



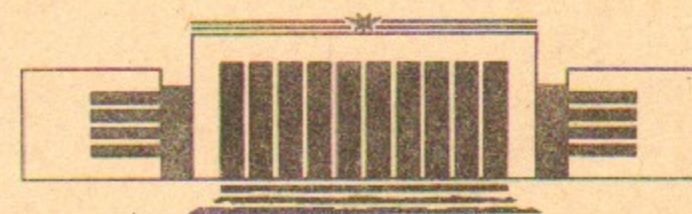
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ  
им. Г.И. Будкера СО РАН

26

В.В. Пархомчук, В.Д. Шильцев

ФРАКТАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ГРУНТА

ИЯФ 92-31



НОВОСИБИРСК

## ФРАКТАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ГРУНТА

Пархомчук В.В. и Шильцев В.Д.

Институт Ядерной Физики СО РАН

630090, Новосибирск, Россия

### АННОТАЦИЯ

В работе обсуждаются общие свойства движения элементов земной поверхности. На основании фрактальной модели грунта делается ряд предсказаний и проводится сравнение с геофизическими данными, а также с результатами наблюдений в местах расположения ускорительных комплексов УНК (Протвино), SLC и PEP (США). Изучение перемещений точек земной поверхности за времена от нескольких секунд до нескольких лет при характерных расстояниях между точками от нескольких метров до нескольких десятков километров необходимо для определения параметров систем корректировки в больших циклических и линейных ускорителях. В работе предложен и обоснован новый взгляд на такие движения как на действие универсальных механизмов типа Броуновского движения в среде нецелой размерности.

## FRactal Model of the Ground

Parkhomchuk V.V. and Shiltsev V.D.

Institute of Nuclear Physics

630090, Novosibirsk, Russia

### ABSTRACT

The most general characteristics of Earth surface elements movements are discussed in the paper. Some predictions of suggested fractal model of the ground are compared with geophysical data and results of observations at UNK, SLC and PEP sites. The studies of surface points movements in range of time intervals from few seconds to few years with characterized distances between two points from meters to dozen kilometers are important for designs of correction systems of circular and linear supercolliders. The work proves new view on such displacements as universal Brownian movements in a media with non-integer dimension.

## ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] нами предложена эмпирическая формула для описания непрерывной диффузии участков земной поверхности разделенных расстоянием  $L$  [метров] за время  $T$  [секунд]:

$$\langle \delta x^2 \rangle = A \cdot T \cdot L \quad (1)$$

где экспериментально установленный коэффициент  $A \approx 10^{-4}$  мкм<sup>2</sup>/м·сек. Эта формула дает правильные порядки величин медленных относительных перемещений в диапазоне  $T$  от десятков секунд до десятка лет и  $L$  от нескольких метров до нескольких километров.

Причинами, вызывающими диффузию являются регулярные процессы такие как изменения температуры грунта, вариации атмосферного давления, лунные приливы и т.д. Перемещения поверхности грунта вызываемые ими весьма значительны — от миллиметров до нескольких десятков сантиметров, диффузия же имеет меньший масштаб и связана с неэластичностью и неоднородностью грунта.

Поскольку коэффициент  $A$  в (1) очень мал, то серьезное проявление диффузионного движения возможно лишь в весьма прецизионных установках, имеющих большие пространственные размеры. К таковым относятся, в частности, большие циклические и линейные ускорители.

В работе [2] приведены оценки на дисперсию разведения пучков в месте встречи линейного коллайдера через время  $\tau$  после коррекции:

$$\langle \Delta x^2 \rangle \approx A \cdot L \cdot \tau \cdot \beta^* / \langle \beta \rangle \quad (2)$$

здесь  $\langle \beta \rangle$  и  $\beta^*$  — среднее по линаку значение  $\beta$ -функции и значение в месте встречи,  $L$  — полная длина ускорителя. Для коллайдера ВЛЭП  $L \approx 2,4 \cdot 10^4$  метров,  $\langle \beta \rangle \approx 10$  м и  $\beta^* \approx 1$  мм формула (2) предсказывает разведение пучков  $\Delta x$  порядка 0,01 микрометра уже через 1 секунду после выключения системы нацеливания. Характерный масштаб, с которым необходимо сравнить полученный результат, задается размером сгустков в месте встречи (вертикальным)  $\sigma_y^* \approx 0,001$  мкм. Сравнение указывает на желательность корректировки через время порядка 0,01 секунды (100 Герц).

Для циклических ускорителей соответствующие оценки искажения замкнутой орбиты в точке  $A$  с значением  $\beta$ -функции  $\beta_A$  приведены нами в

[3]:

$$\langle \Delta X^2 \rangle \approx \frac{A \cdot \Pi \cdot \tau \cdot \beta_a}{4 \cdot \sin^2(\pi \nu) \cdot \langle \beta \rangle} \quad (3)$$

здесь  $\Pi$  – периметр машины,  $2\pi\nu$  – набег фазы бетатронных колебаний на обороте. Взяв в качестве численного примера Сверхпроводящий СуперКоллайдер (SSC) –  $\nu=123.78$ , в месте встречи  $\beta^*=0.5$  м,  $\langle \beta \rangle = 170$  м,  $\Pi=87120$  м – получим через  $\tau=1$  сек  $\Delta X_{1P} \approx 0.12$  мкм. Поскольку размер сгустков в месте встречи  $\sigma^*=5$  мкм, то для предотвращения расхождения встречных сгустков на величину более  $0.1\sigma^*$  полосу системы коррекции следует выбирать не менее 0.1 Герц.

Рассмотренные примеры показывают, во-первых, важность изучения временной и пространственной зависимостей медленных движений, и, во-вторых, через это – освещают новую необычную связь между строительством ускорителей и естествознанием.

Ниже, в Главе 1, на основе простой модели грунта, как набора "отдельностей" разных размеров, будут получены формулы для диффузии типа (1). Сравнению модельных предсказаний с наблюдениями проведено в Главе 2. Глава 3 посвящена расширению модельных представлений на статистику землетрясений. Причины, вызывающие диффузию, обсуждаются в Главе 4.

### 1. ФРАКТАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ГРУНТА

Мы предлагаем в качестве модели грунта рассматривать набор отдельных блоков произвольной формы. Блоки будем различать по их некоторому характерному размеру  $r$ . Разумно предположить, что "в среднем" более крупные блоки залегают глубже, чем мелкие. На рис. 1а графически представлен геологический разрез земли в такой модели. Следует сказать, что качественное понимание того, что, возможно, землю правильнее представлять не как достаточно однородное тело, а как набор взаимодействующих "отдельностей" появилось у геофизиков всего лишь десятилетие назад [4].

