

41



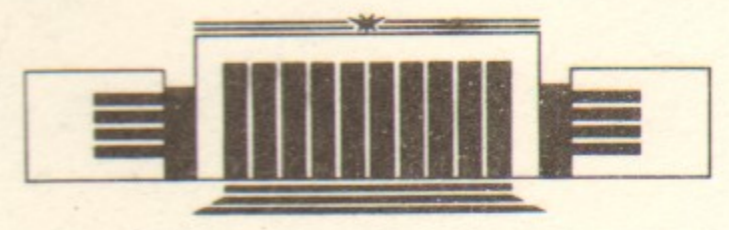
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

А.Г. Грозин

**СИСТЕМА REDUCE  
В ФИЗИКЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ.  
РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ**

*отзыв от 28.08.88*

**ПРЕПРИНТ 91-46**



НОВОСИБИРСК

Система REDUCE  
в физике элементарных частиц  
Радиационные поправки

А. Г. Грозин

Институт ядерной физики  
630090, Новосибирск, СССР

Аннотация

Настоящий препринт представляет собой заключительную часть пособия по применению языка аналитических вычислений REDUCE в физике элементарных частиц. Он содержит примеры вычисления однопетлевых радиационных поправок в квантовой электродинамике и хромодинамике.

REDUCE in elementary  
particle physics  
Radiative corrections

A. G. Grozin  
Institute of Nuclear Physics  
630090, Novosibirsk, USSR

Abstract

This preprint is the last part of the problem book on using REDUCE in elementary particle physics. It contains examples of one-loop radiative corrections calculations in quantum electrodynamics and chromodynamics.

§1. Размерная регуляризация и перенормировка

Этот препринт посвящён применению языка аналитических вычислений REDUCE [1-2] в физике элементарных частиц. Он завершает серию [3-5]. Здесь мы рассмотрим методы вычисления однопетлевых поправок. Изложение основано на размерной регуляризации [6-9].

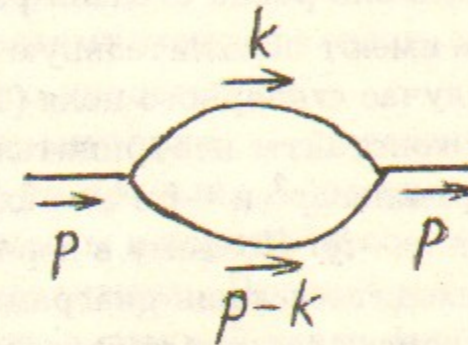


Рис. 1. Однопетлевая поправка к пропагатору в теории  $\varphi^3$

Расходимости. Рассмотрим теорию скалярного поля [3] (2.16)

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial_\mu\varphi) - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{f}{3!}\varphi^3 - \frac{g}{4!}\varphi^4 - \frac{h}{5!}\varphi^5. \quad (1)$$

Попытаемся вычислить поправку порядка  $f^2$  к пропагатору (рис. 1)  $iG = iG_0 + iG_0(-iM)iG_0$ ,

$$-iM(p) = \frac{f^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} G(p-k)G(k). \quad (2)$$

Этот интеграл логарифмически расходится при больших  $k$ , т. к. в числителе и знаменателе стоит четвёртая степень  $k$ .

Если константа взаимодействия имеет размерность отрицательной степени массы (как  $h$ ), то, чем выше порядок теории возмущений по этому взаимодействию, тем больше степень расходимости интегралов по импульсам. Такие взаимодействия называются неперенормируемыми. Если константа взаимодействия безразмерна (как  $g$ ), то степень расходимости не зависит от порядка теории возмущений—это точно перенормируемые взаимодействия. Наконец, если константа взаимодействия имеет размерность положительной степени массы (как  $f$ ), то взаимодействие называется сверхперенормируемым; в этом случае степень расходимости уменьшается с ростом порядка теории возмущений, и имеется лишь несколько расходящихся диаграмм.

В перенормируемой теории могут расходиться только те диаграммы, которые являются поправками к вершинам, константы которых в лагранжиане имеют неотрицательную размерность. Действительно, если константы взаимодействия в диаграмме безразмерны, то эта размерность даётся импульсным интегралом. При больших импульсах массой в пропагаторах можно пренебречь, и она равна степени расходимости.

Поскольку поля и производные имеют положительную размерность, таких вершин лишь несколько. В случае скалярного поля (1) только первые 4 члена в лагранжиане имеют константы неотрицательной размерности. Они дают двуххвостые вершины  $ip^2$  и  $-im^2$ , трёххвостую вершину  $-if$  и четырёххвостую вершину  $-ig$ . Поэтому в перенормируемой теории скалярного поля могут расходиться лишь диаграммы с 2, 3 и 4 хвостами. Строго говоря, к этому списку следует добавить линейный по  $\varphi$  член, дающий однохвостую вершину; обычно им можно не интересоваться.

Обозначим диаграмму с 2 хвостами (без внешних пропагаторов)  $-iM(p^2)$ . Её можно разложить в ряд  $M(p^2) = M(0) + M'(0)p^2 + \dots$ . Эти члены являются поправками к вершинам  $-im^2$ ,  $ip^2$  и вершинам с большим числом производных. Если диаграмма содержит только вершины с безразмерной константой  $g$ , то  $M(0)$  расходится квадратично, а  $M'(0)$  — логарифмически; все остальные члены ряда сходятся. Если диаграмма содержит 2 вершины  $f$ , то  $M(0)$  расходится логарифмически, а  $M(p^2) - M(0)$  сходится (например, (2)). Диаграммы с 4 и более вершинами  $f$  сходятся; нечётное число таких вершин невозможно в диаграммах с чётным числом хвостов.

Диаграмма с 3 внешними хвостами содержит как минимум одну вершину  $f$  (вообще, нечётное их число). При нулевых внешних импульсах она является поправкой к  $f$ , и расходится логарифмически. Остальные члены разложения по импульсам сходятся. Точно так же обстоит дело для диаграмм с 4 хвостами, не содержащих вершин  $f$ .

Таким образом, в перенормируемой теории существует несколько типов расходящихся диаграмм (в смысле числа внешних хвостов). В каждом из них расходимости сосредоточены в нескольких первых членах разложения по внешним импульсам. Типы расходимостей соответствуют членам лагранжиана, у которых константы имеют неотрицательную размерность. Симметрии теории могут значительно ограничивать набор таких членов. Например, если теория скалярного поля должна быть симметрична относительно  $\varphi \rightarrow -\varphi$ , то член  $\varphi^3$  запрещён.

Если же в теории есть перенормируемое взаимодействие (напри-

мер,  $h\varphi^5$ ), то диаграмма любого типа станет расходящейся в достаточно высоком порядке по этому взаимодействию.

Наконец, напомним, что все эти рассуждения основаны на том, что в пропагаторе при больших импульсах можно пренебречь массой. Это не так для массивных векторных полей [3] (3.3). И хотя можно построить фермион-бозонные, 3- и 4-бозонные взаимодействия с неотрицательными размерностями констант связи, эти теории перенормируемы из-за несубявующего пропагатора.

**Перенормировка.** Появление расходимостей свидетельствует, что мы чего-то не учли. А именно, мы забыли, что с учетом поправок физические массы и заряды не совпадают с параметрами  $m, f, g, \dots$ , входящими в лагранжиан. Правильной постановкой задачи является вычисление амплитуд реакций через физические измеримые массы и заряды. Разумеется, в этих выражениях всё должно быть конечно, чтобы теория имела смысл.

Процедура выражения амплитуд через физические массы и заряды путём исключения затравочных параметров лагранжиана называется перенормировкой. Она физически необходима вне всякой связи с проблемой расходимостей, и должна применяться всегда, даже тогда, когда никаких расходимостей нет, как например в теории электрон-фононного взаимодействия в физике твёрдого тела.

Начнём с лагранжиана скалярного поля

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_0)(\partial_\mu \varphi_0) - \frac{m_0^2}{2}\varphi_0^2 - \frac{f_0}{3!}\varphi_0^3 - \frac{g_0}{4!}\varphi_0^4, \quad (3)$$

где величины с индексом 0 называются перенормированными, затравочными или голыми. Разобьём каждый член на 2 части:

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial_\mu \varphi) - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{f}{3!}\varphi^3 - \frac{g}{4!}\varphi^4 + \frac{\delta}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial_\mu \varphi) - \frac{\delta m^2}{2}\varphi^2 - \frac{\delta f}{3!}\varphi^3 - \frac{\delta g}{4!}\varphi^4. \quad (4)$$

Здесь перенормированное поле  $\varphi$  связано с  $\varphi_0$  соотношением  $\varphi_0 = Z_\varphi^{1/2}\varphi$ ,  $Z_\varphi = 1 + \delta$ ,  $m_0^2 Z_\varphi = m^2 + \delta m^2$ ,  $f_0 Z_\varphi^{3/2} = f + \delta f$ ,  $g_0 Z_\varphi^2 = g + \delta g$ . В первой строке лагранжиана (4) стоят физическая (перенормированная) масса  $m$  и заряды  $f, g$ , а во второй — так называемые контрчлены.

Невозмущённым лагранжианом считаются первые 2 члена. Он даёт пропагатор с перенормированной массой и вычетом 1. Следующие 2

члена дают вершины с перенормированными зарядами. Вершины, порождаемые контрчленами, служат для сокращения расходимостей. Их константы строятся в виде рядов по перенормированным зарядам.

В древесном приближении расходимостей и контрчленов нет. В однопетлевом приближении появляются несколько расходящихся диаграмм, и вместе с ними вершины, порождаемые однопетлевыми контрчленами. Они подбираются так, чтобы расходимости сократились. Так, однопетлевой контрчлен  $\delta m^2$  сокращает расходимость интеграла (2). В двухпетлевых диаграммах могут быть расходящиеся однопетлевые поддиаграммы. Их расходимости сокращаются вершинами, порождёнными однопетлевыми контрчленами. После этого остаются собственно двухпетлевые расходимости, для сокращения которых вводятся двухпетлевые контрчлены. То же повторяется в высших приближениях.

Условие сокращения расходимостей определяет контрчлены с точностью до конечных слагаемых. Они фиксируются точным определением физических масс и зарядов. Эти определения (схемы перенормировки) могут быть различными.

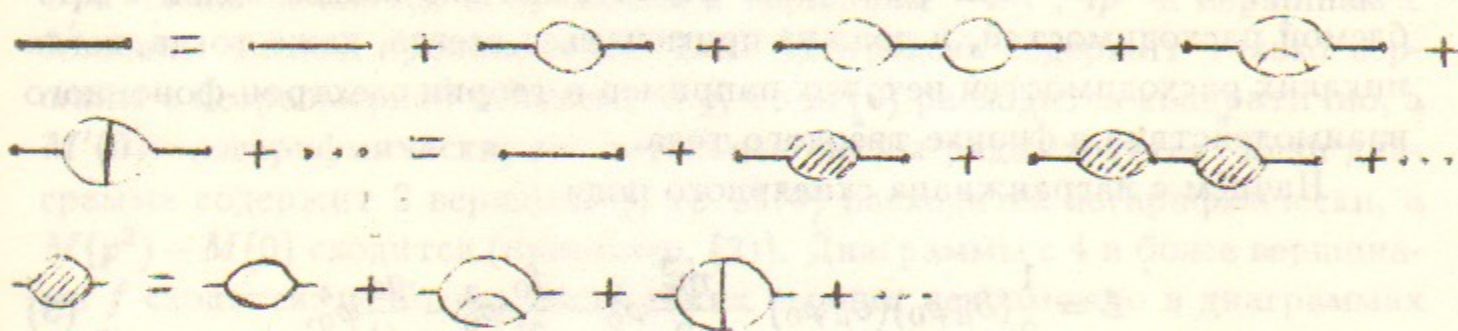


Рис. 2. Структура диаграмм для пропагатора

Наиболее естественный способ определения массы и нормировки поля  $\varphi$ —это требование отсутствия поправок к пропагатору на массовой поверхности. Диаграммы для пропагатора имеют общую структуру рис. 2, где  $-iM(p)$ —сумма однократно-неприводимых собственно-энергетических диаграмм, т. е. диаграмм с двумя хвостами (не включая внешних пропагаторов), которые нельзя разрезать на две несвязанные части по одной линии поля  $\varphi$ :

$$iG = iG_0 + iG_0(-iM)iG_0 + iG_0(-iM)iG_0(-iM)iG_0 + \dots$$

или

$$G = \frac{1}{p^2 - m^2 - M(p)}$$

Разложим  $M(p)$  вблизи  $p^2 = m^2$ :  $M(p) = A + B(p^2 - m^2) + M'(p)$ . Тогда полюс пропагатора будет находиться в точке  $p^2 = m^2 + A$ . Определяя физическую массу как положение этого полюса, мы должны находить контрчлен  $\delta m^2$  из уравнения  $A = 0$ . При таком условии пропагатор вблизи массовой поверхности имеет вид

$$G = \frac{Z}{p^2 - m^2 - ZM'(p^2)}, \quad Z = \frac{1}{1 - B}.$$

Тогда внешним линиям диаграммы должна сопоставляться волновая функция с нормировочным множителем  $Z^{1/2}$ . Естественным определением нормировки физического поля является  $Z = 1$ , так что контрчлен  $\delta$  находится из уравнения  $B = 0$ . Подчеркнем, что перенормировка на массовой поверхности—не единственно возможная схема, например, в квантовой хромодинамике она неприменима.

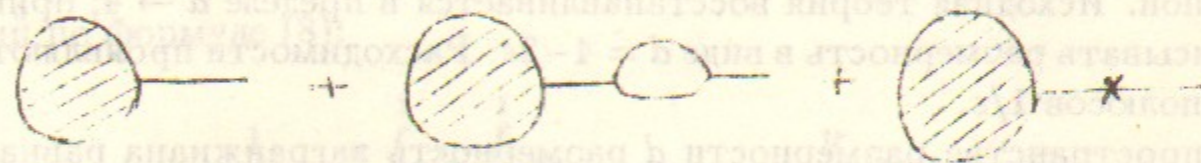


Рис. 3. Собственно-энергетическая поправка ко внешней линии

В физической схеме перенормировки собственно-энергетические вставки во внешние линии диаграммы (рис. 3) дают нулевой вклад. При  $B \neq 1$  возникает неоднозначность: член  $B(p^2 - m^2)$ , применённый к волновой функции на массовой поверхности, даёт 0; если же его умножить на  $G_0(p) = 1/(p^2 - m^2)$ , получится конечный вклад  $B$ . Правильный результат в однопетлевом приближении равен  $B/2$ , что соответствует умножению волновой функции на  $Z^{1/2}$ . То есть в однопетлевом приближении (в схемах, отличных от физической) собственно-энергетические поправки к внешним линиям нужно учитывать с множителем  $1/2$ .

Физические заряды  $f, g$  можно определять разными способами, например, можно потребовать, чтобы некоторые амплитуды при каких-нибудь фиксированных значениях импульсов точно, без поправок, давались формулами древесного приближения.

Регуляризация. Для того, чтобы иметь возможность вычислять расходящиеся диаграммы и определять контрчлены, нужно сначала ввести регуляризацию—видоизменить теорию так, чтобы расходимостей

не было. В пределе снятия регуляризации восстанавливается исходная теория. Желательно, чтобы регуляризация сохраняла как можно больше симметрий теории. Симметрии ограничивают возможные формы контрчленов.

Простейшая регуляризация—обрезание интегралов по импульсам. Она неудобна для вычислений. Часто применяется регуляризация Паули-Вилларса. Она неудобна в калибровочных теориях, т. к. нарушает калибровочную инвариантность. Решёточная регуляризация, в которой пространство-время заменяется дискретной решёткой, часто применяется для численного моделирования. Её можно сделать калибровочно-инвариантным образом, но она нарушает лоренц-инвариантность.

Наиболее удобна для вычислений в теории возмущений размерная регуляризация, не нарушающая калибровочную и лоренц-инвариантность. В этой схеме выражения для диаграмм записываются в пространстве произвольной размерности  $d$ . Она должна входить в виде буквенного параметра; после этого можно считать  $d$  произвольной комплексной величиной. Исходная теория восстанавливается в пределе  $d \rightarrow 4$ ; принято записывать размерность в виде  $d = 4 - 2\epsilon$ . Расходимости проявляются в виде полюсов  $1/\epsilon$ .

В пространстве размерности  $d$  размерность лагранжиана равна  $d$ , т. к. действие безразмерно. Из кинетического члена лагранжиана (3) видно, что размерность скалярного поля  $\varphi_0$  равна  $d/2 - 1 = 1 - \epsilon$ . Поэтому размерность  $f_0$  равна  $1 + \epsilon$ , а  $g_0 = 2\epsilon$ . Определим перенормированные величины так, чтобы они имели обычные размерности:  $\varphi = \bar{\mu}^\epsilon Z^{-1/2} \varphi_0$ ,  $f = \bar{\mu}^{-\epsilon} Z_f^{-1} f_0$ ,  $g = \bar{\mu}^{-2\epsilon} Z_g^{-1} g_0$ ,  $m^2 = Z_m^{-1} m_0^2$ , где  $\bar{\mu}$ —параметр размерности массы. Тогда

$$L = \bar{\mu}^{-2\epsilon} \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi) (\partial_\mu \varphi) - \frac{m^2}{2} \varphi^2 - \frac{f}{3!} \varphi^3 - \frac{g}{4!} \varphi^4 + \frac{\delta}{2} (\partial_\mu \varphi) (\partial_\mu \varphi) - \frac{\delta_m m^2}{2} \varphi^2 - \frac{\delta_f f}{3!} \varphi^3 - \frac{\delta_g g}{4!} \varphi^4 \right], \quad (5)$$

где  $Z = 1 + \delta$ ,  $Z_m Z = 1 + \delta_m$ ,  $Z_f Z^{3/2} = 1 + \delta_f$ ,  $Z_g Z^2 = 1 + \delta_g$ .

