x_2 - y_2) =$$

$$= -g_1\, g_2\, \Delta(x)\, \delta(X - Y + \eta_2\, (x - y))\, \delta(X - Y - \eta_1\, (x - y)) .$$

Заметим, что

$$\delta(X - Y + \eta_2\, (x - y))\, \delta(X - Y - \eta_1\, (x - y)) =$$

$$= \delta[\eta_1\, (x - y) + \eta_2\, (x - y)]\, \delta(X - Y - \eta_1\, (x - y)) = \delta(x - y)\, \delta(X - Y) ,$$

т.е.

$$I(x,\, y;\, X - Y) = -g_1\, g_2\, \Delta(x)\, \delta(x - y)\, \delta(X - Y) ,$$

импульсный образ которого имеет вид

$$I(p,\,q;\,P) = (2\pi)^{-4}\int e^{ip\,x}\,e^{-iq\,y}\,e^{-iP\,X}\,I(x,y;\,X)\,dx\,dy\,dX =$$

$$= -g_1\,g_2\,(2\pi)^{-4}\int dx\,e^{i\,(p-q)\,x}\,\Delta(x)\,,$$

или

$$I(p,\,q;\,P) = -g_1\,g_2\,(2\pi)^{-4}\,\Delta(p-q) = \frac{ig_1\,g_2}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{\mu^2-(p-q)^2-i\varepsilon}\,. \qquad (15)$$

Подставим это в (13), а также возьмем $\vec{P}_B = 0$. Получим уравнение Бете-Солпитера в системе покоя и в лестничном приближении

$$[m_1^2+\vec{p}^2-(\eta_1\,P_0+p_0)^2][m_2^2+\vec{p}^2-(\eta_2\,P_0-p_0)^2]\,\Phi(p,\,P_0) =$$

$$= \frac{\lambda}{i\pi^2}\int dq\,\frac{\Phi(q;\,P_0)}{\mu^2-(p-q)^2-i\varepsilon}\,,\quad \lambda = \frac{g_1\,g_2}{16\pi^2}\,. \qquad (16)$$

Заметим, что ядро интегрального уравнения (16) сингулярно, что затрудняет его изучение с помощью стандартных математических средств. Но сингулярности в

$$\frac{1}{\mu^2-(p_0-q_0)^2+(\vec{p}-\vec{q})^2-i\varepsilon}$$

не будет, если предположить, что p_0 и q_0 чисто мнимые. Переход к таким p_0, q_0 осуществляется поворотом Вика, что предполагает две вещи: аналитическое продолжение $\Phi(p;\,P_0)$ в p_0-комплексной плоскости и поворот контура интегрирования по dq_0 от действительной оси к мнимой. Во время этого поворота контур интегрирования, разумеется, не должен "зацепится" на особенности подынтегрального выражения. Поэтому, в первую очередь, нужно изучить аналитические свойства амплитуды $\Phi(p,\,P_0)$.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА B.S. ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрим редуцированную B.S. волновую функцию

$$(2\pi)^{-3/2}\Phi(x;\,P) = \langle 0|T\phi_1(\eta_2\,x)\phi_2(-\eta_1\,x)|B\rangle =$$

$$= \Theta(x_0)f(x;\,P) + \Theta(-x_0)g(x;\,P)\,,$$

где

$$f(x;\,P) = \langle 0|\phi_1(\eta_2\,x)\,\phi_2(-\eta_1\,x)|B\rangle \;\text{ и }\; g(x;\,P) = \langle 0|\phi_2(-\eta_1\,x)\,\phi_1(\eta_2\,x)|B\rangle\,.$$

Преобразуем каждую из них с помощью полного набора

$$1 = \sum |n\rangle\langle n| \equiv \sum_\alpha \int dp\,|p,\,\alpha\rangle\langle p,\,\alpha|$$

(α символизирует дискретные квантовые числа состояния $|n\rangle$, а p—его 4-импульс), приняв во внимание равенства

$$\phi_1\,(\eta_2\,x) = e^{i\eta_2 x\,\hat{P}}\,\phi_1\,(0)\,e^{-i\eta_2 x\,\hat{P}} \;\text{ и }\; \phi_2\,(-\eta_1\,x) = e^{-i\eta_1 x\,\hat{P}}\,\phi_2\,(0)\,e^{i\eta_1 x\,\hat{P}}\,,$$

получим

$$f\,(x;\,P) = \sum_\alpha \int dp\langle 0|\,\phi_1(\eta_2\,x)\,|p,\,\alpha\rangle\langle p,\,\alpha|\,\phi_2(-\eta_1\,x)\,|B\rangle =$$

$$= \sum_\alpha \int dp\,e^{-i\,(p-\eta_1 P)\,x}\langle 0|\,\phi_1\,(0)\,|p,\,\alpha\rangle\langle p,\,\alpha|\,\phi_2(0)\,|B\rangle\,,$$

$$g\,(x;\,P) = \sum_\alpha \int dp\langle 0|\,\phi_2(-\eta_1\,x)\,|p,\,\alpha\rangle\langle p,\,\alpha|\,\phi_1(\eta_2\,x)\,|B\rangle =$$

$$= \sum_\alpha \int dp\,e^{-i\,(\eta_2 P-p)\,x}\langle 0|\,\phi_2\,(0)\,|p,\,\alpha\rangle\langle p,\,\alpha|\,\phi_1(0)\,|B\rangle\,,$$

или

$$f\,(x;\,P) = \int dp\,e^{-i\,(p-\eta_1 P)\,x}\,f\,(p;\,P) \;\text{и}\; g\,(x;\,P) = \int dp\,e^{-i\,(\eta_2 P-p)\,x}\,g\,(p;\,P)\,,$$

где мы ввели обозначения

$$f\,(p;\,P) = \sum_\alpha \langle 0|\,\phi_1(0)\,|p,\,\alpha\rangle\langle p,\,\alpha|\,\phi_2(0)\,|B\rangle\,,$$

$$g\,(p;\,P) = \sum_\alpha \langle 0|\,\phi_2(0)\,|p,\,\alpha\rangle\langle p,\,\alpha|\,\phi_1(0)\,|B\rangle\,.$$

Матричный элемент $\langle 0|\,\phi_1(0)\,|p,\,\alpha\rangle$ только тогда отличается от нуля, когда $|p,\,\alpha\rangle$ имеет те же квантовые числа как квант поля ϕ_1 (в противном случае $\phi_1(0)\,|p,\,\alpha\rangle$ не будет иметь квантовые числа вакуума). Но среди состояний с квантовыми числами первой частицы наименьшую массу должна иметь именно эта частица, иначе она не будет стабильна. Таким образом $f\,(p,\,P)\neq 0$ только тогда, когда $p_0\geq\sqrt{m_1^2+\vec{p}^{\,2}}$. Поэтому

$$f\,(x;\,P)=\int dp\,e^{-i\,(p-\eta_1 P)\,x}\,f\,(p;\,P)\,\Theta(p_0-\sqrt{m_1^2+\vec{p}^{\,2}})=$$

$$=\int dq\,e^{-i\,q\,x}\,f\,(\eta_1\,P+q;\,P)\,\Theta\big(q_0+\eta_1\,P_0-\sqrt{m_1^2+(\vec{q}+\eta_1\,\vec{P})^2}\big)\,.$$

Это последнее равенство, если ввести обозначения

$$\tilde{f}(q;\,P)=f(\eta_1\,P+q;\,P)\,,\;\;\omega_+=\sqrt{m_1^2+(\vec{q}+\eta_1\,\vec{P})^2}-\eta_1\,P_0\,,$$

можно переписать так

$$f\,(x;\,P)=\int d\vec{q}\int\limits_{\omega_+}^{\infty}dq_0\,e^{-i\,q\,x}\,\tilde{f}\,(q;\,P)\,.$$

Заметим, что

$$\omega_+\geq m_1-\eta_1 P_0=\frac{m_1}{m_1+m_2}\,(m_1+m_2-P_0)$$

В системе покоя P_0 равно массе связанного состояния, поэтому $m_1+m_2>P_0$. Т. е. $\omega_+>0$ и вклад в $f(x;\,P)$ дают только положительные частоты.

Аналогично, $\langle 0|\phi_2(0)|p,\,\alpha\rangle\neq 0$ только тогда, когда $|p,\,\alpha\rangle$ имеет квантовые числа второй частицы и стабильность этой частицы означает $g(p;\,P)\equiv g(p;\,P)\Theta(p_0-\sqrt{m_2^2+\vec{p}^{\,2}})$. Таким образом

$$g(x;\,P)=\int dp\,e^{-i\,(\eta_2 P-p)\,x}\,g(p;\,P)\,\Theta(p_0-\sqrt{m_2^2+\vec{p}^{\,2}})=$$

$$=\int dq\,e^{-i\,q\,x}\,g(\eta_2 P-q;\,P)\,\Theta(\eta_2 P_0-q_0-\sqrt{m_2^2+(\eta_2\vec{P}-\vec{q})^2})\,.$$

Обозначим $\tilde{g}(q;\,P)=g(\eta_2 P-q;\,P)$, $\omega_-=\eta_2 P_0-\sqrt{m_2^2+(\eta_2\vec{P}-\vec{q})^2}$, тогда

$$g(x;\,P)=\int d\vec{q}\int\limits_{-\infty}^{\omega_-}dq_0\,e^{-i\,q\,x}\,\tilde{g}(q;\,P)\,.$$

$\omega_-\leq\eta_2 P_0-m_2=\frac{m_2}{m_1+m_2}\,(P_0-m_1-m_2)<0$, т.е. вклад в $g(x;\,p)$ дают только отрицательные частоты (в системе покоя).

В итоге получили

$$\Phi(x;\,P)=(2\pi)^{3/2}\,\Theta(x_0)\int d\vec{q}\int\limits_{\omega_+(\vec{q};\,P)}^{\infty}dq_0\,e^{-i\,q\,x}\,\tilde{f}\,(q;\,P)+$$

$$+(2\pi)^{3/2}\,\Theta(-x_0)\int d\vec{q}\int\limits_{-\infty}^{\omega_-(\vec{q};\,P)}dq_0\,e^{-i\,q\,x}\,\tilde{g}\,(q;\,P)\,. \qquad (17)$$

$\vec{P}=0$ в системе покоя $\omega_+>0$, $\omega_-<0$, поэтому (17) показывает, что с положительной полуоси $x_0>0$, $\Phi(x;\,P)$ можно аналитически продолжить в нижнюю x_0-полуплоскость (именно тогда будем иметь убивающую экспоненту), а из отрицательной полуоси $x_0<0$—в верхнюю полуплоскость.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА B.S. ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ В ИМПУЛЬСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Чтобы манипулировать с уравнением (16), нам нужны аналитические свойства амплитуды $\Phi(p;\,P_0)$. Поэтому рассмотрим импульсный образ волновой функции $\Phi(p;\,P)=\int dx\,e^{ip\,x}\Phi(x;\,P)$. С учетом (17)

$$\Phi(p;\,P)=$$

$$=(2\pi)^{3/2}\int d\vec{q}\int\limits_{\omega_+(\vec{q})}^{\infty}dq_0\int d\vec{x}\,e^{-i\,(\vec{p}-\vec{q})\,\vec{x}}\int\limits_{0}^{\infty}dx_0\,e^{i\,(p_0-q_0)\,x_0}\,\tilde{f}\,(q;\,P)+$$

$$+(2\pi)^{3/2}\int d\vec{q}\int\limits_{-\infty}^{\omega_-(\vec{q})}dq_0\int d\vec{x}\,e^{-i\,(\vec{p}-\vec{q})\,\vec{x}}\int\limits_{-\infty}^{0}dx_0\,e^{i\,(p_0-q_0)\,x_0}\,\tilde{g}\,(q;\,P)\,,$$

интегралы по $d\vec{x}$, $d\vec{q}$ и dx_0 можно вычислить, что даст

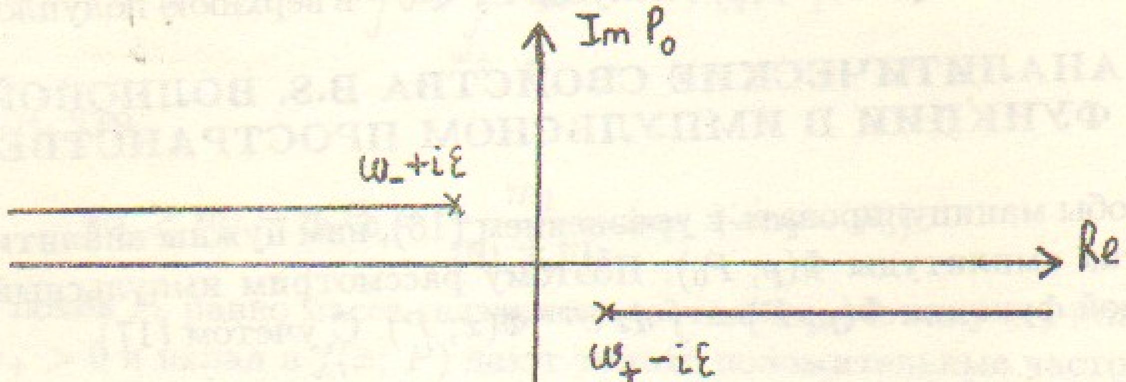
$$\Phi(p;P) = i(2\pi)^{9/2}\int\limits_{\omega_+(\vec p)}^{\infty} dq_0\, \frac{\tilde f(q_0;\vec p;P)}{p_0-q_0+i\varepsilon} - i(2\pi)^{9/2}\int\limits_{-\infty}^{\omega_-(\vec p)} dq_0\, \frac{\tilde g(q_0;\vec p;P)}{p_0-q_0-i\varepsilon}\,, \tag{18}$$

при интегрировании по dx_0 используем следующие определения несобственных интегралов

$$\int\limits_0^{\infty} dx_0\, e^{i(p_0-q_0)x_0} \equiv \int\limits_0^{\infty} dx_0\, e^{i(p_0-q_0+i\varepsilon)x_0}\,,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{0} dx_0\, e^{i(p_0-q_0)x_0} \equiv \int\limits_{-\infty}^{0} dx_0\, e^{i(p_0-q_0-i\varepsilon)x_0}\,.$$

Если теперь захотим аналитически продолжить $\Phi(p;P)$ с помощью (18) для комплексных p_0, все будет хорошо кроме случаев $p_0-q_0\pm i\varepsilon = 0$. Чтобы избежать этих случаев, проведем разрезы. В частности, в системе покоя будем иметь следующую картину:



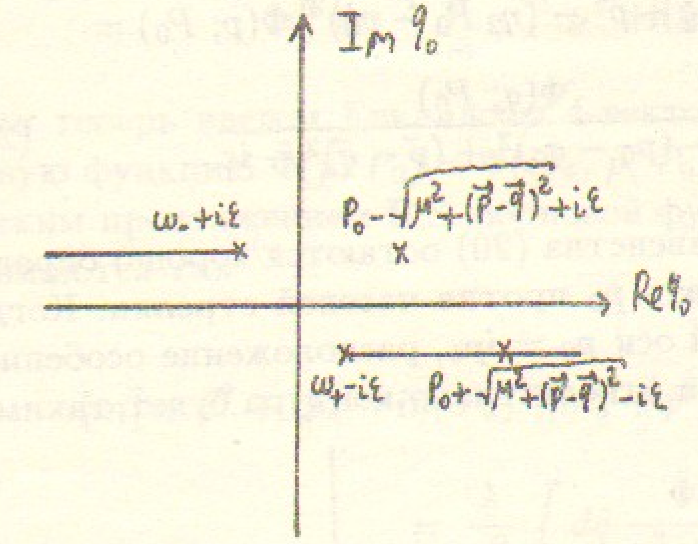
В оставшейся p_0-плоскости $\Phi(p;P_0)$ будет аналитической функцией.

ПОВОРОТ ВИКА

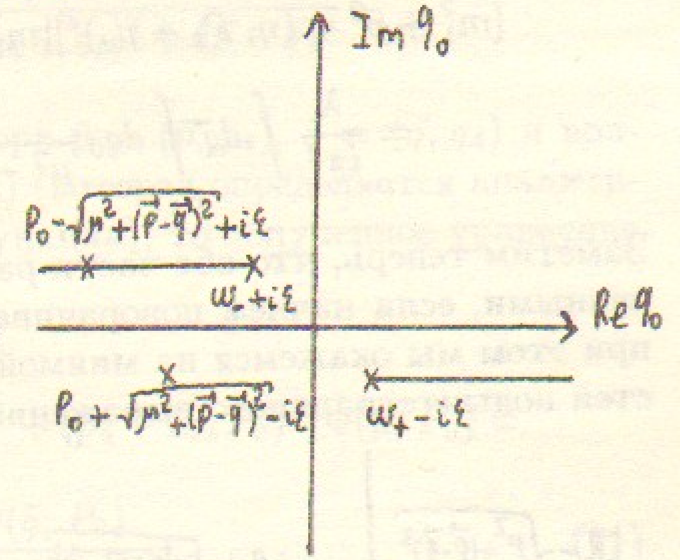
В правой части (16) уравнения по dq_0 имеем интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dq_0\, \frac{\Phi(q;P_0)}{\mu^2-(p_0-q_0)^2+(\vec p-\vec q)^2-i\varepsilon}\,.$$

Подынтегральное выражение имеет следующие особенности:



если $p_0>0$

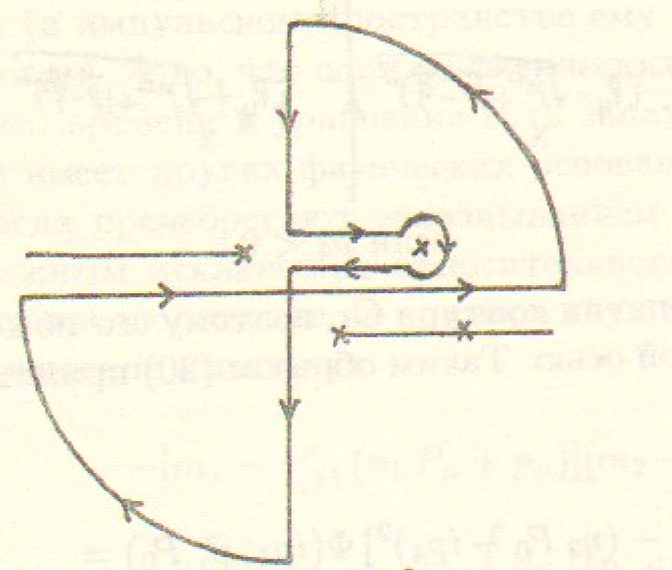


если $p_0<0$

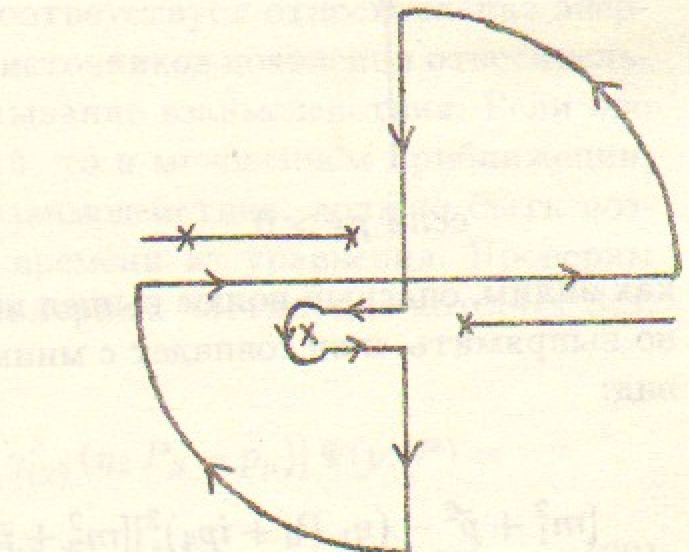
поэтому

$$\int\limits_C dq_0\, \frac{\Phi(q;P_0)}{\mu^2-(p_0-q_0)^2+(\vec p-\vec q)^2-i\varepsilon} = 0\,, \tag{19}$$

где контур интегрирования показан на рисунке



если $p_0>0$



если $p_0<0$

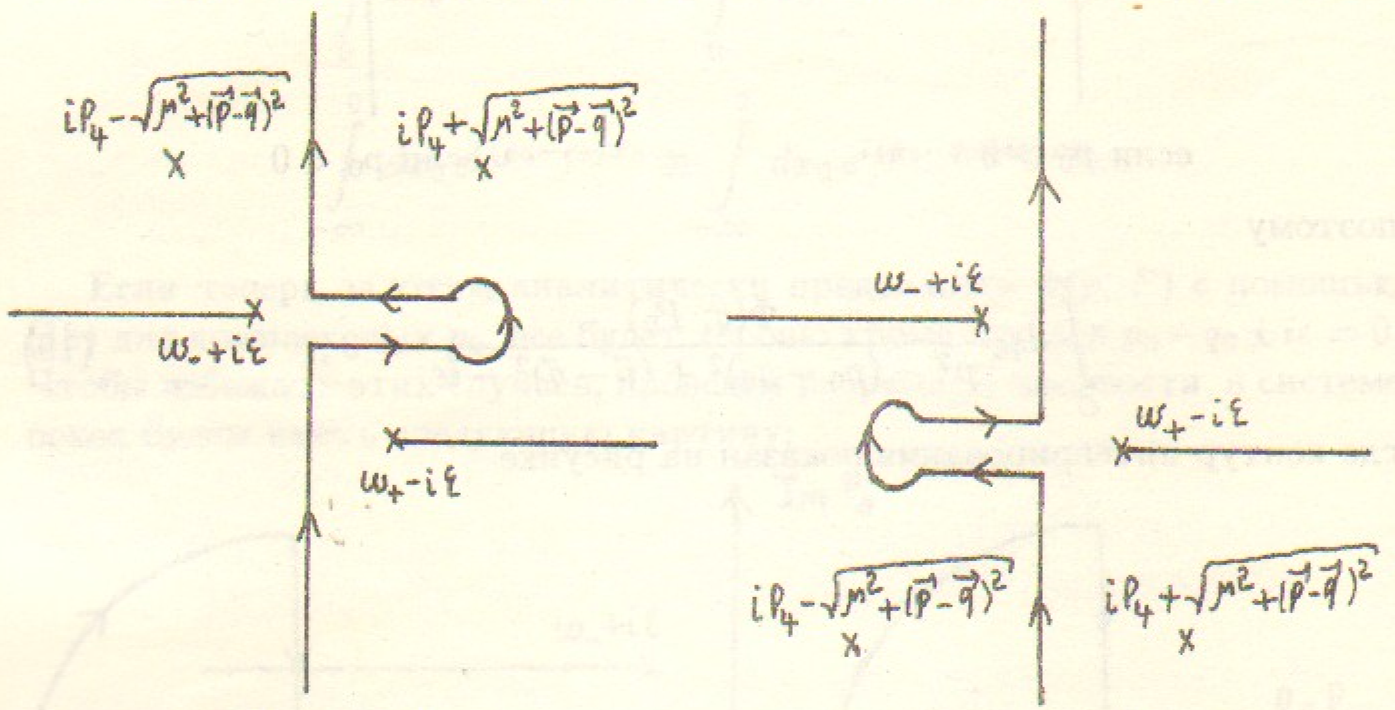
При стремлении дуг окружности к бесконечности, интеграл по ним зануляется, поэтому (19) означает, что по dq_0 интеграл вдоль действительной оси можно заменить интегралом вдоль C_1-контура, который следует мнимой оси и обходит полюс $p_0-\sqrt{\mu^2+(\vec p-\vec q)^2}+i\varepsilon$ (если $p_0>0$) или $p_0+\sqrt{\mu^2+(\vec p-\vec q)^2}-i\varepsilon$ (если $p_0<0$).