Количество  $N(r)$  блоков размером  $r$  в единице объема определяется размерностью  $D$  (в общем случае число не целым):

$$N(r) \propto 1/r^D \quad (4)$$

В случае, когда  $D$  число не целое и отличное от размерности

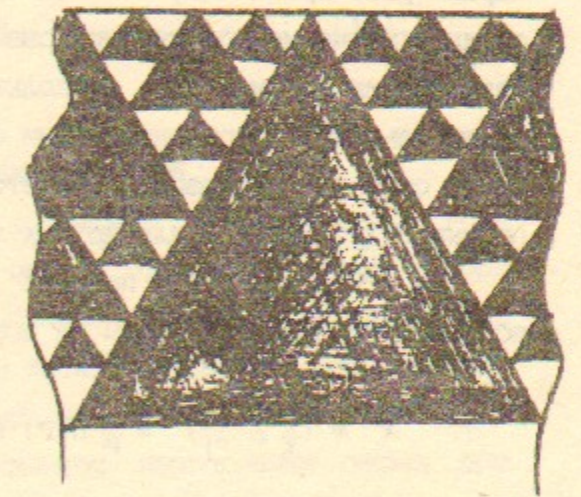
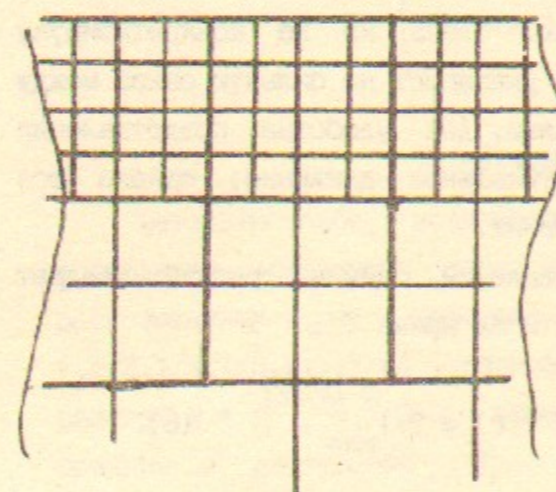
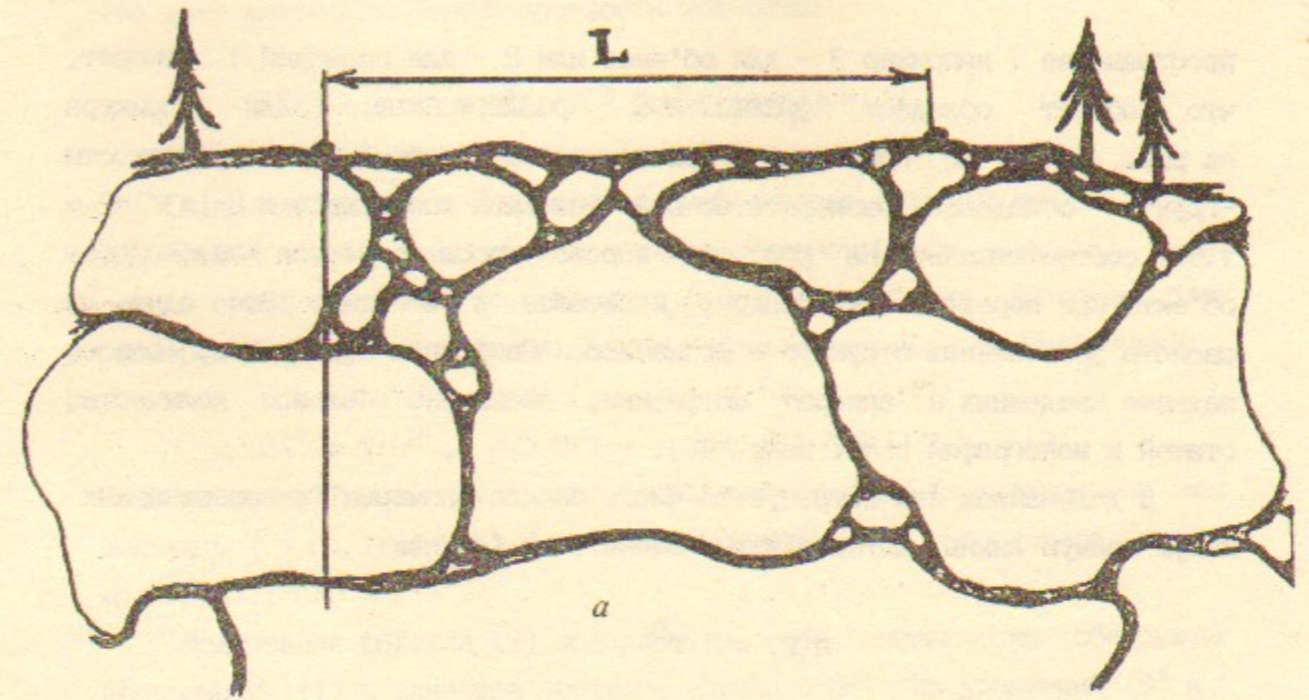


Рис. 1 а) модельное представление грунта, как набора отдельных блоков;  
 б) пример двумерного разбиения с размерностью  $D=2$ ;  
 в) пример фрактального объекта с размерностью  $D=\ln 3 / \ln 2 \approx 1.585..$

пространства (например 3 - для объемов или 2 - для площадей) говорят, что объект обладает *фрактальной размерностью*. Для примера на рис. 1б и 1с приведены геометрические построения полуплоскости -грунты - обладающие размерностью  $D=2$  ("плотная упаковка") и  $D=\ln 3/\ln 2 \approx 1.585$  соответственно. На рис. 1с хорошо просматривается *самоподобие* объекта при переходе от больших масштабов к меньшим. Это одно из свойств фрактальных структур - *фракталов*. Свойствам фракталов, совсем недавно введенных в аппарат математики, посвящено большое количество статей и монографий [ см. напр. 5 ].

В дальнейшем нам потребуется число блоков размером  $\Gamma$ , пересекающих некую прямую линию, которое можно оценить из (4) как:

$$n(\Gamma) \propto 1/\Gamma^{D/3} \quad (5)$$

Последние модельные условия касаются динамики "отдельностей" : будем считать, что каждый из блоков случайным образом перемещается за характерное время  $\tau(\Gamma) \propto \Gamma^\gamma$  на расстояние порядка  $\Delta(\Gamma) \propto \Gamma$ , причем среднее значение перемещения равно нулю. Здесь мы не конкретизируем направления перемещений, поскольку опыт указывает на сильную связь между вертикальными и горизонтальными смещениями. Для удобства представления будем считать, что рассматривается вертикальное движение, однако все оценки будут верны и для других направлений.