При вычислении величин с целыми размерностями возникают интегралы по

$$\left( \frac{dk}{2\pi} \right)_d = \bar{\mu}^{4-d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d}.$$

Рассмотрим вычисление однопетлевых диаграмм в размерной регуляризации на примере интеграла (2). В  $d$ -мерном пространстве он имеет

вид

$$M(p) = i \frac{f^2}{2} \int \left( \frac{dk}{2\pi} \right)_d \frac{1}{[(k+p)^2 - m^2][k^2 - m^2]}. \quad (6)$$

Фейнмановская параметризация. Вычисление начинается с объединения знаменателей по формуле Фейнмана

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{[xa + (1-x)b]^2}, \quad (7)$$

которая проверяется прямым вычислением на REDUCE. Дифференцируя по  $a$  и  $b$ , из неё можно получить

$$\frac{1}{a^n b^m} = \frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(n)\Gamma(m)} \int_0^1 \frac{x^{n-1} (1-x)^{m-1} dx}{[xa + (1-x)b]^{n+m}}. \quad (8)$$

В случае 3 знаменателей, объединяем 2 по формуле (7) и добавляем третий по формуле (8):

$$\begin{aligned} \frac{1}{abc} &= 2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{y}{[xya + (1-x)yb + (1-y)c]^3} \\ &= 2 \int \frac{\delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1) dx_1 dx_2 dx_3}{[x_1 a + x_2 b + x_3 c]^3}. \end{aligned}$$

Продолжая в том же духе, получим

$$\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} = \Gamma(n) \int \frac{\delta(x_1 + x_2 + \dots + x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n}{[x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n]^n}. \quad (9)$$

Отсюда дифференцированием получается

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_n^{m_n}} &= \frac{\Gamma(m_1 + m_2 + \dots + m_n)}{\Gamma(m_1) \Gamma(m_2) \dots \Gamma(m_n)} \\ &\times \int \frac{x_1^{m_1-1} x_2^{m_2-1} \dots x_n^{m_n-1} \delta(x_1 + x_2 + \dots + x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n}{[x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n]^{m_1+m_2+\dots+m_n}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Применяя формулу (7) к интегралу (6), получим

$$M(p) = i \frac{f^2}{2} \int dx \left( \frac{dk}{2\pi} \right)_d \frac{1}{[k^2 - 2xpk + xp^2 - m^2]^2}.$$

Дальше мы выделим полный квадрат и сдвинем переменную интегрирования:

$$M(p) = i \frac{f^2}{2} \int dx \left( \frac{dk'}{2\pi} \right)_d \frac{1}{[k'^2 + x(1-x)p^2 - m^2]^2} \quad (11)$$

**Вычисление интегралов в  $d$  измерениях.** Однопетлевые интегралы после объединения знаменателей приводятся к виду

$$I_{nm} = \int \left( \frac{dk}{2\pi} \right)_d \frac{(k^2)^m}{(k^2 - a^2)^n} \quad (12)$$

Знаменатель в действительности имеет вид  $k^2 - m^2 + i0$ , и его полюса в комплексной плоскости  $k_0$  расположены в точках  $\pm(\sqrt{k^2 + a^2} - i0)$ . Не задевая полюсов, можно повернуть контур интегрирования:  $k_0 = i\tilde{k}_0$ ,  $\tilde{k}_0$  меняется от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Это соответствует переходу в евклидово пространство:  $k^2 = -\tilde{k}^2$ ,  $\tilde{k}^2 = \tilde{k}_0^2 + \tilde{k}^2$ . Вычисление петлевых интегралов всегда удобно производить в евклидовом пространстве:

$$I_{nm} = i(-1)^{n+m} \int \left( \frac{d\tilde{k}}{2\pi} \right)_d \frac{(\tilde{k}^2)^m}{(\tilde{k}^2 + a^2)^n} \quad (13)$$

Теперь перейдем к сферическим координатам в  $d$ -мерном евклидовом пространстве. Вектор  $\tilde{k}_\mu$  разлагается на составляющую  $\tilde{k}_d = \tilde{k} \cos \vartheta_1$  и ортогональную составляющую длины  $\tilde{k} \sin \vartheta_1$  в  $(d-1)$ -мерном подпространстве. Продолжая этот процесс, получим

$$\tilde{k}_d = \tilde{k} \cos \vartheta_1,$$

$$\tilde{k}_{d-1} = \tilde{k} \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2,$$

$$\tilde{k}_{d-2} = \tilde{k} \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3,$$

...

$$\tilde{k}_2 = \tilde{k} \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{d-2} \cos \vartheta_{d-1},$$

$$\tilde{k}_1 = \tilde{k} \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{d-2} \sin \vartheta_{d-1}.$$

Углы  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{d-2}$  меняются от 0 до  $\pi$ ; последний угол  $\vartheta_{d-1}$  — от 0 до  $2\pi$ . Отсюда элемент телесного угла

$$d\Omega_d = d\vartheta_1 \cdot \sin \vartheta_1 d\vartheta_2 \cdot \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 d\vartheta_3 \cdot \dots \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{d-2} d\vartheta_{d-1}.$$

Полный телесный угол

$$\Omega_d = 2 \cdot \int_0^\pi \sin^{d-2} \vartheta_1 d\vartheta_1 \cdot \int_0^\pi \sin^{d-3} \vartheta_2 d\vartheta_2 \cdot \dots \int_0^\pi \sin \vartheta_{d-1} d\vartheta_{d-1}.$$

Интеграл

$$\int_0^\pi \sin^n \vartheta d\vartheta = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma((n+2)/2)}$$

вычисляется заменой  $x = \sin^2 \vartheta$ . Отсюда

$$\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \quad (14)$$

Интеграл (13) в сферических координатах имеет вид

$$I_{nm} = i(-1)^{n+m} \frac{2\pi^{d/2} \mu^{4-d}}{(2\pi)^d \Gamma(d/2)} \int_0^\infty \frac{\tilde{k}^{2m} \tilde{k}^{d-1} d\tilde{k}}{(\tilde{k}^2 + a^2)^n}$$

Пачиная с этого места не обязательно считать  $d$  целым числом. Все интегралы понимаются как аналитическое продолжение из той области  $d$ , где они сходятся. Из интеграла выносятся  $(a^2)^{d/2+m-n}$ . Учитывая

$$\int_0^\infty \frac{x^m dx}{(x+1)^n} = \frac{\Gamma(n-m-1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(n)}$$

(что получается заменой  $y = 1/(x+1)$ ), окончательно получим

$$I_{nm} = \frac{i(-1)^{n+m} (a^2)^{d/2+m-n} (\mu^2)^{2-d/2} \Gamma(d/2+m)\Gamma(-d/2+n-m)}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(n)\Gamma(d/2)} \quad (15)$$

Как мы сейчас увидим, ответы при  $\epsilon \rightarrow 0$  упрощаются, если положить

$$\mu^2 = \frac{\mu^2 e^\gamma}{4\pi},$$

где  $\gamma$  — константа Эйлера. Тогда

$$I_{nm} = \frac{i(-1)^{n+m} (a^2)^{2+m-n}}{(4\pi)^2 (n-1)!} \left( \frac{a^2}{\mu^2} \right)^{-\epsilon} e^{\gamma\epsilon} \Gamma(n-m-2+\epsilon) \frac{\Gamma(2+m-\epsilon)}{\Gamma(2-\epsilon)} \quad (16)$$

При  $a^2 = 0$  интеграл (16) сходится в случае  $d > n - m$ , и равен 0. Отсюда следует, что для любого  $n$

$$\int \left( \frac{dk}{2\pi} \right)_d (k^2)^{\pm n} = 0. \quad (17)$$

```

% ВЫЧИСЛЕНИЕ ОДНОПЕТЛЕВЫХ ИНТЕГРАЛОВ
D:=4-2*EE$VECDIM D; % EE - эпсион
OPERATOR GO; % GO(N) = Гамма (N*EE)
% Гамма функция
PROCEDURE G1(A);
BEGIN SCALAR B; B:=SUB(EE=0,A);
RETURN
IF FIXP(B)
THEN
IF B>1 THEN (A-1)*G1(A-1)
ELSE IF B<1 THEN G1(A+1)/A
ELSE IF A=1 THEN 1
ELSE GO((A-B)/EE)
ELSE PI**(1/2)*2**(1-2*A)*G1(2*A)/G1(A+1/2)
END;
OPERATOR EX; % экспонента
FOR ALL X,Y LET EX(X)*EX(Y)=EX(X+Y); LET EX(0)=1;
% Однопетлевой интеграл
PROCEDURE LOOP(N,M,A);
I*(-1)**(N+M)*A**(2+M-N-EE)/(4*PI)**2*EX(GAM*EE)
*G1(2+M-EE)/G1(2-EE)*G1(N-M-2+EE)/G1(N);
% Примеры
I10:=LOOP(1,0,A); I20:=LOOP(2,0,A); I30:=LOOP(3,0,A);
I10 := -----
          EE  2
        16*A  *PI *EE*(EE - 1)
          EX(GAM*EE)*GO(1)*I
I20 := -----
          EE  2
        16*A  *PI *EE
          EX(GAM*EE)*GO(1)*I
I30 := -----
          EE  2
        32*A  *A*PI

```

```

I31:=LOOP(3,1,A);
          EX(GAM*EE)*GO(1)*I*(EE - 2)
I31 := -----
          EE  2
        32*A  *PI *EE

```

Как правило, нас интересует предел  $\epsilon \rightarrow 0$ . В нём

$$\Gamma(1 + \epsilon) = e^{-\gamma\epsilon} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \zeta(n)}{n} \epsilon^n,$$

где

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}.$$

— функция Римана. Её значения при чётных аргументах выражаются через степени  $\pi$ :

$$\begin{aligned} \zeta(2n) &= \frac{(2\pi)^2}{3!} \zeta(2n-2) - \frac{(2\pi)^4}{5!} \zeta(2n-4) + \dots \\ &+ (-1)^n \frac{(2\pi)^{2n-2}}{(2n-1)!} \zeta(2) + (-1)^{n+1} \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n+1)!} \frac{2n-1}{4} \\ &= 2 \left[ \frac{(2\pi)^2}{4!} \zeta(2n-2) - \frac{(2\pi)^4}{6!} \zeta(2n-4) + \dots \right. \\ &\left. + (-1)^n \frac{(2\pi)^{2n-2}}{(2n)!} \zeta(2) + (-1)^{n+1} \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n+2)!} \frac{n}{2} \right]. \end{aligned}$$

```
OPERATOR Z; % Функция Римана
```

```

FOR ALL N SUCH THAT FIXP(N/2) LET Z(N)=
BEGIN SCALAR S,U,M; S:=0; U:=-1; M:=2;
WHILE M<N DO <<U:=-U*(2*PI)**2/(M*(M+1)); S:=S+U*Z(N-M); M:=M+2>>;
U:=-U*(2*PI)**2/(M*(M+1)); S:=S+U*(N-1)/4; RETURN S
END;
Z(2); Z(4); Z(6);
          2
          PI
          -----
          6

```

4  
PI  
-----  
90  
6  
PI  
-----  
945

Эта реализация неэффективна при больших  $n$ , но нам реально понадобится только  $\zeta(2)$ .

Приведём процедуры для разложения по  $\epsilon$ :

```
PROCEDURE LNG(X); % LN(GAMMA(1+X))
BEGIN SCALAR S,U,N;S:=-GAM*X;U:=-X;N:=2;
  WHILE (U:=-U*X) NEQ 0 DO <<S:=S+Z(N)/N*U;N:=N+1>>;
  RETURN S
END;

PROCEDURE EXO(X); % EXP(X)
BEGIN SCALAR S,U,N;S:=1;U:=1;N:=1;
  WHILE (U:=U*X/N) NEQ 0 DO <<S:=S+U;N:=N+1>>;
  RETURN S
END;

PROCEDURE BINOM(X,N); % (1+X)**N
BEGIN SCALAR S,U,I,J;S:=1;U:=1;I:=N;J:=1;
  WHILE (U:=U*X*I/J) NEQ 0 DO <<S:=S+U;I:=I-1;J:=J+1>>;
  RETURN S
END;

PROCEDURE EXE(X); % разложение по EE
BEGIN SCALAR XN,XD,N;XN:=NUM(X);XD:=DEN(X);N:=0;
  WHILE SUB(EE=0,XD)=0 DO <<XD:=XD/EE;N:=N+1>>;
  WEIGHT EE=1;WTLEVEL N;
  FOR ALL X!! LET GO(X!!)=EX(LNG(X!!*EE));
  FOR ALL X!! LET X!!**EE=EX(LOG(X!!)*EE);
  FOR ALL X!!,N!! LET X!!*(N!!*EE)=EX(N!!*LOG(X!!)*EE);
  XN:=XN;XD:=XD;
  FOR ALL X!! CLEAR GO(X!!);
  FOR ALL X!! CLEAR X!!**EE;
  FOR ALL X!!,N!! CLEAR X!!*(N!!*EE);
  FOR ALL X!! LET EX(X!!)=EXO(X!!);XN:=XN;XD:=XD;
  FOR ALL X!! CLEAR EX(X!!);CLEAR EE;
  XN:=XN/SUB(EE=0,XD);XD:=XD/SUB(EE=0,XD);
```

```
WEIGHT EE=1;XN:=XN*BINOM(XD-1,-1);
CLEAR EE;RETURN XN/EE**N
END;
```

% Примеры

```
EXE(I10);EXE(I20);EXE(I30);EXE(I31);
```

$$\frac{A \cdot I \cdot (\log(A) \cdot EE - EE - 1)}{16 \cdot \pi^2 \cdot EE^2} - \frac{I \cdot (\log(A) \cdot EE - 1)}{16 \cdot \pi^2 \cdot EE^2} - \frac{I}{32 \cdot A \cdot \pi^2} - \frac{I \cdot (2 \cdot \log(A) \cdot EE + EE - 2)}{32 \cdot \pi^2 \cdot EE^2}$$

В частности, массовый оператор (11) с учетом (16) приобретает вид

$$M(p^2) = -\frac{f^2}{2(4\pi)^2} \int_0^1 \left( \frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m^2 - x(1-x)p^2}{\mu^2} \right) dx$$

Вычисляя интеграл (при  $p^2 < 0$ ) на REDUCEe и добавляя вклад контрчленов, получим ( $x = -p^2/4m^2$ )

$$M(p^2) = -\frac{f^2}{2(4\pi)^2} \left( \frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m^2}{\mu^2} - \sqrt{1+1/x} \ln \frac{\sqrt{1+1/x}+1}{\sqrt{1+1/x}-1} + 2 \right) + \delta m^2 - \delta(p^2 - m^2) \quad (18)$$

При  $p^2 > 0$  функция  $M(p^2)$  получается аналитическим продолжением; она имеет разрез при  $p^2 > 4m^2$ . Приравнивая нулю её значение и производную в точке  $p^2 = m^2$ , получим контрчлены в физической схеме

$$\delta m^2 = \frac{f^2}{2(4\pi)^2} \left( \frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m^2}{\mu^2} - \frac{\pi}{\sqrt{3}} + 2 \right),$$

$$\delta = \frac{f^2}{2(4\pi)^2 m^2} \left( \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} - 1 \right).$$



Второй из них конечен, в соответствии с изложенными размерными соотношениями.

**Тензоры и  $\gamma$  матрицы в  $d$  измерениях.** Тензорная алгебра в  $d$ -мерном пространстве определяется соотношением

$$\delta_{\mu\mu} = d. \quad (19)$$

Определим проектор  $A_{\mu_1 \dots \mu_n; \nu_1 \dots \nu_n}$  как тензор  $\delta_{\mu_1 \nu_1} \dots \delta_{\mu_n \nu_n}$ , антисимметризованный по  $\mu_1 \dots \mu_n$  (или  $\nu_1 \dots \nu_n$ ). Его след равен числу независимых антисимметричных тензоров с  $n$  индексами в  $d$ -мерном пространстве (см. рис. 4, где проектор обозначен волнистой линией)

$$A_{\mu_1 \dots \mu_n; \mu_1 \dots \mu_n} = \binom{d}{n} = \frac{1}{n!} d(d-1) \dots (d-n+1). \quad (20)$$

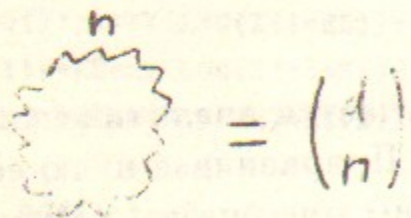
При целых  $d$  проектор, а с ним и его след, равен 0 при  $n > d$ . В пространстве нецелой размерности существуют ненулевые антисимметричные тензоры со сколь угодно большим числом индексов, т. к. след (20) отличен от 0 при всех  $n$ .