Таким образом

$$[m_1^2+\vec p^{\,2}-(\eta_1 P_0+p_0)^2][m_2^2+\vec p^{\,2}-(\eta_2 P_0-p_0)^2]\,\Phi(p;\,P_0)=$$

$$=\frac{\lambda}{i\pi^2}\int d\vec q\int\limits_{C_1} dq_0\,\frac{\Phi(q;\,P_0)}{\mu^2-(p_0-q_0)^2+(\vec p-\vec q)^2-i\varepsilon}\,. \qquad (20)$$

Заметим теперь, что обе части равенства (20) остаются хорошо определенными, если начнем поворачивать p_0 против часовой стрелки. Когда при этом мы окажемся на мнимой оси $p_0=ip_4$, расположение особенностей подынтегрального выражения относительно контура будет таким:



если $p_4>0$ если $p_4<0$

как видим, опасный полюс вышел из петли контура C_1, поэтому его можно выпрямить, и он совпадет с мнимой осью. Таким образом (20) примет вид:

$$[m_1^2+\vec p^{\,2}-(\eta_1 P_0+ip_4)^2][m_2^2+\vec p^{\,2}-(\eta_2 P_0-ip_4)^2]\,\Phi(ip_4,\vec p;\,P_0)=$$

$$=\frac{\lambda}{i\pi^2}\int d\vec q\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} dq_0\,\frac{\Phi(q;\,P_0)}{\mu^2-(ip_4-q_0)^2+(\vec p-\vec q)^2-i\varepsilon}\,.$$

В интеграле по dq_0 сделаем замену переменных $q_0\to iq_4$:

$$[m_1^2+\vec p^{\,2}+(p_4-i\eta_1 P_0)^2][m_2^2+\vec p^{\,2}+(p_4+i\eta_2 P_0)^2]\,\Phi(ip_4,\vec p;\,P_0)=$$

$$=\frac{\lambda}{\pi^2}\int d\vec q\int\limits_{-\infty}^{\infty} dq_4\,\frac{\Phi(iq_4,\,\vec q;\,P_0)}{\mu^2+(p_4-q_4)^2+(\vec p-\vec q)^2}\,,$$

если теперь введем Евклидовы 4-вектора $\tilde p=(\vec p,\,p_4)$, $\tilde q=(\vec q,\,q_4)$ и волновую функцию $\tilde\Phi(\tilde p,\,P_0)=\Phi(ip_4,\,\vec p;\,P_0)$ (которая определяется аналитическим продолжением B.S. волновой функции), то полученное уравнение запишется так

$$[m_1^2+\vec p^{\,2}+(p_4-i\eta_1 P_0)^2][m_2^2+\vec p^{\,2}+(p_4+i\eta_2 P_0)^2]\,\tilde\Phi(\tilde p;\,P_0)=$$

$$=\frac{\lambda}{\pi^2}\int d\tilde q\,\frac{\tilde\Phi(\tilde q;\,P_0)}{\mu^2+(\tilde p-\tilde q)^2}\,. \qquad (21)$$

Это есть уравнение Бете-Солпитера в системе покоя и в лестничном приближении после поворота Вика.

УРАВНЕНИЕ СОЛПИТЕРА

Одна из основных особенностей, отличающая уравнение Бете-Солпитера от уравнения Шредингера, есть присуствие относительного времени x_0 (в импульсном пространстве ему соответствует относительная энергия p_0). Ясно, что один из физических источников появления относительного времени в уравнении есть запаздывание взаимодействия. Если оно не имеет других физических оснований, то в мгновенном приближении, когда пренебрегают запаздыванием взаимодействия, должно быть возможным исключение относительного времени из уравнения. Проверим это предположение на примере двух спинорных частиц, для которых B.S. уравнение имеет вид

$$-[m_1-\gamma^\mu_{(1)}(\eta_1 P_\mu+p_\mu)][m_2-\gamma^\mu_{(2)}(\eta_2 P_\mu-p_\mu)]\,\Psi(p;\,P)=$$

$$=\int dq\,I(p,\,q;\,P)\,\Psi(q;\,P)\,. \qquad (22)$$

В левой части вместо полных пропагаторов мы взяли свободные. Знак минус возникает потому, что фермионный пропагатор в импульсном пространстве есть $\Delta(p)=1/i(m-\hat p)$. Кроме того $\Psi(p;\,P)=\int dx\,e^{ipx}\Psi(x;\,P)$, и $\Psi(x;\,P)$ есть 16-компонентная редуцированная B.S. амплитуда

$$\Psi_{\alpha\beta}(x;\,P)=(2\pi)^{3/2}\langle 0|\,T\Psi_{1\alpha}(\eta_2 x)\,\Psi_{2\beta}(-\eta_1 x)\,|B\rangle.$$

$\gamma_{(1)}$ матрицы действуют на первый спинорный индекс, а $\gamma_{(2)}$ матрицы—на второй.

Мгновенное приближение означает, что $I(p,\, q;\, P) \equiv I(\vec{p},\, \vec{q};\, P)$ не зависит от относительной энергии. Действительно, тогда

$$I(x,\, y;\, X) = (2\pi)^{-8} \int dp\, dq\, dP\, e^{-ip\,x}\, e^{iq\,y}\, e^{-iP\,X}\, I(\vec{p},\, \vec{q};\, P) =$$

$$= (2\pi)^{-6}\, \delta(x_0)\, \delta(y_0) \int d\vec{p}\, d\vec{q}\, dP\, e^{i\vec{p}\,\vec{x}}\, e^{-i\vec{q}\,\vec{y}}\, e^{-iP\,X}\, I(\vec{p},\, \vec{q};\, P)\,.$$

Умножим обе стороны уравнения (22) на $\gamma^0_{(1)},\, \gamma^0_{(2)}$ и обозначим $\tilde{I} = -\gamma^0_{(1)}\, \gamma^0_{(2)} I$, тогда уравнение в системе покоя $P_\mu = (E,\, \vec{0})$ примет вид:

$$[H_1(\vec{p}) - \eta_1 E - p_0][H_2(-\vec{p}) - \eta_2 E + p_0]\, \Psi(p;\, P) = \int dq\, \tilde{I}(\vec{p},\, \vec{q};\, P)\, \Psi(q;\, P)\,, \tag{23}$$

где $H(\vec{p}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m$—Дираковский гамильтониан. Правую часть уравнения можно переписать так

$$\int dq\, \tilde{I}(\vec{p},\, \vec{q};\, P)\, \Psi(q;\, P) = \int d\vec{q}\, \tilde{I}(\vec{p},\, \vec{q};\, P)\, \Phi(\vec{q};\, P)\,,$$

где

$$\Phi(\vec{q};\, P) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dq_0\, \Psi(q;\, P) = \int dq_0\, dx\, e^{iq\,x}\, \Psi(x;\, P) =$$

$$= 2\pi \int dx\, \delta(x_0)\, e^{-i\vec{q}\,\vec{x}}\, \Psi(x_0,\, \vec{x};\, P) = 2\pi \int d\vec{x}\, e^{-i\vec{q}\,\vec{x}}\, \Psi(0,\, \vec{x};\, P)$$

определяется одновременной B.S. амплитудой.

Чтобы и в левой части (23) перейти на $\Phi(\vec{q};\, P)$, можно воспользоваться следующим приемом. Рассмотрим проекционные операторы

$$\Lambda \pm (\vec{p}) = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{H(\vec{p})}{\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}}\right)\,.$$

Если учтем, что $\Lambda_\pm(\vec{p}) H(\vec{p}) = \pm\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}\Lambda_\pm(\vec{p})$, уравнение (23) можно заменить следующей системой:

$$[\sqrt{m_1^2 + \vec{p}^2} - \eta_1 E - p_0 - i\varepsilon][\sqrt{m_2^2 + \vec{p}^2} - \eta_2 E + p_0 - i\varepsilon]\, \Psi_{++}(p;\, P) =$$

$$= \Lambda^{(1)}_+(\vec{p})\, \Lambda^{(2)}_+(-\vec{p}) \int d\vec{q}\, \tilde{I}(\vec{p},\, \vec{q};\, P)\, \Phi(\vec{q};\, P)\,,$$

$$[\sqrt{m_1^2 + \vec{p}^2} - \eta_1 E - p_0 - i\varepsilon][-\sqrt{m_2^2 + \vec{p}^2} - \eta_2 E + p_0 + i\varepsilon]\, \Psi_{+-}(p;\, P) =$$

$$= \Lambda^{(1)}_+(\vec{p})\, \Lambda^{(2)}_-(-\vec{p}) \int d\vec{q}\, \tilde{I}(\vec{p},\, \vec{q};\, P)\, \Phi(\vec{q};\, P)\,,$$

$$[-\sqrt{m_1^2 + \vec{p}^2} - \eta_1 E - p_0 + i\varepsilon][\sqrt{m_2^2 + \vec{p}^2} - \eta_2 E + p_0 - i\varepsilon]\, \Psi_{-+}(p;\, P) =$$

$$= \Lambda^{(1)}_-(\vec{p})\, \Lambda^{(2)}_+(-\vec{p}) \int d\vec{q}\, \tilde{I}(\vec{p},\, \vec{q};\, P)\, \Phi(\vec{q};\, P)\,,$$

$$[-\sqrt{m_1^2 + \vec{p}^2} - \eta_1 E - p_0 + i\varepsilon][-\sqrt{m_2^2 + \vec{p}^2} - \eta_2 E + p_0 + i\varepsilon]\, \Psi_{--}(p;\, P) =$$

$$= \Lambda^{(1)}_-(\vec{p})\, \Lambda^{(2)}_-(-\vec{p}) \int d\vec{q}\, \tilde{I}(\vec{p},\, \vec{q};\, P)\, \Phi(\vec{q};\, P)\,. \tag{23'}$$

Здесь $\Psi_{++}(p;\, P) = \Lambda^{(1)}_+(\vec{p})\Lambda^{(2)}_+(-\vec{p})\Psi(p;\, P)$ и т.д., мы также учли, что правило обхода полюсов в Фейнмановском пропагаторе соответствует замене $m \to m - i\varepsilon$ (положительные частоты распространяются вперед во времени, а отрицательные—назад).

С помощью теории вычетов вычислим интегралы

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp_0\, [\sqrt{m_1^2 + \vec{p}^2} - \eta_1 E - p_0 - i\varepsilon]^{-1}[\sqrt{m_2^2 + \vec{p}^2} - \eta_2 E + p_0 - i\varepsilon]^{-1} =$$

$$= -2\pi i\, [E - \sqrt{m_1^2 + \vec{p}^2} - \sqrt{m_2^2 + \vec{p}^2}\,]^{-1}\,,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp_0\, [-\sqrt{m_1^2 + \vec{p}^2} - \eta_1 E - p_0 + i\varepsilon]^{-1}[-\sqrt{m_2^2 + \vec{p}^2} - \eta_2 E + p_0 + i\varepsilon]^{-1} =$$

$$= 2\pi i\,[E + \sqrt{m_1^2 + \vec{p}^2} + \sqrt{m_2^2 + \vec{p}^2}\,]^{-1},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp_0\,[\sqrt{m_1^2 + \vec{p}^2} - \eta_1 E - p_0 - i\varepsilon\,]^{-1}[-\sqrt{m_2^2 + \vec{p}^2} - \eta_2 E + p_0 + i\varepsilon\,]^{-1} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dp_0\,[-\sqrt{m_1^2 + \vec{p}^2} - \eta_1 E - p_0 + i\varepsilon]^{-1}[\sqrt{m_2^2 + \vec{p}^2} - \eta_2 E + p_0 - i\varepsilon]^{-1} = 0\,.$$

Поэтому для проинтегрированной по dp_0 волновой функции получим следующую систему

$$[E - \sqrt{m_1^2 + \vec{p}^2} - \sqrt{m_2^2 + \vec{p}^2}]\,\Phi_{++}(\vec{p};\,P) \equiv$$

$$\equiv \Lambda_+^{(1)}(\vec{p})\,\Lambda_+^{(2)}(-\vec{p})[E - H_1(\vec{p}) - H_2(-\vec{p})]\,\Phi(\vec{p};\,P) =$$

$$= \Lambda_+^{(1)}(\vec{p})\,\Lambda_+^{(2)}(-\vec{p})\,\frac{2\pi}{i}\int d\vec{q}\,\tilde{I}(\vec{p},\,\vec{q};\,P)\,\Phi(\vec{q};\,P)\,,$$

$$[E + \sqrt{m_1^2 + \vec{p}^2} + \sqrt{m_2^2 + \vec{p}^2}]\,\Phi_{--}(\vec{p};\,P) \equiv$$

$$\equiv \Lambda_-^{(1)}(\vec{p})\,\Lambda_-^{(2)}(-\vec{p})[E - H_1(\vec{p}) - H_2(-\vec{p})]\,\Phi(\vec{p};\,P) =$$

$$= -\Lambda_-^{(1)}(\vec{p})\,\Lambda_-^{(2)}(-\vec{p})\,\frac{2\pi}{i}\int d\vec{q}\,\tilde{I}(\vec{p},\,\vec{q};\,P)\,\Phi(\vec{q};\,P)\,,$$

$$\Phi_{+-}(\vec{p};\,P) = \Phi_{-+}(\vec{p};\,P) = 0\,.$$

Чтобы последние два уравнения записать в том же виде, что и первые, заметим следующее:

$$E - \sqrt{m_1^2 + \vec{p}^2} + \sqrt{m_2^2 + \vec{p}^2} > 0 \text{ и } E + \sqrt{m_1^2 + \vec{p}^2} - \sqrt{m_2^2 + \vec{p}^2} > 0\,.$$

Действительно, если $m_1 = m_2$, эти неравенства очевидны. Пусть $m_1 > m_2$, тогда нужно доказывать только неравенство

$$E - \sqrt{m_1^2 + \vec{p}^2} + \sqrt{m_2^2 + \vec{p}^2} > 0\,.$$

Но

$$\sqrt{m_1^2 + \vec{p}^2} - \sqrt{m_2^2 + \vec{p}^2} = \frac{m_1^2 - m_2^2}{\sqrt{m_1^2 + \vec{p}^2} + \sqrt{m_2^2 + \vec{p}^2}} \le \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1 + m_2} = m_1 - m_2\,,$$

а $E > m_1 - m_2$ является условием стабильности первой частицы: если это не так, будет энергетически выгодным распад первой частицы на связанное состояние $|B\rangle$ и вторую античастицу.

В силу отмеченных неравенств, $\Phi_{+-}(\vec{p};\,P) = \Phi_{-+}(\vec{p};\,P) = 0$ равенства эквивалентны следующим

$$0 = [E - \sqrt{m_1^2 + \vec{p}^2} + \sqrt{m_2^2 + \vec{p}^2}]\,\Phi_{+-}(\vec{p};\,P) \equiv$$

$$\equiv \Lambda_+^{(1)}(\vec{p})\,\Lambda_-^{(2)}(-\vec{p})[E - H_1(\vec{p}) - H_2(-\vec{p})]\,\Phi(\vec{p};\,P)\,,$$

$$0 = [E + \sqrt{m_1^2 + \vec{p}^2} - \sqrt{m_2^2 + \vec{p}^2}]\,\Phi_{-+}(\vec{p};\,P) \equiv$$

$$\equiv \Lambda_-^{(1)}(\vec{p})\,\Lambda_+^{(2)}(-\vec{p})[E - H_1(\vec{p}) - H_2(-\vec{p})]\,\Phi(\vec{p};\,P)\,.$$

Если сложим все четыре уравнения для $\Phi(\vec{p};\,P)$ и учтем

$$\Lambda_+^{(1)}(\vec{p})\,\Lambda_+^{(2)}(-\vec{p}) + \Lambda_+^{(1)}(\vec{p})\,\Lambda_-^{(2)}(-\vec{p}) + \Lambda_-^{(1)}(\vec{p})\,\Lambda_+^{(2)}(-\vec{p}) + \Lambda_-^{(1)}(\vec{p})\,\Lambda_-^{(2)}(-\vec{p}) = 1\,,$$

получим следующее уравнение Солпитера:

$$[E - H_1(\vec{p}) - H_2(-\vec{p})]\,\Phi(\vec{p};\,E) =$$

$$= [\Lambda_+^{(1)}(\vec{p})\,\Lambda_+^{(2)}(-\vec{p}) - \Lambda_-^{(1)}(\vec{p})\,\Lambda_-^{(2)}(-\vec{p})]\,\frac{2\pi}{i}\int d\vec{q}\,\tilde{I}(\vec{p},\,\vec{q};\,E)\,\Phi(\vec{q};\,E)\,. \qquad (24)$$

Таким образом, действительно смогли исключить относительную энергию p_0 из уравнения, но ценою появления $\Lambda_{++} - \Lambda_{--}$ оператора. Чтобы понять, что скрывается за этим, полезно провести сравнение с нерелятивистским случаем.

УРАВНЕНИЕ БЕТЕ-СОЛПИТЕРА В НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ

Воспользуемся тем, что теория поля во многом похожа на нерелятивистскую теорию многих тождественных частиц в формализме вторичного квантования. Соответствующему гамильтониану

$$H = \int d\vec{x}\,\Psi^+(\vec{x},\,t)\left(-\frac{\Delta}{2m}\right)\Psi(\vec{x},\,t) +$$

$$+ \frac{1}{2}\int d\vec{x}\,d\vec{y}\,\Psi^+(\vec{x},\,t)\,\Psi^+(\vec{y},\,t)\,V(|\vec{x} - \vec{y}|)\,\Psi(\vec{x},\,t)\,\Psi(\vec{y},\,t)$$

в графическом представлении отвечает свободный пропагатор

$$\Delta(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int dp\, \frac{e^{-ip(x-y)}}{p_0 - (\vec{p}^2/2m) + i\varepsilon}$$

и парное взаимодействие (мгновенное) с потенциалом V:

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\Big\updownarrow \quad V = -i\delta(x_0 - y_0)\, V(|\vec{x} - \vec{y}|)\,.$$

В выводе B.S. уравнения оператор поля $\phi(x)$ везде можно заменить на оператор вторичного квантования $\Psi(x)$. В результате получим уравнения для волновой функции

$$\Phi(x;\, P) = (2\pi)^{3/2}\langle 0|\, T\Psi(\eta_2 x)\, \Psi(-\eta_1 x)\, |B\rangle.$$

А именно: в лестничном приближении оператор взаимодействия

$$I(x_1,\, x_2;\, y_1\, y_2) = \begin{matrix} x_1 & & y_1 \\ x_2 & & y_2 \end{matrix} = -i\delta(x_0)\, V(|\vec{x}|)\, \delta(x_1 - y_1)\, \delta(x_2 - y_2) =$$

$$= -i\delta(x_0)\, V(|\vec{x}|)\, \delta(x-y)\, \delta(X-Y)\,,$$

в импульсном пространстве ему соответствует

$$I(p,\, q;\, P) = (2\pi)^{-4}\int dx\, dy\, dX\, e^{ipx}\, e^{-iqy}\, e^{iPX}\, I(x,\, y;\, X) =$$

$$= -i\,(2\pi)^{-4}\int e^{-i(\vec{p}-\vec{q})\vec{x}}\, V(|\vec{x}|)\, d\vec{x} = \frac{-i}{(2\pi)^4}\, V(\vec{p} - \vec{q})\,.$$

Кроме этого, свободный пропагатор в импульсном пространстве есть $\Delta(p) = i/(p_0 - \vec{p}^2/2m + i\varepsilon)$, поэтому B.S. уравнение в лестничном приближении будет иметь вид (в системе покоя, когда $P = (E,\, \vec{0})$)

$$\left[(\eta_1 E + p_0) - \frac{\vec{p}^2}{2m} + i\varepsilon\right]\left[(\eta_2 E + p_0) - \frac{\vec{p}^2}{2m} + i\varepsilon\right]\Phi(p;\, E) =$$

$$= i(2\pi)^{-4}\int dq\, V(\vec{p} - \vec{q})\, \Phi(q;\, E)$$

(заметим, что $m_1 = m_2 = m$, поэтому $\eta_1 = \eta_2 = \frac{1}{2}$).