На основании этих простых представлений оценим средний квадрат абсолютного смещения точки на поверхности за время  $T$  :

$$\chi^2 = \left( \sum_i \Delta_i \right)^2 \approx \sum_i n(\Gamma) \cdot \Delta^2(\Gamma) \cdot T/\tau(\Gamma) \propto T \cdot 1_{\max}^{3-D/3-\gamma} \quad (6)$$

Здесь в первых скобках написана сумма по всем блокам  $i$ , перемещение которых влияет на смещение точки поверхности ( их число можно оценить через  $n(\Gamma)$  ) и сумма по всем моментам, когда блоки перемещались  $\approx T/\tau$ .

Максимальный линейный размер области воздействующей на данную точку поверхности ( см. рис. 1а ) - "глубина" которую необходимо брать при интегрировании, определяется максимальным размером блоков, которые передвинутся за заданное время.  $1_{\max} \propto T^{1/\gamma}$ , и следовательно :

$$\chi^2 \propto T^{1+(3-D/3-\gamma)/\gamma} \quad (7)$$

что дает для спектральной плотности мощности:

$$P(f) \approx \chi^2 \cdot T \propto T^\alpha = f^{-\alpha}, \quad \alpha = 2 + (3-D/3-\gamma)/\gamma. \quad (8)$$

Аналогичным образом оценим средний квадрат *относительного* смещен двух точек поверхности, разделенных расстоянием  $L$  ( см. рис. 1а ). В этом случае сумма сходна с (6), только  $1_{\max} \approx L$ , поскольку движение блок размером больше  $L$  не дает вклада в относительное перемещение точек :

$$\Delta \chi^2 \propto T \cdot L^\beta, \quad \beta = 3-D/3-\gamma \quad \text{при } T > \tau(L) \quad (9)$$

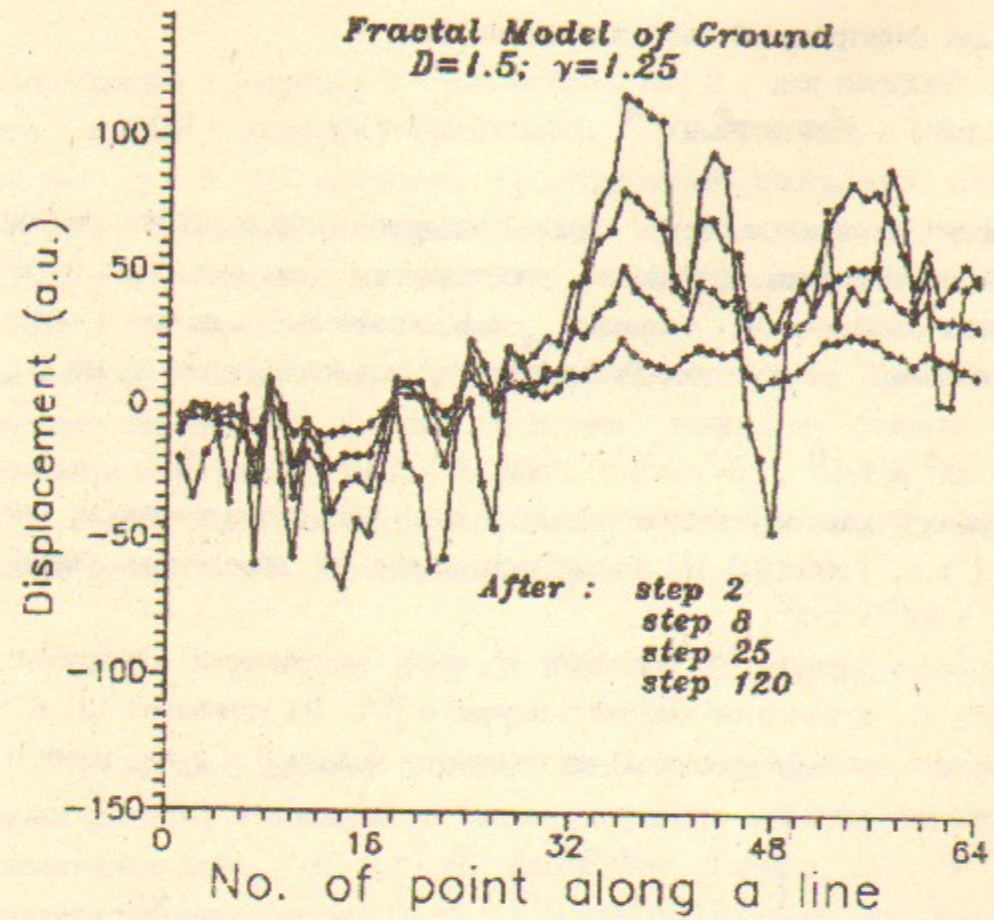
Если же время  $T$  мало и успевают передвинуться лишь блоки размером меньше  $L$  ( т.е.  $T \ll \tau(L)$  ), то относительное и абсолютное смещен сравнимы :  $\Delta \chi^2 \approx 2 \cdot \chi^2$ .

Полученная формула (9) содержит в себе эмпирически обнаруженную зависимость (1) в качестве частного случая с  $\beta=1$ . Из уравнений (8) и (9) можно получить систему уравнений на параметры модели  $D$  и  $\gamma$  из известных  $\beta$  и  $\alpha$  :