Алгебру матриц Дирака, задаваемую соотношением

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = \delta_{\mu\nu}, \quad (21)$$

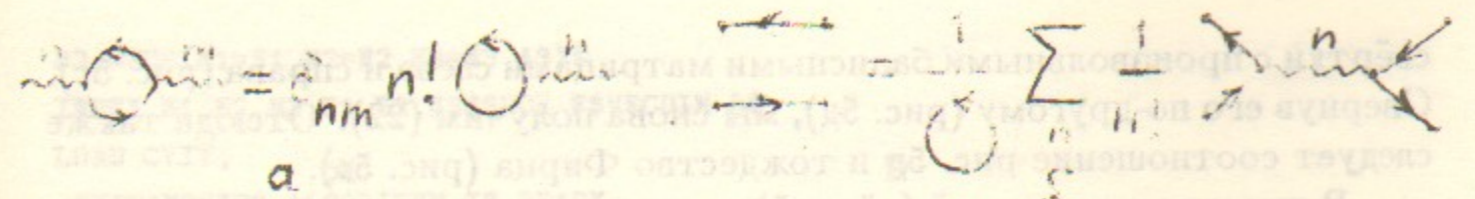
можно определить в пространстве любой чётной размерности  $d$ . Любое произведение  $\gamma$ -матриц вследствие (21) сводится к виду, в котором каждая из  $d$  матриц  $\gamma_\mu$  входит 0 или 1 раз. Поэтому число независимых матриц равно  $2^d$ , а их размерность  $2^{d/2}$ :

$$\text{Sp } 1 = 2^{d/2}. \quad (22)$$

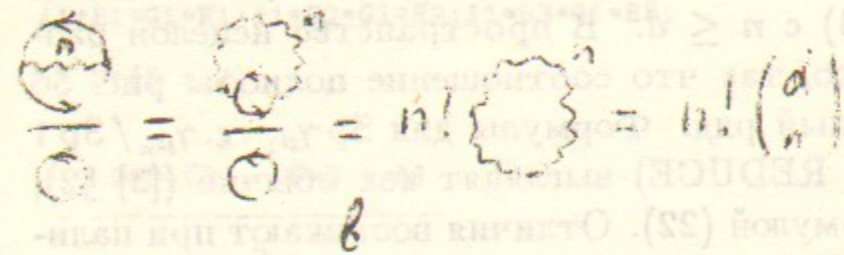


$$\text{Wavy line with } n \text{ external lines} = \binom{d}{n}$$

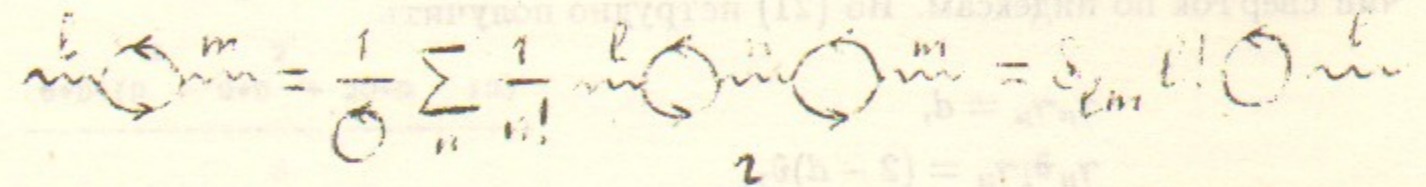
Рис. 4. След проектора-антисимметризатора с  $n$  индексами



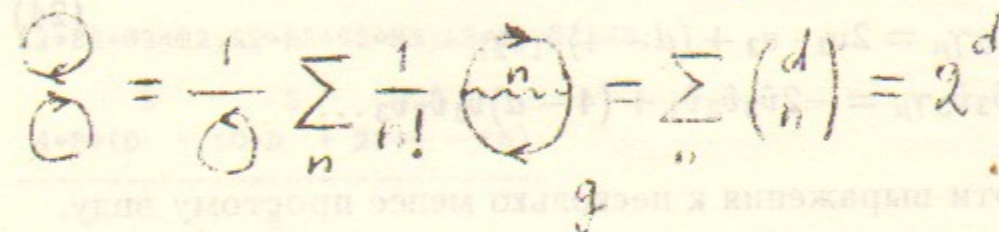
$$\text{Circle with } n \text{ external lines and wavy line} = \delta_{nm} n! \text{ Circle with } n \text{ external lines} = \frac{1}{n!} \sum_n \frac{1}{n!} \text{ Circle with } n \text{ external lines and wavy line}$$



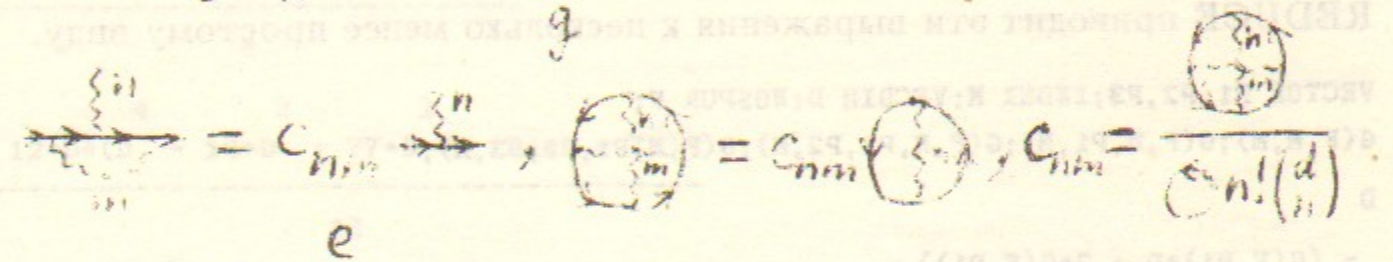
$$\text{Circle with } n \text{ external lines and wavy line} = n! \text{ Circle with } n \text{ external lines and wavy line} = n! \binom{d}{n}$$



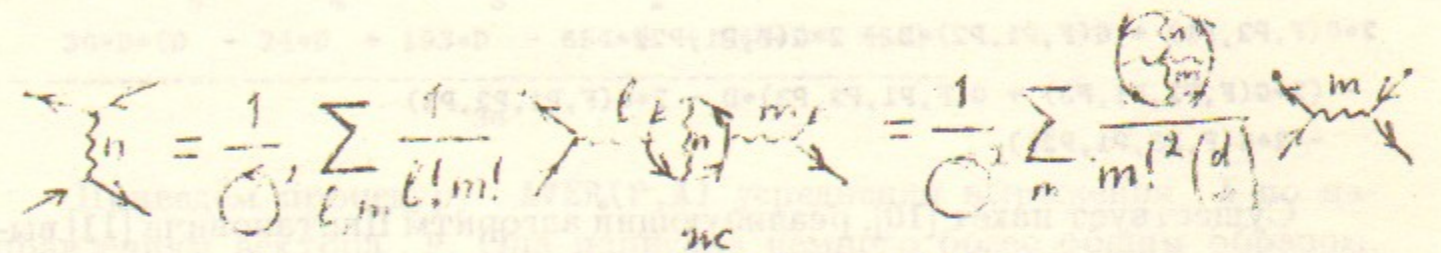
$$\text{Circle with } n \text{ external lines and wavy line} = \frac{1}{n!} \sum_n \frac{1}{n!} \text{ Circle with } n \text{ external lines and wavy line} = \delta_{lm} l! \text{ Circle with } n \text{ external lines and wavy line}$$



$$\text{Circle with } n \text{ external lines and wavy line} = \frac{1}{n!} \sum_n \frac{1}{n!} \text{ Circle with } n \text{ external lines and wavy line} = \sum_n \binom{d}{n} \text{ Circle with } n \text{ external lines and wavy line} = 2^d$$



$$\text{Circle with } n \text{ external lines and wavy line} = C_{n,m} \text{ Circle with } n \text{ external lines and wavy line} = C_{nm} \text{ Circle with } n \text{ external lines and wavy line} = \frac{C_{n,m} C_{n,m}}{C_{n,m}} \text{ Circle with } n \text{ external lines and wavy line}$$



$$\text{Circle with } n \text{ external lines and wavy line} = \frac{1}{n!} \sum_{l,m} \frac{1}{l! m!} \text{ Circle with } n \text{ external lines and wavy line} = \frac{1}{n!} \sum_m \frac{C_{n,m}}{m!} \text{ Circle with } n \text{ external lines and wavy line}$$

Рис. 5. Свойства базисных  $\gamma$ -матриц

Иначе говоря, любое  $\gamma$ -матричное выражение разлагается по базису антисимметричных тензоров

$$\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_n} = \gamma_{[\mu_1} \dots \gamma_{\mu_n]}, \quad (23)$$

т. к. симметричные части удаляются вследствие (21). Базисные матрицы (23) (изображаемые вершинами) удовлетворяют соотношениям ортогональности (рис. 5а) и полноты (рис. 5б). В первом из них  $n!$ —это число членов в шпуре, выживающих при антисимметризации. Отсюда следует соотношение рис. 5в. Соотношение полноты рис. 5б проверяется путём

свёртки с произвольными базисными матрицами слева и справа (рис. 5г). Свернув его по-другому (рис. 5д), мы снова получим (22). Отсюда также следует соотношение рис. 5ж и тождество Фирца (рис. 5к).

В пространстве целой (чётной) размерности  $d$  существует конечное число базисных  $\gamma$ -матриц (23) с  $n \leq d$ . В пространстве нецелой размерности их бесконечно много, так что соотношение полноты рис. 5б представляет собой бесконечный ряд. Формулы для  $\text{Sp } \gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_n} / \text{Sp } 1$  (такое выражение вычисляет REDUCE) выглядят как обычно ([3] §2), только  $\text{Sp } 1$  теперь даётся формулой (22). Отличия возникают при наличии свёрток по индексам. Из (21) нетрудно получить

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu} \gamma_{\mu} &= d, \\ \gamma_{\mu} \hat{v}_1 \gamma_{\mu} &= (2-d) \hat{v}_1, \\ \gamma_{\mu} \hat{v}_1 \hat{v}_2 \gamma_{\mu} &= 2v_1 \cdot v_2 + (d-4) \hat{v}_1 \hat{v}_2, \\ \gamma_{\mu} \hat{v}_1 \hat{v}_2 \hat{v}_3 \gamma_{\mu} &= -2\hat{v}_3 \hat{v}_2 \hat{v}_1 + (4-d) \hat{v}_1 \hat{v}_2 \hat{v}_3 \dots \end{aligned} \quad (24)$$

REDUCE приводит эти выражения к несколько менее простому виду.

```
VECTOR P1,P2,P3;INDEX M;VECDIM D;NOSPUR F;
G(F,M,M);G(F,M,P1,M);G(F,M,P1,P2,M);G(F,M,P1,P2,P3,M);
D
- (G(F,P1)*D - 2*G(F,P1))
2*G(F,P2,P1) + G(F,P1,P2)*D - 2*G(F,P1,P2)
- (2*G(F,P2,P1,P3) + G(F,P1,P2,P3)*D - 2*G(F,P1,P2,P3)
- 2*G(F,P3,P1,P2))
```

Существует пакет [10], реализующий алгоритм Цвитановича [11] вычисления  $d$ -мерных шпуров. Он основан на тождестве Фирца, и более эффективен, чем встроенный алгоритм REDUCEа, в случае шпуров со свёртками по индексам. В качестве примера вычислим несколько коэффициентов, входящих в тождество Фирца рис. 5к

```
VECTOR M1,M2,M3,N1,N2,N3;NOSPUR F$
G1:=G(F,M1)$G2:=G(F,M1,M2)$G3:=G(F,M1,M2,M3)$
A1:=G(F,M1)$A2:=(G(F,M1,M2)-G(F,M2,M1))/2$
A3:=(G(F,M1,M2,M3)-G(F,M1,M3,M2)+G(F,M2,M3,M1)-G(F,M2,M1,M3)
+G(F,M3,M1,M2)-G(F,M3,M2,M1))/6$
H1:=SUB(M1=N1,G1)$H2:=SUB(M1=N1,M2=N2,G2)$
H3:=SUB(M1=N1,M2=N2,M3=N3,G3)$
B1:=SUB(M1=N1,A1)$B2:=SUB(M1=N1,M2=N2,A2)$
```

```
B3:=SUB(M1=N1,M2=N2,M3=N3,A3)$
INDEX M1,M2,M3,N1,N2,N3;SPUR F$VECDIM D$
LOAD CVIT;
_CVITANOVICH_ALGORITHM_IS_READY
A1*B1*G1*H1;A1*B2*G1*H2;A1*B3*G1*H3;
- D*(D - 2)
2
2*D*(D - 5*D + 4)
-----
2
3 2
6*D*(D - 9*D + 20*D - 12)
-----
6
A2*B2*G2*H2;A2*B3*G2*H3;A3*B3*G3*H3;
3 2
4*D*(D - 10*D + 25*D - 16)
-----
4
4 3 2
12*D*(D - 16*D + 77*D - 134*D + 72)
-----
12
5 4 3 2
36*D*(D - 24*D + 193*D - 654*D + 940*D - 456)
-----
36
```

Приведём процедуру AVER(P,A) усреднения выражения A по направлениям вектора P. Она написана немного более общим образом, чем в [2], и может работать с выражениями, содержащими  $\gamma$ -матрицы в состоянии NOSPUR. Она возвращает степень P.P в каждом члене в виде аргумента функции F!. Процедура AV однократно применяет рекуррентное соотношение к одному члену. Замена одного произвольного вхождения P на  $\nabla$  производится путём подстановки P+X!\*V! вместо P с выделением линейных по X! членов; произвольный член полученного выражения выбирается процедурой TERM. Вероятно, это не самый эффективный способ, но не так то просто придумать лучший.

```
INDEX I!!;VECTOR V!!;OPERATOR AV!! ,AV!?,TERM!! ,F!!;
FOR ALL X,Y LET AV!!(X/Y)=AV!!(X)/Y,AV!!(X+Y)=AV!!(X)+AV!!(Y),
TERM!!(X/Y)=TERM!!(X)/Y,TERM!!(X+Y)=TERM!!(X);
```

```

PROCEDURE TERM(A);
<<A:=TERM!(A);FOR ALL A!! LET TERM!(A!!)=A!!;A:=A;
  FOR ALL A!! CLEAR TERM!(A!!);A
>>;
PROCEDURE AV(P,A);
BEGIN SCALAR N;A:=SUB(P=X!!*P,A);N:=DEG(A,X!!)/2;
  IF NOT FIXP(N) THEN RETURN 0;
  A:=SUB(X!!=1,A);IF N=0 THEN RETURN A;
  IF N>1 THEN MORE!!:=1;
  WEIGHT X!!=1;WTLEVEL 1;A:=SUB(P=P+X!!*V!!(A),A);CLEAR X!!;
  A:=SUB(X!!=1,A)-SUB(X!!=0,A);A:=TERM(A);
  WEIGHT X!!=1;A:=SUB(P=P+X!!*V!!(A),A);CLEAR X!!;
  A:=SUB(X!!=1,A)-SUB(X!!=0,A);
  INDEX V!!;A:=A;REMIND I!!;V!!;A:=SUB(V!!=I!!(A),A);
  INDEX I!!;A:=X!!*A;
  FOR ALL N!! LET X!!*F!!(N!!)=F!!(N!!+1)/2/(N+1-EE);A:=A;
  FOR ALL N!! CLEAR X!!*F!!(N!!);RETURN A
END;
PROCEDURE AVER(P,A);
<< FOR ALL N!! LET P.P*F!!(N!!)=F!!(N!!+1);A:=F!!(0)*A;
  FOR ALL N!! CLEAR P.P*F!!(N!!);
  REPEAT <<A:=AV!!(A);MORE!!:=0;
    FOR ALL A!! LET AV!!(A!!)=AV!!(A!!);A:=A;
    FOR ALL A!! CLEAR AV!!(A!!);
    FOR ALL A!! LET AV!!(A!!)=AV(P,A!!);A:=A;
    FOR ALL A!! CLEAR AV!!(A!!);>>
  UNTIL MORE!!=0;
  CLEAR MORE!!;A
>>;

```

Вычисление однопетлевых интегралов на REDUCEe. Приведём пакет процедур, автоматизирующий процесс вычисления однопетлевых диаграмм. Имена нелокальных внутренних переменных этого пакета оканчиваются на ! или ? для того, чтобы не возникало конфликтов с именами переменных в вызывающей программе.

Процедура FEYN(P,A,L) строит фейнмановскую параметризацию. В ней P—петлевой импульс интегрирования, A—числитель диаграммы, а L—список знаменателей. В нём каждый знаменатель вида  $((p+p_i)^2 - m_i^2)^{n_i}$  изображается списком  $\{p_i, m_i, n_i\}$ . Хвост списка можно опускать, по умолчанию используются значения  $p_i = 0, m_i = 0, n_i = 1$ . Единственный способ присвоить векторной переменной нулевой вектор

в REDUCEe—это использовать  $0*P$ , где P—вектор (можно также написать  $P-P$ ). Фейнмановские параметры обозначаются  $X(1), X(2)$ ... Их число сохраняется в глобальной переменной J!

```

VECTOR P!?,P!?,PI!;;OPERATOR X;
PROCEDURE FEYN(P,A,L);
BEGIN SCALAR N,C,LI,MI,NI;
  IF L={} THEN RETURN 0;P!:=0*P!?,J!:=0;
  REPEAT <<J!:=J!+1;LI:=FIRST(L);L:=REST(L);
    IF LI={} THEN PI!:=0*P!? ELSE <<PI!:=FIRST(LI);LI:=REST(LI)>>;
    IF LI={} THEN MI:=0 ELSE <<MI:=FIRST(LI);LI:=REST(LI)>>;
    IF LI={} THEN NI:=1 ELSE NI:=FIRST(LI);
    P!:=P!+X(J!)*PI!;C:=C+X(J!)*(PI!.PI!-MI**2);N:=N+NI;
    IF NI>1 THEN A:=A*X(J!)**(NI-1)/G1(NI)>>
  UNTIL L={}
  A:=G1(N)*SUB(P=P-P!,A);A:=AVER(P,A);C:=P!.P!-C;
  FOR ALL N!! LET F!!(N!!)=LOOP(N,N!,C);A:=A;
  FOR ALL N!! CLEAR F!!(N!!);
  X(J!):=1-FOR J:=1:J!-1 SUM X(J);A:=A;CLEAR X(J!);J!:=J!-1;
  RETURN A
END;

```

После сдвига импульса интегрирования производится усреднение по направлениям  $p$ .

Наконец, процедура FINT(A) производит интегрирование по фейнмановским параметрам. Она вычисляет интеграл по последнему параметру (с номером J!), и уменьшает J!. Конечно, нетрудно было бы выполнять это в цикле, пока не будут взяты все интегралы. Но наша менее общая процедура полезна и тогда, когда берутся только несколько первых интегралов. Каждый, кто хочет, может вызывать эту процедуру в цикле.

Процедура пытается вычислять каждый интеграл только один раз. Для этого используется такой приём: вводится линейный оператор INT!, и части выражения с разными интегралами разделяются функцией PART при соответствующих установках управления выводом. Вообще говоря, такой трюк лучше не использовать слишком широко, т. к. результаты могут зависеть от других команд управления выводом; кроме того, установки вывода могут измениться после вызова этой процедуры, что может не понравиться пользователю, рассматривающему её как чёрный ящик.

При вычислении определённых интегралов встречается тонкость, связанная с логарифмами, аргументы которых обращаются в 0 на концах. Все такие логарифмы независимо от их происхождения рассматриваются REDUCEом как LOG(0), и могут сокращаться друг с другом, что, разумеется, неверно. В процедуре производятся подстановки для разбиения таких логарифмов.

```
OPERATOR INT!!!; LINEAR INT!!!;
PROCEDURE FINT(A);
BEGIN SCALAR L, XM, LI, MI, C;
  IF J!!!=0 THEN RETURN A;
  L:={}; A:=INT!!!(A, X(J!!!)); FACTOR INT!!!; ON DIV;
  C:=IF PART(A,0)=MINUS THEN <<A:=-A;-1>> ELSE 1;
  WHILE PART(A,0)≠PLUS DO
    << LI:=PART(A,1); A:=A-LI; L:=(C*LI).L;
      IF PART(A,0)=MINUS THEN <<A:=-A; C:=-C>>
    >>;
  L:=(C*A).L; REMFAC INT!!!; OFF DIV; A:=0;
  XM:=1-FOR J:=1:J!!!-1 SUM X(J);
  REPEAT <<LI:=FIRST(L); L:=REST(L);
    FOR ALL A!! LET INT!!!(A!!, X(J!!!))=1; MI:=LI;
    FOR ALL A!! CLEAR INT!!!(A!!, X(J!!!)); LI:=LI/MI;
    FOR ALL A!! LET INT!!!(A!!, X(J!!!))=A!!; LI:=LI;
    FOR ALL A!! CLEAR INT!!!(A!!, X(J!!!));
    LI:=INT(LI, X(J!!!));
    FOR ALL A!!
      SUCH THAT DEN(A!!/X(J!!!))=1 AND A!! NEQ X(J!!!)
      LET LOG(A!!)=LOG(A!!/X(J!!!))+LOG(X(J!!!));
    FOR ALL A!!
      SUCH THAT DEN(A!!/(XM-X(J!!!)))=1 AND A!! NEQ XM-X(J!!!)
      LET LOG(A!!)=LOG(A!!/(XM-X(J!!!)))+LOG(XM-X(J!!!));
    LI:=LI;
    FOR ALL A!!
      SUCH THAT DEN(A!!/X(J!!!))=1 AND A!! NEQ X(J!!!)
      CLEAR LOG(A!!);
    FOR ALL A!!
      SUCH THAT DEN(A!!/(XM-X(J!!!)))=1 AND A!! NEQ XM-X(J!!!)
      CLEAR LOG(A!!);
    LI:=SUB(X(J!!!)=XM, LI)-SUB(X(J!!!)=0, LI);
    A:=A+MI*LI>>
  UNTIL L={};
```

```
J!!!:=J!!!-1; RETURN A
```

```
END;
```

Мы проводили фейнмановскую параметризацию диаграммы вместе с числителем, затем сдвиг импульса интегрирования и усреднение по направлениям. Существует другой подход к вычислению однопетлевых интегралов с числителем: для них записываются все возможные тензорные структуры с неопределёнными коэффициентами, которые затем находятся путём решения линейной системы уравнений. Такое сведение тензорных однопетлевых интегралов к скалярным реализовано в пакете LERG-I [12].