Введем проинтегрированную по dp_0 волновую функцию $\tilde{\Phi}(\vec{q};\, E) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dq_0 \Phi(q,\, E)$. Для нее уравнение Солпитера имеет вид:

$$\tilde{\Phi}(\vec{p};\, E) = \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_0}{[\eta_1 E + p_0 - \vec{p}^2/2m + i\varepsilon][\eta_2 E - p_0 - \vec{p}^2/2m + i\varepsilon]}\right]\times$$

$$\times\frac{i}{(2\pi)^4}\int d\vec{q}\, V(\vec{p} - \vec{q})\, \tilde{\Phi}(\vec{q};\, E)\,.$$

Интеграл в скобках можно посчитать с помощью теории вычетов, и он равен $-2\pi i/(E - \vec{p}^2/2m)$. Так что, получаем уравнение:

$$\left(E - \frac{\vec{p}^2}{2m}\right)\tilde{\Phi}(\vec{p};\, E) = (2\pi)^{-3}\int d\vec{q}\, V(\vec{p} - \vec{q})\, \tilde{\Phi}(\vec{q};\, E)\,. \qquad (25)$$

Но это не что иное, как уравнение Шредингера в импульсном пространстве. Действительно, если перейдем в координатное представление

$$\tilde{\Phi}(\vec{p}) = \int e^{-i\vec{p}\vec{x}}\, \tilde{\Phi}(\vec{x})\, d\vec{x}\,, \qquad V(\vec{p}) = \int e^{-i\vec{p}\vec{x}}\, V(|\vec{x}|)\, d\vec{x}\,,$$

то получим

$$\left[-\frac{\Delta}{m} + V(|\vec{x}|)\right]\tilde{\Phi}(\vec{x}) = E\tilde{\Phi}(\vec{x})\,.$$

Таким образом, введение относительного времени в нерелятивистской теории чистая формальность и его можно без следа исключить из уравнения.

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ВРЕМЕНИ

Какой существенной особенностью отличается рассмотренная нерелятивистская модель от мгновенного приближения релятивистского случая? Пропагатором! В нерелятивистской теории античастиц нет. Поэтому пропагатор должен описывать только распространение вперед во времени, т.е. он–запаздывающая функция Грина: $\Delta(x) = 0$, если $x_0 < 0$. Этому граничному условию отвечает правило обхода полюсов $p_0 \to p_0 + i\varepsilon$. Посмотрим, что изменится в выводе уравнения Солпитера, если Фейнмановский пропагатор $i(\hat{p} + m)/(p^2 - m^2 + i\varepsilon)$ заменим на запаздывающую функцию Грина $i(\hat{p} + m)/[(p_0 + i\varepsilon)^2 - \vec{p}^2 - m^2]$. Вместо системы (23′) будем иметь

$$[\sqrt{m_1^2 + \vec{p}^2} - \eta_1 E - p_0 - i\varepsilon][\sqrt{m_2^2 + \vec{p}^2} - \eta_2 E + p_0 - i\varepsilon]\, \Psi_{++}(p) =$$

$$= \Lambda_{++} \int d\vec{q}\, \tilde{I}(\vec{p}, \vec{q})\, \Phi(\vec{q}) \, ,$$

$$[\sqrt{m_1^2+\vec{p}^2} - \eta_1 E - p_0 - i\varepsilon][-\sqrt{m_2^2+\vec{p}^2} - \eta_2 E + p_0 - i\varepsilon]\, \Psi_{+-}(p) =$$

$$= \Lambda_{+-} \int d\vec{q}\, \tilde{I}(\vec{p}, \vec{q})\, \Phi(\vec{q}) \, ,$$

$$[-\sqrt{m_1^2+\vec{p}^2} - \eta_1 E - p_0 - i\varepsilon][\sqrt{m_2^2+\vec{p}^2} - \eta_2 E + p_0 - i\varepsilon]\, \Psi_{-+}(p) =$$

$$= \Lambda_{-+} \int d\vec{q}\, \tilde{I}(\vec{p}, \vec{q})\, \Phi(\vec{q}) \, ,$$

$$[-\sqrt{m_1^2+\vec{p}^2} - \eta_1 E - p_0 - i\varepsilon][-\sqrt{m_2^2+\vec{p}^2} - \eta_2 E + p_0 - i\varepsilon]\, \Psi_{--}(p) =$$

$$= \Lambda_{--} \int d\vec{q}\, \tilde{I}(\vec{p}, \vec{q})\, \Phi(\vec{q})$$

(аргументы участвующих в B.S. уравнении пропагаторов суть $\eta_1 P + p$ и $\eta_2 P - p$, поэтому переходу к запаздывающим функциям Грина соответствует замена

$$(\eta_1 P_0 + p_0) \to (\eta_1 P_0 + p_0) + i\varepsilon \, , \qquad (\eta_2 P_0 - p_0) \to (\eta_2 P_0 - p_0) + i\varepsilon \, ,$$

т.е. $i\varepsilon$ имеет тот же знак, что и E). Интегрирование по dp_0 можно провести с помощью формулы

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{(a - p_0 - i\varepsilon)(b + p_0 - i\varepsilon)} = 2\pi i \, \frac{1}{a+b} \, ,$$

что даст:

$$(E - \sqrt{m_1^2+\vec{p}^2} - \sqrt{m_2^2+\vec{p}^2})\, \Phi_{++}(\vec{p}) \equiv \Lambda_{++}[E - H_1(\vec{p}) - H_2(-\vec{p})]\, \Phi(\vec{p}) =$$

$$= \Lambda_{++} \frac{2\pi}{i} \int d\vec{q}\, \tilde{I}(\vec{p}, \vec{q})\, \Phi(\vec{q}) \, ,$$

$$(E - \sqrt{m_1^2+\vec{p}^2} + \sqrt{m_2^2+\vec{p}^2})\, \Phi_{+-}(\vec{p}) \equiv \Lambda_{+-}[E - H_1(\vec{p}) - H_2(-\vec{p})]\, \Phi(\vec{p}) =$$

$$= \Lambda_{+-} \frac{2\pi}{i} \int d\vec{q}\, \tilde{I}(\vec{p}, \vec{q})\, \Phi(\vec{q}) \, ,$$

$$(E + \sqrt{m_1^2+\vec{p}^2} - \sqrt{m_2^2+\vec{p}^2})\, \Phi_{-+}(\vec{p}) \equiv \Lambda_{-+}[E - H_1(\vec{p}) - H_2(-\vec{p})]\, \Phi(\vec{p}) =$$

$$= \Lambda_{-+} \frac{2\pi}{i} \int d\vec{q}\, \tilde{I}(\vec{p}, \vec{q})\, \Phi(\vec{q}) \, ,$$

$$(E + \sqrt{m_1^2+\vec{p}^2} + \sqrt{m_2^2+\vec{p}^2})\, \Phi_{--}(\vec{p}) \equiv \Lambda_{--}[E - H_1(\vec{p}) - H_2(-\vec{p})]\, \Phi(\vec{p}) =$$

$$= \Lambda_{--} \frac{2\pi}{i} \int d\vec{q}\, \tilde{I}(\vec{p}, \vec{q})\, \Phi(\vec{q}) \, .$$

Складывая эти четыре равенства, получим уравнение Брейта:

$$[E - H_1(\vec{p}) - H_2(-\vec{p})]\, \Phi(\vec{p}) = \frac{2\pi}{i} \int d\vec{q}\, \tilde{I}(\vec{p}, \vec{q})\, \Phi(\vec{q}) \, , \qquad (26)$$

которое является непосредственным релятивистским обобщением двухчастичного уравнения Шредингера (25) (нерелятивистский гамильтониан $H(\vec{p}) = \vec{p}^2/2m$ заменяется на Дираковский гамильтониан, $H(\vec{p}) = \vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m$, а в роли потенциала выступает $-i(2\pi)^4 \tilde{I}(\vec{p}, \vec{q})$). Относительная энергия снова бесследно исчезла.

Таким образом, обнаружили второй (и основной) источник присутствия в уравнении относительного времени . Это—существование античастиц, т.е. возможность для частицы повернуть вспять во времени. Из-за запаздывания взаимодействия существенным будет относительное время порядка размера связанного состояния. Существование же античастиц сделает важным произвольно большое относительное время, так как индивидуальные пути во времени для двух частиц могут сильно отличатся (за счет движения вперед и назад во времени), но, тем не менее, такие конфигурации внесут существенный вклад в амплитуду связанного состояния. Этому вкладу в уравнении Солпитера отвечает оператор $\Lambda_{++} - \Lambda_{--}$.

МОДЕЛЬ ВИКА-КАТКОВСКОГО

Эта модель соответствует взаимодействию двух скалярных частиц посредством обмена скалярного безмассового кванта в лестничном приближении. Соответствующее уравнение Бете-Солпитера в системе покоя после поворота Вика имеет вид

$$[m_1^2+\vec{p}^2+(p_4-i\eta_1 E)^2][m_2^2+\vec{p}^2+(p_4+i\eta_2 E)^2]\,\Phi(p)=\frac{\lambda}{\pi^2}\int dq\frac{\Phi(q)}{(p-q)^2}, \quad (27)$$

где E есть масса связанного состояния, а p и q—Евклидовы 4-векторы.

Чтобы почувствовать математическую структуру (27), рассмотрим простейший случай $m_1=m_2=m$ и $E=0$ (хотя, так как (27) соответствует системе центра инерции, $E=0$ случай нефизический: для безмассового связанного состояния не существует система покоя). Тогда (27) примет вид:

$$(p^2+m^2)\,\Phi(p)=\frac{\lambda}{\pi^2}\int dq\,\frac{\Phi(q)}{(p-q)^2}. \quad (28)$$

Покажем, что одно из его решений—$\Phi(p)=(p^2+m^2)^{-3}$. Ясно, что

$$A^{-1}B^{-1}=\frac{1}{A-B}\left(-\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)=$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{[B+(A-B)x]^2}=\int_0^1\frac{dx}{[xA+(1-x)B]^2}\,dx,$$

потом

$$A^{-n}B^{-m}=\frac{(-1)^{n+m}}{(n-1)!\,(m-1)!}\,\frac{\partial^{n-1}}{\partial A^{n-1}}\,\frac{\partial^{m-1}}{\partial B^{m-1}}\,(A^{-1}B^{-1}),$$

поэтому получаем следующую параметризацию Фейнмана

$$A^{-n}B^{-m}=\frac{(n+m-1)!}{(n-1)!\,(m-1)!}\int_0^1\frac{x^{n-1}(1-x)^{m-1}}{[xA+(1-x)\,B]^{n+m}}\,dx \quad (29)$$

В частности,

$$[(p-q)^2]^{-1}[q^2+m^2]^{-3}=$$

$$=3\int_0^1\frac{(1-x)^2dx}{[x(p-q)^2+(1-x)(q^2+m^2)]^4}=\int_0^1\frac{3(1-x)^2dx}{[(q-xp)^2+(1-x)(m^2+xp^2)]^4},$$

поэтому

$$\int dq\,\frac{\Phi(q)}{(p-q)^2}=\int dq\int_0^1\frac{3(1-x)^2dx}{[(q-xp)^2+(1-x)(m^2+xp^2)]^4}.$$

Если теперь заметим, что

$$A^{-4}=-\frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial A^3}\left(\frac{1}{A}\right)=-\frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial A^3}\int_0^\infty e^{-\alpha A}d\alpha=\frac{1}{3!}\int_0^\infty\alpha^3e^{-\alpha A}d\alpha,$$

то получим интеграл Гауссова типа по dq

$$\int dq\int_0^1\frac{3(1-x)^2dx}{[(q-xp)^2+(1-x)(m^2+xp^2)]^4}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^2\,dx\int_0^\infty\alpha^3d\alpha\int dq\,\exp\{-\alpha[(q-xp)^2+(1-x)(m^2+xp^2)]\}.$$

Интеграл по импульсу

$$\int dq\,\exp\{-\alpha[(q-xp)^2+(1-x)(m^2+xp^2)]\}=$$

$$=\frac{\pi^2}{\alpha^2}\,\exp\{-\alpha[(1-x)(m^2+xp^2)\}\,,$$

поэтому по $d\alpha$ будем иметь интеграл типа $\int_0^\infty\alpha\,e^{-\alpha A}d\alpha=-\frac{\partial}{\partial A}\int_0^\infty e^{-\alpha A}d\alpha=A^{-2}$. В итоге получим

$$\int dq\,\frac{\Phi(q)}{(p-q)^2}=\frac{\pi^2}{2}\int_0^1\frac{dx}{[(m^2+xp^2)]^2}=\frac{\pi^2}{2m^2}\,(m^2+p^2)^{-1}.$$

Если это подставить в (28), то убедимся, что $\Phi(p)=(p^2+m^2)^{-3}$ действительно его решение, и соответсвующее собственное значение—$\lambda=2m^2$.

Самое интересное в найденном решении то, что можно указать его аналог в нерелятивистской задаче атома водорода. Уравнение Шредингера

$$\left\{-\frac{\Delta}{2m}+V(\vec r)\right\}\Psi(\vec r)=E\Psi(\vec r)$$

в импульсном пространстве перейдет в интегральное уравнение

$$(\vec p^2-2mE)\,\Psi(\vec p)=-\frac{2m}{(2\pi)^{3/2}}\int d\vec q\, V(\vec p-\vec q)\,\Psi(\vec q)\,,$$

где $\Psi(\vec q)=(2\pi)^{-3/2}\int e^{i\vec p\vec r}\Psi(\vec r)d\vec r$ и $V(\vec p)=(2\pi)^{-3/2}\int e^{i\vec p\vec r}V(\vec r)d\vec r$. Уравнение $\Delta(r^{-1})=-4\pi\delta(\vec r)$ показывает, что импульсный образ Кулонова потенциала $V(\vec r)=-e^2/r$ суть $V(\vec p)=-(4\pi/(2\pi)^{3/2})/(e^2/\vec p^2)$, поэтому нерелятивистский атом водорода описывается уравнением

$$(\vec p^2+p_0^2)\,\Psi(\vec p)=\frac{me^2}{\pi^2}\int\frac{\Psi(\vec q)}{(\vec p-\vec q)^2}\,d\vec q\,, \qquad (30)$$

где $p_0^2=-2mE$ (рассматриваем дискретный спектр, поэтому $E<0$). Одно из решений этого уравнения $\Psi(\vec p)=(\vec p^2+p_0^2)^{-2}$. Действительно, если будем действовать как выше, то после интегрирования по $d\vec q$ получим

$$\int d\vec q\,[(\vec p-\vec q)^2]^{-1}[\vec p^2+p_0^2]^{-2}=$$

$$=\pi^{3/2}\int_0^1(1-x)\,dx\int_0^\infty\sqrt{\alpha}\,\exp\{-\alpha(1-x)(p_0^2+x\vec p^2)\}\,d\alpha\,.$$

Интеграл по $d\alpha$ возьмем так

$$\int_0^\infty\sqrt{\alpha}\,e^{-\alpha A}d\alpha=2\int_0^\infty t^2\,e^{-t^2A}\,dt=-2\frac{\partial}{\partial A}\int_0^\infty e^{-t^2A}dt=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial A}\sqrt{\frac{\pi}{A}}=\frac{1}{2A}\sqrt{\frac{\pi}{A}}\,,$$

поэтому

$$\int\frac{\Psi(\vec q)}{(\vec p-\vec q)^2}\,d\vec q=\frac{\pi^2}{2}\int_0^1\frac{dx}{(p_0^2+x\vec p^2)\sqrt{(1-x)(p_0^2+x\vec p^2)}}=$$

$$=-2\pi^2\frac{\partial^2}{\partial(p_0^2)^2}\int_0^1\sqrt{\frac{p_0^2+x\vec p^2}{1-x}}\,dx=-2\pi^2\frac{\partial^2}{\partial(p_0^2)^2}\int_0^1\sqrt{\frac{p_0^2+\vec p^2}{1-x}-\vec p^2}\,dx=$$

$$=-2\pi^2\frac{\partial^2}{\partial(p_0^2)^2}\int_1^\infty\frac{dt}{t^2}\sqrt{(p_0^2+\vec p^2)t-\vec p^2}=\frac{\pi^2}{2}\int_1^\infty[(p_0^2+\vec p^2)t-\vec p^2]^{-3/2}\,dt=$$

$$=\frac{\pi^2}{2(p_0^2+\vec p^2)}\int_{p_0^2}^\infty x^{-3/2}\,dx=\frac{\pi^2}{p_0(p_0^2+\vec p^2)}\,.$$

Подстановка в (30) показывает, что уравнение удовлетворится, если $me^2/p_0=1$ или $E=-(1/2)me^4$. Таким образом, $\Psi(\vec p)=(\vec p^2+p_0^2)^{-2}$ соответствует основному состоянию атома водорода.

Если аналогия между найденными решениями уравнений (28) и (30) не случайна, тогда надо ожидать, что те методы, которые используются для изучения атома водорода, подойдут и для уравнения (28), а может быть и для (27). В частности, известно, что для нерелятивистского атома водорода характерна скрытая симметрия, и его изучение проще всего в пространстве Фока, где эта симметрия становится явной. Для простоты проиллюстрируем метод Фока на примере двухмерного атома водорода.

МЕТОД ФОКА ДЛЯ ДВУХМЕРНОГО АТОМА ВОДОРОДА

Уравнение Шредингера в двухмерном импульсном пространстве будет

$$[\vec p^2-2mE]\,\Psi(\vec p)=-\frac{m}{\pi}\int V(\vec p-\vec q)\,\Psi(\vec q)\,d\vec q\,.$$

Связь с координатным представлением такова

$$\Psi(\vec p)=\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\vec p\vec r}\,\Psi(\vec r)\,d\vec r\,,\quad V(\vec p)=\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\vec p\vec r}\,V(\vec r)\,d\vec r\,.$$

Для Кулоновского потенциала $V(\vec r)=-e^2/r$ приведенный выше интеграл расходится. Но заметим, что так как волновая функция связанного состояния концетрирована в конечной области пространства, она не должна почувствовать разницу между потенциалом Кулона и потенциалом $(-e^2/r)\,e^{-\alpha r}$ для достаточно маленького α. Поэтому, по крайней мере, для связанного состояния в качестве импульсного образа потенциала Кулона можно взять

$$V(\vec{p}) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\vec{p}\vec{r}} \left(-\frac{e^2}{r} \right) e^{-\alpha r} d\vec{r} =$$

$$= -\frac{e^2}{2\pi} \lim_{\alpha \to 0} \int_0^\infty e^{-\alpha r} dr \int_0^{2\pi} e^{-ipr\cos\Theta} d\Theta .$$

С использованием формул

$$\int_0^{2\pi} e^{-ipr\cos\Theta} d\Theta = 2\pi J_0(pr) \text{ и } \int_0^\infty e^{-\alpha r} J_0(pr)\, dr = \frac{1}{\sqrt{p^2+\alpha^2}}$$

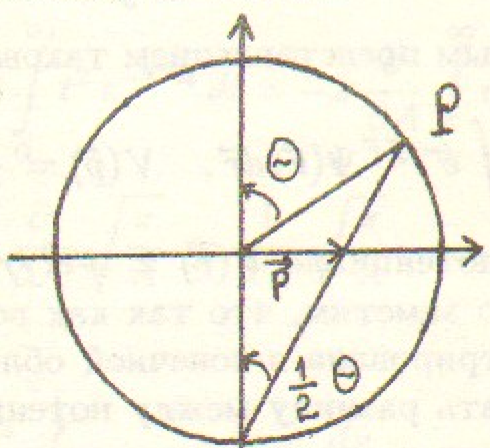
получаем

$$V(\vec{p}) = -e^2 \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\sqrt{p^2+\alpha^2}} = -\frac{e^2}{|\vec{p}|} .$$

Таким образом, для двухмерной проблемы Кулона уравнение Шредингера в случае дискретного спектра $E < 0$ будет ($p_0^2 = -2mE$):

$$(\vec{p}^{\,2} + p_0^2)\, \Psi(\vec{p}) = \frac{me^2}{\pi} \int \frac{\Psi(\vec{q})}{|\vec{p} - \vec{q}|} d\vec{q} . \qquad (31)$$

Двухмерное импульсное пространство с помощью стереографической проекции можно однозначно отобразить на поверхность трехмерной сферы (которую назовем пространством Фока). Стереографическая проекция импульсу $\vec{p} = p_x\vec{i} + p_y\vec{j}$ соотносит точку P на поверхности сферы, в которой эта поверхность пересекается прямой, соединяющей южный полюс сферы с точкой (p_x, p_y) в экваториальной плоскости. Схематически это показано на рисунке:



Пусть радиусом сферы будет p_0. Если полярные координаты вектора $\vec{p}$ есть (p, ϕ), то точка P будет иметь сферические координаты (p_0, Θ, ϕ),

где угол Θ, как это видно из рисунка, определяется равенством $|\vec{p}| = p_0 \mathrm{tg}(\Theta/2)$. Поэтому

$$\cos\Theta = 2\cos^2\frac{\Theta}{2} - 1 = \frac{2}{1+\mathrm{tg}^2(\Theta/2)} - 1 = \frac{p_0^2 - p^2}{p_0^2 + p^2}$$

и

$$\sin\Theta = \sqrt{1-\cos^2\Theta} = \frac{2p_0\, p}{p_0^2 + p^2} ,$$

а для декартовых координат $P_x = p_0 \sin\Theta\cos\phi$, $P_y = p_0\sin\Theta\sin\phi$, $P_z = p_0\cos\Theta$ точки P получим

$$P_x = \frac{2p_0^2\, p_x}{p_0^2+p^2} ,\; P_y = \frac{2p_0^2\, p_y}{p_0^2+p^2} ,\; P_z = \frac{p_0^2 - p^2}{p_0^2+p^2}\, p_0 . \qquad (32)$$