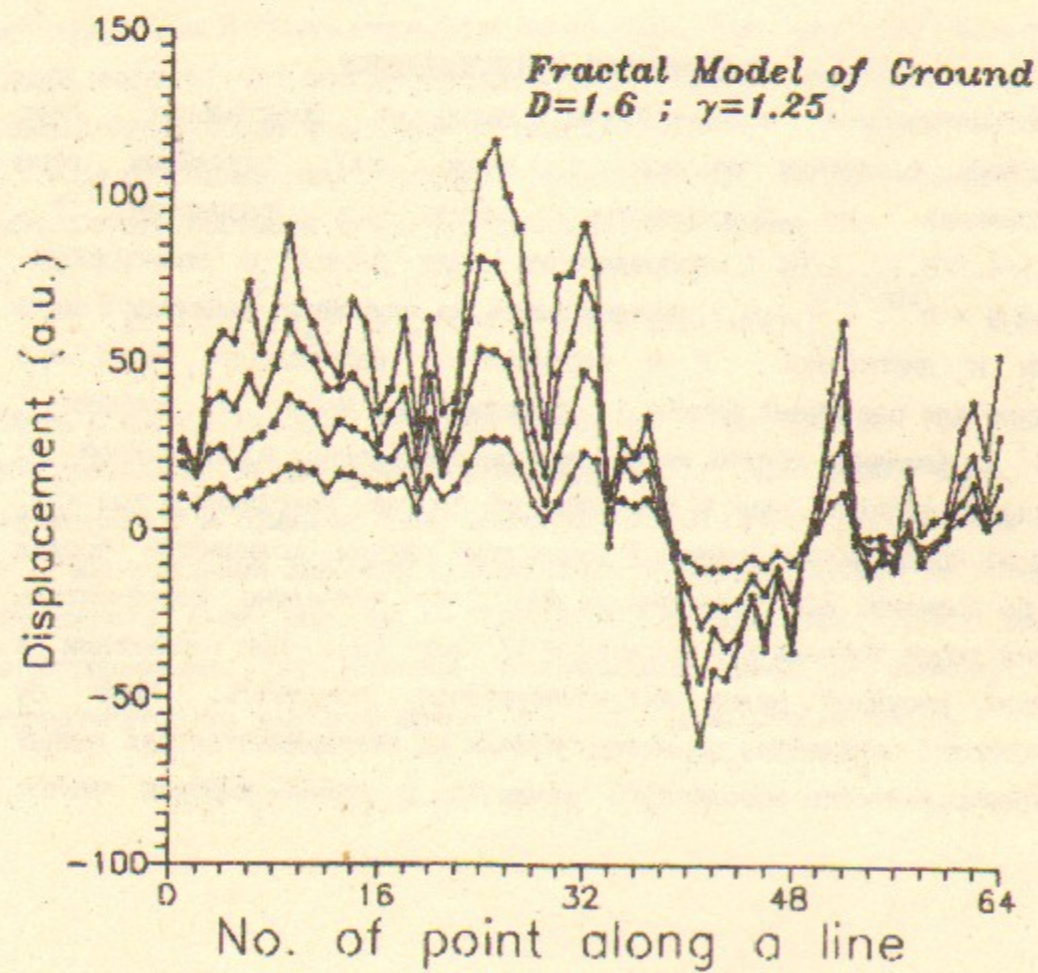
$$\begin{cases} \gamma + D/3 = 3 - \beta \\ \gamma \cdot (\alpha - 1) + D/3 = 3 \end{cases} \quad (10).$$

## 2. СРАВНЕНИЕ С НАБЛЮДЕНИЯМИ

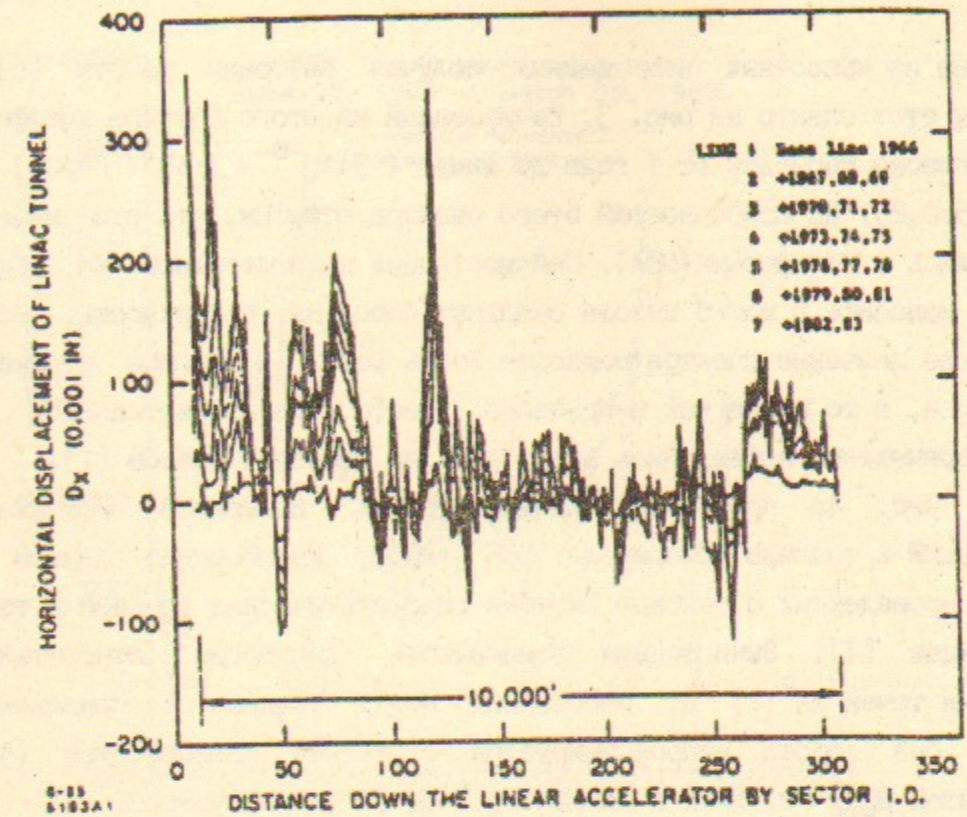
Математическое моделирование двумерных фрактальных грун проводилось следующим образом : около 4000 случайным образом расположенных в пространстве блоков с размерами  $\Gamma$   $1, 1/2, 1/4, 1/8, \dots, 1/64$  ( распределение числа блоков в зависимости размера  $N \propto \Gamma^{-D}$ ,  $D \leq 2.0$  ) передвигались на случайную величину с нулевым средним и дисперсией  $\Gamma$  в вертикальном направлении через время  $\tau$  (  $64 \cdot \Gamma$  ). Движение каждой из 64 равномерно распределенных вдоль прямой то поверхности являлось суммой передвижений блоков, находящихся под ней. рис. 2 а) представлено движение точек при разном количестве прошедших шагов по времени. Для сравнения на рис. 2 б) приведено горизонтальное движение точек тоннеля SLC в течении 17 лет [8]. При сравнении данных указанных рисунков видна их качественная похожесть. Ниже будут количественно определены параметры модели из экспериментальных данных. Спектр мощности абсолютного движения в самом широком частотном



a



8



b

Рис. 2 а) фрактальная модель двумерного грунта - движения 64 точек поверхности при параметрах модели  $D=1.5$  и  $\gamma=1.25$ .  
 б) горизонтальные перемещения 3 км тоннеля SLAC (SLAC) в течении 17 лет [8].