Значительно более нетривиальная задача вычисления двухпетлевых диаграмм, однако только с двумя внешними хвостами и лишь в безмассовом случае, решена в пакете LOOPS [13].

## §2. Радиационные поправки в квантовой электродинамике

Введение. Лагранжиан КЭД с учётом члена, фиксирующего калибровку ([3] §3), имеет вид

$$L = \bar{\psi}_0 i \hat{\partial} \psi_0 - m_0 \bar{\psi}_0 \psi_0 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^0 F_{\mu\nu}^0 - \frac{1}{2\alpha_0} (\partial_\mu A_\mu^0)^2 + e_0 \bar{\psi}_0 \hat{A} \psi_0. \quad (1)$$

Запишем его через перенормированные величины  $\psi_0 = \bar{\mu}^{-\epsilon} Z_\psi^{1/2} \psi$ ,  $A_\mu^0 = \bar{\mu}^{-\epsilon} Z_A^{1/2} A_\mu$ ,  $m_0 = Z_m m$ ,  $\alpha_0 = Z_\alpha \alpha$ ,  $e_0 = \bar{\mu}^\epsilon Z_e e$ :

$$L = \bar{\mu}^{-2\epsilon} \left[ \bar{\psi} i \hat{\partial} \psi - m \bar{\psi} \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu)^2 + e \bar{\psi} \hat{A} \psi + \delta_\psi \bar{\psi} i \hat{\partial} \psi - \delta_m m \bar{\psi} \psi - \frac{\delta_A}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{\delta_\alpha}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu)^2 + \delta_e e \bar{\psi} \hat{A} \psi \right], \quad (2)$$

где  $Z_\psi = 1 + \delta_\psi$ ,  $Z_A = 1 + \delta_A$ ,  $Z_m Z_\psi = 1 + \delta_m$ ,  $Z_\alpha^{-1} Z_A = 1 + \delta_\alpha$ ,  $Z_e Z_\psi Z_A^{1/2} = 1 + \delta_e$ . Члены в последней строчке (контрчлены) рассматриваются как возмущение, и дают вершины рис. 6. Они подбираются так, чтобы  $\psi$ ,  $A_\mu$  были физическими полями,  $m$  — физической массой, а  $e$  — физическим зарядом. В КЭД обычно используется перенормировка на массовой поверхности.

$$\begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ p \end{array} = i(\hat{\sigma}_\psi \hat{p} - \varepsilon_m m)$$

$$\begin{array}{c} \mu \text{---} \times \text{---} \nu \\ \text{---} \text{---} \\ p \end{array} = i\hat{\sigma}_A (p_\mu p_\nu - p^2 \varepsilon_{\mu\nu}) - i \frac{\delta_\alpha}{\alpha} p_\mu p_\nu$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \mu \quad \nu \end{array} = i\delta_\alpha e_\mu \delta_\nu$$

Рис. 6. Контрчленные вершины в КЭД

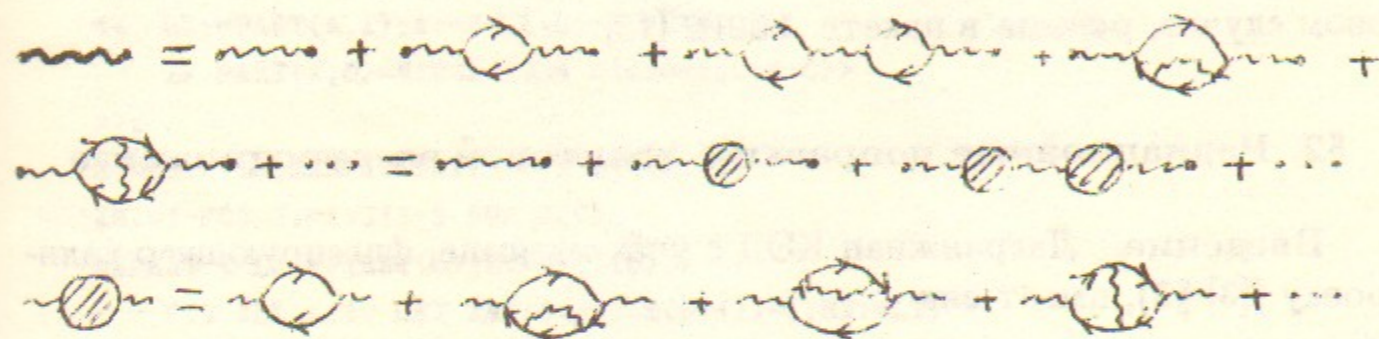


Рис. 7. Структура диаграмм для фотонного пропагатора

**Фотонный пропагатор.** Он имеет структуру (рис. 7):

$$\begin{aligned} -iD_{\mu\nu}(p) = & -iD_{\mu\nu}^0(p) + (-i)D_{\mu\rho}^0(p)i\Pi_{\rho\sigma}(p)(-i)D_{\sigma\nu}^0(p) \\ & + (-i)D_{\mu\rho}^0(p)i\Pi_{\rho\sigma}(p)(-i)D_{\sigma\tau}^0(p)i\Pi_{\tau\lambda}(p)(-i)D_{\lambda\nu}^0(p) + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

где  $i\Pi_{\mu\nu}(p)$  — сумма одночастично-неприводимых фотонных собственно-энергетических диаграмм (которые нельзя разрезать на две несвязанные части по одной фотонной линии), называемая поляризационным оператором. Из (3) следует

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}(p) &= D_{\mu\nu}^0(p) + D_{\mu\rho}^0(p)\Pi_{\rho\sigma}(p)D_{\sigma\nu}(p), \\ ((D^0)_{\mu\rho}^{-1}(p) - \Pi_{\mu\rho}(p))D_{\rho\nu}(p) &= \delta_{\mu\nu}, \\ D_{\mu\nu}^{-1}(p) &= (D^0)_{\mu\nu}^{-1}(p) - \Pi_{\mu\nu}(p). \end{aligned} \quad (4)$$

где обратный тензор в смысле  $A_{\mu\rho}A_{\rho\nu}^{-1} = \delta_{\mu\nu}$  удобно вычислять по фор-

муле

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu} &= A_t \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) + A_l \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \rightarrow \\ A_{\mu\nu}^{-1} &= A_t^{-1} \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) + A_l^{-1} \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}. \end{aligned}$$

Т. к. в диаграммах для  $\Pi_{\mu\nu}$  нет внешних линий виртуальных заряженных частиц, в силу тождества Уорда

$$\Pi_{\mu\nu}(p)p_\mu = \Pi_{\nu\mu}(p)p_\nu = 0.$$

Поэтому

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = (p_\mu p_\nu - p^2 \delta_{\mu\nu})\Pi(p^2). \quad (5)$$

Для невозмущенного фотонного пропагатора (3.5) [3]

$$(D^0)_{\mu\nu}^{-1}(p) = p^2 \delta_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) p_\mu p_\nu,$$

откуда

$$D_{\mu\nu}(p) = \frac{\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}}{p^2(1 - \Pi(p^2))} + \alpha \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2)^2}. \quad (6)$$

Таким образом, взаимодействие не приводит к появлению у фотона массы и не влияет на продольную часть фотонного пропагатора. Поэтому продольный контрчлен не нужен: во всех порядках можно считать  $\delta_\alpha = 0$ , т. е.  $Z_\alpha = Z_A$ . В качестве определения нормировки физического поля  $A_\mu$  примем отсутствие поправок на массовой поверхности, т. е.  $\delta_A$  находится из условия

$$\Pi(p^2 = 0) = 0. \quad (7)$$

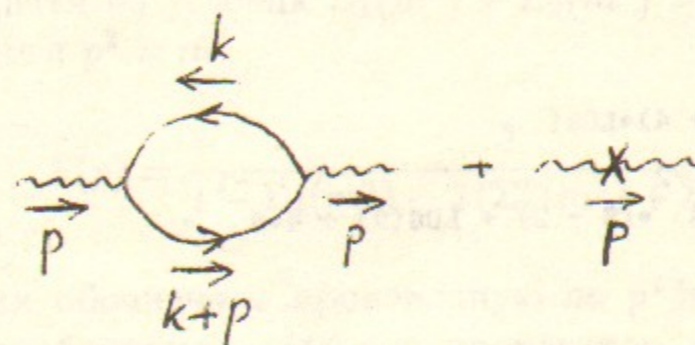


Рис. 8. Однопетлевая диаграмма для поляризационного оператора

Поляризационный оператор удобно вычислять по формуле

$$\Pi(p^2) = -\frac{\Pi_{\mu\mu}(p)}{(d-1)p^2}$$

Он равен (рис. 8, минус от фермионной петли)

$$i\Pi(p^2) = \frac{1}{(d-1)p^2} \int \left(\frac{dk}{2\pi}\right)_d \text{Sp } ie\gamma_\mu i \frac{\hat{k} + \hat{p}}{(k+p)^2 - m^2} ie\gamma_\mu i \frac{\hat{k}}{k^2 - m^2} + i\delta_A$$

Вычисление на REDUCEe даёт при  $p^2 < 0$  ( $x = -p^2/4m^2$ )

$$\Pi(p^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \left( \frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{2m^2}{\mu^2} - \left(1 - \frac{1}{2x}\right) \sqrt{1+1/x} \ln \frac{\sqrt{1+1/x} + 1}{\sqrt{1+1/x} - 1} - \frac{1}{x} + \frac{5}{3} \right) + \delta_A$$

Из уравнения (7) окончательно получаем

$$Z_A = 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \left( \frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{2m^2}{\mu^2} \right),$$

$$\Pi(p^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \left( - \left(1 - \frac{1}{2x}\right) \sqrt{1+1/x} \ln \frac{\sqrt{1+1/x} + 1}{\sqrt{1+1/x} - 1} - \frac{1}{x} + \frac{5}{3} \right). \quad (8)$$

```

ON GCD;
OPERATOR V,R;
FOR ALL P LET V(P)=G(F,P),R(P)=G(F,P)+M;
VECTOR P,K; INDEX N; LET P.P=-M**2+S;
Z:=-I*4*PI*4/(D-1)/P.P*EX(-EE*LOG(2))*
FEYN(K,V(N)*R(K+P)*V(N)*R(K),{{P,M},{O*P,M}})*
Z:=FINT(EXE(Z))*
LET LOG(-SQRT(S)*SQRT(S+4)-S)=
LOG((SQRT(S+4)+SQRT(S))/(SQRT(S-4)-SQRT(S)))+
LOG(-SQRT(S)*SQRT(S+4)+S);
FACTOR LOG; ON DIV; 3*PI*Z;
2
- (LOG(M) + SQRT(S)*SQRT(S + 4)*LOG(
SQRT(S + 4) + SQRT(S) -2 -1
-----)*S *(S - 2) + LOG(2) + 4*S -
SQRT(S - 4) - SQRT(S)
-1 5
EE - ---)
3
CLEAR LOG(-SQRT(S)*SQRT(S+4)-S); REMFAC LOG;

```

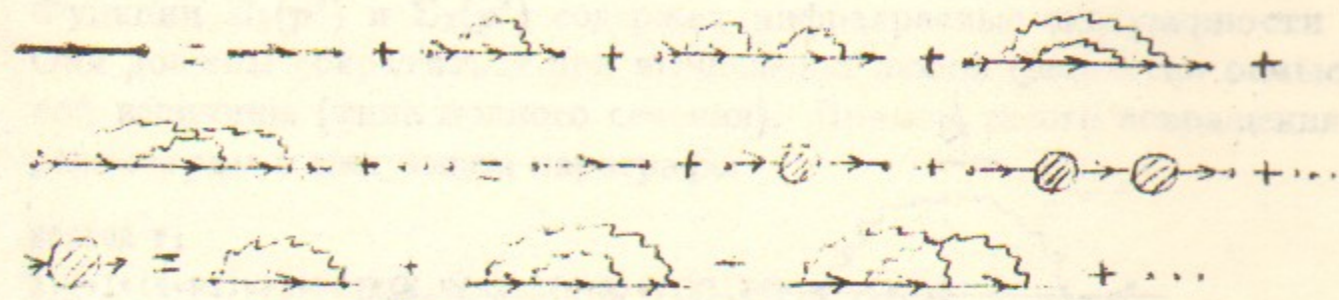


Рис. 9. Структура диаграмм для электронного пропагатора

Электронный пропагатор. Он имеет структуру (рис. 9):

$$iS(p) = iS_0(p) + iS_0(p)(-i)\Sigma(p)iS_0(p) + iS_0(p)(-i)\Sigma(p)iS_0(p)(-i)\Sigma(p)iS_0(p) + \dots, \quad (9)$$

$$S(p) = S_0(p) + S_0(p)\Sigma(p)S(p),$$

$$(S_0^{-1}(p) - \Sigma(p))S(p) = 1, \quad S^{-1}(p) = S_0^{-1}(p) - \Sigma(p),$$

где  $-i\Sigma(p)$ —сумма одночастично-неприводимых электронных собственно-энергетических диаграмм (которые нельзя разрезать на две несвязанные части по одной электронной линии), называемая массовым оператором. Он содержит две структуры:

$$\Sigma(p) = \hat{p}\Sigma_1(p^2) + m\Sigma_2(p^2), \quad (10)$$

откуда с учётом  $S_0^{-1}(p) = \hat{p} - m$  (3.6) получим [3]

$$S(p) = \frac{(1 - \Sigma_1)^{-1}\hat{p} + (1 - \Sigma_1)^{-2}(1 + \Sigma_2)m}{p^2 - (1 - \Sigma_1)^{-2}(1 + \Sigma_2)^2 m^2}$$

Определим физическую массу как положение полюса пропагатора, тогда  $\delta_m$  находится из условия  $\Sigma_1(m^2) + \Sigma_2(m^2) = 0$ . Тогда вблизи массовой поверхности  $p^2 = m^2$

$$S(p) = \frac{1}{1 - \Sigma_1(m^2) - 2(\Sigma_1'(m^2) + \Sigma_2'(m^2))} \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2},$$

где штрих обозначает производную по  $p^2/m^2$ . Определим физическое поле  $\psi$  требованием, что его пропагатор вблизи массовой поверхности совпадает со свободным. Тогда  $\delta_\psi$  находится из условия  $\Sigma_1(m^2) + 2(\Sigma_1'(m^2) + \Sigma_2'(m^2)) = 0$ .

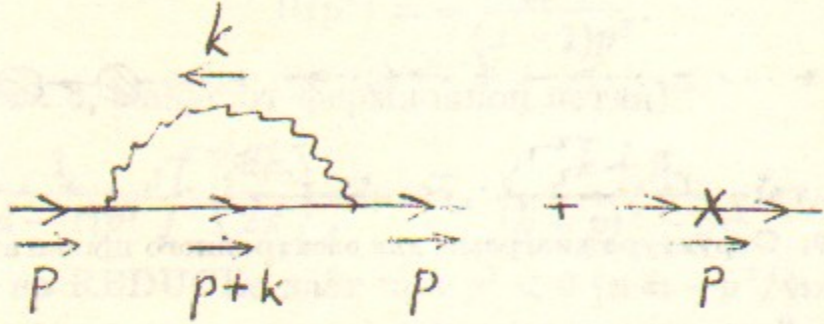


Рис. 10. Однопетлевая диаграмма для массового оператора

Вычисление диаграммы рис. 10 на REDUCEe даёт ( $x = -p^2/m^2$ )

$$\begin{aligned} \Sigma_1(p^2) &= -\frac{\alpha}{4\pi} \left( \frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m^2}{\mu^2} - \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \ln(1+x) + 1 - \frac{1}{x} \right) - \delta_\psi, \\ \Sigma_2(p^2) &= \frac{\alpha}{\pi} \left( \frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m^2}{\mu^2} - \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln(1+x) + \frac{3}{2} \right) + \delta_m. \end{aligned} \quad (11)$$

На массовой поверхности

$$\begin{aligned} \Sigma_1(m^2) &= -\frac{\alpha}{4\pi} \left( \frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m^2}{\mu^2} + 2 \right) - \delta_\psi, \\ \Sigma_2(m^2) &= \frac{\alpha}{\pi} \left( \frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m^2}{\mu^2} + \frac{3}{2} \right) + \delta_m, \\ \Sigma'_1(m^2) &= \frac{\alpha}{4\pi} \left( \frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m^2}{\mu^2} + 2 \right), \\ \Sigma'_2(m^2) &= -\frac{\alpha}{2\pi} \left( \frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m^2}{\mu^2} + \frac{3}{2} \right). \end{aligned}$$

Последние две формулы невозможно получить из (11): после дифференцирования по  $x$  в пределе  $x \rightarrow -1$  остаётся логарифмическая сингулярность. Необходимо точно вычислить интеграл по фейнмановскому параметру в  $d$ -мерном пространстве, а потом переходить к пределу  $\epsilon \rightarrow 0$ . Возникающая в этом пределе сингулярность называется инфракрасной, и связана с нулевой массой фотона.