Пусть стереографические проекции векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ есть P и Q, а α есть угол между 3-мерными векторами $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ (т.е. угловая мера дуги, соединяющей точки P и Q на поверхности сферы). Тогда, так как $|\vec{P}| = |\vec{Q}| = p_0$, расстояние между точками P и Q в 3-мерном пространстве будет $\sqrt{p_0^2+p_0^2-2p_0^2\cos\alpha} = 2p_0\sin(\alpha/2)$. С другой стороны, квадрат того же расстояния равен $(P_x-Q_x)^2+(P_y-Q_y)^2+(P_z-Q_z)^2$, поэтому

$$\left(2p_0\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{2p_0^2\,p_x}{p_0^2+p^2} - \frac{2p_0^2\,q_x}{p_0^2+q^2}\right)^2 + \left(\frac{2p_0^2\,p_y}{p_0^2+p^2} - \frac{2p_0^2\,q_y}{p_0^2+q^2}\right)^2 +$$

$$+ \left(p_0\frac{p_0^2-p^2}{p_0^2+p^2} - p_0\frac{p_0^2-q^2}{p_0^2+q^2}\right)^2 =$$

$$= \frac{4p_0^4}{(p_0^2+p^2)(p_0^2+q^2)} \left\{ p^2\frac{p_0^2+q^2}{p_0^2+p^2} + q^2\frac{p_0^2+p^2}{p_0^2+q^2} - 2\vec{p}\cdot\vec{q} + \right.$$

$$\left. + \frac{p^4}{p_0^2}\frac{p_0^2+q^2}{p_0^2+p^2} + \frac{q^4}{p_0^2}\frac{p_0^2+p^2}{p_0^2+q^2} - 2\frac{p^2q^2}{p_0^2} \right\} =$$

$$= \frac{4p_0^4}{(p_0^2+p^2)(p_0^2+q^2)} \left\{ \frac{p^2}{p_0^2}(p_0^2+q^2) + \frac{q^2}{p_0^2}(p_0^2+p^2) - 2\vec{p}\cdot\vec{q} - 2\frac{p^2q^2}{p^2} \right\} =$$

$$= \frac{4p_0^4}{(p_0^2+p^2)(p_0^2+q^2)} (\vec{p}-\vec{q})^2 .$$

Но

$$\frac{p_0^4}{(p_0^2+p^2)(p_0^2+q^2)} = \frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2(\Theta/2))(1+\operatorname{tg}^2(\Theta'/2))} = \cos^2\frac{\Theta}{2}\,\cos^2\frac{\Theta'}{2}\,,$$

где Θ'—сферическая координата соответствующая точке Q, поэтому получаем

$$|\vec{p}-\vec{q}| = p_0 \sec\frac{\Theta}{2}\sec\frac{\Theta'}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\,. \tag{33}$$

Теперь выразим $d\vec{p} = dp_x dp_y$ через элемент телесного угла $d\Omega = \sin\Theta d\Theta d\phi$.

$$d\Omega = -d(\cos\Theta)\,d\phi = -d\left(\frac{p_0^2-p^2}{p_0^2+p^2}\right)d\phi = \frac{4p_0^2}{(p_0^2+p^2)^2}\,pd\,pd\phi =$$

$$= \left[\frac{2p_0}{p_0^2+p^2}\right]d\vec{p} = \left[\frac{2}{p_0}\cos^2\frac{\Theta}{2}\right]^2 d\vec{p}$$

Таким образом, получили

$$d\vec{p} = \frac{p_0^2}{4}\sec^4\frac{\Theta}{2}\,d\Omega\,. \tag{34}$$

С помощью (33) и (34) можно перейти в уравнении Шредингера (31) из импульсного пространства на поверхность 3-мерной сферы (в пространство Фока)

$$\sec^3\frac{\Theta}{2}\,\Psi(\vec{p}) = \frac{me^2}{4\pi p_0}\int\frac{\Psi(\vec{q})\sec^3(\Theta'/2)}{\sin(\alpha/2)}\,d\Omega'\,,$$

или, если введем новую неизвестную функцию $\Phi(\Omega) = \sec^3\frac{\Theta}{2}\Psi(\vec{p})$, будем иметь уравнение

$$\Phi(\Omega) = \frac{me^2}{4\pi p_0}\int\frac{\Phi(\Omega')}{\sin(\alpha/2)}\,d\Omega'\,.$$

Это уравнение Шредингера в пространстве Фока. Оно инвариантно относительно группы 3-мерных вращений SO(3) (угол α измеряет дугу, соединяющую две точки на поверхности сферы, поэтому он не меняется при вращении). В импульсном пространстве эта симметрия скрыта:

уравнение (31) явным образом выглядит симметричным только относительно меньшей группы SO(2).

Решение уравнения (35) пропорционально сферической функции Y_{lm}. Действительно, из производящей функции полиномов Лежандра

$$(1-2\varepsilon\cos\alpha+\varepsilon^2)^{-1/2} = \sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^l P_l(\cos\alpha)\,,$$

при $\varepsilon = 1$ будем иметь

$$\frac{1}{2\sin(\alpha/2)} = \sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\alpha) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}Y_{lm}(\Omega)\,Y^*_{lm}(\Omega')\,,$$

откуда

$$Y_{lm}(\Omega) = \frac{2l+1}{8\pi}\int\frac{Y_{lm}(\Omega')}{\sin(\alpha/2)}\,d\Omega'\,. \tag{36}$$

Поэтому общее решение (35) имеет вид $\Phi(\Omega) = \sum_{m=-l}^{l} a_m\,Y_{lm}(\Omega)$ при условии, что выполняется уравнение на собственные значения $(me^2/p_0) = l + (1/2)$. что для уровней энергии дает $E_l = -\frac{2me^4}{(2l+1)^2}$. Каждый из уровней $(2l+1)$-кратно вырожден, и это вырождение, конечно, обусловлено отмеченной выше скрытой симметрией, которая в пространстве Фока становится явной.

СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ В ОБЩЕМ ВИДЕ

Обобщение метода Фока для уравнений (28) и (30), в первую очередь, требует определения стереографической проекции в случае импульсного пространства с размерностью больше двух. Но приведеное выше определение стереографической проекции, по существу, не ограничено размерностью импульсного пространства и в многомерном случае допускает тривиальное обобщение: достаточно в старом определении считать, что импульсное пространство n-мерно, а сферу с радиусом p_0 взять в $(n+1)$-мерном пространстве.

Пусть точке $p = (p_1, ..., p_n)$ из импульсного пространства стереограическая проекция соотносит точку $P = (P_1, ..., P_{n+1})$ поверхности сферы. Так как P находится на прямой, соединяющей точку p с "южным" $s = (0, ..., 0, -p_0)$ полюсом сферы, то $\vec{sp}$ и $\vec{pP}$ векторы параллельны. Но их проекции $(p_1, ..., p_n, p_0)$ и $(P_1 - p_1, ..., P_n - p_n, P_{n+1})$, поэтому

$(P_1 - p_1 = kp_1, ..., P_n - p_n = kp_n,\ P_{n+1} = kp_0)$, где k—постоянный коэффициент. Таким образом, $P_i = (k+1)p_i$, $i = 1 \div n$ и $P_{n+1} = kp_0$. Но точка P находится на поверхности сферы, поэтому $P_1^2 + ... + P_n^2 + P_{n+1}^2 = p_0^2$. Это позволяет определить k: из равенства $(k+1)^2\vec{p}^2 + k^2p_0^2 = p_0^2$ получаем $k = \frac{p_0^2 - p^2}{p_0^2 + p^2}$.

Таким образом, обобщением формул (32) будет

$$P_1 = \frac{2p_0^2\, p_1}{p_0^2 + p^2}\,,\ P_2 = \frac{2p_0^2\, p_2}{p_0^2 + p^2}\,, ...,\ P_n = \frac{2p_0^2\, p_n}{p_0^2 + p^2}\,,\ P_{n+1} = \frac{p_0^2 - p^2}{p_0^2 + p^2}\, p_0\,. \quad (37)$$

Также непосредственно обобщается и формула (33)

$$|\vec{p} - \vec{q}| = p_0 \sec\frac{\Theta_n}{2} \sec\frac{\Theta_n'}{2} \sin\frac{\alpha}{2}\,. \quad (38)$$

($\vec{p}$ и $\vec{q}$—n-мерные векторы, α есть угол между $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ радиус-векторами). Приведем доказательство (38):

$$2p_0^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} = p_0^2\,(1 - \cos\alpha) = p_0^2 - \vec{P}\,\vec{Q} =$$

$$= p_0^2 - \frac{4p_0^4\,\vec{p}\cdot\vec{q}}{(p_0^2 + p^2)(p_0^2 + q^2)} - \frac{(p_0^2 - p^2)(p_0^2 - q^2)}{(p_0^2 + p^2)(p_0^2 + q^2)}\,p_0^2 = \frac{2p_0^4(p^2 + q^2 - 2\vec{p}\cdot\vec{q})}{(p_0^2 + p^2)(p_0^2 + q^2)} =$$

$$= 2\,\frac{p_0^2}{p_0^2 + p^2}\,\frac{p_0^2}{p_0^2 + q^2}\,(\vec{p} - \vec{q})^2 = 2\cos^2\frac{\Theta_n}{2}\,\cos^2\frac{\Theta_n'}{2}\,(\vec{p} - \vec{q})^2\,.$$

Теперь нужно обобщить (34). В n-мерном пространстве сферические координаты так связаны с Декартовыми

$$\begin{aligned}
r_1 &= r\sin\Theta_{n-1}\sin\Theta_{n-2}...\sin\Theta_3\sin\Theta_2\cos\Theta_1\,,\\
r_2 &= r\sin\Theta_{n-1}\sin\Theta_{n-2}...\sin\Theta_3\sin\Theta_2\sin\Theta_1\,,\\
r_3 &= r\sin\Theta_{n-1}\sin\Theta_{n-2}...\sin\Theta_3\cos\Theta_2\,,\\
r_4 &= r\sin\Theta_{n-1}\sin\Theta_{n-2}...\sin\Theta_4\cos\Theta_3\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
r_n &= r\cos\Theta_{n-1}
\end{aligned}$$

при этом для элемента объема $d^{(n)}\vec{r} = dr_1...dr_n$ будем иметь

$$d^{(n)}\vec{r} = r^{n-1}dr d^{(n)}\Omega =$$

$$= r^{n-1}\sin^{n-2}\Theta_{n-1}\sin^{n-3}\Theta_{n-2}...\sin\Theta_2\,dr\,d\Theta_1...d\Theta_{n-1}\,. \quad (39)$$

Эту формулу можно доказать по индукции. Так как для $n = 3$ она верна, достаточно показать, что из ее справедливости вытекает аналогичная формула для $(n+1)$-мерного случая. Обозначим $r = \sqrt{r_1^2 + ... + r_{n+1}^2}$ и $\rho = \sqrt{r_1^2 + ...r_n^2} = r\sin\Theta_n$, тогда $d^{(n+1)}\vec{r} = d^{(n)}\vec{r}dr_{n+1} = \rho^{n-1}d\rho dr_{n+1}d^{(n)}\Omega$, но

$$dr_{n+1}\,d\rho = \frac{\partial(r_{n+1}\,\rho)}{\partial(r,\Theta_n)} = \begin{vmatrix} \cos\Theta_n & \sin\Theta_n \\ -r\sin\Theta_n & r\cos\Theta_n \end{vmatrix}\,dr\,d\Theta_n = r\,dr\,d\Theta_n\,,$$

поэтому

$$d^{(n+1)}\vec{r} = (r\sin\Theta_n)^{n-1}\,r dr d\Theta_n d^{(n)}\Omega = r^n dr\sin^{n-1}\Theta_n d\Theta_n d^{(n)}\Omega = r^n dr d^{(n+1)}\Omega.$$

При стереографической проекции

$$\sin\Theta_n = \frac{2p_0\,p}{p_0^2 + p^2} \quad \text{и} \quad \cos\Theta_n = \frac{p_0^2 - p^2}{p_0^2 + p^2}\,,$$

поэтому

$$d^{(n+1)}\Omega = \sin^{n-1}\Theta_n d\Theta_n d^{(n)}\Omega = -\sin^{n-2}\Theta_n\,d(\cos\Theta_n)\,d^{(n)}\Omega =$$

$$= -\left(\frac{2p_0\,p}{p_0^2 + p^2}\right)^{n-2} d\left(\frac{p_0^2 - p^2}{p_0^2 + p^2}\right)\,d^{(n)}\Omega =$$

$$= \frac{2^n}{p_0^n}\left(\frac{p_0^2}{p_0^2 + p^2}\right)^n\,p^{n-1}dp\,d^{(n)}\Omega = \left(\frac{2}{p_0}\right)^n\,\cos^{2n}\frac{\Theta_n}{2}\,d^{(n)}\vec{p}\,.$$

Таким образом, (34) обобщается так

$$d^{(n)}\vec{p} = \left(\frac{p_0}{2}\right)^n\,\sec^{2n}\frac{\Theta_n}{2}\,d^{(n+1)}\Omega\,. \quad (40)$$

С использованием (38) и (40) можно переписать уравнения (28) и (30) в представлении Фока. В частности, уравнение (30) для атома водорода, после введения новой $\Phi(\Omega) = \sec^4\frac{\Theta_3}{2}\,\Psi(\vec{p})$ функции, примет вид:

$$\Phi(\Omega) = \frac{me^2}{8\pi^2 p_0}\int\frac{\Phi(\Omega')}{\sin^2(\alpha/2)}\,d\Omega' \quad (41)$$

где $d\Omega \equiv d^{(4)}\Omega = \sin^2\Theta_3 \sin\Theta_2 d\Theta_1 d\Theta_2 d\Theta_3$. А уравнение (28) для функции $\tilde{\Phi}(\Omega) = \sec^6 \frac{\Theta_4}{2}\,\Phi(p)$ перепишется так

$$\tilde{\Phi}(\Omega) = \frac{\lambda}{16\pi^2 p_0^2}\int \frac{\tilde{\Phi}(\Omega')}{\sin^2(\alpha/2)}\, d\Omega' \tag{42}$$

здесь $p_0 = m$ и $d\Omega \equiv d^{(5)}\Omega = \sin^3\Theta_4 \sin^2\Theta_3 \sin\Theta_2 d\Theta_1 d\Theta_2 d\Theta_3 d\Theta_4$. Заметим, что оказывается (28) обладает скрытой SO(5) симметрией, которая стала явной в пространстве Фока. Как видим, действительно, имеем тесную аналогию с нерелятивистской задачей для атома водорода.

Что касается решении (41) и (42), пример уравнения (35) показывает, что для этой цели, видимо, нужно обобщение Y_{lm} сферических функции в случае размерности $n > 3$.

СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Известно, что в трехмерном пространстве сферические функции связаны с решениями уравнения Лапласа. А именно, $\mathcal{Y}_{lm}(\vec{r}) = r^l Y_{lm}(\Theta, \phi)$ гармонические полиномы (шаровые функции) являются однородными полиномами порядка l относительно переменных r_x, r_y, r_z, и удовлетворяют уравнению Лапласа $\Delta \mathcal{Y}_{lm}(\vec{r}) = 0$. Для обобщения на многомерный случай мы воспользуемся именно этим свойством сферических функций.

В n-мерном пространстве сферическую функцию $Y^{(n)}_{l_{n-1}\ldots l_1}(\Theta_{n-1}\ldots, \Theta_1)$ определим требованием, чтобы $\mathcal{Y}^{(n)}_{l_{n-1}\ldots l_1}(\vec{r}) = r^{l_{n-1}} Y^{(n)}_{l_{n-1}\ldots l_1}(\Theta_{n-1}\ldots, \Theta_1)$ являлся гармоническим полиномом, т.е. удовлетворял бы уравнению:

$$\Delta^{(n)} \mathcal{Y}^{(n)}_{l_{n-1}\ldots l_1}(\vec{r}) = 0\,, \tag{44}$$

где $\Delta^{(n)} = \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial r_n^2}$ — лапласиан в n-мерном пространстве. Для него имеем следующее разложение на радиальную и угловую части:

$$\Delta^{(n)} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\,\delta^{(n)}\,, \tag{44}$$

$\delta^{(n)}$—угловая часть лапласиана.

Докажем (44) по индукции. Для n=3 оно справедливо. Пусть (44) выполняется и рассмотрим

$$\Delta^{(n+1)} = \Delta^{(n)} + \frac{\partial^2}{\partial r_{n+1}^2} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{n-1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2}\,\delta^{(n)} + \frac{\partial^2}{\partial r_{n+1}^2}\,.$$

Здесь $\rho = \sqrt{r_1^2 + \ldots + r_n^2}$. Из $r_{n+1} = r\cos\Theta_n$ и $\rho = r\sin\Theta_n$ получаем

$$\frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \rho} + \frac{\partial}{\partial \Theta_n}\frac{\partial \Theta_n}{\partial \rho} = \sin\Theta_n \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\Theta_n \frac{\partial}{\partial \Theta_n}\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial r_{n+1}} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial r_{n+1}} + \frac{\partial}{\partial \Theta_n}\frac{\partial \Theta_n}{\partial r_{n+1}} = \cos\Theta_n \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\Theta_n \frac{\partial}{\partial \Theta_n}\,,$$

а для вторых производных

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} = \sin^2\Theta_n \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\cos^2\Theta_n \frac{\partial^2}{\partial \Theta_n^2} - \frac{2}{r^2}\cos\Theta_n \sin\Theta_n \frac{\partial}{\partial \Theta_n} +$$
$$+ \frac{2}{r}\cos\Theta_n \sin\Theta_n \frac{\partial^2}{\partial r\,\partial \Theta_n} + \frac{1}{r}\cos^2\Theta_n \frac{\partial}{\partial r}\,,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r_{n+1}^2} = \cos^2\Theta_n \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\sin^2\Theta_n \frac{\partial^2}{\partial \Theta_n^2} + \frac{2}{r^2}\cos\Theta_n \sin\Theta_n \frac{\partial}{\partial \Theta_n} -$$
$$- \frac{2}{r}\cos\Theta_n \sin\Theta_n \frac{\partial^2}{\partial r\,\partial \Theta_n} + \frac{1}{r}\sin^2\Theta_n \frac{\partial}{\partial r}\,.$$

Подстановка этих выражений в $\Delta^{(n+1)}$ даст

$$\Delta^{(n+1)} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\left[\frac{\delta^{(n)}}{\sin^2\Theta_n} - (n-1)\operatorname{ctg}\Theta_n \frac{\partial}{\partial \Theta_n} - \frac{\partial^2}{\partial \Theta_n^2}\right].$$

Таким образом имеем рекурентное соотношение

$$\delta^{(n+1)} = \frac{\delta^{(n)}}{\sin^2\Theta_n} - (n-1)\operatorname{ctg}\Theta_n \frac{\partial}{\partial \Theta_n} - \frac{\partial^2}{\partial \Theta_n^2}\,. \tag{45}$$

Из (43) с учетом разложения (44) вытекает, что n-мерная сферическая функция удовлетворяет уравнению на собственные значения

$$\delta^{(n)} Y_{l_{n-1},\ldots,l_1}(\Theta_{n-1},\ldots,\Theta_1) = l_{n-1}(l_{n-1} + n - 2)\, Y^{(n)}_{l_{n-1},\ldots,l_1}(\Theta_{n-1},\ldots,\Theta_1)\,. \tag{46}$$

Равенство (45) наводит на мысль , что сферическая функция имеет факторизованный вид

$$Y^{(n+1)}_{l_n,\dots,l_1}(\Theta_n,\dots,\Theta_1) = f(\Theta_n)\, Y^{(n)}_{l_{n-1},\dots,l_1}(\Theta_{n-1},\dots,\Theta_1)\,,$$

подстановка которого в (46) дает следующее уравнение для f:

$$\left[\frac{l_{n-1}(l_{n-1}+n-2)}{\sin^2\Theta_n} - (n-1)\operatorname{ctg}\Theta_n \frac{\partial}{\partial\Theta_n} - \frac{\partial^2}{\partial\Theta_n^2}\right] f(\Theta_n) =$$

$$= l_n(l_n+n-1)\, f(\Theta_n)\,.$$

Так как

$$\operatorname{ctg}\Theta_n \frac{\partial}{\partial\Theta_n} = -\cos\Theta_n \frac{\partial}{\partial\cos\Theta_n} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2}{\partial\Theta_n^2} = \frac{\partial}{\partial\Theta_n}(-\sin\Theta_n)\frac{\partial}{\partial(\cos\Theta_n)} =$$

$$= -\cos\Theta_n \frac{\partial}{\partial\cos\Theta_n} - \sin\Theta_n \frac{\partial}{\partial\Theta_n}\frac{\partial}{\partial\cos\Theta_n} =$$

$$= -\cos\Theta_n \frac{\partial}{\partial(\cos\Theta_n)} + \sin^2\Theta_n \frac{\partial^2}{\partial(\cos\Theta_n)^2}$$

это уравнение можно и так переписать

$$(1-x^2)\frac{d^2 f}{dx^2} - nx\frac{df}{dx} + \left[l_n(l_n+n-1) - \frac{l_{n-1}(l_{n-1}+n-2)}{1-x^2}\right] f = 0\,,$$

где $x=\cos\Theta_n$. Возьмем $f(x) = (1-x^2)^{l_{n-1}/2} g(x)$, тогда для g уравнение будет:

$$(1-x^2)\frac{d^2 g}{dx^2} - [n+2l_{n-1}]\,x\frac{dg}{dx} + (l_n - l_{n-1})(l_n + l_{n-1} + n - 1)\, g = 0\,.$$

Сравним это с уравнением определяющим полиномы Гегенбауэра:

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}C_N^{(\alpha)}(x) - (2\alpha+1)\,x\frac{d}{dx}C_N^{(\alpha)}(x) + N(N+2\alpha)\,C_N^{(\alpha)}(x) = 0\,.$$

Как видим, $g(x)$ пропорциональна $C^{(l_{n-1}+(n-1)/2)}_{l_n-l_{n-1}}(x)$. Таким образом для определения многомерной сферической функции получаем рекурентное соотношение

$$Y^{(n+1)}_{l_n\dots l_1}(\Theta_n,\dots,\Theta_1) =$$

$$= A_{l_n,l_{n-1}} \sin^{l_{n-1}}\Theta_n\, C^{(l_{n-1}+(n-1)/2)}_{l_n-l_{n-1}}(\cos\Theta_n)\, Y^{(n)}_{l_{n-1},\dots,l_1}(\Theta_{n-1},\dots,\Theta_1)\,, \tag{47}$$

где константа $A_{l_n,ln-1}$ определяется из условия нормировки $\int |Y^{(n+1)}_{l_n\dots l_1}|^2 \times$ $\times d^{(n+1)}\Omega = 1$, которое с учетом

$$d^{(n+1)}\Omega = \sin^{n-1}\Theta_n\, d\Theta_n\, d^{(n)}\Omega = -\sin^{n-2}\Theta_n\, d(\cos\Theta_n)\, d^{(n)}\Omega$$

перепишется так:

$$A^2_{l_n,l_{n-1}} \int_{-1}^{1} [C^{(l_{n-1}+(n-1)/2)}_{l_n-l_{n-1}}(x)]^2 (1-x^2)^{(1/2)(n+2l_{n-1}-2)} dx = 1\,.$$

Но для полиномов Гегенбауэра имеем

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\alpha-1/2} [C_N^{(\alpha)}(x)]^2\, dx = \frac{\pi\, 2^{1-2\alpha}\,\Gamma(N+2\alpha)}{N!\,(N+\alpha)[\Gamma(\alpha)]^2}\,,$$

поэтому получаем:

$$A^2_{l_n,l_{n-1}} = \frac{(l_n-l_{n-1})!\,(2l_n+n-1)\,[\Gamma(l_{n-1}+(n-1)/2)]^2}{\pi\, 2^{3-n-2l_{n-1}}\,\Gamma(l_n+l_{n-1}+n-1)}\,. \tag{48}$$

Это и равенство (47) полностью определяют многомерную сферическую функцию.