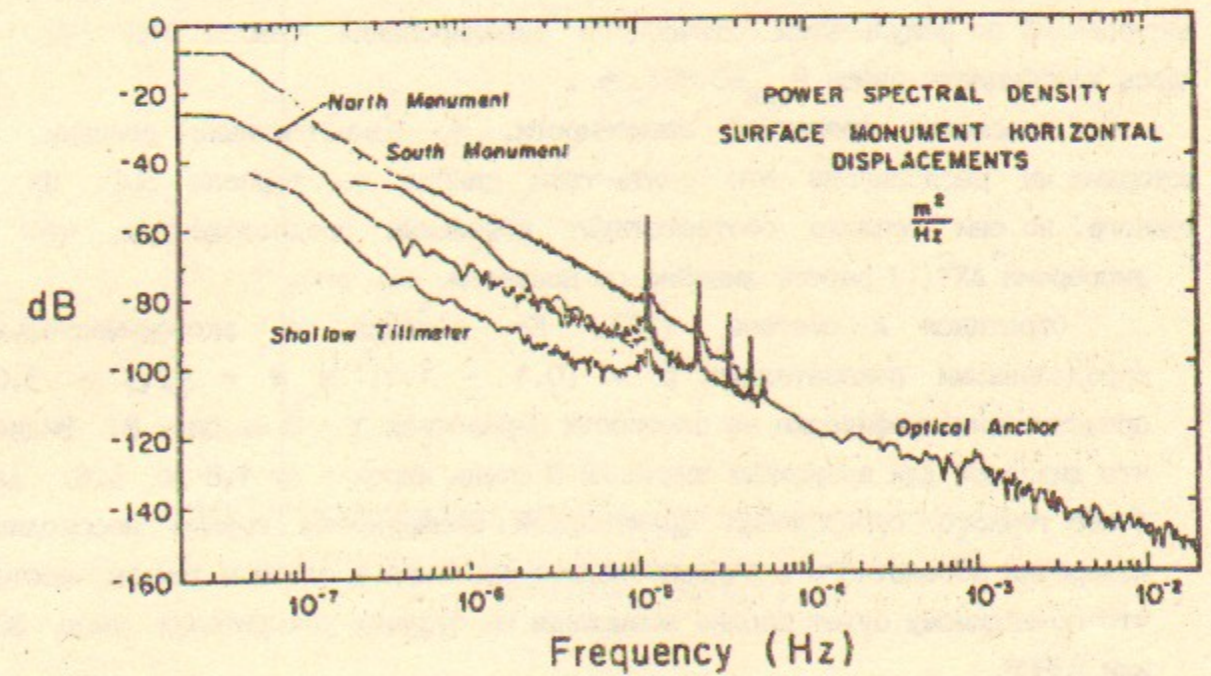


Рис. 3 Спектр мощности абсолютного (относительно далеких неподвижных наблюдателей) движения земли из [6].

9

диапазоне из известных нам данных получен авторами работы [6]. Мы приводим этот спектр на рис. 3. Вычисленный из этого спектра коэффициент  $\beta$  в диапазоне периодов от 1 года до минут ( $3 \cdot 10^{-8}$  -  $3 \cdot 10^{-3}$  Герц) равен  $\beta = 2.75 \pm 0.25$ . Из особенностей этого спектра отметим, что эти измерения проводились в Калифорнии (США). Сейсмостанция располагалась на обширном жестком монолите в месте выхода скальных пород на поверхность. Поэтому абсолютное значение спектра мощности очень мало - годовое перемещение 50 микрон, в то время как в Протвино (место строительства УНК ИФВЭ) такие перемещения наблюдались всего лишь за несколько часов [1].

На рис. 4а приведены данные точных измерений вертикальных перемещений в тоннеле ускорителя PEP (SLAC, Калифорния) длиной 2200 метров, проведенных с помощью системы гидростатических уровней в течении 20 месяцев [7]. Вычисленная зависимость дисперсии относительного положения точек  $\Delta X^2(l)$  от расстояния между точками  $l$  приведена на рис. 4б; она хорошо аппроксимируется степенной зависимостью (9) с показателем  $\beta_{PEP} = 0.7 \pm 0.2$  в диапазоне  $l$  от 20 до 400 метров.

Другой пример - 17-летние измерения в тоннеле SLC (SLAC, Калифорния) [8]. Данные по ним были вручную оцифрованы по рисунку и также обработаны. Полученный график функции  $\Delta X^2(l)$  приведен на рис. 5; при его аппроксимации получено значение  $\beta_{SLC} = 0.6 \pm 0.2$  в диапазоне 60 - 1300 метров.

И, наконец, на рис. 6 представлен соответствующий график, построенный по результатам оптического нивелирования трассы УНК [9]. Здесь коэффициент равен  $\beta_{УНК} = 0.85 \pm 0.25$ .

Что касается временной зависимости, то единственными данными, которыми мы располагаем это опять-таки данные по тоннелю SLC. Их немного, но они неплохо соответствуют модельным предположениям, что дисперсия  $\Delta X^2(l)$  растет линейно со временем - см. рис. 7.

Обратимся к системе (10). Ее решения с экспериментально определенными показателями  $\beta = [0.4 - 1.1]$  и  $\alpha = [2.5 - 3.0]$  представлены графически на плоскости параметров  $\gamma - D$  на рис. 8. Видно, что диапазон для возможных значений  $D$  очень широк - от 1.8 до 5.6. Для более точного определения фрактальной размерности грунта необходимы измерения абсолютного и относительного движения в одном и том же месте, что по-видимому будет вполне возможным на будущих ускорителях типа SSC или ВЛЭПП.