Окончательно мы имеем

$$Z_\psi = Z_m = 1 - \frac{\alpha}{4\pi} \left( \frac{3}{\epsilon} - 3 \ln \frac{m^2}{\mu^2} + 4 \right). \quad (12)$$

Функции  $\Sigma_1(p^2)$  и  $\Sigma_2(p^2)$  содержат инфракрасные сингулярности  $1/\epsilon$ . Они должны сократиться при вычислении любой физически осмысленной величины (типа полного сечения). Пример такого сокращения мы рассмотрим в следующем параграфе.

NO SPUR F;

Z := -I\*(4\*PI)\*\*2\*FEYN(K,V(N)\*R(K+P)\*V(N),[{P,M},{}],{P,M},[ ])\*\$

REMIWD N; SPUR F; Z1:=Z+V(N)/P.N\$ Z2:=Z/M\$

Z1A:=SUB(S=-1,Z1)\$ Z2A:=SUB(S=-1,Z2)\$ % на массовой поверхности

Z1B:=SUB(S=-1,-DF(Z1,S))\$ Z2B:=SUB(S=-1,-DF(Z2,S))\$ % производные

Z1:=FINT(EXE(Z1))\$ J!:=1\$ Z2:=FINT(EXE(Z2))\$

LET LOG(M\*\*2\*S+M\*\*2)=LOG(S+1)+LOG(M\*\*2);

FACTOR LOG; ON DIV; Z1; Z2;

$\frac{2}{\text{LOG}(M)} + \text{LOG}(S+1) * (-S^2 + 1) + S^{-1} - \text{EE}^{-1} - 1$

$-(4 * \text{LOG}(M) + 4 * \text{LOG}(S+1) * (S^{-1} + 1) + 2 * (-2 * \text{EE}^{-1} - 3))$

CLEAR LOG(M\*\*2\*S+M\*\*2); REMFAC LOG;

% Точное вычисление интегралов в d- мерном пространстве  
OPERATOR F;

Z1A:=Z1A\*X(1)\*\*(2\*EE)\*F(-2\*EE)\$

Z2A:=Z2A\*X(1)\*\*(2\*EE)\*F(-2\*EE)\$

Z1B:=Z1B\*X(1)\*\*(1+2\*EE)\*F(-1-2\*EE)\$

Z2B:=Z2B\*X(1)\*\*(1+2\*EE)\*F(-1-2\*EE)\$

FOR ALL N LET X(1)\*F(N)=F(N+1);

Z1A:=Z1A\$ Z2A:=Z2A\$ Z1B:=Z1B\$ Z2B:=Z2B\$

FOR ALL N CLEAR X(1)\*F(N);

FOR ALL N LET F(N)=1/(N+1);

Z1A:=Z1A; Z2A:=Z2A; Z1B:=Z1B; Z2B:=Z2B;

$Z1A := \frac{M^{-2*EE} * \text{EX}(\text{GAM*EE}) * \text{GO}(1) * \text{EE}^{-1}}{2*EE - 1}$

$Z2A := 2*M^{-2*EE} * \text{EX}(\text{GAM*EE}) * \text{GO}(1) * \frac{\text{EE}^{-1} + 1}{2*EE - 1}$

$Z1B := \frac{M^{-2*EE} * \text{EX}(\text{GAM*EE}) * \text{GO}(1) * \text{EE}^{-1}}{2*EE - 1}$

```

      -1
      - 2*EE      + 1
Z2B := - M      *EX(GAM*EE)*GO(1)*-----
      2*EE - 1

FOR ALL N CLEAR F(N);
Z1A:=EXE(Z1A);Z2A:=EXE(Z2A);Z1B:=EXE(Z1B);Z2B:=EXE(Z2B);

      -1
Z1A := 2*LOG(M) - EE - 2

      -1
Z2A := - 2*(4*LOG(M) - 2*EE - 3)

      -1
Z1B := - (2*LOG(M) - EE - 2)

      -1
Z2B := 4*LOG(M) - 2*EE - 3
CLEAR Z1,Z2,Z1A,Z2A,Z1B,Z2B;

```

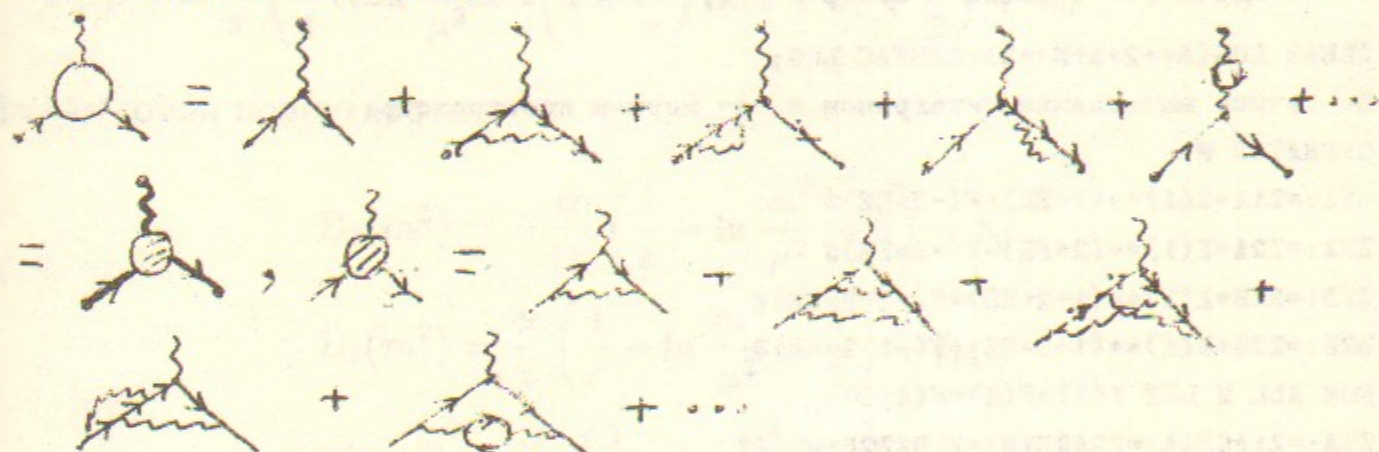


Рис. 11. Структура диаграмм для вершины

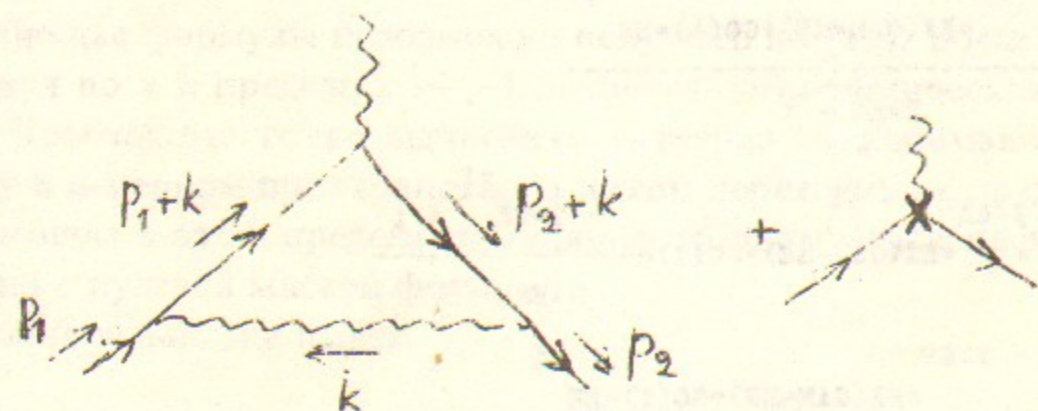


Рис. 12. Однопетлевая диаграмма для вершинной функции

**Вершинная функция.** Определим вершинную функцию  $ie\Gamma_\mu$  как сумму одночастично-неприводимых вершинных диаграмм (которые нельзя разрезать на несвязанные части по одной электронной или фотонной линии) (рис. 11);  $\Gamma_\mu = \gamma_\mu + \Lambda_\mu$ , где  $\Lambda_\mu$  начинается с однопетлевого приближения (рис. 12). Вообще говоря,  $\Gamma_\mu$  содержит 12  $\gamma$ -матричных структур, коэффициенты при которых зависят от 3 переменных  $p_1^2, p_2^2, q^2$  ( $q = p_2 - p_1$ ).

Тождество Уорда приводит к

$$\Lambda_\mu(p_1, p_2)q_\mu = \Sigma(p_1) - \Sigma(p_2) \quad \text{или} \quad \Gamma_\mu(p_1, p_2)q_\mu = S^{-1}(p_1) - S^{-1}(p_2). \quad (13)$$

Такое же соотношение существует между пропагатором  $Z_\psi S$ , построенным из неперенормированных полей, и построенной из них вершиной  $Z_e^{-1}\Gamma_\mu$ , откуда во всех порядках теории возмущений

$$Z_e = Z_\psi. \quad (14)$$

При  $q \rightarrow 0$  из (13) получим

$$\Lambda_\mu(p, p) = -\frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p_\mu} \quad \text{или} \quad \Gamma_\mu(p, p) = \frac{\partial S^{-1}(p)}{\partial p_\mu}. \quad (15)$$

Программа вычисляет однопетлевой вклад в  $\Lambda_\mu$  (рис. 12) в общем случае. Он не распечатан из-за своей громоздкости. Первый интеграл по фейнмановским параметрам берётся в логарифмах, а второй—в функциях Спенса, но вычисление в общем виде сложно.

Ограничимся поэтому случаем, когда электрон до и после рассеяния находится на массовой поверхности и имеет физическую поляризацию. Тогда вершина выражается через 2 формфактора  $F_1(q^2)$  и  $F_2(q^2)$  [4] (1.26). Их можно выделить, вычисляя шпуры со специально подобранными проекторами.

Формфактор  $F_1$  при  $q^2 \neq 0$  содержит инфракрасную расходимость. Мы не будем вычислять интеграл по фейнмановским параметрам в  $d$ -мерном пространстве (подобный, но несколько более простой пример рассмотрен в следующем параграфе). Ограничимся вычислением ультрафиолетовой расходимости. Согласно (15), она связана с ультрафиолетовой расходимостью  $\Sigma_1(p^2)$ .

Вычисление  $F_2$  даёт ( $x = -q^2/m^2$ )

$$F_2(q^2) = \frac{\alpha}{\pi} \left[ \sqrt{\frac{x}{4+x}} \ln \frac{2+x+\sqrt{x(4+x)}}{2+x-\sqrt{x(4+x)}} - \frac{1}{2} \right]. \quad (16)$$



В частности,

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi} \quad (17)$$

—аномальный магнитный момент электрона.

```
VECTOR P1,P2;INDEX L;NOSPUR F;OFF GCD;OFF DIV;
LET P1.P1=-M**2*S1,P2.P2=-M**2*S2,P1.P2=M**2/2*(T-S1-S2);
% Вершинная функция в общем случае
% ( не распечатана для экономии места )
Z:=-I*(4*PI)**2*
  FEYN(K,V(L)*R(K+P2)*V(N)*R(K+P1)*V(L),{P1,M},{P2,M},{})$
S1:=-1$S2:=-1$ % Начальный и конечный электрон на массовой поверхности
% Проекторы, выделяющие формфакторы
OPERATOR X1,X2;
V1:=-X1(2)/(2*M)*(P1+P2).N+(X1(1)+X1(2))*G(F,N)$
V2:=SUB(X1=X2,V1)$
SPUR F;INDEX N;VV:=V1*R(P1)*V2*R(P2)$
MATRIX MM(2,2),MV(2,1);
FOR I:=1:2 DO FOR J:=1:2 DO MM(I,J):=DF(VV,X1(I),X2(J));
NOSPUR F;REMINDE N;
FOR I:=1:2 DO MV(I,1):=DF(V1,X1(I));
ON GCD;MV:=MM**(-1)*MV$
PF1:=MV(1,1);PF2:=MV(2,1);
PF1 := (4*N.P2*EE - 6*N.P2 + 4*N.P1*EE - 6*N.P1 + G(F,N)*M*T
        + 4*G(F,N)*M)/(M*(T*EE - T + 8*T*EE - 8*T + 16*
        EE - 16))
PF2 := - (4*(N.P2*T*EE - N.P2*T + 2*N.P2 + N.P1*T*EE - N.P1
        *T + 2*N.P1 - G(F,N)*M*T - 4*G(F,N)*M))/(M*T*
        (T*EE - T + 8*T*EE - 8*T + 16*EE - 16))
CLEAR MM,MV;CLEAR V1,V2,VV;
% Формфакторы
SPUR F;INDEX N;OFF GCD;
Z1:=R(P1)*PF1*R(P2)*Z$Z2:=R(P1)*PF2*R(P2)*Z$
CLEAR PF1,PF2;ON GCD;Z1:=Z1;Z2:=Z2;
Z1 := - (2*EX(GAM*EE)*GO(1)*(X(2) *EE - X(2) - 2*X(2)*X(1)
```

```
*T*EE + 3*X(2)*X(1)*T*EE - X(2)*X(1)*T + 2*X(2)
)*X(1)*EE - 2*X(2)*X(1) - X(2)*T*EE - 2*X(2)*EE
+ X(1) *EE - X(1) - X(1)*T*EE - 2*X(1)*EE + T
*EE + 2*EE))/(
(X(2) *M + X(2)*X(1)*M *T + 2*X(2)*X(1)*M + X(1)
*M) *EE*(X(2) + X(2)*X(1)*T + 2*X(2)*X(1) +
X(1) ))
Z2 := (4*EX(GAM*EE)*GO(1)*(X(2) *EE - X(2) + 2*X(2)*X(1)*EE
- 2*X(2)*X(1) + X(2) + X(1) *EE - X(1) + X(1)))/(
(X(2) *M + X(2)*X(1)*M *T + 2*X(2)*X(1)*M + X(1) *
M) *(X(2) + X(2)*X(1)*T + 2*X(2)*X(1) + X(1) ))
% Ультрaviolet расходящаяся F1
Z1:=EXE(EE*Z1)$OFF GCD;Z1:=FINT(FINT(Z1))$ON DIV;Z1;
1
Z2:=EXE(Z2);Z2A:=SUB(T=0,Z2)$ % F2
Z2 := - 4*-----
          2
          X(2) + 2*X(2)*X(1) - X(2) + X(1) - X(1)
          2
          X(2) + X(2)*X(1)*T + 2*X(2)*X(1) + X(1)
J!:=2$Z2:=FINT(FINT(Z2))$
LET LOG(SQRT(T)*SQRT(T+4)+T+2)=
  LOG((SQRT(T)*SQRT(T+4)+T+2)/(-SQRT(T)*SQRT(T+4)+T+2))+
  LOG(-SQRT(T)*SQRT(T+4)+T+2);
ON DIV;FACTOR LOG;Z2;
(4*SQRT(T)*SQRT(T + 4)*LOG(
- SQRT(T)*SQRT(T + 4) - T - 2 -1
-----)*T )/(T + 4) - 2
SQRT(T)*SQRT(T + 4) - T - 2
CLEAR LOG(SQRT(T)*SQRT(T+4)+T+2);REMFAC LOG;
J!:=2$Z2A:=FINT(FINT(Z2A));
```

Других расходимостей, кроме поляризационного оператора, массового оператора и вершинной функции, в квантовой электродинамике нет, т. к. нельзя построить других членов в лагранжиане, константы связи которых имели бы неотрицательную размерность.

**Аксиальная аномалия.** Мы не будем подробно рассматривать радиационные поправки в теории электрослабого взаимодействия. Ограничимся одной важной особенностью—аксиальной аномалией. Вершины в этой теории могут содержать  $\gamma_5$ . Для вычислений в размерной регуляризации необходимо обобщить  $\gamma_5$  на случай  $d$ -мерного пространства. Обобщение

$$\gamma_5 = \frac{i}{d!} \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_d} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_d} = i\gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_d, \quad \gamma_5 \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_5 = 0,$$

возможное при любом чётном  $d$ , не подходит, т. к. аналитическое продолжение по  $d$  невозможно—при разных  $d$  отличается сама структура ответа. Поэтому приходится разбить  $d$ -мерное пространство на 4- и  $(d-4)$ -мерные подпространства, и принять

$$\begin{aligned} \gamma_5 &= \frac{i}{4!} \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_4} = i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_3 \gamma_4, \\ \gamma_5 \underline{\gamma}_\mu + \underline{\gamma}_\mu \gamma_5 &= 0, \quad \gamma_5 \underline{\underline{\gamma}}_\mu - \underline{\underline{\gamma}}_\mu \gamma_5 = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где тензор  $\epsilon_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}$  относится к 4-мерному подпространству, к которому относятся индексы  $\underline{\mu}$ ; индексы  $\underline{\underline{\mu}}$  относятся к ортогональному ему  $(d-4)$ -мерному подпространству. Такое определение не очень удобно, т. к. нарушает  $d$ -мерную лоренц-инвариантность, но лучшего не существует.

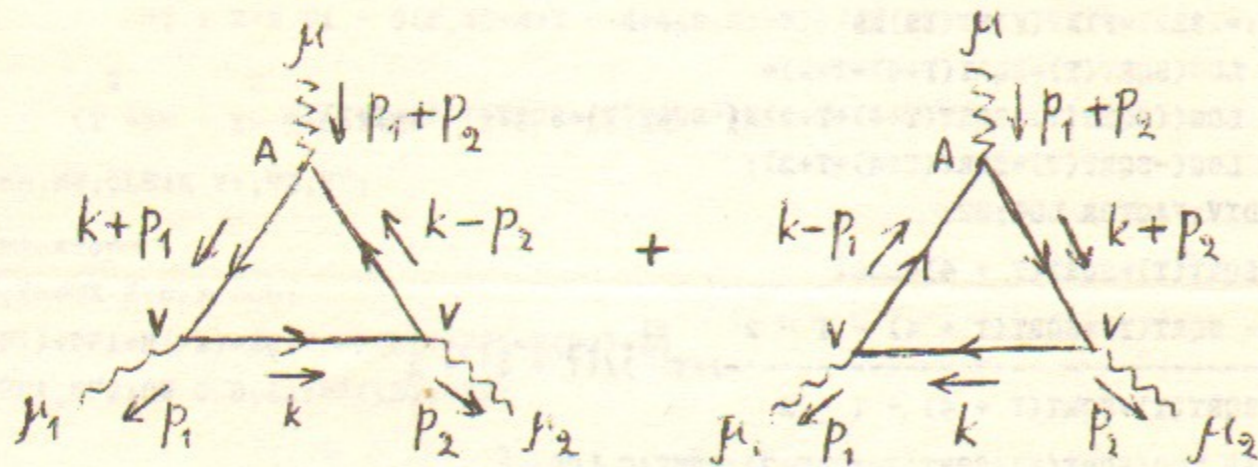


Рис. 13. Однопетлевая диаграмма для вершины  $Z^0 \gamma \gamma$

Рассмотрим для примера однопетлевой вклад в вершину  $Z^0 \gamma \gamma$  (рис. 13). Векторная связь  $Z^0$  не даёт вклада по теореме Фарри. В силу тождеств Уорда

$$M_{\mu\mu_1\mu_2} p_{1\mu_1} = 0, \quad M_{\mu\mu_1\mu_2} p_{2\mu_2} = 0. \quad (19)$$

Если частицы в петле безмассовые, то, казалось бы, можно доказать аксиальное тождество Уорда

$$M_{\mu\mu_1\mu_2} (p_1 + p_2)_\mu = 0, \quad (20)$$

основываясь на равенстве

$$S(p_1)(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)\gamma_5 S(p_2) = \gamma_5 S(p_2) + S(p_1)\gamma_5 + 2mS(p_1)\gamma_5 S(p_2).$$

Но это тождество неверно!