В частности, четырехмерная сферическая функция имеет вид:

$$Y_{nlm}(\Theta_3,\Theta_2,\Theta_1) =$$

$$= \sqrt{\frac{2^{2l+1}(n+1)(n-l)!\,(l!)^2}{\pi(n+l+1)!}}\,(\sin\Theta_3)^l\, C^{(l+1)}_{n-l}(\cos\Theta_3)\, Y_{lm}(\Theta_2,\Theta_1)\,, \tag{49}$$

а в пятимерном пространстве:

$$Y_{Nnlm}(\Theta_4,\Theta_3,\Theta_2,\Theta_1) = \sqrt{\frac{2^{2n+1}(2N+3)(N-n)!\,[\Gamma(n+3/2)]^2}{\pi(N+n+2)!}} \times$$

$$\times(\sin\Theta_4)^n\, C_{N-n}^{(n+3/2)}(\cos\Theta_4)\, Y_{nlm}(\Theta_3,\,\Theta_2,\,\Theta_1)\,. \tag{50}$$

Из этих уравнений ясно, что $l \le n \le N$. Вообще, так как нижний индекс полиномов Гегенбауэра есть порядок полинома и неотрицателен, то из (47) вытекает условие на квантовые числа $l_n \ge l_{n-1}$.

Для сферических функции выполняется следующая теорема сложения:

$$\sum_{l_{n-2}=0}^{l_{n-1}} \cdots \sum_{l_2=0}^{l_3} \sum_{l_1=-l_2}^{l_2} Y^{(n)}_{l_{n-1}\dots l_1}(\Theta_{n-1},\dots,\Theta_1)\, Y^{(n)*}_{l_{n-1}\dots l_1}(\Theta'_{n-1},\dots,\Theta'_1) =$$

$$= \frac{2l_{n-1}+n-2}{4\pi^{n/2}}\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) C^{((n-2)/2)}_{l_{n-1}}(\cos\alpha)\,, \tag{51}$$

где α есть угол между n-мерными единичными векторамы, которые определяются сферическими координатами $(\Theta_1,\dots,\Theta_{n-1})$ и $(\Theta'_1,\dots,\Theta'_{n-1})$.

Если n=3 , (51) дает теорему сложения для трехмерных сферических функции Y_{lm}, так как $C^{(1/2)}_l(\cos\alpha) = P_l\,(cos\alpha)$. Поэтому попробуем доказать (51) по индукции, т.е., допустим, что оно справедливо, и рассмотрим $(n+1)$-мерный случай:

$$\sum_{l_{n-1},\dots,l_1} Y^{(n+1)}_{l_n\dots l_1}(\Theta_n,\dots,\Theta_1)\, Y^{(n+1)*}_{l_n\dots l_1}(\Theta'_n,\dots,\Theta'_1) = \sum_{l_{n-1}=0}^{l_n} A^2_{l_n,l_{n-1}} \times$$

$$\times \sin^{l_{n-1}}\theta_n\, \sin^{l_{n-1}}\theta'_n\, C^{(l_{n-1}+(n-1)/2)}_{l_n-l_{n-1}}(\cos\Theta_n)\, C^{(l_{n-1}+(n-1)/2)}_{l_n-l_{n-1}}(\cos\Theta'_n) \times$$

$$\times \sum_{l_{n-2},\dots,l_1} Y^{(n)}_{l_{n-1}\dots l_1}(\Theta_{n-1},\dots,\Theta_1)\, Y^{(n)*}_{l_{n-1}\dots l_1}(\Theta'_{n-1},\dots,\Theta'_1) =$$

$$= \frac{2^{n-3}(2l_n+n-1)\Gamma((n-2)/2)}{4\pi^{(n/2+1)}} \times$$

$$\times \sum_{l_{n-1}=0}^{l_n} 2^{l_{n-1}} \frac{(l_n-l_{n-1})!}{\Gamma(l_n+l_{n-1}+n-1)}(2l_{n-1}+n-2) \times$$

$$\times [\Gamma(l_{n-1}+(n-1)/2)]^2 \sin^{l_{n-1}}\Theta_n\, C^{(l_{n-1}+(n-1)/2)}_{l_n-l_{n-1}}(\cos\Theta_n) \times$$

$$\times \sin^{l_{n-1}}\Theta'_n\, C^{(l_{n-1}+(n-1)/2)}_{l_n-l_{n-1}}(\cos\Theta'_n)\, C^{((n-2)/2)}_{l_{n-l}}(\cos\omega)\,.$$

ω есть угол между n-мерными единичными векторами и он связан с углом α между $(n+1)$-мерными векторами так $\cos\alpha = \cos\Theta_n\cos\Theta'_n + \sin\Theta_n\sin\Theta'_n\cos\omega$ (если $\vec{e}$ есть $(n+1)$-мерный единичный вектор, определенный $(\Theta_1,\dots\Theta_n)$ углами, а $\vec{f}$—n-мерный вектор, определенный углами $(\Theta_1,\dots\Theta_{n-1})$, то $\cos\alpha = \vec{e}\cdot\vec{e}'$, $\cos\omega = \vec{f}\cdot\vec{f}'$, и $\vec{e} = \cos\Theta_n\vec{e}_{n+1} + \sin\Theta_n\vec{f}$).

Вспоминая теорему сложения для полиномов Гегенбауэра:

$$C^{(\alpha)}_n(\cos\Theta\cos\Theta' + \sin\Theta\sin\Theta'\cos\phi) =$$

$$\sum_{m=0}^{n} 2^{2m}(2\alpha+2m-1)\frac{(n-m)!\,[\Gamma(\alpha+m)]^2\Gamma(2\alpha-1)}{[\Gamma(\alpha)]^2\Gamma(2\alpha+n+m)}\sin^m\Theta C^{(\alpha+m)}_{n-m}(\cos\Theta) \times$$

$$\times \sin^m\Theta' C^{(\alpha+m)}_{n-m}(\cos\Theta')\, C^{(\alpha-1/2)}_m(\cos\phi)\,,$$

получим:

$$\sum_{l_{n-1}\dots l_1} Y^{(n+1)}_{l_n\dots l_1}(\Theta_n,\dots,\Theta_1)\, Y^{(n+1)*}_{l_n\dots l_1}(\Theta'_n,\dots,\Theta'_1) =$$

$$= 2^{n-3}\,\frac{2l_n+n-1}{4\pi^{(n/2+1)}}\,\frac{[\Gamma((n-1)/2)]^2\,\Gamma((n-2)/2)}{\Gamma(n-2)}\, C^{((n-1)/2)}_{l_n}(\cos\alpha)\,,$$

но из-за $\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = (\pi^{1/2}/2^{2z-1})\Gamma(2z)$ формулы $\Gamma((n-1)/2)\times$ $\times\Gamma((n-2)/2) = (\pi^{1/2}/2^{n-3})\Gamma(n-2)$, и останется то, что надо:

$$\sum_{l_{n-1}\dots l_1} Y^{(n+1)}_{l_n\dots l_1}(\Theta_n,\dots,\Theta_1)\, Y^{(n+1)*}_{l_n\dots l_1}(\Theta'_n,\dots,\Theta'_1) =$$

$$= \frac{2l_n+n-1}{4\pi^{(n+1)/2}}\,\Gamma((n-1)/2)\, C^{((n-1)/2)}_{l_n}(\cos\alpha)\,.$$

В четырехмерном пространстве теорема сложения для сферических функции принимает вид:

$$\sum_{l=0}^{n}\sum_{m=-l}^{l} Y_{nlm}(\Theta_3,\,\Theta_2,\,\Theta_1)\, Y^*_{nlm}(\Theta'_3,\,\Theta'_2,\,\Theta'_1) =$$

$$= \frac{n+1}{2\pi^2}\, C^{(1)}_n(\cos\alpha) = \frac{n+1}{2\pi^2}\,\frac{\sin(n+1)\,\alpha}{\sin\alpha}\,,$$

и с его помощью можно показать, что решение уравнения (41) пропорционально сферической функции $Y_{nlm}(\Omega)$. Действительно, из производящей функции полиномов Гегенбауэра $(1 - 2\varepsilon\cos\alpha + \varepsilon^2)^{-\nu}$ =

$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(\nu)}(\cos\alpha)\varepsilon^n$, в случае $\varepsilon = \nu = 1$ получим $1/4\sin^2(\alpha/2) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)}(\cos\alpha)$. Заметим, что мы согрешили относительно математической строгости, когда положили $\varepsilon = 1$, так как при этом ряд перестает сходиться. Попробуем загладить вину

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{(n)}^{(1)}(\cos\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n+1)\,\alpha}{\sin\alpha} = \lim_{N\to\infty} \frac{\sin((N+1)/2)\,\alpha\,\sin(N\alpha/2)}{\sin\alpha\,\sin(\alpha/2)}\,.$$

Конечно предел не существует, но

$$\frac{\sin\frac{N+1}{2}\,\alpha\sin\,\frac{N\alpha}{2}}{\sin\alpha\,\sin(\alpha/2)} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos(N+\frac{1}{2})\,\alpha}{2\sin\alpha\,\sin(\alpha/2)} = \frac{1}{4\sin^2(\alpha/2)} - \frac{\cos(N+\frac{1}{2})\,\alpha}{2\sin\alpha\sin(\alpha/2)}.$$

Против первого члена ничего не имеем, а что касается второго, чем больше N, тем сильнее он осциллирует, и его умножение на любую нормальную функцию и взятие интеграла даст результат, который стремится к нулю при $N\to\infty$. Поэтому равенством $1/4\sin^2(\alpha/2) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)}(\cos\alpha)$ можно со спокойной совестью пользоваться под знаком интеграла. Если теперь $C_n^{(1)}(\cos\alpha)$ заменим с помощью теоремы сложения и учтем ортонормированность сферических функций, получим

$$\int \frac{Y_{nlm}(\Omega')}{\sin^2\alpha/2}\,d\Omega' = \frac{8\pi^2}{n+1}\,Y_{nlm}(\Omega)\,.$$

Поэтому четырехмерная сферическая функция действительно является решением уравнения (41), и соответствующее собственное значение определяется условием $p_0 = me^2/(n+1)$ (m—масса электрона), что для уровней атома водорода дает известную формулу: $E = -\,me^4/2(n+1)^2$, $n = 0, 1, \ldots$

Теперь нас не должно удивить, что решение уравнения (42) пропорционально пятимерной сферической функции. Приобретенный опыт подсказывает, чтобы показать это, надо $(1-\cos\alpha)^{-1}$ разложить в ряд по полиномам Гегенбауэра $C_N^{(3/2)}(\cos\alpha)$ и потом с помощью теоремы сложения (51) перейти к сферическим функциям.

Допустим, $1/(1-x) = \sum_{N=0}^{\infty} A_N(C_N^{(3/2)}(x)$, тогда из-за ортогональности полиномов Гегенбауэра и нормировки

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,[C_N^{(3/2)}(x)]^2\,dx = \frac{2(N+1)(N+2)}{2N+3}$$

будем иметь:

$$A_N = \frac{2N+3}{2(N+1)(N+2)}\int_{-1}^{1}(1+x)\,C_N^{(3/2)}(x)\,dx\,.$$

Интеграл можно посчитать используя равенства:

$$C_N^{(3/2)}(x) = \frac{d}{dx}P_{N+1}(x)\,,\;\; P_n(1) = 1 \text{ и } \int_{-1}^{1} P_n(x)\,dx = 0 \;\text{ если }\; n \neq 0\,.$$

Таким образом,

$$A_N = \frac{2N+3}{(N+1)(N+2)} \;\text{ и }\; \frac{1}{1-\cos\alpha} = \sum_{N=0}^{\infty}\frac{2N+3}{(N+1)(N+2)}\,C_N^{(3/2)}(\cos\alpha) =$$

$$= \sum_{Nnlm}\frac{8\pi^2}{(N+1)(N+2)}\,Y_{Nnlm}(\Omega)\,Y^*_{Nnlm}(\Omega')\,,$$

поэтому

$$\int \frac{Y_{Nnlm}(\Omega')}{\sin^2\alpha/2}\,d\Omega' = \frac{16\pi^2}{(N+1)(N+2)}\,Y_{Nnlm}(\Omega)\,,$$

и собственным значением для уравнения (42) будет $\lambda_N = (N+1)\times(N+2)m^2$ (здесь m—масса частицы, а не индекс сферической функции), а соответствующим решением:

$$\Phi_N(\Omega) = \sum_{nlm} A_{nlm}\,Y_{Nnlm}(\Omega)\,.$$

СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ В МОДЕЛИ ВИКА-КАТКОВСКОГО

Вернемся к уравнению (27). Снова рассмотрим случай равных масс

$$\left[m^2 + \left(p + \frac{i}{2}P\right)^2\right]\left[m^2 + \left(p - \frac{i}{2}P\right)^2\right]\Phi(p) = \frac{\lambda}{\pi^2}\int dq\,\frac{\Phi(q)}{(p-q)^2}\,, \quad (52)$$

здесь $P = (\vec{0}, M)$—Евклидов 4-вектор, M—масса связанного состояния.

Уравнение (52) явным образом обнаруживает только SO(3) симметрию (так как оно содержит фиксированный 4-вектор P), но теперь мы знаем, что более высокая симметрия может быть скрыта. Для выяснения этого отобразим 4-мерное импульсное пространство по стереографической проекции на поверхность 5-мерной сферы. Правая часть уравнения при этом преобразуется в соответствии с формулами (38) и (40)

$$\frac{\lambda}{\pi^2}\int dq\,\frac{\Phi(q)}{(p-q)^2} = \frac{\lambda p_0^2}{16\pi^2}\sec^{-2}\frac{\Theta_4}{2}\int\frac{\sec^6(\Theta_4'/2)\,\Phi(q)}{\sin^2\alpha/2}\,d\Omega' .$$

Что касается левой части, раскрытие скобок дает

$$\left[m^2+\left(p+\frac{i}{2}P\right)^2\right]\left[m^2+\left(p-\frac{i}{2}P\right)^2\right]=$$

$$= m^4-\frac{1}{2}m^2M^2+\frac{1}{16}M^4+2m^2p^2-\frac{1}{2}M^2p^2+p^4+(p\cdot P)^2=$$

$$=\left(m^2-\frac{1}{4}M^2\right)^2+2p_0^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\Theta_4}{2}\left(m^2-\frac{1}{4}M^2\right)+$$

$$+p_0^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\Theta_4}{2}\left(p_0^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\Theta_4}{2}+M^2\cos^2\Theta_3\right).$$

p_0—радиус 5-мерной сферы удобно выбрать так: $p_0^2 = m^2-(1/4)M^2$, тогда получим:

$$\left[m^2+\left(p+\frac{i}{2}P\right)^2\right]\left[m^2+\left(p-\frac{i}{2}P\right)^2\right]=p_0^2\left[p_0^2\sec^4\frac{\Theta_4}{2}+\right.$$

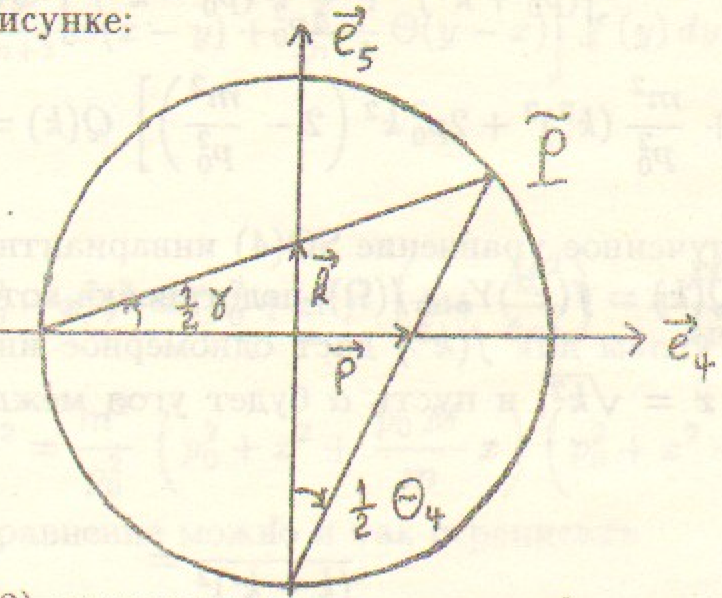
$$\left.+M^2\mathrm{tg}^2\frac{\Theta_4}{2}\cos^2\Theta_3\right]=p_0^2\sec^4\frac{\Theta_4}{2}\left[p_0^2+\frac{M^2}{4}\sin^2\Theta_4\,\cos^2\Theta_3\right].$$

Поэтому после введения новой функции $F(\Omega)\equiv F(\Theta_1,\Theta_2,\Theta_3,\Theta_4)=\sec^6\frac{\Theta_4}{2}\,\Phi(p)$, (52) примет вид

$$\left[p_0^2+\frac{M^2}{4}\sin^2\Theta_4\,\cos^2\Theta_3\right]F(\Omega)=\frac{\lambda}{16\pi^2}\int\frac{F(\Omega')}{\sin^2\alpha/2}\,d\Omega' . \qquad (53)$$

Заметим, что $\sin\Theta_4\cos\Theta_3 = \tilde{P}_4/p_0$ ($\tilde{P}$ есть та точка, которую стереографическая проекция соотносит 4-вектору p), поэтому (53) инвариантно

относительно таких поворотов 5-мерной координатной системы, которые не меняют четвертую ось. Таким образом уравнение (52) обладает скрытой SO(4) симметрией. Эта симметрия не была видна, потому что p-импульсное пространство не ортогонально к $\vec{e}_4$ оси. Но при обратной стереографической проекции, если ее полюс выберем на оси $\vec{e}_4$, получим k-импульсное пространство, которое ортогонально к оси $\vec{e}_4$. Схематически это показано на рисунке:



Поэтому уравнение (52), переписанное в терминах k-переменных, должно стать явно SO(4) инвариантным. Получим это уравнение. Согласно последнего равенства (37)

$$\sin\Theta_4\,\cos\Theta_3=\cos\gamma=\frac{\tilde{P}_4}{p_0}=\frac{p_0^2-k^2}{p_0^2+k^2}.$$

Далее, из-за (38)

$$\frac{1}{\sin^2(\alpha/2)}=\frac{p_0^2}{(k-k')^2}\sec^2\frac{\gamma}{2}\sec^2\frac{\gamma'}{2},$$

а согласно (40)

$$d\Omega'=\frac{16}{p_0^4}\sec^{-8}\left(\frac{\gamma'}{2}\right)dk' .$$

Подстановка всего этого в (53) после введения новой неизвестной функции $Q(k)=\cos^6(\gamma/2)\,F(\Omega)$ даст

$$\left[p_0^2+\frac{M^2}{4}\frac{(p_0^2-k^2)^2}{(p_0^2+k^2)^2}\right]\sec^4\frac{\gamma}{2}\,Q(k)=\frac{\lambda}{\pi^2p_0^2}\int\frac{Q(k')}{(k-k')^2}\,dk' .$$

Но

$$\sec^4\frac{\gamma}{2} = \left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\right)^2 = \left(1+\frac{k^2}{p_0^2}\right)^2 = \frac{1}{p_0^4}\,(p_0^2+k^2)^2 .$$

поэтому окончательно получаем

$$\left[(p_0^2+k^2)^2+\frac{M^2}{4p_0^2}\,(p_0^2-k^2)^2\right] Q(k)\equiv$$

$$\equiv\left[m^2p_0^2+\frac{m^2}{p_0^2}\,(k^2)^2+2p_0^2k^2\left(2-\frac{m^2}{p_0^2}\right)\right] Q(k)=\frac{\lambda}{\pi^2}\int\frac{Q(k')}{(k-k')^2}\,dk' . \qquad (54)$$

Так как полученное уравнение SO(4) инвариантно, его решение должно иметь вид $Q(k)=f(k^2)Y_{nlm}/(\Omega)$, подстановка которого в (54) и интегрирование по углам для $f(k^2)$ даст одномерное интегральное уравнение. Обозначим $x=\sqrt{k^2}$, и пусть α будет угол между k и k' 4-векторамы, тогда

$$\frac{1}{(k-k')^2}=$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{x^2}\,\frac{1}{1-2\frac{x'}{x}\cos\alpha+\frac{x'^2}{x^2}} = \frac{1}{x^2}\sum_{n'=0}^{\infty}\left(\frac{x'}{x}\right)^{n'} C_{n'}^{(1)}(\cos\alpha)\,, \text{ если } x>x' \\ \frac{1}{x'^2}\,\frac{1}{1-2\frac{x}{x'}\cos\alpha+\frac{x^2}{x'^2}} = \frac{1}{x'^2}\sum_{n'=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x'}\right)^{n'} C_{n'}^{(1)}(\cos\alpha)\,, \text{ если } x<x' \end{array}\right\}=$$

$$=\sum_{n'=0}^{\infty} C_{n'}^{(1)}(\cos\alpha)\left[\frac{(x')^{n'}}{x^{n'+2}}\,\Theta(x-x')+\frac{x^{n'}}{(x')^{n'+2}}\,\Theta(x'-x)\right].$$

По теореме сложения

$$C_{n'}^{(1)}(\cos\alpha)=\frac{2\pi^2}{n'+1}\sum_{l'm'}Y_{n'l'm'}(\Omega)\,Y^*_{n'l'm'}(\Omega')\,,$$

поэтому

$$\frac{1}{(k-k')^2}=\sum_{n'l'm'}\frac{2\pi^2}{n'+1}\left[\frac{(x')^{n'}}{x^{n'+2}}\,\Theta(x-x')+\right.$$

$$\left.+\frac{x^{n'}}{(x')^{n'+2}}\,\Theta(x'-x)\right] Y_{n'l'm'}(\Omega)\,Y^*_{n'l'm'}(\Omega') .$$

Подстановка этого и $\Theta(k)=f(x)Y_{nlm}(\Omega)$ в (54) с учетом ортонормированности сферических функций и $dk'=|k'|^3d|k'|d^{(4)}\Omega'$ даст

$$\left[(p_0^2+x^2)^2+\frac{M^2}{4p_0^2}\,(p_0^2-x^2)^2\right] f(x)=$$

$$\frac{2\lambda}{n+1}\int_0^\infty\left[\frac{y^{n+3}}{x^{n+2}}\,\Theta(x-y)+\frac{x^n}{y^{n-1}}\,\Theta(y-x)\right] f(y)\,dy .$$

Так как

$$(p_0^2+x^2)^2+\frac{M^2}{4p_0^2}\,(p_0^2-x^2)^2=(p_0^2+x^2)^2\left(1+\frac{M^2}{4p_0^2}\right)-4\,\frac{M^2}{4p_0^2}\,p_0^2x^2=$$

$$(p_0^2+x^2)^2\,\frac{m^2}{p_0^2}-M^2x^2=\frac{m^2}{p_0^2}\left(p_0^2+x^2+\frac{p_0M}{m}\,x\right)\left(p_0^2+x^2-\frac{p_0M}{m}\,x\right)$$

то это интегральное уравнение можно и так переписать

$$\left(p_0^2+x^2+\frac{p_0M}{m}\,x\right)\left(p_0^2+x^2-\frac{p_0M}{m}\,x\right) f(x)=$$

$$=\frac{2\lambda p_0^2}{m^2(n+1)}\int_0^\infty\left[\frac{y^{n+3}}{x^{n+2}}\,\Theta(x-y)+\frac{x^n}{y^{n-1}}\,\Theta(y-x)\right] f(y)\,dy .$$

или после введения $s=x/p_0$ безразмерной переменной

$$\left(1+s^2+\frac{M}{m}\,s\right)\left(1+s^2-\frac{M}{m}\,s\right) f(s)=$$

$$=\frac{2\lambda}{m^2(n+1)}\int_0^\infty\left[\frac{r^{n+3}}{s^{n+2}}\,\Theta(s-r)+\frac{s^n}{r^{n-1}}\,\Theta(r-s)\right] f(r)\,dr . \qquad (55)$$

Из этого уравнения видно, что для функции $f_n(s)\equiv f(s)$, если $n\neq 0$, имеем граничное условие $f_n(0)=0$ в точке $s=0$.