С другой стороны, если принять в качестве разумного ограничения,

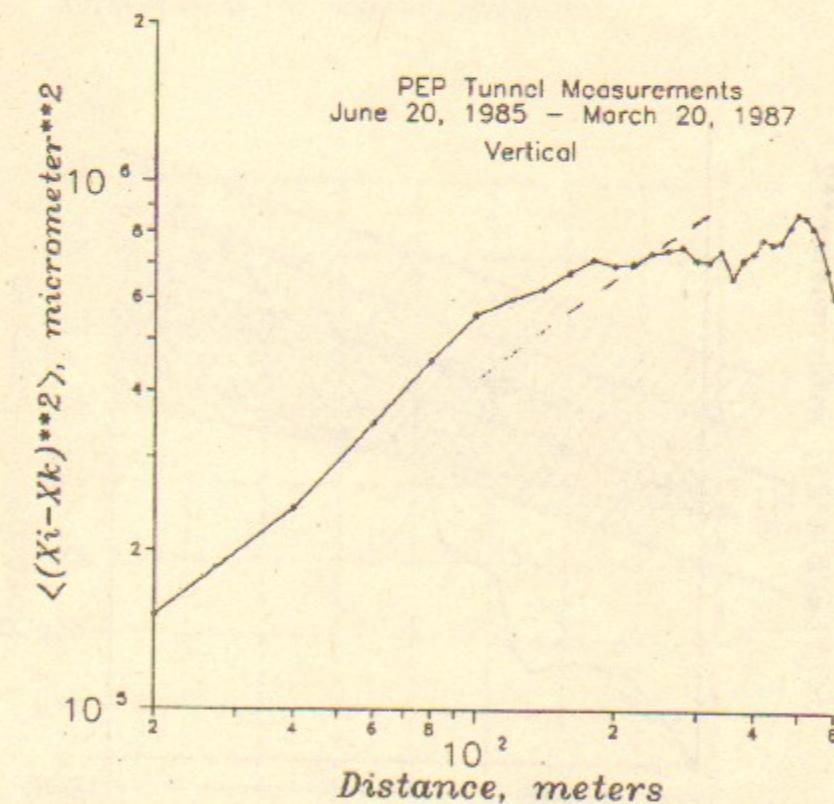
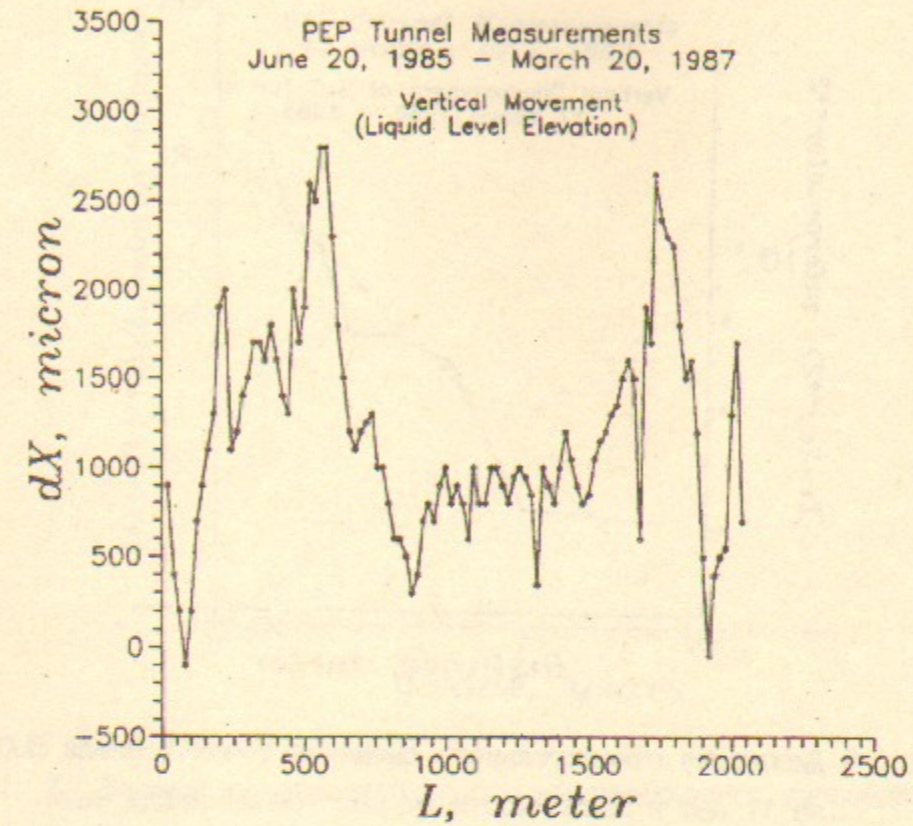


Рис. 4 а) измерения вертикального смещения вдоль тоннеля PEP за 20 месяцев [7];

б) дисперсия относительного смещения точек тоннеля PEP в зависимости от расстояния между ними.

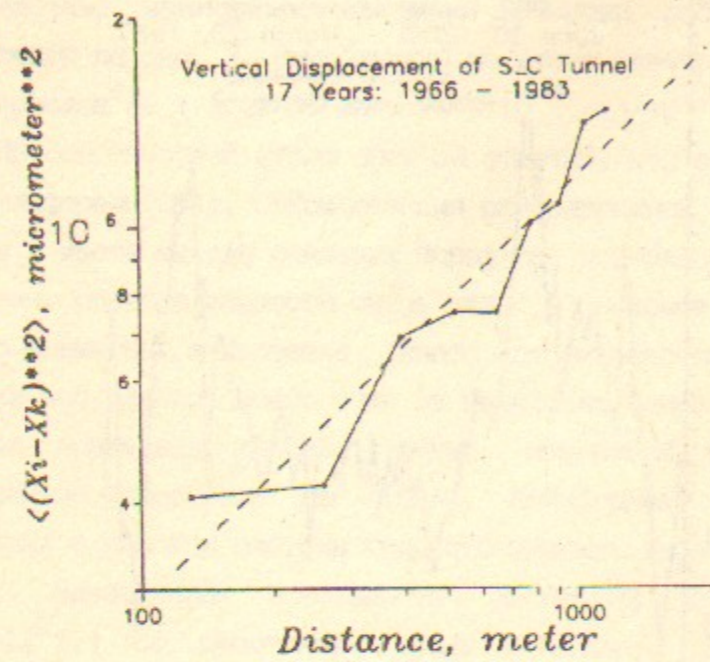


Рис. 5 Дисперсия относительного смещения точек тоннеля SLC за 17 лет в зависимости от расстояния между ними.