Вычислим диаграмму рис. 13 аккуратно:

$$\begin{aligned} &M_{\mu\mu_1\mu_2} (p_1 + p_2)_\mu \\ &= -g_A g_V^2 \int \left( \frac{dk}{2\pi} \right)_d \text{Sp} S(k+p_1)(\hat{p}_1 + \hat{p}_2)\gamma_5 S(k-p_2)\gamma_{\mu_2} S(k)\gamma_{\mu_1} \\ &+ (1 \leftrightarrow 2). \end{aligned}$$

Учитывая  $\hat{p}_1 + \hat{p}_2 = (\hat{k} + \hat{p}_1) - (\hat{k} - \hat{p}_2)$ ,  $(\hat{k} - \hat{p}_2)\gamma_5 = (\hat{k} + \hat{k} - \hat{p}_2)\gamma_5 = -\gamma_5(\hat{k} - \hat{k} - \hat{p}_2) = -\gamma_5(\hat{k} - \hat{p}_2 - 2\hat{k})$  (здесь  $\underline{\hat{k}}$  и  $\underline{\underline{\hat{k}}}$ —компоненты  $\hat{k}$  в физическом и нефизическом подпространстве), получим

$$\begin{aligned} &-g_A g_V^2 \int \left( \frac{dk}{2\pi} \right)_d \text{Sp} \left[ \gamma_5 S(k-p_2) + S(k+p_1)\gamma_5 \right. \\ &\left. - 2S(k+p_1)\gamma_5 \underline{\hat{k}} S(k-p_2) \right] \gamma_{\mu_2} S(k)\gamma_{\mu_1} + (1 \leftrightarrow 2). \end{aligned}$$

Здесь первые 2 шпура равны 0, т. к. они содержат только 1 из 2 векторов  $p_1, p_2$  (на этом основано наивное доказательство (20)). Последний член содержит  $\underline{\hat{k}}$ , и его числитель должен обратиться в 0 при  $d \rightarrow 4$ . Но из-за ультрафиолетовой расходимости интеграла  $1/\epsilon$  может остаться конечный ответ. Входящий сюда шпур

$$\begin{aligned} &\text{Sp} S(k+p_1)\gamma_5 \underline{\hat{k}} S(k-p_2)\gamma_{\mu_2} S(k)\gamma_{\mu_1} = -\text{Sp} \hat{p}_1 \gamma_5 \underline{\hat{k}} \hat{p}_2 \gamma_{\mu_2} \hat{k} \gamma_{\mu_1} \\ &= -\text{Sp} \hat{p}_1 \gamma_5 \hat{p}_2 \gamma_{\mu_2} \underline{\hat{k}} \hat{k} \gamma_{\mu_1} = \underline{\hat{k}}^2 i \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \alpha_1 \alpha_2} p_{1\alpha_1} p_{2\alpha_2} \end{aligned}$$

(т. к. мы должны оставить  $\hat{p}_1$  и  $\hat{p}_2$  для получения ненулевого ответа, а  $\hat{k}$  антикоммутирует со всеми матрицами физического подпространства, в частности  $\hat{p}_{1,2}$  и  $\gamma_{\mu_{1,2}}$ ). Две диаграммы дают равный вклад, и после объединения знаменателей получается

$$4g_A g_V^2 i \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \alpha_1 \alpha_2} p_{1\alpha_1} p_{2\alpha_2} \int [dx] \left( \frac{dk}{2\pi} \right) \frac{k^2}{(k^2 - a^2)^3}.$$

Заменяя здесь  $k^2 \rightarrow \frac{d-4}{d} k^2$  и вычисляя интеграл, получим окончательный ответ для аномалии в аксиальном тождестве Уорда

$$M_{\mu\mu_1\mu_2}(p_1 + p_2)_\mu = \frac{g_A g_V^2}{8\pi^2} \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \alpha_1 \alpha_2} p_{1\alpha_1} p_{2\alpha_2}. \quad (21)$$

Поскольку этот вклад обусловлен ультрафиолетовой расходимостью, он не зависит от масс и внешних импульсов. При ненулевой массе частиц в петле кроме него существует и нормальный вклад.

FIWT(EKE((D-4)/D\*FEYN(K,K,K,{0\*K,A,3})));

$$\frac{1}{32\pi^2}$$

Аксиальная аномалия нарушает перенормируемость электрослабой теории. Однако в ней вклады разных частиц в петле компенсируются. Действительно, рассмотрим частицы первого поколения:  $\nu_e, e, u, d$ . Константа связи  $g_A$  пропорциональна проекции слабого изоспина  $T_3$  левых частиц;  $g_V$  — заряду  $z$ . Суммарный вклад первого поколения (с учётом 3 цветов кварков)  $\frac{1}{2}0^2 - \frac{1}{2}(-1)^2 + 3\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 3\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 0$ . Второе ( $\nu_\mu, \mu, c, s$ ) и третье ( $\nu_\tau, \tau, t, b$ ) поколения повторяют первое, и также не дают вклада. Кроме  $Z^0\gamma\gamma$ , аномалии существуют ещё в нескольких трёхбозонных вершинах; все они сокращаются в пределах каждого поколения. Таким образом, для перенормируемости теории электрослабого взаимодействия требуется, чтобы каждому дублету лептонов соответствовал дублет кварков.

### §3. Радиационные поправки в квантовой хромодинамике

**Введение.** Будем считать кварки безмассовыми. Нам потребуется рассмотреть перенормировку кваркового и глюонного полей  $Z_\psi = 1 + \delta_\psi$ ,  $Z_A = 1 + \delta_A$ . Духи, которые мы обсуждали в [5] §4, нужно учитывать не только при суммировании по поляризациям конечных глюонов, но и в петлях, хотя бы потому, что между этими случаями есть тесная связь (дисперсионные соотношения, которые мы не обсуждали). Поэтому нам потребуется также фактор перенормировки духового поля  $Z_h = 1 + \delta_h$ .

В КХД имеется много вершин, определяемых одной константой связи  $g_0 = \bar{\mu}^\epsilon Z_g g$ . Кварк-глюонная вершина содержит фактор  $Z_g Z_\psi Z_A^{1/2}$ , дух-глюонная —  $Z_g Z_h Z_A^{1/2}$ , трёхглюонная —  $Z_g Z_A^{3/2}$ , и четырёхглюонная —  $Z_g^2 Z_A^2$ . Поэтому в отличие от КЭД мы определим просто  $Z_g = 1 + \delta_g$ . Тогда в однопетлевом приближении контрчлены для этих вершин будут равны  $\delta_g + \delta_\psi + \frac{1}{2}\delta_A$ ,  $\delta_g + \delta_h + \frac{1}{2}\delta_A$ ,  $\delta_g + \frac{3}{2}\delta_A$ ,  $2\delta_g + 2\delta_A$ .

В КХД нельзя определить физическую схему перенормировки; поэтому будем пользоваться схемой  $\overline{MS}$ , в которой контрчлены сокращают полюса  $1/\epsilon$ . Это схема содержит параметр — точку нормировки  $\mu^2$ .

Все вычисления в этом параграфе будем производить в фейнмановской калибровке; читателю предлагается обобщить их на случай  $\alpha \neq 1$ . Необходимые цветовые множители были вычислены в [5] §1.

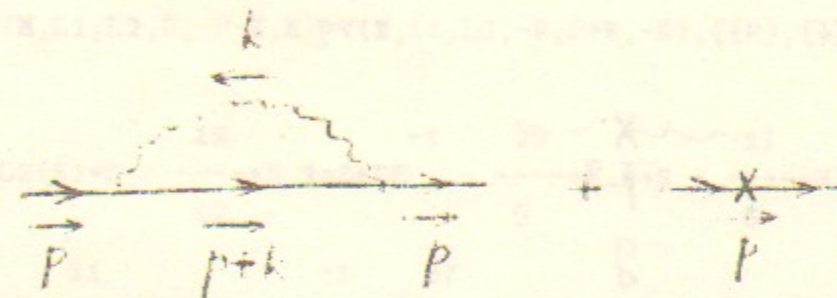


Рис. 14. Однопетлевая диаграмма для массового оператора кварка

**Пропагатор кварка.** Массовый оператор (рис. 14) отличается от случая КЭД (при  $m = 0$ ) цветовым множителем  $C_F$ :

$$\Sigma(p) = -C_F \frac{\alpha_s}{4\pi} \hat{p} \left[ \frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{-p^2}{\mu^2} - 1 \right] - \delta_\psi \hat{p}. \quad (1)$$

Отсюда

$$Z_\psi = 1 - C_F \frac{\alpha_s}{4\pi \epsilon}. \quad (2)$$

```

ON GCD;
OPERATOR V;FOR ALL P LET V(P)=G(F,P);
VECTOR P,K,M;LET P.P=-S;INDEX M;
% FACTOR CF ALPHA-S/(4*PI)
Z:=-I*(4*PI)**2*FINT(EXE(FEYN(K,V(N)*V(M)*V(P+K)*V(M),{P},{})/P.N))$
ON DIV;Z;
LOG(S) - EE - 1

```

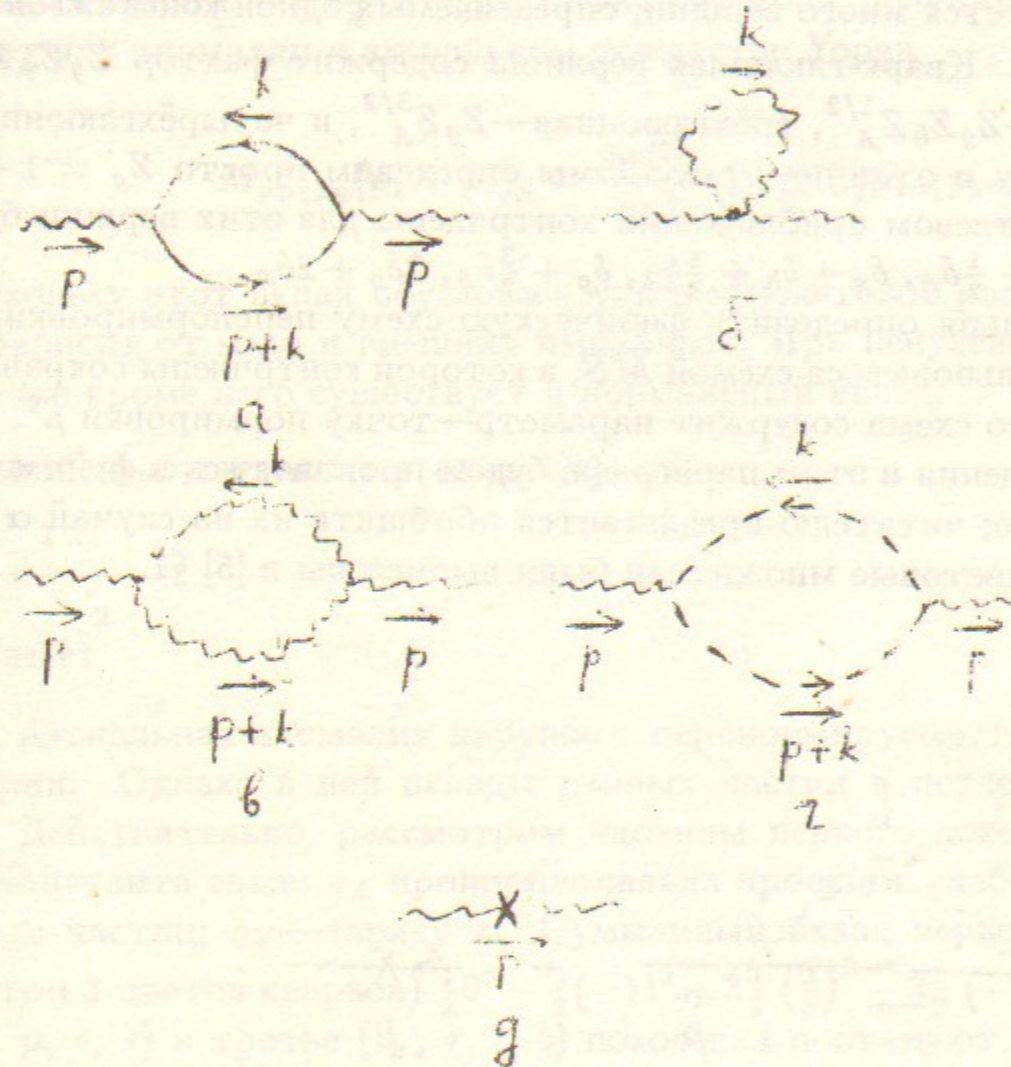


Рис. 15. Однопетлевые диаграммы для поляризационного оператора глюона

**Пропагатор глюона.** Поляризационный оператор изображается диаграммами рис. 15. Кварковый вклад (рис. 15а) отличается от случая КЭД (при  $m = 0$ ) множителем  $n_f/2$ , где  $n_f$  — число сортов кварков. Вклад рис. 15б равен 0, т. к. он приводится к интегралу вида (1.17). Глюонный вклад рис. 15в и духовый вклад (рис. 15г) по отдельности не являются поперечными. Их сумма имеет правильную структуру  $(p_\mu p_\nu - p^2 \delta_{\mu\nu})\Pi(p^2)$ .

Учитывая также вклад контрчлена (рис. 15д), получим

$$\Pi(p^2) = \frac{\alpha_s}{12\pi} \left[ -5N_c \left( \frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{-p^2}{\mu^2} + \frac{31}{15} \right) + 2n_f \left( \frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{-2p^2}{\mu^2} + \frac{5}{3} \right) \right] + \delta_A. \quad (3)$$

Поэтому в  $\overline{MS}$

$$Z_A = 1 + \frac{\alpha_s}{12\pi} (5N_c - 2n_f) \frac{1}{\epsilon} \quad (4)$$

(обычно в  $\delta_A$  включают также член с  $\ln 2$ ).

```

VECTOR !=P1, !=P2, !=P3, !=M1, !=M2, !=M3;
FOR ALL P1,P2,P3,M1,M2,M3 LET V(M1,M2,M3,P1,P2,P3)=
(P2-P1).M3+M1.M2+(P3-P2).M1+M2.M3+(P1-P3).M2+M3.M1;
% FACTOR NF ALPHA-S/(4*PI)
Z1:=I*(4*PI)**2*FINT(EXE(
FEYN(K,V(M)*V(K)*V(M)*V(P+K),{P},{})+2*EX(-EE*LOG(2))/S/(D-1)))$
ON DIV;Z1;
- (---*LOG(S) + ---*LOG(2) - ---*EE - ---)
3 3 3 9
REMIND M;INDEX L1,L2;
Z2:=I*(4*PI)**2*FINT(EXE(
FEYN(K,V(M,L1,L2,P,-P-K,K)*V(N,L1,L2,-P,P+K,-K),{P},{})/2))$
ON DIV;Z2;
19 19 -1 29 11
---*M.N*LOG(S)*S - ---*M.N*S*EE - ---*M.N*S + ---*M.P*
12 12 9 6
M.P*LOG(S) - ---*M.P*N.P*EE - ---*M.P*N.P
6 18
Z3:=I*(4*PI)**2*FINT(EXE(FEYN(K,(P+K).M*K.N,{P},{})))$
ON DIV;Z3;
1 1 -1 2 1
---*M.N*LOG(S)*S - ---*M.N*S*EE - ---*M.N*S - ---*M.P*N.
12 12 9 6
P*LOG(S) + ---*M.P*N.P*EE + ---*M.P*N.P
6 18

```

```
Z:=(Z2+Z3)/(P.M+P.N-P.P*M.N);
      5      5      -1      31
Z := ---*LOG(S) - ---*EE - ---
      3      3      9
CLEAR Z1,Z2,Z3;REMIIND L1,L2;
```

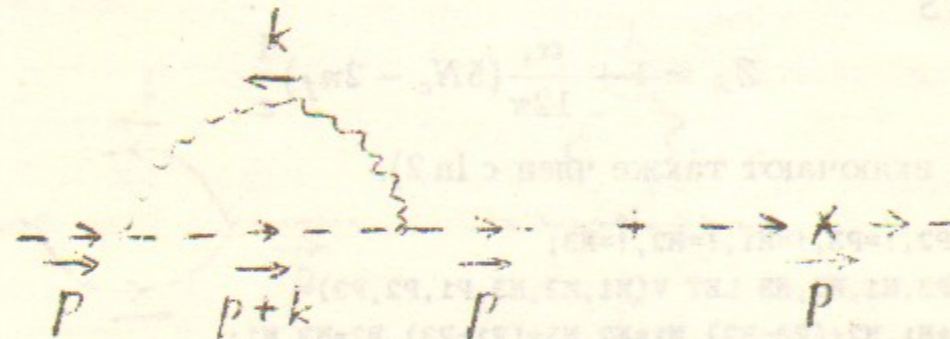


Рис. 16. Однопетлевая диаграмма для массового оператора духа

Пропагатор духа. Массовый оператор духа (рис. 16)

$$M(p^2) = -N_c \frac{\alpha_s}{8\pi} p^2 \left( \frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{-p^2}{\mu^2} + 2 \right) + \delta_h p^2, \quad (5)$$

откуда константа перенормировки

$$Z_h = 1 + N_c \frac{\alpha_s}{8\pi \epsilon}. \quad (6)$$

```
Z:=-I*(4*PI)**2*FINT(EXE(FEYN(K,(P+K).K,{P},{})**2))$
ON DIV;Z;
```

$$-s * \left( \frac{1}{2} * \text{---} * \text{LOG}(S) - \frac{1}{2} * \text{---} * \text{EE} - 1 \right)$$

**Кварк-глюонная вершина.** Вершинные функции имеют много спиновых структур, коэффициенты при которых зависят от 3 переменных  $p_1^2, p_2^2, p_3^2$  (в случае 3-частичных вершин). Все интегралы берутся в функциях Спенса, но вычисления очень громоздки. Мы ограничимся вычислением расходящихся членов  $1/\epsilon$ , которые имеют структуру затра-вочной вершины и не зависят от внешних импульсов.