Покажем, что (55) эквивалентно дифференциальному уравнению второго порядка. Обозначим

$$R(s,\,r)=\frac{r^{n+3}}{s^{n+2}}\,\Theta(s-r)+\frac{s^n}{r^{n-1}}\,\Theta(r-s) .$$

Так как $(d/ds)\,\Theta(s-r)=\delta(s-r)$, для производных по s получим:

$$\frac{d}{ds}\,R(s,\,r) = -(n+2)\frac{r^{n+3}}{s^{n+3}}\,\Theta(s-r) + n\,\frac{s^{n-1}}{r^{n-1}}\,\Theta(r-s),$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\,R(s,\,r) = (n+2)(n+3)\,\frac{r^{n+3}}{s^{n+4}}\,\Theta(s-r) +$$

$$+n\,(n-1)\,\frac{s^{n-2}}{r^{n-1}}\,\Theta(r-s) - 2(n+1)\,\delta(s-r)\,.$$

Попробуем подобрать коэффициенты A и B так, чтобы было

$$\left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{A}{s}\,\frac{d}{ds} + \frac{B}{s^2}\right]\,R(s,\,r) = -2(n+1)\,\delta(s-r)$$

в результате получим систему

$$(n+2)\,A - B = (n+2)(n+3)\,, \qquad nA + B = -n\,(n-1)$$

решение которой есть $A = 3$, $B = -n(n+2)$. Поэтому

$$\left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{3}{s}\,\frac{d}{ds} - \frac{n\,(n+2)}{s^2}\right]\left[(1+s^2)^2 - \frac{M^2}{m^2}\,s^2\right]\,f\,(s) =$$

$$= -\frac{4\lambda}{m^2}\int\limits_0^\infty \delta\,(s-r)\,f\,(r)\,dr = -\frac{4\lambda}{m^2}\,f(s)\,.$$

Перейдем к новой переменной $t = s^2$ и к новой неизвестной функции $\phi(t) = t[(1+t)^2 - (M^2/m^2)\,t]\,f(t)$. С учетом

$$\frac{1}{s}\,\frac{d}{ds} = 2\,\frac{d}{dt} \text{ и } \frac{d^2}{ds^2} = \frac{d}{ds}\,2s\,\frac{d}{dt} = 2\,\frac{d}{dt} + 2s\,\frac{d}{ds}\,\frac{d}{dt} = 2\,\frac{d}{dt} + 4t\,\frac{d^2}{dt^2}\,.$$

окончательно получим

$$\frac{d^2}{dt^2}\,\phi_n\,(t) + \left[\frac{\lambda}{t\,[m^2(1+t)^2 - M^2 t]} - \frac{n\,(n+2)}{4t^2}\right]\,\phi_n\,(t) = 0\,. \tag{56}$$

Асимптотическая форма этого уравнения (когда $n \neq 0$) в пределе $t \to 0$ или $t \to \infty$ есть

$$\frac{d^2\,\phi_n}{dt^2} - \frac{n\,(n+2)}{4t^2}\,\phi_n = 0\,,$$

с решениями $t^{1+n/2}$ и $t^{-n/2}$. В начале координат поведение $\phi_n \sim t^{-n/2}$, не подходит, потому что тогда $f_n \sim t^{-(n/2)-1}$, что противоречит условию $f_n(0) = 0$. Покажем, что на бесконечности, наоборот, поведение $\phi_n \sim t^{1+n/2}$ не годиться, так как тогда $f_n \sim t^{(n/2)-2} = s^{n-4}$, что противоречит интегральному уравнению (55). Действительно, когда $s \to \infty$, левая сторона уравнения будет порядка s^n, а правая сторона порядка

$$\frac{1}{s^{n+2}}\int\limits_0^s r^{n+3} f_n\,(r)\,dr + s^n\int\limits_s^\infty \frac{r^{n-4}}{r^{n-1}}\,dr = \frac{1}{2}\,s^{n-2} + \frac{1}{s^{n+2}}\int\limits_0^s r^{n+3} f_n\,(r)\,dr\,.$$

Пусть s_0 какое-нибудь большое число, такое, что когда $r > s_0$ можно использовать асимптотическую форму решения. Тогда

$$\int\limits_0^s r^{n+3} f_n\,(r)\,dr \approx \int\limits_0^{s_0} r^{n+3} f_n\,(r)\,dr + \int\limits_{s_0}^s r^{2n-1}\,dr =$$

$$= \frac{1}{2n}\,(s^{2n} - s_0^{2n}) + \int\limits_0^{s_0} r^{n+3} f_n\,(r)\,dr\,.$$

поэтому

$$\frac{1}{s^{n+2}}\int\limits_0^s r^{n+3} f_n(r)\,dr \sim s^{n-2}\,.$$

Таким образом правая сторона уравнения (55) получается порядка s^{n-2} и не может быть равной левой стороне.

Как видим, уравнение (56) необходимо дополнить граничными условиями

$$\phi_n\,(t) \sim t^{1+n/2}\,, \text{ если } t \to 0\,,$$

$$\phi_n\,(t) \sim t^{-n/2}\,, \text{ если } t \to \infty\,. \tag{57}$$

В уравнении (56) переменная t меняется от 0 до ∞. Для численных расчетов более удобно иметь дело с конечным интервалом. Поэтому перейдем к новой переменной $z = (1-t)/(1+t)$, которая меняется от -1 до 1. Используя равенства

$$\frac{d}{dt} = -\frac{2}{(1+t)^2}\frac{d}{dz}, \quad \frac{d^2}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{-2}{(1+t)^2}\frac{d}{dz} =$$

$$= \frac{4}{(1+t)^3}\frac{d}{dz} + \frac{4}{(1+t)^4}\frac{d}{dz^2} = \frac{1}{2}(1+z)^3\frac{d}{dz} + \frac{1}{4}(1+z)^4\frac{d^2}{dz^2}$$

получим

$$(1-z^2)\frac{d^2\phi_n}{dz^2} + 2(1-z)\frac{d\phi_n}{dz} + \left[\frac{\lambda}{m^2-(M^2/4)(1-z^2)} - \frac{n(n+2)}{1-z^2}\right]\phi_n = 0\,,$$

которое можно несколько упростить, если введем новую функцию $g_n(z) = (1+z)(1-z^2)^{n/2}\phi_n(z)$, для которой будем иметь уравнение

$$(1-z^2)\frac{d^2g_n}{dz^2} + 2nz\frac{dg_n}{dz} + \left[\frac{\lambda}{m^2-(M^2/4)(1-z^2)} - n(n+1)\right]g_n = 0\,. \quad (58)$$

(57) показывает, что при $z \to 1$, $g_n \sim (1-z)^{n/2}(1-z)^{1+n/2} = (1-z)^{n+1}$, а при $z \to -1$, $g_n \sim (1+z)^{1+n/2}(1+z)^{n/2} = (1+z)^{n+1}$. Поэтому граничные условия для (58) будут $g_n(-1) = g_n(1) = 0$.

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Переход от (52) к одномерному интегральному уравнению можно произвести другим методом, который непосредственно не связан со скрытой симметрией уравнения. На этот раз рассмотрим общий случай неравных масс. Возьмем $m_1 = m + \Delta$, $m_2 = m - \Delta$ и (27) перепишем так:

$$\Phi(p) = \frac{\lambda}{\pi^2}[(m+\Delta)^2-(p-i\eta_1 P)^2]^{-1}[(m-\Delta)^2+(p+i\eta_2 P)^2]^{-1}\int dq\,\frac{\Phi(q)}{(p-q)^2}. \quad (59)$$

Заметим, что решение уравнения

$$\Phi(p) = \frac{\lambda}{\pi^2}(p^2+m^2)^{-2}\int dq\,\frac{\Phi(q)}{(p-q)^2}\,,$$

как раньше видели, есть

$$\phi(p) \sim \cos^6\frac{\Theta_4}{2}\,Y_{Nnlm}(\Omega) \sim (1+\cos\Theta_4)^3\sin^n\Theta_4\,\sin^l\Theta_3\,Y_{lm}(\Theta_2,\Theta_1) \sim$$

$$\sim (p^2+m^2)^{-n-3}|\vec{p}|^l\,Y_{lm}(\Theta_2,\Theta_1) = \frac{\mathcal{Y}_{lm}(\vec{p})}{(p^2+m^2)^{n+3}}\,,$$

($\cos\Theta_4 = \frac{m^2-p^2}{m^2+p^2}$, $\sin\Theta_4 = \frac{2m|p|}{m^2+p^2}$ и $\sin\Theta_3 = \frac{|\vec{p}|}{|p|}$. Здесь $|p| = \sqrt{p^2}$—длина 4-вектора и $p = (\vec{p}, p_4)$).

Дальше, имеем параметрическое представление:

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{dz}{[(1/2)(A+B)+(1/2)(A-B)z]^2}\,,$$

согласно которому

$$[(m-\Delta)^2+(p+i\eta_2 P)^2]^{-1}[(m+\Delta)^2+(p-i\eta_1 P)^2]^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{dz}{[(1+\frac{\Delta^2}{m^2}-2\frac{\Delta}{m}z)p_0^2+p^2+i(z-\frac{\Delta}{m})p\cdot P]^2}\,. \quad (60)$$

Здесь, как и раньше, $p_0^2 = m^2-(1/4)M^2$.

Все это подталкивает посмотреть, как меняется при подстановке в правой части уравнения (59) следующая функция

$$\Phi_{nlm}(p,z) = \frac{\mathcal{Y}_{lm}(\vec{p})}{[(1+\frac{\Delta^2}{m^2}-2\frac{\Delta}{m}z)p_0^2+p^2+i(z-\frac{\Delta}{m})p\cdot P]^{n+3}}\,.$$

В первую очередь посчитаем $\int dq\,\frac{\Phi_{nlm}(q,z)}{(p-q)^2}$. Согласно формулы (29),

$$\int dq\,\frac{\Phi_{nlm}(\phi,z)}{(p-q)^2} =$$

$$= \int dq\,\mathcal{Y}_{lm}(\vec{q})\left[(1+\frac{\Delta^2}{m^2}-2\frac{\Delta}{m}z)p_0^2+q^2+i(z-\frac{\Delta}{m})q\cdot P\right]^{-(n+3)}\times$$

$$\times[(p-q)^2]^{-1} = (n+3)\int_0^1 u^{n+2}du\int dq\,\mathcal{Y}_{lm}(\vec{q})\times$$

$$\times\left[u\,\{(1+\frac{\Delta^2}{m^2}-2\frac{\Delta}{m}z)p_0^2+q^2+i(z-\frac{\Delta}{m})q\cdot P\}+(1-u)(p-q)^2\right]^{-(n+4)},$$

раскрывая скобки и выделяя полный квадрат, получим

$$u\left[(1+\frac{\Delta^2}{m^2}-2\frac{\Delta}{m}z)\,p_0^2+q^2+i\,(z-\frac{\Delta}{m})\,q\cdot P\right]+(1-u)(p-q)^2=$$

$$=\left[q+\frac{i}{2}u\,(z-\frac{\Delta}{m})\,P-(1-u)\,p\right]^2+u\,(1-u)\,p^2+\frac{1}{4}u^2(z-\frac{\Delta}{m})^2P^2+$$

$$+up_0^2\,(1+\frac{\Delta^2}{m^2}-2\frac{\Delta}{m}z)+iu\,(1-u)(z-\frac{\Delta}{m})\,p\cdot P\,,$$

поэтому в интеграле перейдем к новой переменной $k=q+\frac{i}{2}u(z-\frac{\Delta}{m})\,P-(1-u)\,p$:

$$\int dq\,\frac{\Phi_{nlm}\,(q,\,z)}{(p-q)^2}=(n+3)\int\limits_0^1 u^{n+2}du\int dkY_{lm}\,(\vec{k}+(1-u)\vec{p})\,[k^2+u\,(1-u)p^2+$$

$$+\frac{1}{4}u^2(z-\frac{\Delta}{m})^2P^2+up_0^2\,(1+\frac{\Delta^2}{m^2}-2\frac{\Delta}{m}z)+iu\,(1-u)(z-\frac{\Delta}{m})\,p\cdot P]^{-(n+4)}.$$

Для шаровых функций имеет место равенство

$$\mathcal{Y}_{lm}\,(\vec{a}+\vec{b})=\sum_{k=0}^{l}\sum_{\mu=-k}^{k}\times$$

$$\times\left[\frac{4\pi\,(2l+1)(l+m)!\,(l-m)!}{(2k+1)(2l-2k+1)(k+\mu)!(k-\mu)!(l+m-k-\mu)!(l-m-k+\mu)!}\right]^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\mathcal{Y}_{l-k,m-\mu}(\vec{a})\,\mathcal{Y}_{k\mu}(\vec{b})\,.$$

Разложим $Y_{lm}\,((1-u)\vec{p}+\vec{k})$ согласно этого соотношения и учтем, что если $l\neq 0$, тогда $\int Y_{lm}(\vec{k})d^{(3)}\Omega=0$. Поэтому под интегралом останется только

$$\sqrt{4\pi}\,\mathcal{Y}_{lm}\,[(1-u)\,\vec{p}]\,Y_{00}\,(\vec{k})=\mathcal{Y}_{lm}\,[(1-u)\,\vec{p}]=(1-u)^l\mathcal{Y}_{lm}\,(\vec{p})$$

первый член этого разложения. Учтем также, что $dk=(1/2)tdtd^{(4)}\Omega$, где $t=k^2$, и $\int d^{(4)}\Omega=2\pi^2$, В результате получим:

$$\int dq\,\frac{\Phi_{nlm}\,(q,\,z)}{(p-q)^2}=\pi^2(n+3)\,\mathcal{Y}_{lm}\,(\vec{p})\int\limits_0^1 u^{n+2}(1-u)^l du\int\limits_0^\infty\times$$

$$\times tdt/\left[t+u(1-u)p^2+\frac{1}{4}u^2(z-\frac{\Delta}{m})^2P^2+\right.$$

$$\left.+up_0^2\,(1+\frac{\Delta^2}{m^2}-2\frac{\Delta}{m}z)+iu(1-u)(z-\frac{\Delta}{m})\,p\cdot P\right]^{n+4}.$$

По t имеем такой интеграл

$$\int\limits_0^\infty\frac{tdt}{[t+a]^{n+4}}=\int\limits_0^\infty\frac{dt}{(t+a)^{n+3}}-a\int\limits_0^\infty\frac{dt}{(t+a)^{n+4}}=\frac{1}{(n+2)(n+3)}\,a^{-(n+2)}.$$

т.е.

$$\int dq\,\frac{\Phi_{nlm}\,(q,\,z)}{(p-q)^2}=$$

$$=\frac{\pi^2}{n+2}\,\mathcal{Y}_{lm}\,(\vec{p})\int\limits_0^1(1-u)^l\left[(1-u)\,p^2+\frac{1}{4}u\,(z-\frac{\Delta}{m})^2P^2+\right.$$

$$\left.+p_0^2\,(1+\frac{\Delta^2}{m^2}-2\frac{\Delta}{m}z)+i\,(1-u)(z-\frac{\Delta}{m})\,p\cdot P^2\right]^{-(n+2)}du\,.$$

Перейдем к новой переменной интегрирования $t=1-u$:

$$\int dq\,\frac{\Phi_{nlm}\,(q,\,z)}{(p-q)^2}=\frac{\pi^2}{n+2}\,\mathcal{Y}_{lm}\,(\vec{p})\int\limits_0^1 t^l\left[t\,\{p^2+i\,(z-\frac{\Delta}{m})\,p\cdot P-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}(z-\frac{\Delta}{m})^2P^2\}+p_0^2\,(1+\frac{\Delta^2}{m^2}-2\frac{\Delta}{m}z)+\frac{1}{4}(z-\frac{\Delta}{m})^2\,P^2\right]^{-(n+2)}dt\,.$$

обозначим

$$a=(1+\frac{\Delta^2}{m^2}-2\frac{\Delta}{m}z)\,p_0^2+p^2+i\,(z-\frac{\Delta}{m})\,p\cdot P$$

и

$$b = \left(1+\frac{\Delta^2}{m^2} - 2\frac{\Delta}{m} z\right) p_0^2 + \frac14 \left(z - \frac{\Delta}{m}\right)^2 P^2 .$$

Надо посчитать интеграл

$$\int \frac{t^l\,dt}{[t(a-b)+b]^{n+2}} = (-1)^l \frac{(n+1-l)!}{(n+1)!}\frac{\partial^l}{\partial a^l}\int_0^1 \frac{dt}{[t(a-b)+b]^{n-l+2}} =$$

$$= (-1)^l \frac{(n+1-l)!}{(n+1)!}\frac{\partial^l}{\partial a^l}\frac{1}{(a-b)^{n-l+2}}\int_0^1\frac{dt}{[t+b/(a-b)]^{n-l+2}} =$$

$$= (-1)^l \frac{(n-l)!}{(n+1)!}\frac{\partial^l}{\partial a^l}\frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{b^{n-l+1}} - \frac{1}{a^{n-l+1}}\right] =$$

$$= (-1)^l\frac{(n-l)!}{(n+1)!}\frac{\partial^l}{\partial a^l}\frac{a^{n-l}+a^{n-l-1}b+a^{n-l-2}b^2+\ldots+b^{n-l}}{a^{n-l+1}b^{n-l+1}} =$$

$$= (-1)^l \frac{(n-l)!}{(n+1)!}\frac{\partial^l}{\partial a^l}\sum_{k=o}^{n-l} a^{-(n-l+1-k)}b^{-(k+1)} =$$

$$= \frac{(n-l)!}{(n+1)!}\sum_{k=o}^{n-l}\frac{(n-k)!}{(n-l-k)!}a^{-(n-k+1)}b^{-(k+1)}.$$

мы предположили, что $n \geq l$. Таким образом

$$\int dq \frac{\Phi_{nlm}(q,z)}{(p-q)^2} = \pi^2\frac{(n-l)!}{(n+2)!}\sum_{k=o}^{n-l}\frac{(n-k)!}{(n-l-k)!}\times$$

$$\times\left[p_0^2\left(1+\frac{\Delta^2}{m^2}-2\frac{\Delta}{m}z\right)+\frac14\left(z-\frac{\Delta}{m}\right)^2p^2\right]^{-(k+1)}\times$$

$$\times\frac{\mathcal{Y}_{lm}(\vec p)}{[(1+\frac{\Delta^2}{m^2}-2\frac{\Delta}{m}z)p_0^2+p^2+i(z-\frac{\Delta}{m})p\cdot P]^{n-k+1}},$$