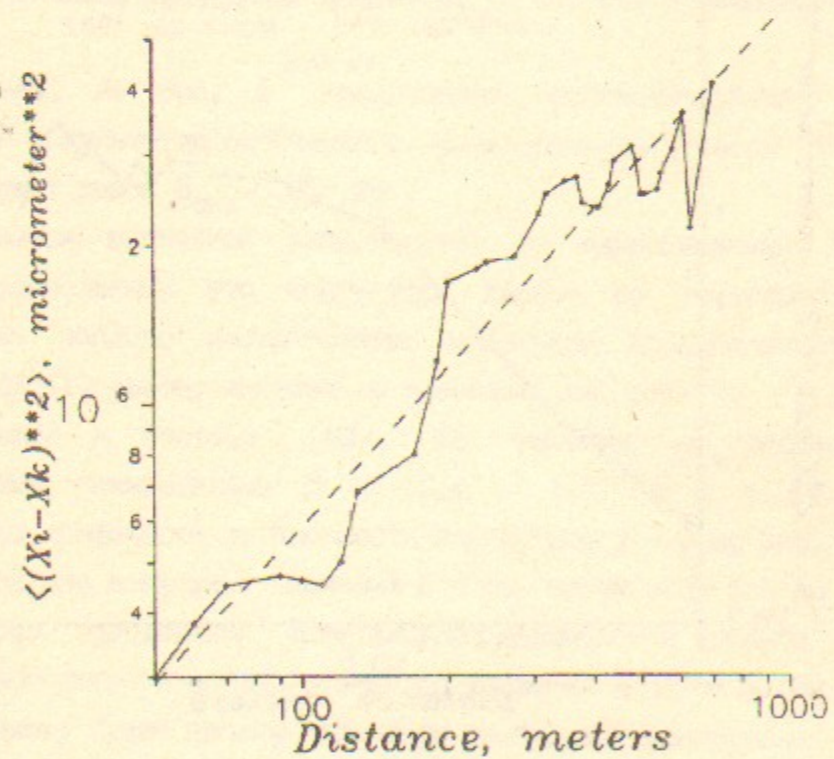


Рис. 6 Дисперсия относительного смещения точек поверхности в районе строительства УНК за 2 года в зависимости от расстояния между ними [9].

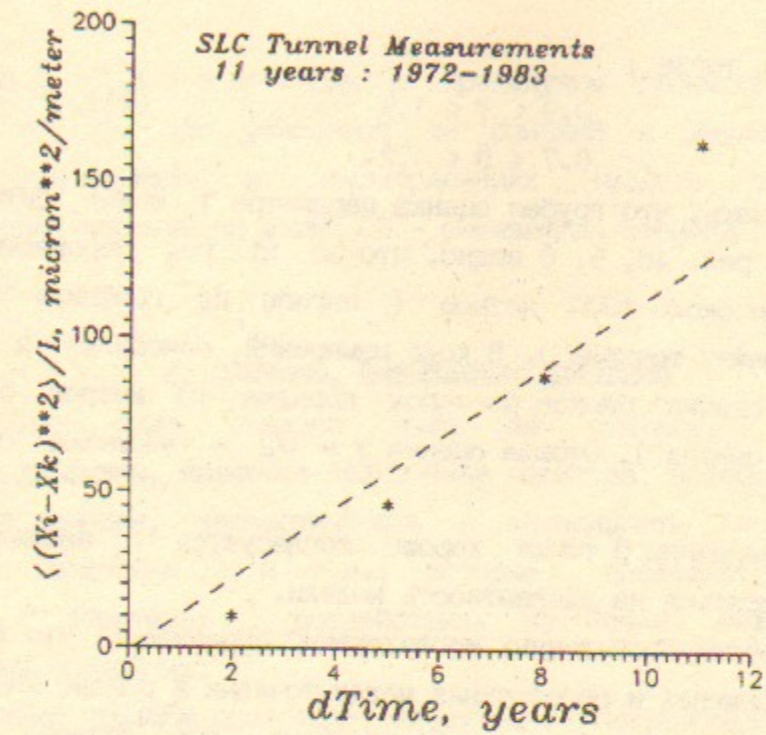


Рис. 7 Дисперсия относительного вертикального смещения точек тоннеля SLC нормированная на расстояния между ними, в зависимости от времени измерения.

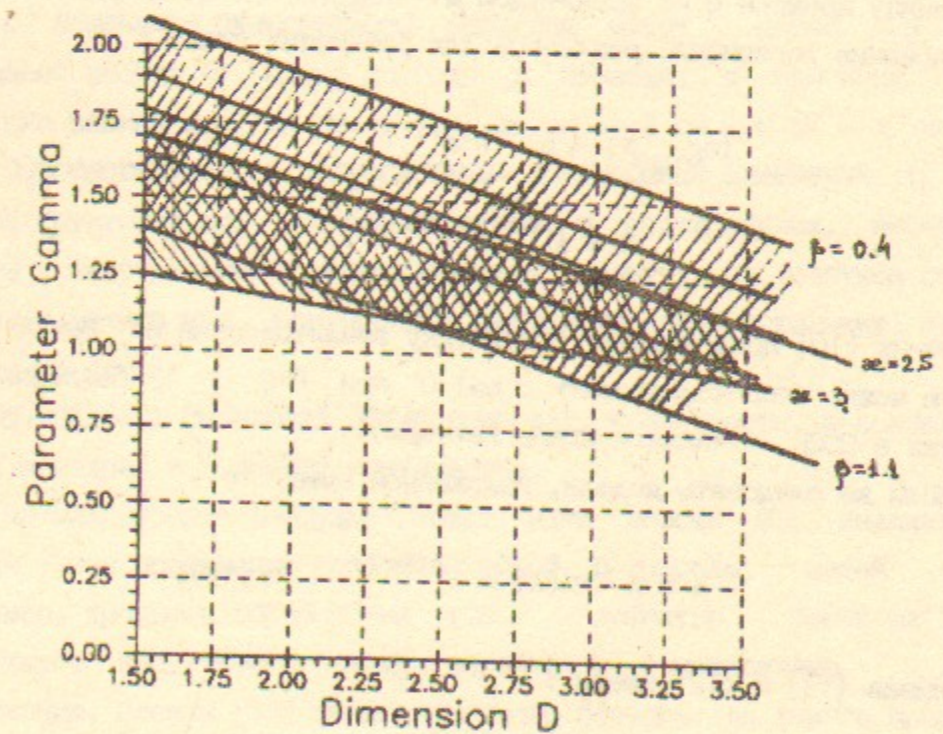


Рис. 8 Решение системы уравнений (10) для имеющихся экспериментальных данных на плоскости параметров модели D и  $\gamma$ .

что  $2 < D \leq 3$ , тогда :

$$0.9 < \gamma < 1.5 \quad (11)$$

$$0.7 < \beta < 1.2.$$

Надо сказать, что грубая оценка параметра  $\gamma$  может быть проведена напрямую - из рис. 4б, 5, 6 видно, что за  $\approx 1$  год переместиться могут блоки размером около 1000 метров (загибы на графиках при больших расстояниях между точками). В ходе измерений, описанных в работе [1] наблюдались "скачки" блоков размером порядка 10 метров за несколько часов ( $\approx 10^4$  секунд). Отсюда оценка  $\gamma \approx 3/2$  - неплохое совпадение с (11).