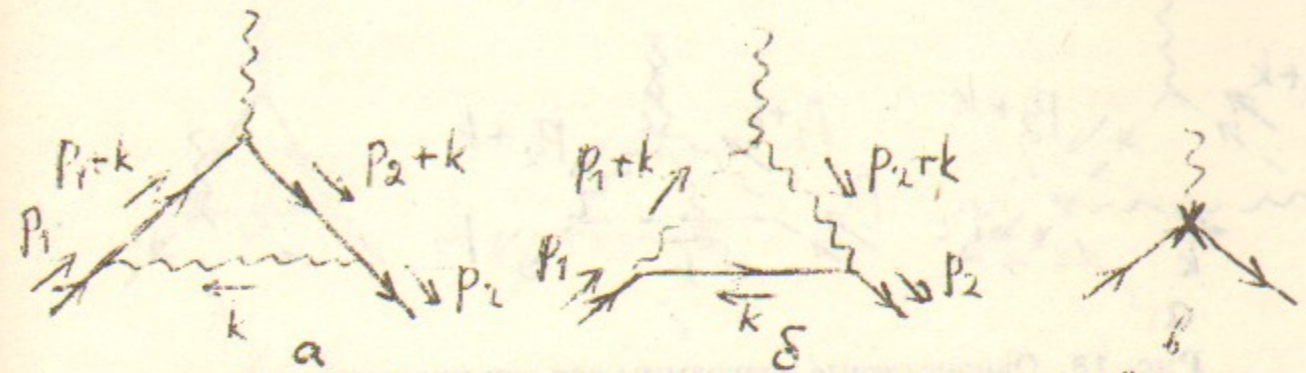


Рис. 17. Однопетлевые диаграммы для кварк-глюонной вершины

Поправка к кварк-глюонной вершине описывается диаграммами рис. 17. Вклад рис. 17а отличается от случая КЭД (при  $m = 0$ ) цветовым множителем  $-t^a/2N_c$ . Вклад рис. 17б имеет цветовой множитель  $N_c t^a$ . Учитывая также вклад контрчлена, получим

$$\Lambda_m u^a = \left( \frac{\alpha_s}{8\pi \epsilon} \frac{3N_c^2 - 1}{N_c} + \delta_g + \delta_\psi + \frac{\delta_a}{2} \right) \gamma_\mu t^a + \dots \quad (7)$$

откуда фактор перенормировки заряда

$$Z_g = 1 - (11N_c - 2n_f) \frac{\alpha_s}{24\pi \epsilon}. \quad (8)$$

```
VECTOR P1,P2;LET P1.P1=-S1,P2.P2=-S2,P1.P2=(T-S1-S2)/2;
NOSPUR F;INDEX N;
Z1:=V(N)*V(P2+K)*V(M)*V(P1+K)*V(N)$
Z1:=I*(4*PI)**2/(2*NC)*EXE(EE*FEYN(K,Z1,{P1},{P2},{})**2)$
OFF GCD;Z1:=FINT(FINT(Z1));ON GCD;
```

$$Z1 := \frac{G(F,M)}{2*NC}$$

```
REMIIND N;INDEX L1,L2;
Z2:=V(L2)*V(-K)*V(L1)*V(M,L2,L1,P2-P1,-P2-K,P1+K)$
Z2:=-I*(4*PI)**2*NC/2*EXE(EE*FEYN(K,Z2,{P1},{P2},{})**2)$
OFF GCD;Z2:=FINT(FINT(Z2));ON GCD;
```

$$Z2 := \frac{3*NC+G(F,M)}{2}$$

```
REMIIND L1,L2;SPUR F;Z:=(Z1+Z2)*V(N)/M.N;
```

$$Z := \frac{3*NC - 1}{2*NC}$$

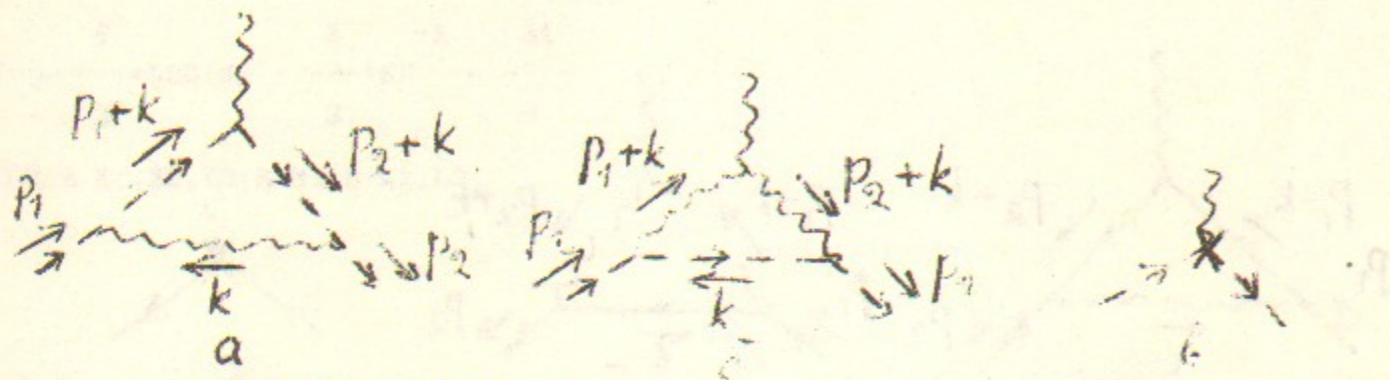


Рис. 18. Однопетлевые диаграммы для дух-глюонной вершины

Дух-глюонная вершина. Она описывается диаграммами рис. 18. Обозначая её  $g\Lambda_\mu^{abc}$  и учитывая цветовой множитель  $-\frac{N_c}{2}f^{abc}$ , получим

$$\Lambda_\mu^{abc} = f^{abc} p_\mu \left( N_c \frac{\alpha_s}{8\pi\epsilon} + \delta_g + \delta_h + \frac{\delta_A}{2} \right) + \dots \quad (9)$$

что опять даёт (8).

$$Z1 := (P1+K) \cdot P2 \cdot (P2+K) \cdot M \#$$

$$Z1 := -I * (4 * PI) ** 2 * NC / 2 * EYE(EE * FEYN(K, Z1, \{P1\}, \{P2\}, \{\})) \#$$

$$Z1 := FINT(FINT(Z1));$$

$$M \cdot P2 \cdot NC$$

$$Z1 := \frac{\dots}{8}$$

$$\text{INDEX } L1, L2;$$

$$Z2 := -K \cdot L1 \cdot P2 \cdot L2 \cdot V(M, L2, L1, P2 - P1, -P2 - K, P1 + K) \#$$

$$Z2 := -I * (4 * PI) ** 2 * NC / 2 * EYE(EE * FEYN(K, Z2, \{P1\}, \{P2\}, \{\})) \#$$

$$Z2 := FINT(FINT(Z2));$$

$$3 * M \cdot P2 \cdot NC$$

$$Z2 := \frac{\dots}{8}$$

$$(Z1 + Z2) / P2 \cdot M;$$

$$NC$$

$$\frac{\dots}{2}$$

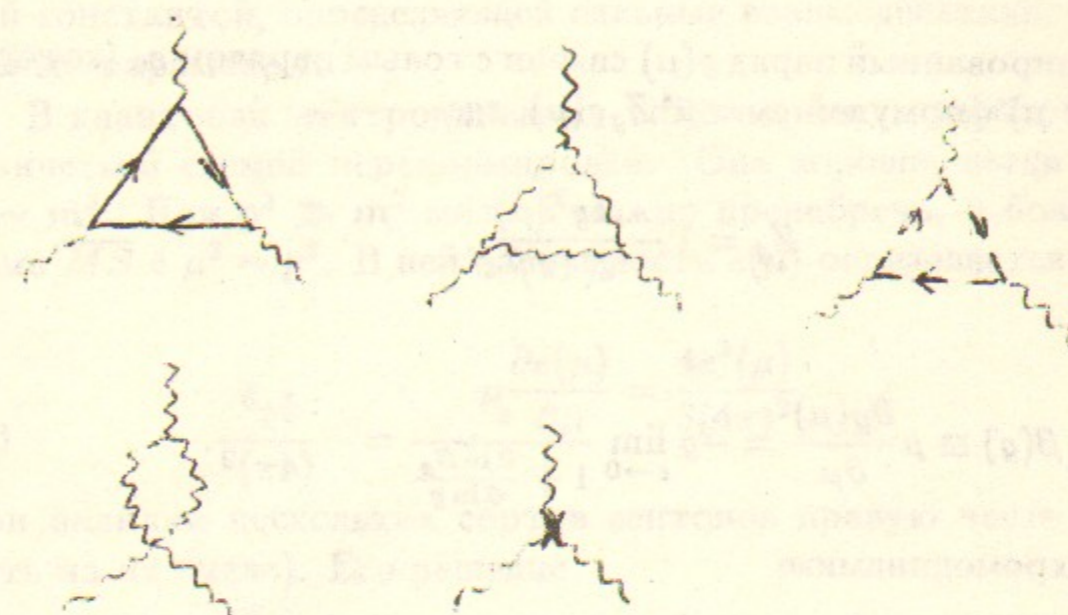


Рис. 19. Однопетлевые диаграммы для трёхглюонной вершины

Трёхглюонная вершина. Вычисление расходящейся части поправки к трёхглюонной вершине (рис. 19) несколько громоздко из-за большого числа диаграмм, и мы оставляем его в качестве упражнения. Результат имеет вид

$$\Lambda_{\mu\nu\lambda}^{abc}(p_1, p_2, p_3) = f^{abc} [\delta_{\mu\nu}(p_1 - p_2)_\lambda + \delta_{\nu\lambda}(p_2 - p_3)_\mu + \delta_{\lambda\mu}(p_3 - p_1)_\nu] \times \left( -(N_c - n_f) \frac{\alpha_s}{6\pi\epsilon} + \delta_g + \frac{3}{2}\delta_A \right) + \dots \quad (10)$$

что снова даёт (8). Тот же результат можно было бы получить и из поправки к 4-глюонной вершине.

Асимптотическая свобода. Константа связи  $g$ , а также нормировка полей кварков, глюонов и духов зависят от точки нормировки  $\mu$ . В принципе физические величины можно вычислять при любом  $\mu$ , и ответ с учётом всех порядков теории возмущений должен быть одинаковым. Однако практически можно вычислить лишь несколько первых порядков. Если выбрать  $\mu^2$  далеко от характерных  $p^2$  в данном процессе, то члены ряда теории возмущений будут содержать степени большого логарифма  $\ln \frac{p^2}{\mu^2}$ , и ряд будет плохо сходиться. Если же выбрать  $\mu^2 \sim p^2$ , то таких

логарифмов не будет, и несколько первых членов дадут хорошее приближение.

Перенормированный заряд  $g(\mu)$  связан с голым зарядом  $g_0$  (который не зависит от  $\mu$ ) формулой  $g_0 = \bar{\mu}^\epsilon Z_g g(\mu)$ , где

$$Z_g = 1 - \frac{bg^2(\mu)}{2(4\pi)^2\epsilon}.$$

Отсюда

$$\beta(g) \equiv \mu \frac{\partial g(\mu)}{\partial \mu} = -g \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{1 + \frac{\partial \ln Z_g}{\partial \ln g}} = -\frac{bg^3}{(4\pi)^2}. \quad (17)$$

В квантовой хромодинамике

$$b = \frac{11}{3}N_c - \frac{2}{3}n_f > 0 \quad \text{при} \quad n_f < \frac{11}{2}N_c. \quad (11)$$

Поэтому заряд  $g$  убывает с ростом  $\mu$  (или уменьшением характерных расстояний). Это называется асимптотической свободой. Уравнение (11) обычно записывают для  $\alpha_s$ :

$$\mu^2 \frac{\partial \alpha_s}{\partial \mu^2} = -\frac{b}{4\pi} \alpha_s^2 \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial \ln \mu^2} \frac{1}{\alpha_s(\mu^2)} = \frac{b}{4\pi}. \quad (12)$$

Его решение

$$\frac{1}{\alpha_s(\mu^2)} = \frac{1}{\alpha_s(\mu_0^2)} + \frac{b}{4\pi} \ln \frac{\mu^2}{\mu_0^2} \quad \text{или} \quad \alpha_s(\mu^2) = \frac{\alpha_s(\mu_0^2)}{1 + \frac{b}{4\pi} \alpha_s(\mu_0^2) \ln \frac{\mu^2}{\mu_0^2}}. \quad (13)$$

Можно записать его также в виде

$$\frac{1}{\alpha_s(\mu^2)} = \frac{b}{4\pi} \ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2} \quad \text{или} \quad \alpha_s(\mu^2) = \frac{4\pi}{b \ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2}}, \quad (14)$$

где  $\Lambda^2$ —константа интегрирования. Разумеется, все эти уравнения справедливы только на малых расстояниях при  $\alpha_s \ll 1$ , или  $\mu^2 \gg \Lambda^2$ . На больших расстояниях (при  $\mu^2 \sim \Lambda^2$ ) теория возмущений неприменима; эффекты в этой области ответственны за невыедание кварков (confinement). Таким образом, несмотря на то, что голый лагранжиан КХД

характеризуется безразмерной константой взаимодействия  $g_0$ , физической константой, определяющей сильные взаимодействия, является размерный параметр  $\Lambda$ .

В квантовой электродинамике тоже не всегда удобно пользоваться физической схемой перенормировки. Она хороша, когда характерные  $p^2 \sim m^2$ . При  $p^2 \gg m^2$  массой можно пренебречь, и больше подходит схема  $\overline{MS}$  с  $\mu^2 \sim p^2$ . В ней зависимость  $e(\mu)$  определяется уравнением

$$\mu \frac{\partial e(\mu)}{\partial \mu} = \frac{4e^3(\mu)}{3(4\pi)^2}$$

(при наличии нескольких сортов лептонов правую часть нужно умножить на их число). Его решение

$$\alpha(\mu^2) = \frac{\alpha(\mu_0^2)}{1 - \frac{\alpha(\mu_0^2)}{3\pi} \ln \frac{\mu^2}{\mu_0^2}}, \quad (15)$$

то есть заряд возрастает с ростом  $\mu^2$  (убывает с ростом характерных расстояний). Физически это объясняется экранировкой голого заряда виртуальными  $e^+e^-$  парами. Когда заряд достигает значений  $\sim 1$ , теория возмущений становится неприменимой.

**Поправка к сечению  $e^+e^- \rightarrow$  адроны.** В качестве конкретного примера мы вычислим радиационную поправку к полному сечению  $e^+e^- \rightarrow$  адроны в КХД. Мы увидим, как инфракрасные расходимости сокращаются в полном сечении.

Будем вычислять отношение  $R = \Gamma(\gamma^* \rightarrow \text{адроны})/\Gamma_0$  в  $d$ -мерном пространстве, где  $\Gamma_0$ —вероятность распада  $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$  в низшем порядке теории возмущений:

$$R = 1 + \delta_2 + \delta_2^* + \delta_3, \quad (16)$$

где однопетлевая поправка к матричному элементу  $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$  рис. 20 в левой и правой части квадратированной диаграммы рис. 21 даёт  $\delta_2$  и  $\delta_2^*$ , а распад  $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g$  в древесном приближении рис. 22— $\delta_3$ .