но

$$\mathcal{Y}_{lm}(\vec p)\left[\left(1+\frac{\Delta^2}{m^2}-2\frac{\Delta}{m}z\right)p_0^2+p^2+i\left(z-\frac{\Delta}{m}\right)p\cdot P\right]^{-(n-k+1)} =$$

$$=\Phi_{n-k-2,lm}(p,z),$$

поэтому

$$\int dq\frac{\Phi_{nlm}(q,z)}{(p-q)^2} = \pi^2\frac{(n-l)!}{(n+2)!}\sum_{k=o}^{n-l}\frac{(n-k)!}{(n-l-k)!}\times$$

$$\times\frac{\Phi_{n-k-2,lm}(p,z)}{[p_0^2(1+\frac{\Delta^2}{m^2}-2\frac{\Delta}{m}z)+\frac14(z-\frac{\Delta}{m})^2P^2]^{k+1}}.$$

Результат обнадеживает, так как получили линейную комбинацию функции Φ_{nlm}, и поэтому можно ожидать, что решение уравнения (59) можно выразить через эти функции. Но перед тем как в этом окончательно убедиться надо посмотреть не преподнесет ли какой-нибудь непрятный сюрприз умножение на

$$[(m-\Delta)^2+(p+i\eta_2P)^2]^{-1}[(m+\Delta)^2+(p-i\eta_1P)^2]^{-1}.$$

Согласно формул (60) и (29):

$$[(m-\Delta)^2+(p+i\eta_2P)^2]^{-1}[(m+\Delta)^2+(p-i\eta_1P)^2]^{-1}\times$$

$$\times\left[\left(1+\frac{\Delta^2}{m^2}-2\frac{\Delta}{m}z\right)p_0^2+p^2+i\left(z-\frac{\Delta}{m}\right)p\cdot P\right]^{-(n-k+1)} =$$

$$=\frac12(n-k+1)(n-k+2)\int_{-1}^1dt\int_0^1\times$$

$$\times x(1-x)^{n-k}dx\Big/\left[ix(t-z)p\cdot P+\left(1+\frac{\Delta^2}{m^2}-2\frac{\Delta}{m}z\right)p_0^2+p^2+\right.$$

$$\left.+i\left(z-\frac{\Delta}{m}\right)p\cdot P-2\frac{\Delta}{m}x(t-z)p_0^2\right]^{n-k+3} =$$

$$=\frac12(n-k+1)(n-k+2)\int_{-1}^1dt\int_0^1\times$$

$$\times\frac{x(1-x)^{n-k}dx}{\{[1+\frac{\Delta^2}{m^2}-2\frac{\Delta}{m}(xt+z-xz)]p_0^2+p^2+i(xt+z-xz-\frac{\Delta}{m})p\cdot P\}^{n-k+3}},$$

поэтому

$$[(m-\Delta)^2+(p+i\eta_2P)^2]^{-1}[(m+\Delta)^2+(p-i\eta_1P)^2]^{-1}\int dq\frac{\Phi_{nlm}(q,z)}{(p-q)^2} =$$

$$= \frac{\pi^2}{2} \sum_{k=0}^{n-l} \frac{(n-l)!\,(n-k+2)!}{(n+2)!\,(n-l-k)!} \int_{-1}^{1} dt \times$$

$$\times \int_0^1 \frac{x(1-x)^{n-k} \Phi_{n-k,lm}(p,\, xt+z-xz)\, dx}{[p_0^2(1+\frac{\Delta^2}{m^2} - 2\frac{\Delta}{m} z) + \frac{1}{4}(z-\frac{\Delta}{m})^2 P^2]^{k+1}}\,.$$

Заметим, что, когда $0 \le x \le 1$, тогда $\min(z,\, t) \le xt + z - xz \le \max(z,\, t)$, поэтому, если примем, что параметр z в $\Phi_{nlm}(p,\, z)$ функциях меняется в пределах $-1 \le z \le 1$, тогда $-1 \le xt + z - xz \le 1$, и вышеприведенное равенство можно переписать так

$$[(m-\Delta)^2 + (p + i\eta_2 P)^2]^{-1} [(m+\Delta)^2 + (p - i\eta_1 P)^2]^{-1} \int dq\, \frac{\Phi_{nlm}(q,\, z)}{(p-q)^2} =$$

$$= \frac{\pi^2}{2} \sum_{k=0}^{n-l} \frac{(n-l)!\,(n-k+2)!}{(n+2)!\,(n-l-k)!} \int_{-1}^{1} dt \int_0^1 dx\, x(1-x)^{n-k} \int_{-1}^{1} \times$$

$$\times \frac{\delta(\zeta - xt - z + xz)}{[p_0^2(1+\frac{\Delta^2}{m^2} - 2\frac{\Delta}{m} z) + \frac{1}{4}(z-\frac{\Delta}{m})^2 P^2]^{k+1}} \Phi_{n-k,lm}(p,\, \zeta)\, d\zeta\,.$$

Полученное равенство показывает, что если в правой части (59) уравнения подставим функцию $\Phi_{nlm}(q,\, z)$, то результатом будет суперпозиция таких же функций. Поэтому решение уравнения (59) можно представить в таком виде:

$$\Phi_{nlm}(p) = \sum_{k=0}^{n-l} \int_{-1}^{1} g_{nl}^k(z)\, \Phi_{n-k,lm}(p,\, z)\, dz\,.$$

Тогда

$$[(m-\Delta)^2 + (p + i\eta_2 P)^2]^{-1} [(m+\Delta)^2 + (p - i\eta_1 P)^2]^{-1} \int dq\, \frac{\Phi_{nlm}(q)}{(p-q)^2} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-l} \int_{-1}^{1} dz g_{nl}^{\nu}(z) [(m-\Delta)^2 + (p + i\eta_2 P)^2]^{-1} \times$$

$$\times [(m+\Delta)^2 + (p - i\eta_1 P)^2]^{-1} \int dq\, \frac{\Phi_{n-\nu,lm}(q,\, z)}{(p-q)^2} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-l} \sum_{\tau=0}^{n-l-\nu} \frac{\pi^2}{2} \frac{(n-l-\nu)!(n-\nu-\tau+2)!}{(n-\nu+2)!(n-\nu-\tau-l)!} \times$$

$$\times \int_{-1}^{1} dz g_{nl}^{\nu}(z) \int_{-1}^{1} dt \int_0^1 dx\, x(1-x)^{n-\nu-\tau} \times$$

$$\times \int_{-1}^{1} \frac{\delta(\zeta - xt - z + xz) \Phi_{n-\nu-\tau,lm}(p,\, \zeta)}{[p_0^2(1+\frac{\Delta^2}{m^2} - 2\frac{\Delta}{m} z) + \frac{1}{4}(z-\frac{\Delta}{m})^2 P^2]^{\tau+1}}\,.$$

Обозначим $k = \nu + \tau$ и учтем, что

$$\sum_{\nu=0}^{N} \sum_{\tau=0}^{N-\nu} A(\nu,\, \tau) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{\nu=0}^{k} A(\nu,\, k-\tau)\,,$$

поэтому уравнение (59) перепишется так

$$\sum_{k=0}^{n-l} \int_{-1}^{1} g_{nl}^k(\zeta)\, \Phi_{n-k,lm}(p,\, \zeta)\, d\zeta =$$

$$= \frac{\lambda}{2} \sum_{k=0}^{n-l} \sum_{\nu=0}^{k} \frac{(n-l-\nu)!(n-k+2)!}{(n-\nu+2)!(n-l-k)!} \int_{-1}^{1} dz g_{nl}^{\nu}(z) \int_{-1}^{1} dt \int_0^1 dx\, x(1-x)^{n-k} \times$$

$$\times \int_{-1}^{1} \frac{\delta(\zeta - xt - z + xz) \Phi_{n-k,lm}(p,\, \zeta) d\zeta}{[p_0^2(1+\frac{\Delta^2}{m^2} - 2\frac{\Delta}{m} z) + \frac{1}{4}(z-\frac{\Delta}{m})^2 P^2]^{k-\nu+1}}\,,$$

откуда для функции $g_{nl}^k(z)$ получаем систему неоднородных интегральных уравнении

$$g_{nl}^k(\zeta) = \frac{\lambda}{2} \sum_{\nu=0}^{k} \frac{(n-l-\nu)!(n-k+2)!}{(n-l-k)!(n-\nu+2)!} \int_{-1}^{1} dt \int_0^1 dx\, x(1-x)^{n-k} \times$$

$$\times \int_{-1}^{1} \frac{\delta(\zeta - xt - z + xz)\, g_{nl}^{\nu}(z)\, dz}{[p_0^2(1+\frac{\Delta^2}{m^2} - 2\frac{\Delta}{m} z) + \frac{1}{4}(z-\frac{\Delta}{m})^2 P^2]^{k-\nu+1}}\,, \qquad (61)$$

Заметим, что для ее получения надо было поменять порядок интегрирования по dz и по $d\zeta$. Мы можем это сделать, потому что $\int\limits_a^b dz \int\limits_c^d dy\, f(x,\, y) = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b dx\, f(x,\, y)$. По той же причине интегрирование по dz в (61) можно переставить с интегрированиями по dx и dt и (61) переписать так (после $z \leftrightarrow \zeta$ замены)

$$g^k_{nl}(z) = \frac{\lambda}{2}\sum_{\nu=0}^{k} \frac{(n-l-\nu)!(n-k+2)!}{(n-l-k)!(n-\nu+2)!}\times$$

$$\times\int\limits_{-1}^{1} \frac{I(z,\, \zeta)\, g^\nu_{nl}(\zeta)\, d\zeta}{[p_0^2(1+\frac{\Delta^2}{m^2} - 2\frac{\Delta}{m}\zeta) + \frac{1}{4}(\zeta-\frac{\Delta}{m})^2 P^2]^{k-\nu+1}},$$

где

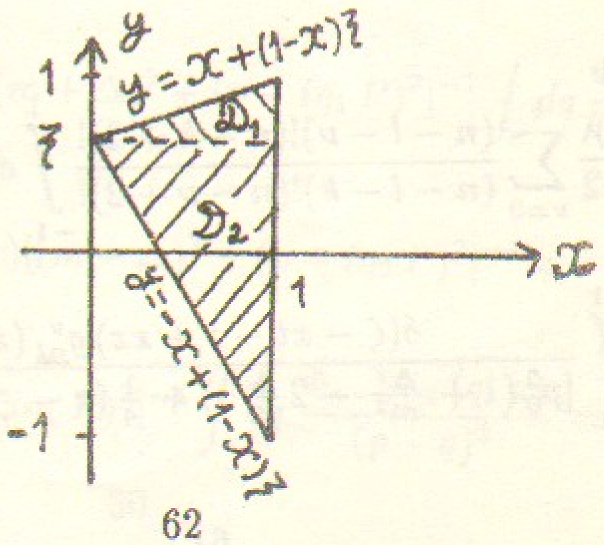
$$I(z,\, \zeta) = \int\limits_{-1}^{1} dt \int\limits_{0}^{1} dx\, x\,(1-x)^{n-k}\,\delta\,(z - xt - \zeta + x\zeta) =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} dx\, x\,(1-x)^{n-k} \int\limits_{-1}^{1} \delta\,(z - xt - \zeta + x\zeta)\, dt\,.$$

Вместо t введем новую переменную $y = xt + (1-x)\zeta$:

$$I(z,\, \zeta) = \int\limits_{0}^{1} dx\,(1-x)^{n-k} \int\limits_{-x+(1-x)\zeta}^{x+(1-x)\zeta} \delta(z-y)\, dy = \iint_D (1-x)^{n-k}\delta(z-y)\,dx\, dy\,.$$

В двухкратном интеграле область интегрирования $D = D_1 \cup D_2$ показана на рисунке:



Стандартными методами вычислим двукратные интегралы

$$\iint_{D_1} (1-x)^{n-k}\delta(z-y)\,dx\, dy = \int\limits_{\zeta}^{1} dy\, \delta(z-y) \int\limits_{\frac{y-\zeta}{1-\zeta}}^{1} (1-x)^{n-k}\, dx =$$

$$= \frac{1}{n-k+1}\int\limits_{\zeta}^{1} \delta(z-y)\left(\frac{1-y}{1-\zeta}\right)^{n-k+1} dy =$$

$$= \frac{1}{n-k+1}\left(\frac{1-z}{1-\zeta}\right)^{n-k+1} \Theta(z-\zeta),$$

$$\iint_{D_2} (1-x)^{n-k}\delta(z-y)\,dx\, dy = \int\limits_{-1}^{\zeta} dy\, \delta(z-y) \int\limits_{\frac{\zeta-y}{1+\zeta}}^{1} (1-x)^{n-k}\, dx =$$

$$= \frac{1}{n-k+1}\int\limits_{-1}^{\zeta} \delta(z-y)\left(\frac{1+y}{1+\zeta}\right)^{n-k+1} dy =$$

$$= \frac{1}{n-k+1}\left(\frac{1+z}{1+\zeta}\right)^{n-k+1} \Theta(\zeta-z).$$

Поэтому,

$$I(z,\zeta) = \frac{1}{n-k+1}\left[\left(\frac{1-z}{1-\zeta}\right)^{n-k+1}\Theta(z-\zeta) + \left(\frac{1+z}{1+\zeta}\right)\Theta(\zeta-z)\right].$$

Введем функцию

$$R(z,\zeta) = \frac{1-z}{1-\zeta}\,\Theta(z-\zeta) + \frac{1+z}{1+\zeta}\,\Theta(\zeta-z)$$

и доопределим Θ-функцию в начале координат равенством $\Theta(0) = 1/2$, тогда $I(z,\zeta) = \frac{1}{n-k+1}[R(z,\zeta)]^{n-k+1}$ и наша система интегральных уравнений перепишется так

$$g^k_{nl}(z) = \frac{\lambda}{2}\sum_{\nu=0}^{k} \frac{(n-l-\nu)!(n-k)!}{(n-l-k)!(n-\nu+2)!}(n-k+2)\times$$

$$\times \int_{-1}^{1} \frac{[R(z,\zeta)]^{n-k+1} g^{\nu}_{nl}(\zeta)\,d\zeta}{[p_0^2(1+\frac{\Delta^2}{m^2}-2\frac{\Delta}{m}\zeta)+\frac{1}{4}(\zeta-\frac{\Delta}{m})^2P^2]^{k-\nu+1}}. \qquad (62)$$

В частности, $g^0_{nl}(z) \equiv g_n(z)$ удовлетворяет однородному интегральному уравнению, из которого определяется и собственное значение λ (обращая зависимость $\lambda = \lambda(M)$, получим спектр масс $M = M(\lambda)$):

$$g_n(z) = \frac{\lambda}{2(n+1)} \int_{-1}^{1} \frac{[R(z,\zeta)]^{n+1} g_n(\zeta)\,d\zeta}{p_0^2(1+\frac{\Delta^2}{m^2}-2\frac{\Delta}{m}\zeta)+\frac{1}{4}(\zeta-\frac{\Delta}{m})^2P^2} \qquad (63)$$

Заметим, что $R(1,\zeta) = R(-1,\zeta) = 0$, если $|\zeta| \neq 1$. Поэтому $g_n(-1) = g_n(1) = 0$.

Посмотрим, какому дифференциальному уравнению второго порядка эквивалентно интегральное уравнение (63). Дифференцируя равенство $R(z,\zeta) = \Theta(z-\zeta)\frac{1-z}{1-\zeta} + \Theta(\zeta-z)\frac{1+z}{1+\zeta}$, получим $\frac{d}{dz}R(z,\zeta) = \Theta(\zeta-z)\frac{1}{1+\zeta} - \Theta(z-\zeta)\frac{1}{1-\zeta}$ и $\frac{d^2}{dz^2}R(z,\zeta) = -\frac{2}{1-z^2}\delta(z-\zeta)$. Потом

$$(1-z^2)\left[\frac{dR}{dz}\right]^2 + 2zR\frac{dR}{dz} - R^2 = \left[\frac{dR}{dz}\right]^2 - \left(R - z\frac{dR}{dz}\right)^2 =$$

$$= \left[(1-z)\frac{dR}{dz} + R\right]\left[(1+z)\frac{dR}{dz} - R\right] = -\frac{4}{1-\zeta^2}\Theta(z-\zeta)\Theta(\zeta-z).$$

Правая часть отличается от нуля только в точке $z = \zeta$. Таким образом,

$$(1-z^2)\left[\frac{d}{dz}R(z,\zeta)\right]^2 + 2zR(z,\zeta)\frac{d}{dz}R(z,\zeta) - R^2(z,\zeta) =$$

$$= -\frac{4}{1-z^2}\Theta(z-\zeta)\Theta(\zeta-z).$$

Учтем теперь, что

$$\left\{(1-z)^2\frac{d^2}{dz^2} + 2z(n-1)\frac{d}{dz} - n(n-1)\right\} R^n(z,\zeta) =$$

$$= n(n-1)R^{n-2}\left\{\left[\frac{dR}{dz}\right]^2 + 2zR\frac{dR}{dz} - R^2\right\} + n(1-z^2)R^{n-1}\frac{d^2R}{dz^2},$$

а также равенство $R(z,z) = 1$, и окончательно получим

$$\left[(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2} + 2z(n-1)\frac{d}{dz} - n(n-1)\right]R^n(z,\zeta) =$$

$$= -2n\delta(z-\zeta) - \frac{4n(n-1)}{1-z^2}\Theta(z-\zeta)\Theta(\zeta-z). \qquad (64)$$

При помощи этого соотношения можно превратить (63) в дифференциальное уравнение

$$(1-z^2)\frac{d^2g_n}{dz^2} + 2nz\frac{dg_n}{dz} - n(n+1)g_n +$$

$$+ \frac{\lambda}{p_0^2(1+\frac{\Delta^2}{M^2}-2\frac{\Delta}{M}z)+\frac{1}{4}(z-\frac{\Delta}{M})^2P^2}g_n = 0. \qquad (65)$$

При его получении мы учли, что $\int_{-1}^{1}\Theta(z-\zeta)\Theta(\zeta-z)f(\zeta)d\zeta = 0$, если $f(\zeta)$ — нормальная функция (не имеет особенности типа $\delta(z-\zeta)$). Но

$$p_0^2\left(1+\frac{\Delta^2}{m^2}-2\frac{\Delta}{m}z\right) + \frac{1}{4}\left(z-\frac{\Delta}{m}\right)^2P^2 =$$

$$= \left(m^2 - \frac{1}{4}M^2\right)\left(1+\frac{\Delta^2}{m^2}-2\frac{\Delta}{M}z\right) + \frac{1}{4}\left(z-\frac{\Delta}{m}\right)^2M^2 =$$

$$= m^2\left(1+\frac{\Delta^2}{m^2}-2\frac{\Delta}{m}z\right) - \frac{1}{4}M^2(1-z^2),$$

поэтому (65) можно переписать и так

$$(1-z^2)\frac{d^2g_n}{dz^2} + 2nz\frac{dg_n}{dz} +$$

$$+ \left[\frac{\lambda}{m^2(1+\frac{\Delta^2}{m^2}-2\frac{\Delta}{m}z)-\frac{1}{4}M^2(1-z^2)} - n(n+1)\right]g_n = 0. \qquad (66)$$

Из этого уравнения, когда $\Delta = 0$, получается уже известное нам уравнение (58). Оказывается, что и в общем случае уравнение (66), соответствующее случаю неравных масс, можно с помощью замены переменных свести к уравнению типа (58), описывающему случай равных масс. Чтобы угадать соответствующую замену переменных лучше переписать (66) в виде (56). Введение функции $\varphi_n(z) = (1+z)^{-1}(1-z^2)^{-n/2}g_n(z)$ дает

$$(1-z^2)\frac{d^2\varphi_n}{dz^2} + 2(1-z)\frac{d\varphi_n}{dz} +$$

$$+\left[\frac{\lambda}{m^2\left(1+\frac{\Delta^2}{m^2}-2\frac{\Delta}{m}z\right)-\frac14 M^2(1-z^2)}-\frac{n(n+2)}{1-z^2}\right]\varphi_n=0,$$

а после замены переменных $t=\frac{1-z}{1+z}$ будем иметь (заметим, что

$$\frac{d}{dz}=-\frac{(1+t)^2}{2}\frac{d}{dt}\quad\text{и}\quad\frac{d^2}{dz^2}=\frac{(1+t)^4}{4}\frac{d^2}{dt^2}+\frac{(1+t)^3}{2}\frac{d}{dt}\,):$$

$$\frac{d^2\varphi_n}{dt^2}+\frac{1}{t^2}\left[\frac{\lambda}{m^2\left[\frac{(1+t)^2}{t}\left(1+\frac{\Delta^2}{m^2}\right)-2\frac{\Delta}{m}\frac{1-t^2}{t}\right]-M^2}-\frac{n(n+2)}{4}\right]\varphi_n=0.$$

Но

$$\frac1t m^2\left[(1+t)^2\left(1+\frac{\Delta^2}{m^2}\right)-2\frac{\Delta}{m}(1-t^2)\right]=$$

$$=\frac1t m^2\left[t^2\left(1+\frac{\Delta}{m}\right)^2+\left(1-\frac{\Delta}{m}\right)^2+2t\left(1+\frac{\Delta^2}{m^2}\right)\right]=$$

$$=\frac1t m^2\left\{\left[t\left(1+\frac{\Delta}{m}\right)+\left(1-\frac{\Delta}{m}\right)\right]^2+4t\frac{\Delta^2}{m^2}\right\}=$$

$$=4\Delta^2+m^2\left(1-\frac{\Delta^2}{m^2}\right)\frac{\left[1+\left(\left(1+\frac{\Delta}{m}\right)/\left(1-\frac{\Delta}{m}\right)\right)t\right]^2}{\left(\left(1+\frac{\Delta}{m}\right)/\left(1-\frac{\Delta}{m}\right)\right)t},$$

поэтому, если перейти к новой переменной $\tilde t=\frac{1+\Delta/m}{1-\Delta/m}t$, получим уравнение типа (56):

$$\frac{d^2\varphi_n}{d\tilde t^2}+\left[\frac{\lambda/\left(1-\frac{\Delta^2}{m^2}\right)}{\tilde t\left[m^2(1+\tilde t)^2-\left((M^2-4\Delta^2)/\left(1-\frac{\Delta^2}{m^2}\right)\right)\tilde t\right]}-\frac{n(n+2)}{4\tilde t^2}\right]\varphi_n=0. \tag{67}$$

Таким образом, достаточно найти спектр $\lambda=F(M^2)$ в случае равных масс. Тогда спектр для неравных масс определится из соотношения

$$\frac{\lambda}{1-\frac{\Delta^2}{m^2}}=F\left(\frac{M^2-4\Delta^2}{1-\frac{\Delta^2}{m^2}}\right). \tag{68}$$

Заметим, что замене $t\to\tilde t$ соответствует следующая замена для переменной z: $z\to\tilde z=\frac{1-\tilde t}{1+\tilde t}=\frac{z-\frac{\Delta}{m}}{1-\frac{\Delta}{m}z}$.