Оценка величины  $\beta$  также хорошо согласуется с наблюдениями, что позволяет надеяться на адекватность модели.

В результате проведенных исследований выяснилось, что дисперсия при одинаковых временах и расстояниях между точками в районе УНК в несколько раз выше, чем в Калифорнии. По-видимому, это связано с различным составом грунтов в разных местах - почти "болото" в Протвино и более жесткий известняк в месте расположения SLAC.

### 3. ЗЕМЛЯТРАСЕНИЯ - ДИФФУЗИОННЫЙ ПРОЦЕСС ?

Геофизиками давно установлен закон, связывающий число землетрясений  $N$  в единицу времени с их магнитудой  $M = \log_p(A)$  ( $A$  - амплитуда колебаний,  $P$  - основание логарифма, различное для различных шкал) :

$$\log_{10}(N) = a - b \cdot M \quad (12)$$

или

$$N \propto A^{-b \cdot \log_p 10}$$

Справочник [10] представляет статистику землетрясений на Земле в год, которую можно аппроксимировать с  $b \approx 1.0$  при  $P=2$  (12-балльная шкала, принятая в СССР, близкая к шкале Рихтера).

Если же следовать модели, изложенной выше, то :

$$N \propto A^{-D} / \tau(A) \propto A^{-(D+\gamma)} \quad (13).$$

Сравнивая (13) и (12) имеем :

$$D + \gamma = b \cdot \log_p 10 \approx 3.3 \quad (14).$$

Выбрав  $\gamma = 1.4$  (в согласии с предыдущим рассмотрением (11)), получим  $D = 1.9$ , что указывает на близкий к двумерному характер объектов, участвующих в землетрясениях (модель тонкой хрупкой потрескавшейся корочки на магме,  $D$  - показатель степени растрескивания).

### 4. ПРИЧИНЫ, ВЫЗЫВАЮЩИЕ ДИФФУЗИЮ

Как уже было сказано выше мы считаем, что причиной, вызывающей диффузию, являются нелинейные свойства вещества, такие как гистерезисные явления, неэластичность (зависимость "модуля Юнга" от величины смещения) и т.п., которые проявляются при больших регулярных (обратимых) воздействиях на Землю. Можно перечислить важнейшие из последних:

а) *Лунные приливы* происходят ежедневно с амплитудой на суше до 50 см;

б) *Изменения температуры* годовые, сезонные, суточные и вплоть до десятков минут приводят к тепловому расширению грунта во всех направлениях на величины порядка  $\alpha \cdot \Delta T$  (при коэффициенте теплового расширения  $\alpha \approx 10^{-4}$ ,  $\Delta T \approx 30^\circ \text{C}$  и тепловом скин-слое около 3 метров (для годовых вариаций) это составит около сантиметра);

в) *Изменения атмосферного давления* имеют место в широком диапазоне частот от секунд до года и приводят к прогибам земли [1] примерно равным  $4 \cdot \Delta P$  [мм.рт.ст.], т.е. около 4 см при  $\Delta P \approx 10$  мм.рт.ст.;

д) *Естественные и искусственные ландшафтные изменения* (изменения уровня грунтовых вод, постройка плотин и водохранилищ, экскавационные работы и выветривание) имеют диапазон амплитуд от десятков сантиметров до сотен метров при длительности воздействия от нескольких месяцев до миллионов лет;

е) *Тепловые выделения Земли* приводят, в частности, к конвекционным токам в недрах и к дрейфу континентов.

На микроуровне диффузия может идти вообще без видимых внешних причин - как проявление статистической природы вещей - таковы например, процессы образования т.н. "дефектов Френкеля", когда существует вероятность атому перейти в междоузлие и создать дислокацию. Оценки [11] энергетического барьера для такого процесса из формулы (1) - более чем макроскопической! - с коэффициентом  $A = 10^{-4}$



$\text{мкм}^2/\text{м}\cdot\text{сек}$  дают  $\Delta E \approx 1.2 \text{ eV}$ , что удивительно (подозрительно?) соответствует реальности.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Новый подход к прогнозированию медленной диффузии участков поверхности Земли, как к случайному блужданию в объектах фрактальной размерности, представляется весьма многообещающим методологически.

Существующие разрозненные экспериментальные данные неплохо укладываются в такую модель. Прецизионные сейсмологические измерения на протяженных ускорителях позволят точнее определить модельные параметры.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баглаков Б.А., Лебедев П.К., Пархомчук В.В., Серый А.А., Слетцов А.И., Шильцев В.Д. Изучение корреляционных и мощностных характеристик колебаний земной поверхности в районе комплекса УНК, Препринт ИЯФ 91-15, Новосибирск, 1991.  
*Baklakov B.A. et al. Investigation of Seismic Vibration for Linear Collider VLEPP Design, to be published in Particle Accelerator.*
2. Шильцев В.Д. Проблемы сохранения эмиттанса пучка в линейном коллайдере ВЛЭПП, Препринт ИЯФ 91-86.
3. Lebedev V.A., Parkhotchuk V.V., Shiltsev V.D., Skrinisky A.N. Suppression of Emittance Growth Caused by Mechanical Vibrations of Magnetic Elements in Presence of Beam-Beam Effects in the SSC, Preprint INP 91-120, Novosibirsk 1991.
4. Пономарев В.С. "Путь парадоксов", Природа, 10, 1991, с.72.
5. Федер Е. Фракталы, Москва, "Мир", 1991.
6. Wyatt P. Displacement of Surface Monuments: Horizontal Motion, *Journ. of Geophys. Research*, vol. 87, No B2, pp. 979-989, February 1982.
7. Ptscher G.E. at *Workshop on Vibrational Control and Dynamic Alignment Issues at the SSC*, February 11-14, 1992.
8. Ptscher G.E. Ground Motion and Its Effects in Accelerator Design, SLAC-PUB-3392 Rev, July 1985.

В.В. Пархомчук, В.Д. Шильцев

Фрактальная модель грунта

ИЯФ 92-31

Ответственный за выпуск С.Г. Попов

---

Работа поступила 15 мая 1992 г.

Подписано в печать 18 мая 1992 г.

Формат бумаги 60×90 1/16. Объем 1,4 печ.л., 1,1 уч.-изд.л.

Тираж 170 экз. Бесплатно. Заказ N 31.

---

Обработано на IBM PC и отпечатано на ротапинтере ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН, Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.