Программа вычисляет вклад однопетлевой поправки к вершине рис. 20а в  $\delta_2$ . Интеграл по фейнмановским параметрам в  $d$ -мерном пространстве вычисляется при помощи формулы

$$\int x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} dx_1 dx_2 = \frac{\Gamma(1+a_1)\Gamma(1+a_2)\Gamma(1+a_3)}{\Gamma(3+a_1+a_2+a_3)} \quad (17)$$

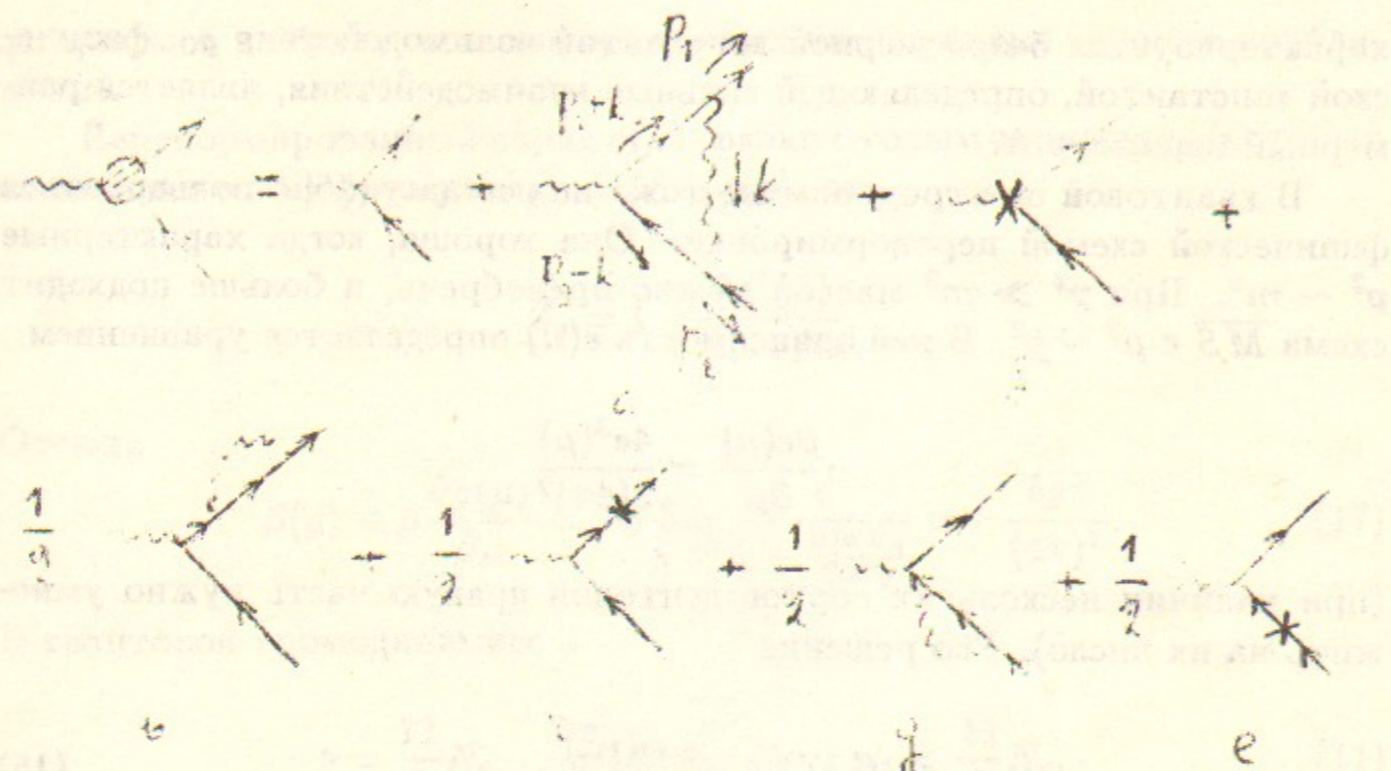


Рис. 20. Диаграммы для  $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$  в однопетлевом приближении



Рис. 21. Квадрированная диаграмма для  $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$

(где  $x_3 = 1 - x_1 - x_2$ ), получаемой заменой  $x_2 = x_1 z$ . Вклад контрчлена рис. 20б сокращает ультрафиолетовую расходимость рис. 20а. Мы не рассматривали перенормировку кварк-фотонной вершины в КХД, поэтому программа выделяет эту ультрафиолетовую расходимость и получает

$$\delta_c = -C_F \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{1}{\epsilon}$$

Конечно, этот контрчлен можно было бы получить из известной ультра-

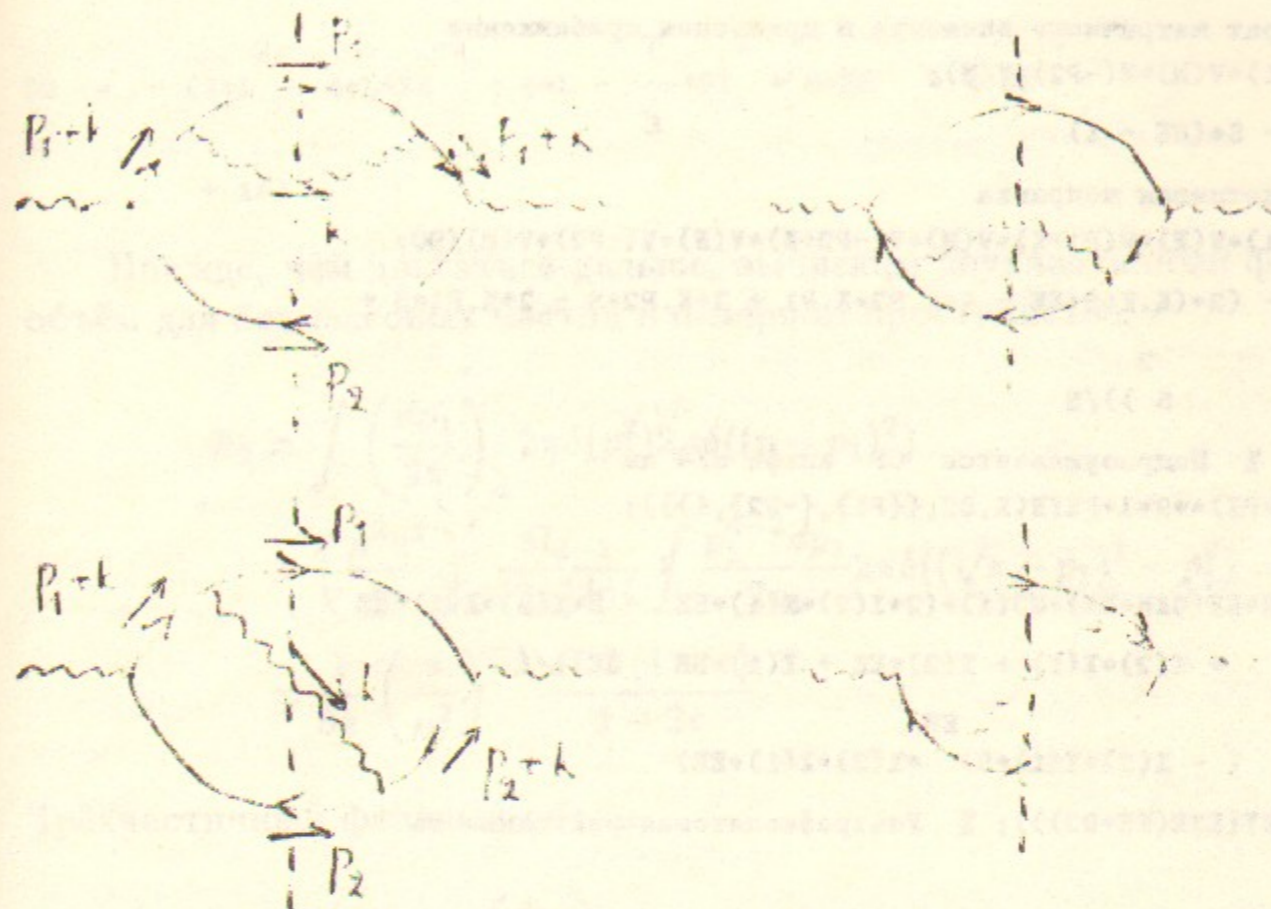


Рис. 22. Квадрированные диаграммы для  $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g$

фиолетовой расходимости вершины в КЭД (§2) домножением на цветовой множитель  $C_F$ . Вклад петлевой поправки к внешней линии равен 0, т. к. при  $p^2 = 0$  она сводится к интегралу типа (1.17). Это—результат сокращения ультрафиолетовой и инфракрасной расходимости: этот вклад можно условно записать как

$$-C_F \frac{\alpha_s}{8\pi} \left( \frac{1}{\epsilon_{UV}} - \frac{1}{\epsilon_{IR}} \right)$$

Вклад контрчлена рис. 20г сокращает содержащуюся здесь ультрафиолетовую расходимость. Вклады рис. 20д, е совпадают с рис. 20в, г. В итоге мы видим, что вклады контрчленов сократились, т. е.  $\delta_2$  даётся вкладом рис. 20а. Все расходимости в этом результате инфракрасные.

Полученная поправка является комплексной при  $p^2 > 0$  из-за  $L = \ln \frac{-p^2}{\mu^2}$ . Мнимая часть сокращается с сопряжённым вкладом поправки к правой вершине квадрированной диаграммы рис. 21. Однако член  $L^2$  даёт ненулевой след этой мнимой части  $\pi^2$ .

```

MASS P1=0,P2=0;MSHELL P1,P2;LET P1.P2=S/2;INDEX M,W;VECTOR K,!=P;
OPERATOR V,S;FOR ALL P LET V(P)=G(F,P),S(P)=G(F,P)/P.P;

```



```

% Квадрат матричного элемента в древесном приближении
D0:=V(P1)*V(M)*V(-P2)*V(M);
D0 := - S*(EE - 1)
% Однопетневая поправка
D2:=V(P1)*V(M)*V(P1+K)*V(M)*V(-P2+K)*V(M)*V(-P2)*V(M)/D0;
D2 := - (2*(K.K*S*EE - 4*K.P2*K.P1 + 2*K.P2*S - 2*K.P1*S +
          2
          S ))/S
ON GCD; % Подразумевается CF альфа s/4 пи
D2:=- (4*PI)**2*I*FEYN(K,D2,{P1},{-P2},{});
D2 := (2*EX(GAM*EE)*GO(1)*(2*X(2)*X(1)*EE - 3*X(2)*X(1)*EE
      + X(2)*X(1) + X(2)*EE + X(1)*EE - EE))/(
      EE
      (- X(2)*X(1)*S) *X(2)*X(1)*EE)
FINT(FINT(EXE(EE*D2))); % Ультрафиолетовая расходимость
1
LET (-S*X(1)*X(2))**EE=EX(L*EE)*X(1)**EE*X(2)**EE;D2:=D2$
CLEAR (-S*X(1)*X(2))**EE;
% Вычисление интеграла по фейнмановским параметрам
OPERATOR F;
D2:=D2*X(1)**(1+EE)*X(2)**(1+EE)*F(-1-EE,-1-EE)$
FOR ALL M,N LET X(1)*F(M,N)=F(M+1,N),X(2)*F(M,N)=F(M,N+1);
D2:=D2$
FOR ALL M,N CLEAR X(1)*F(M,N),X(2)*F(M,N);
FOR ALL M,N LET F(M,N)=G1(1+M)*G1(1+N)/G1(3+M+N);D2:=D2;
D2 := -----
          2      2
          EX(GAM*EE)*GO(1)*GO(-1) *(2*EE - EE + 2)
          2
          EX(L*EE)*GO(-2)*EE *(2*EE - 1)
FOR ALL M,N CLEAR F(M,N);
ON DIV;D2:=EXE(D2); % Разложение по EE
D2 := - (L - 2*L*EE - 3*L - ----*PI + 3*EE -1 + 2*EE -2
          6
          8)
% Добавление сопряженного вклада
D2:=SUB(L=L-I*PI,D2)$D2:=D2+SUB(I=-I,D2);OFF DIV;

```

$$D2 := - (2*L^2 - 4*L*EE^{-1} - 6*L - \frac{7}{3}*PI + 6*EE^{-2} + 4*EE^{-1} + 16)$$

Прежде, чем двигаться дальше, вычислим двухчастичный фазовый объём для безмассовых частиц в  $d$ -мерном пространстве:

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \int \left( \frac{dp_1}{2\pi} \right)_d 2\pi\delta(p_1^2) 2\pi\delta((p-p_1)^2) \\ &= \left( \frac{\mu^2 e^\gamma}{4\pi} \right)^\epsilon \frac{\Omega_{d-1}}{(2\pi)^{d-1}} \int \frac{p_1^{d-2} dp_1}{2p_1} 2\pi\delta((\sqrt{s}-p_1)^2 - p_1^2) \\ &= \frac{1}{8\pi} \left( \frac{s}{\mu^2} \right)^{-\epsilon} \frac{e^{\gamma\epsilon} \Gamma(1-\epsilon)}{1-2\epsilon}. \end{aligned}$$

Трёхчастичный фазовый объём

$$\begin{aligned} d\Phi_3 &= \left( \frac{dp_1}{2\pi} \right)_d \left( \frac{dp_2}{2\pi} \right)_d 2\pi\delta(p_1^2) 2\pi\delta(p_2^2) 2\pi\delta((p-p_1-p_2)^2) \\ &= \left( \frac{\mu^2 e^\gamma}{4\pi} \right)^{2\epsilon} \frac{\Omega_{d-1} \Omega_{d-2}}{(2\pi)^{2(d-1)}} \frac{p_1^{d-2} dp_1 p_2^{d-2} dp_2 \sin^{d-3} \vartheta d\vartheta}{4p_1 p_2} \\ &\quad \times 2\pi\delta((\sqrt{s}-p_1-p_2)^2 - p_1^2 - p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos \vartheta). \end{aligned}$$

Вводя  $p_{1,2} = \frac{\sqrt{s}}{2} x_{1,2}$ , мы получим

$$\cos \vartheta = \frac{x_3^2 - x_1^2 - x_2^2}{2x_1 x_2},$$

где  $x_3 = 2 - x_1 - x_2$ , и

$$\begin{aligned} d\Phi_3 &= \frac{s}{128\pi^3} \left( \frac{s}{\mu^2} \right)^{2\epsilon} \frac{e^{2\gamma\epsilon}}{(1-2\epsilon)\Gamma(1-2\epsilon)} \\ &\quad \times [(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)]^{-\epsilon} dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

```

LET 4**EE=2**(2*EE); % Двухчастичный фазовый объём
F2:=2*PI*EX(GAM*EE)/(4*PI)**EE*2*PI**((D-1)/2)/G1((D-1)/2)
/(2*PI)**(D-1)*(SQRT(S)/2)**(D-3)/(4*SQRT(S));

```

```

EX(GAM*EE)*GO(-1)
F2 := -----
      EE
      8*S *GO(-2)*PI*(2*EE - 1)
CLEAR 4**EE;
LET 4**(2*EE)=2**(4*EE); % Трехчастичный фазовый объем
F3:=EX(2*GAM*EE)/(4*PI)**(2*EE)/(2*PI)**(2*(D-1))
      *2*PI**((D-1)/2)/G1((D-1)/2)*2*PI**((D-2)/2)/G1((D-2)/2)
      *(SQRT(S)/2)**(2*(D-2))*(X1*X2)**(D-3)/4*(2*PI)/(S/2*X1*X2)
      *SUB(C=((2-X1-X2)**2-X1**2-X2**2)/(2*X1*X2),(1-C**2)**((D-4)/2))$
CLEAR 4**(2*EE);
FF:=4*(1-X1)*(1-X2)*(X1+X2-1)$
F3:=F3*FF**EE/(2**(2*EE)*(1-X1)**EE*(1-X2)**EE*(X1+X2-1)**EE);
F3 := - (EX(2*GAM*EE)*S)/(128*S * (X1 + X2 - 1) *
      ( - X2 + 1) * ( - X1 + 1) *GO(-2)*PI *(2*EE - 1))
CLEAR FF;

```

Программа получает вероятность распада  $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g$ , делённую на  $\Gamma_0$  (это  $d$ -мерное обобщение формулы [5] (2.3))

$$\frac{dR}{dx_q dx_{\bar{q}}} = C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{x_q^2 + x_{\bar{q}}^2 - \epsilon x_g^2}{(1-x_q)(1-x_{\bar{q}})} \times \left(\frac{s}{\mu^2}\right)^{-\epsilon} \frac{e^{\gamma\epsilon}}{\Gamma(1-\epsilon)} [(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)]^{-\epsilon}. \quad (18)$$

Интегрируя это выражение при помощи замены  $x_{1,2} = 1 - y_{1,2}$  и формулы (17), программа получает поправку  $\delta_3$ , содержащую инфракрасные расходимости. При сложении с двухчастичным вкладом все эти расходимости сокращаются, и остаётся конечный результат для полного сечения

$$R = 1 + 3C_F \frac{\alpha_s}{4\pi}. \quad (19)$$

```

% Распад на q анти -q g
MASS K=0;MSHELL K;
LET P1.P2=S/2*(X1+X2-1),P1.K=S/2*(1-X2),P2.K=S/2*(1-X1);
OFF GCD;
D31:=-V(P1)*V(N)*S(P1+K)*V(M)*V(-P2)*V(N)*S(P1+K)*V(N)$
D32:=-V(P1)*V(N)*S(P1+K)*V(M)*V(-P2)*V(N)*S(-P2-K)*V(M)$

```

```

D3:=D31+D32$CLEAR D31,D32;
D3:=D3+SUB(X1=X2,X2=X1,D3)$ON GCD;D3:=D3/DO$
LET S**EE=EX(L+EE);D3:=(4*PI)**2*D3*F3/F2;
D3 := - (2*EX(2*GAM*EE)*(X1 *EE - X1 + 2*X1*X2*EE - 4*X1*
      EE + X2 *EE - X2 - 4*X2*EE + 4*EE))/(
      (X1 + X2 - 1) * ( - X2 + 1) * ( - X1 + 1) *EX(L+EE
      + GAM*EE)*GO(-1)*(X1*X2 - X1 - X2 + 1))
CLEAR S**EE;CLEAR F2,F3;
% Вычисление интеграла
D3:=SUB(X1=1-Y1,X2=1-Y2,D3)$
D3:=D3*Y1**(1+EE)*Y2**(1+EE)*(1-Y1-Y2)**EE*F(-1-EE,-1-EE,-EE)$
FOR ALL L,M,N LET Y1*F(L,M,N)=F(L+1,M,N),Y2*F(L,M,N)=F(L,M+1,N);
D3:=D3$
FOR ALL L,M,N CLEAR Y1*F(L,M,N),Y2*F(L,M,N);
FOR ALL L,M,N LET F(L,M,N)=G1(1+L)*G1(1+M)*G1(1+N)/G1(3+L+M+N);
D3:=D3;
D3 := -
      4*EX(2*GAM*EE)*GO(-1) *(2*EE - 5*EE + 6*EE - 2)
      -----
      EX(L+EE + GAM*EE)*GO(-3)*EE *(9*EE - 9*EE + 2)
FOR ALL L,M,N CLEAR F(L,M,N);
ON DIV;D3:=EXE(D3);D:=D2+D3;
D3 := 2*L - 4*L*EE - 6*L - ----*PI + 6*EE - 4*EE + 19
      3
D := 3

```

## Литература

1. Hearn A. C. REDUCE User's Manual. —RAND Corporation, pub. CP78, rev. 7/87, 1987.
2. Грозин А. Г. // Препришты ИЯФ 88-118, 136, 140.—Новосибирск, 1988.
3. Грозин А. Г. // Препринт ИЯФ 90-42.—Новосибирск, 1990.
4. Грозин А. Г. // Препринт ИЯФ 90-71.—Новосибирск, 1990.
5. Грозин А. Г. // Препринт ИЯФ 90-62.—Новосибирск, 1990.
6. Коллинз Дж. Перенормировка. —М.: Мир, 1988.
7. Pascual P., Tarrach R. QCD: renormalization for the practitioner. // Lecture notes in physics 194.—Springer-Verlag, 1984.
8. Leibbrandt G. // Rev. Mod. Phys.—1975.—V. 47.—P. 849.
9. Narison S. // Phys. Reports—1982.—V. 84.—P. 263.
10. Pyin V. F., Kryukov A. P., Rodionov A. Ya., Taranov A. Yu. // SIGSAM Bulletin—1989.—V. 23, n. 4.—P. 15; // CPC—1989.—V. 57.—P. 505
11. Cvitanovic P. Group theory, part 1. —Nordita, 1984.
12. Stuart R. G. // CPC—1988.—V. 48.—P. 367; Stuart R. G., Gognora T. A. // CPC—1990.—V. 56.—P. 337.
13. Surguladze L. R., Tkachov F. V. // CPC—1989.—V. 55.—P. 205.

А.Г.Грозин

## СИСТЕМА REDUCE В ФИЗИКЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ. РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ.

Препринт 91-46

Работа поступила 25 апреля 1991 г.

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Подписано к печати 25 апреля 1991 г.

Формат бумаги 60x90 1/16. Объем 3,4 печ.л.,; 2,7 уч.-изд.л.

Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ № 46.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90.