С помощью (64) можно преобразовать в систему дифференциальных уравнений и (62):

$$\left\{(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2}+2(n-k)z\frac{d}{dz}-(n-k)(n-k+1)\right\}g^k_{nl}(z)+$$

$$+\lambda\sum_{\nu=0}^{k}\frac{(n-l-\nu)!(n-k+2)!}{(n-l-k)!(n-\nu+2)!}\times$$

$$\times\frac{g^\nu_{nl}(z)}{\left[m^2\left(1+\frac{\Delta^2}{m^2}-2\frac{\Delta}{m}z\right)-\frac14 M^2(1-z^2)\right]^{k-\nu+1}}=0\,.$$

РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В БИПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Существует еще один метод для изучения уравнения (27). Его идея такова: преобразить интегральное уравнение Вика—Катковского в дифференциальное уравнение в частных производных и попытаться разделить переменные в какой-нибудь специальной системе координат.

Переход от интегрального уравнения к дифференциальному можно осуществить с помощью того факта, что в четырехмерном Евклидовом пространстве

$$\Delta\frac{1}{x^2}=-4\pi^2\delta(x). \tag{69}$$

Покажем, что это действительно так. $\frac{1}{x^2}$ в точке $x=0$ не имеет производных, поэтому $\Delta\frac{1}{x^2}$ надо доопределить в этой точке. Определим его так:

$$\Delta\frac{1}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to0}\Delta\frac{1}{x^2+\varepsilon}.$$

Но $\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{x^2+\varepsilon}=-\frac{2x_i}{(x^2+\varepsilon)^2}$ и

$$\Delta\frac{1}{x^2+\varepsilon}=\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_i}\frac{1}{x^2+\varepsilon}=-\frac{8}{(x^2+\varepsilon)^2}+\frac{8x^2}{(x^2+\varepsilon)^3}=-\frac{8\varepsilon}{(x^2+\varepsilon)^3}.$$

Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon\to0}\Delta\frac{1}{x^2+\varepsilon}=\begin{cases}0, & \text{если}\quad x\neq0\\ -\infty, & \text{если}\quad x=0\end{cases}$$

т.е., ожидается, что $\Delta\frac{1}{x^2}$ пропорциональна $-\delta(x)$. Чтобы в этом окончательно убедиться, вычислим интеграл:

$$-8\varepsilon\int\frac{dx}{(x^2+\varepsilon)^3}=-16\varepsilon\pi^2\int_0^\infty\frac{r^3dr}{(r^2+\varepsilon)^3}=-8\varepsilon\pi^2\int_0^\infty\frac{tdt}{(t+\varepsilon)^3}=-4\pi^2,$$

а это означает справедливость (69).

Подействуем на обе стороны уравнения (27) оператором $\Delta_p=\frac{\partial^2}{\partial p_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial p_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial p_3^2}+\frac{\partial^2}{\partial p_4^2}$ и учтем равенство $\Delta_p\frac{1}{(p-q)^2}=-4\pi^2\delta(p-q)$. В итоге получим

$$\Delta_p[m_1^2+\vec{p}^{\,2}+(p_4-i\eta_1M)^2][m_2^2+\vec{p}^{\,2}+(p_4+i\eta_2M)^2]\Phi(p)=-4\lambda\Phi(p),$$

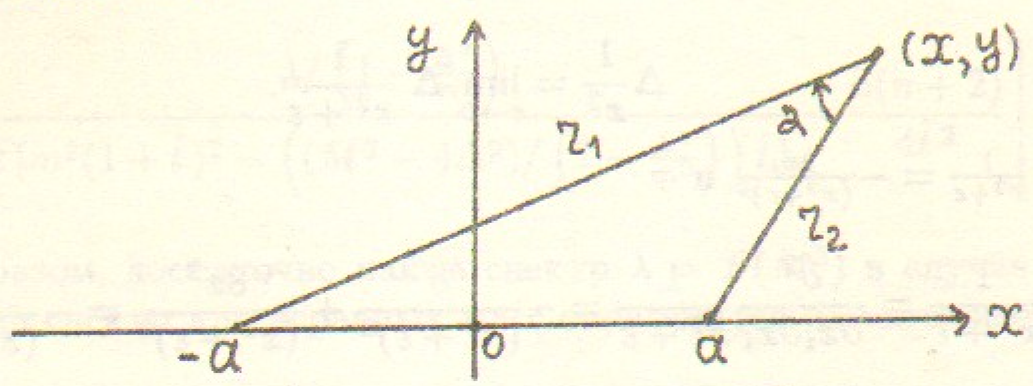
или после введения новой функции

$$\Psi(p)=[m_1^2+\vec{p}^{\,2}+(p_4-i\eta_1M)^2][m_2^2+\vec{p}^{\,2}+(p_4+i\eta_2M)^2]\Phi(p),$$

$$\Delta\Psi(p)+\frac{4\lambda}{[m_1^2+\vec{p}^{\,2}+(p_4-i\eta_1M)^2][m_2^2+\vec{p}^{\,2}+(p_4+i\eta_2M)^2]}\Psi(p)=0. \tag{70}$$

Мы получили искомое дифференциальное уравнение. Теперь надо позаботиться о разделении переменных. Оказывается, что для этой цели подойдут, так называемые, биполярные координаты.

На плоскости биполярные координаты τ,α определяются так: α есть указанный на рисунке угол, а $e^\tau=\frac{r_1}{r_2}$.



Так как $r_1=\sqrt{(x+a)^2+y^2}$ и $r_2=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$, то из определения ясно, что

$$\tau=\frac{1}{2}\ln\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2},\qquad \alpha=\arccos\frac{x^2+y^2-a^2}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}\sqrt{(x-a)^2+y^2}}.$$

Чтобы обратить эти соотношения, заметим следующее

$$\cosh\tau=\frac{1}{2}(e^\tau+e^{-\tau})=\frac{x^2+y^2+a^2}{r_1r_2},\quad \sinh\tau=\sqrt{\cosh^2\tau-1}=\frac{2ax}{r_1r_2},$$

$$\cos\alpha=\frac{x^2+y^2-a^2}{r_1r_2},$$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{2ay}{r_1r_2}\quad\text{и}\quad \cosh\tau-\cos\alpha=\frac{2a^2}{r_1r_2}.$$

Поэтому будем иметь

$$x=\frac{a\sinh\tau}{\cosh\tau-\cos\alpha},\qquad y=\frac{a\sin\alpha}{\cosh\tau-\cos\alpha}.$$

В 4-мерном Евклидовом импульсном пространстве биполярные координаты определим следующим образом

$$P_1=\frac{a\sin\alpha}{\cosh\tau-\cos\alpha}\sin\Theta\cos\varphi,\qquad P_2=\frac{a\sin\alpha}{\cosh\tau-\cos\alpha}\sin\Theta\sin\varphi,$$

$$P_3=\frac{a\sin\alpha}{\cosh\tau-\cos\alpha}\cos\Theta,\qquad P_4=\frac{a\sinh\tau}{\cosh\tau-\cos\alpha}. \tag{71}$$

Параметр a удобно выбрать так, чтобы было

$$a^2=m_1^2-\eta_1^2M^2=m_2^2-\eta_2^2M^2.$$

Ясно, что, если $\eta_i=\frac{m_i}{m_1+m_2}$ (как полагали до сих пор), это невозможно, но вспомним, что при получении уравнения Бете—Солпитера от параметров η_1,η_2 требовалось только условие $\eta_1+\eta_2=1$, в остальных отношениях они произвольны, и потребуем $m_1^2-\eta_1^2M^2=m_2^2-\eta_2^2M^2$, это даст

$$\eta_1=\frac{M^2+m_1^2-m_2^2}{2M^2},\qquad \eta_2=\frac{M^2-m_1^2+m_2^2}{2M^2},$$

$$a=\frac{\sqrt{[(m_1+m_2)^2-M^2][M^2-(m_1-m_2)^2]}}{2M}$$

Начнем переписывать (70) в новых координатах. Имеем

$$m_1^2+\vec{p}^{\,2}+(p_4-i\eta_1M)^2=a^2+\frac{a^2\sin^2\alpha}{(\cosh\tau-\cos\alpha)^2}+\frac{a^2\sinh^2\tau}{(\cosh\tau-\cos\alpha)^2}$$

$$-2i\eta_1 M \frac{a\sinh\tau}{\cosh\tau-\cos\alpha} = a^2 + a^2\frac{1-\cos^2\alpha}{(\cosh\tau-\cos\alpha)^2} + a^2\frac{\cosh^2\tau-1}{(\cosh\tau-\cos\alpha)^2} -$$

$$-2i\eta_1 M\frac{a\sinh\tau}{\cosh\tau-\cos\alpha} = \frac{2a}{\cosh\tau-\cos\alpha}(a\cosh\tau - i\eta_1 M\sinh\tau).$$

Аналогично, $m_2^2+\vec p^{\,2}+(p_4+i\eta_2M)^2 = \frac{2a}{\cosh\tau-\cos\alpha}(a\cosh\tau+i\eta_2M\sinh\tau)$. Таким образом,

$$[m_1^2+\vec p^{\,2}+(p_4-i\eta_1M)^2][m_2^2+\vec p^{\,2}+(p_4+i\eta_2M)^2]=$$

$$=\frac{4a^2}{(\cosh\tau-\cos\alpha)^2}(a\cosh\tau-i\eta_1M\sinh\tau)(a\cosh\tau+i\eta_2M\sinh\tau).$$

Теперь надо выразить в биполярных координатах лапласиан. Обозначим $r=\frac{a\sin\alpha}{\cosh\tau-\cos\alpha}$, тогда

$$\Delta_p = \frac{\partial^2}{\partial p_4^2}+\frac1r\frac{\partial^2}{\partial r^2}r - \frac{\delta^{(3)}}{r^2} = \frac1r\left(\frac{\partial^2}{\partial p_4^2}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)r-\frac{\delta^{(3)}}{r^2}.$$

Здесь $\delta^{(3)}$ есть угловая часть трехмерного лапласиана $\Delta^{(3)} = \frac{\partial^2}{\partial p_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial p_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial p_3^2}$. Введем $z=p_4+ir$, тогда $\frac{\partial}{\partial\bar z}=\frac12\left(\frac{\partial}{\partial p_4}+i\frac{\partial}{\partial r}\right)$, $\frac{\partial}{\partial z}=\frac12\left(\frac{\partial}{\partial p_4}-i\frac{\partial}{\partial r}\right)$, и $\frac{\partial^2}{\partial p_4^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\bar z}$. Таким образом, нужно α и τ выразить через $\bar z$ и z

$$\tau=\frac12\ln\frac{(p_4+a)^2+r^2}{(p_4-a)^2+r^2}=\frac12\ln\frac{(z+a)(\bar z+a)}{(z-a)(\bar z-a)}.$$

Что касается α, используя формулу $\arccos A = i\ln[A+\sqrt{A^2-1}]$, будем иметь

$$\alpha=\arccos\frac{p_4^2+r^2-a^2}{\sqrt{(p_4+a)^2+r^2}\sqrt{(p_4-a)^2+r^2}}=$$

$$=\arccos\frac{z\bar z-a^2}{\sqrt{(z^2-a^2)(\bar z^2-a^2)}}=\frac i2\ln\frac{(z+a)(\bar z-a)}{(z-a)(\bar z+a)}.$$

Дифференцируя полученные равенства, получим

$$\frac{\partial\alpha}{\partial z}=\frac{-ia}{z^2-a^2},\quad \frac{\partial\alpha}{\partial\bar z}=\frac{ia}{\bar z^2-a^2},\quad\frac{\partial\tau}{\partial z}=-\frac{a}{z^2-a^2},\quad\frac{\partial\tau}{\partial\bar z}=-\frac{a}{\bar z^2-a^2}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial\tau}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\tau}=-\frac{a}{z^2-a^2}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+i\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial\bar z}=-\frac{a}{\bar z^2-a^2}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}-i\frac{\partial}{\partial\alpha}\right).$$

Поэтому

$$\frac{\partial^2}{\partial p_4^2}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}=\frac{4a^2}{(z^2-a^2)(\bar z^2-a^2)}\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\right),$$

(заметим, что $\frac{\partial}{\partial\tau}+i\frac{\partial}{\partial\alpha}=2\frac{\partial}{\partial(\tau-i\alpha)}$ коммутирует с $\frac{1}{\bar z^2-a^2}$, потому что $\bar z=p_4-ir=a\frac{\sinh\tau-\sinh i\alpha}{\cosh\tau-\cosh i\alpha}=a\coth\frac{\tau+i\alpha}{2}$). Но

$$(z^2-a^2)(\bar z^2-a^2)=(z+a)(\bar z+a)(z-a)(\bar z-a)=$$

$$=[(p_4+a)^2+r^2][(p_4-a)^2+r^2]=\frac{4a^4}{(\cosh\tau-\cos\alpha)^2},$$

и для лапласиана окончательно будем иметь

$$\Delta=\frac{(\cosh\tau-\cos\alpha)^3}{a^2\sin\alpha}\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\right)\frac{\sin\alpha}{\cosh\tau-\cos\alpha}-\frac{(\cosh\tau-\cos\alpha)^2}{a^2\sin^2\alpha}\delta^{(3)}.$$

Его можно переписать в более удобной форме, если учтем равенство

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\sin\alpha=\sin\alpha\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+2\mathrm{ctg}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}-1\right)$$

и соотношение (45)

$$\Delta=\frac{(\cosh\tau-\cos\alpha)^3}{a^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}-\delta^{(4)}-1\right)\frac{1}{\cosh\tau-\cos\alpha}.$$

Таким образом, уравнение (70) в биполярных координатах будет выглядеть так

$$\left[(\cosh\tau-\cos\alpha)\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}-\delta^{(4)}-1\right)\frac{1}{\cosh\tau-\cos\alpha}+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda}{(a\cosh\tau-i\eta_1M\sinh\tau)(a\cosh\tau+i\eta_2M\sinh\tau)}\right]\Psi=0.$$

В этом уравнении возможно разделение переменных. А именно, будем искать решение в виде

$$\Psi(\tau,\alpha,\Theta,\varphi)=(\cosh\tau-\cos\alpha)f(\tau)Y_{nlm}(\alpha,\Theta,\varphi). \qquad (72)$$

Тогда с учетом равенства $\delta^{(4)}Y_{nlm} = n(n+2)/Y_{nlm}$ получим следующее уравнение для f

$$\frac{d^2f}{d\tau} + \left[\frac{\lambda}{(a\cosh\tau - i\eta_1 M\sinh\tau)(a\cosh\tau + i\eta_2 M\sinh\tau)} - (n+1)^2\right] f = 0. \tag{73}$$

Упрощая, заметим, что из-за формул

$\sinh 2\tau = 2\sinh\tau\cosh\tau,\quad 1+\cosh 2\tau = 2\cosh^2\tau$ и $\cosh 2\tau - 1 = 2\sinh^2\tau$

будем иметь

$$(a\cosh\tau - i\eta_1 M\sinh\tau)(a\cosh\tau + i\eta_2 M\sinh\tau) =$$

$$= a^2\cosh^2\tau + \eta_1\eta_2 M^2\sinh^2\tau + iMa(\eta_2-\eta_1)\cosh\tau\sinh\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(a^2+\eta_1\eta_2M^2)\cosh 2\tau + iaM(\eta_2-\eta_1)\sinh 2\tau - (\eta_1\eta_2M^2 - a^2)\right\}.$$

Но

$$(a^2+\eta_1\eta_2M^2)^2 - i^2a^2M^2(\eta_2-\eta_1)^2 =$$

$$= a^4 + \eta_1^2\eta_2^2M^4 + a^2M^2\eta_2^2 + a^2M^2\eta_1^2 = (a^2+\eta_1^2M^2)(a^2+\eta_2^2M^2) = m_1^2m_2^2,$$

поэтому существует такое комплексное число ν, что

$$\cosh\nu = \frac{1}{m_1m_2}(a^2+\eta_1\eta_2M^2) \quad\text{и}\quad \sinh\nu = \frac{i}{m_1m_2}aM(\eta_2-\eta_1).$$

Потом

$$\eta_1\eta_2M^2 - a^2 = \eta_1\eta_2M^2 - m_1^2 + \eta_1^2M^2 = \eta_1M^2 - m_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(M^2+m_1^2-m_2^2) - m_1^2 = \frac{1}{2}(M^2-m_1^2-m_2^2),$$

и вспоминая формулу $\cosh(x+y) = \cosh x\cosh y + \sinh x\sinh y$, получим

$$(a\cosh\tau - i\eta_1 M\sinh\tau)(a\cosh\tau + i\eta_2 M\sinh\tau) =$$

$$= \frac{m_1m_2}{2}[\cosh(2\tau+\nu) - \frac{1}{2m_1m_2}(M^2-m_1^2-m_2^2)].$$

Поэтому уравнение (73) после перехода к новой переменной $\sigma = \tau + \frac{\nu}{2}$ перепишется так

$$\frac{d^2f}{d\sigma^2} + \left[\frac{\lambda}{m_1m_2\cosh^2\sigma - \frac{1}{4}[M^2-(m_1-m_2)^2]} - (n+1)^2\right] f = 0. \tag{74}$$

Его вид еще раз показывает уже известный нам факт, что случай неравных масс эквивалентен задаче с равными массами, если в качестве параметров последнего возьмем $m^2 = m_1m_2$ и $M'^2 = M^2 - (m_1-m_2)^2$.

Таким образом, достаточно ограничиться уравнением (для равных масс $\nu = 0$ и $\sigma = \tau$)

$$\frac{d^2f}{d\tau^2} + \left[\frac{\lambda}{m^2\cosh^2\tau - \frac{1}{4}M^2} - (n+1)^2\right] f = 0. \tag{75}$$

Из определения биполярной координаты τ ясно, что она меняется в пределах $-\infty < \tau < \infty$, поэтому уравнение (75) должно быть дополнено граничными условиями при $\tau \to \pm\infty$. Эти условия надо получить из исходного интегрального уравнения, но вместо этого мы покажем, что (75) эквивалентно уравнению (56). Действительно, введем новую переменную $t = \sinh 2\tau + \cosh 2\tau = e^{2\tau}$, тогда $\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} = 4t\frac{\partial}{\partial t} + 4t^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}$. Потом $(1+t)^2 = (2\cosh^2\tau + 2\cosh\tau\sinh\tau)^2 = 4\cosh^2\tau(\cosh\tau+\sinh\tau)^2 = 4(\cosh^2\tau)t$, поэтому $\cosh^2\tau = \frac{(1+t)^2}{4t}$, и (75) примет форму

$$\frac{d^2f}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{df}{dt} + \left\{\frac{\lambda}{t[m^2(1+t)^2 - M^2t]} - \frac{(n+1)^2}{4t^2}\right\} f = 0,$$

а переход к новой функции $\varphi = \sqrt{t}f$ устранит первую производную и даст уравнение (56) для φ. Таким образом, (57) означает следующие граничные условия для уравнения (75)

$$f(\tau) \sim e^{-(n+1)|\tau|}, \quad\text{при}\quad \tau \to \pm\infty. \tag{76}$$

Присутствие сферической функции в (72) означает, что модель Вика—Катковского обладает SO(4) скрытой симметрией и в случае неравных масс. Именно из-за этой симметрии и возможно разделение переменных.

Замечание о литературе

Мы приводим только те источники, которые были использованы при подготовке настоящего обзора. Обширную библиографию по уравнению Бете—Солпитера, и по модели Вика—Катковского, в частности, можно найти в [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. *N. Nakanishi.* Progr. Theor. Phys. Suppl. No. 43 (1969), (Общий обзор по уравнению Бете—Солпитера).

2. *D. Lurié, A. Macfarlane, Y. Takahashi.* Phys. Rev. B140 (1965), 1091. (Условие нормировки для B.S. волновой функции).

3. *G.C. Wick.* Phys. Rev. 96 (1954), 1124. (Поворот Вика).

4. *R.E. Cutkosky.* Phys. Rev. 96 (1954), 1135. (Модель Вика—Катковского).

5. *S.S.Schweber.* Annals of Phys. 20 (1962), 61. (Нерелятивистское уравнение Бете—Солпитера).

6. *E.E. Salpeter.* Phys. Rev. 87 (1952), 328. (Уравнение Солпитера).

7. *T. Shibuya. C.E. Wulfman.* Am. Jour. Phys. 33 (1965), 570. (Двумерный атом водорода).

8. *В.А. Фок.* Известия АН СССР, серия физ., 2 (1935), 169. (Скрытая симметрия атома водорода и стереографическая проекция).

9. *M. Levy.* Proc. Royal Society (London) A204 (1950), 145. (Стереографическая проекция для атома водорода).

10. *H.S. Green.* Nuovo Cimento 5 (1957), 866. (Разделение переменных в биполярных координатах).

11. *Г. Бейтмен, А. Эрдейн.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974. (Полиномы Гегенбауэра, сферические функции).

12. *А. Барут, Р. Рончка.* Теория представления групп и ее приложения. М.: Мир, 1980. (Сферические функции).

13. Progr. Theor. Phys. Suppl. No. 95 (1988). (Сборник обзоров по уравнениям Бете—Солпитера и модели Вика—Катковского.)

З.К. Силагадзе

Модель Вика–Катковского: Введение

ИЯФ 92-33

Ответственный за выпуск С.Г. Попов

Работа поступила 21 мая 1992 г.
Подписано в печать 21.05.92 г.
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2,9 печ.л., 2,4 уч.-изд.л.
Тираж 180 экз. Бесплатно. Заказ N 33

Обработано на IBM PC и отпечатано
на ротапринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.