ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

О.К. Воров

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОЙ ДИНАМИКИ КОЛЛЕКТИВНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ С БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДОЙ В ТЯЖЕЛЫХ ЯДРАХ.
I. ПРОСТАЯ МОДЕЛЬ

ПРЕПРИНТ 90-137

НОВОСИБИРСК

Современные методы
построения эффективной динамики
коллективных возбуждений
с большой амплитудой в тяжелых ядрах.
I. Простая модель

О.К. Воров

Институт ядерной физики
630090, Новосибирск 90, СССР

АННОТАЦИЯ

Метод функционального интеграла применяется для построения эффективного гамильтониана, описывающего коллективные возбуждения большой амплитуды в конечной системе взаимодействующих фермионов. Алгоритм построения рассмотрен на примере простой системы с двухчастичным взаимодействием. Показано, что динамика произвольно больших флуктуаций среднего поля в рассматриваемой системе сходна с динамикой ротатора в пространстве с псевдоевклидовой метрикой.

В теории структуры тяжелых четно-четных ядер задача построения динамики коллективных возбуждений ставится следующим образом: взаимодействие нуклонов считается заданным и определяется неким гамильтонианом (в простейшем случае двухчастичным), одночастичный фермионный базис может быть, например, оболочечным. Цель «микроскопической» теории — получить, исходя из заданного «микроскопического», «коллективный» гамильтониан, который должен адекватно описывать экспериментальную спектроскопическую информацию — энергетические интервалы и вероятности E2-переходов между низколежащими состояниями.

Сложность данной задачи связана с необходимостью рассматривать большие амплитуды коллективного движения при сильной его нелинейности (учитывая связь с большим количеством одночастичных мод), а также с тем, что результирующие коллективные возбуждения подчиняются иному типу статистики, нежели исходные объекты — нуклоны; первые во многом схожи с бозонами [1, 2], однако их статистика носит, скорее всего, некий промежуточный характер.

Многообещающей выглядит попытка применения в данной задаче метода фейнмановского интеграла, использованная в работах Негеле, Левита, Раинхардта и др. [3, 4]. Перечислим преимущества этого подхода. Во-первых, рассмотрение динамики системы в представлении функционального интеграла ФИ допускает выполнение значительной части выкладок на языке классических (c-числовых) переменных, что во многих случаях проще и физически нагляднее, чем манипулирование в операторном формализме.

Метод ФИ обеспечивает и большую строгость при осуществлении замен переменных на промежуточных этапах вывода эффективной динамики коллективной моды (на операторном языке необходимо следить за большим количеством матричных элементов операторов). Тем не менее, метод ФИ позволяет переходить там, где это удобно, на операторный формализм. Во-вторых, не возникает необходимости искусственно вводить дополнительные представления, как это делается в методе обобщенной матрицы плотности [5]. В-третьих, квантование коллективных степеней свободы осуществляется в методе ФИ на самом последнем этапе, что особенно важно в связи с нестандартностью статистики коллективных возбуждений. Поскольку движение с большой амплитудой трудно описать на бозонном языке, приспособленном для малых колебаний, метод ФИ, в котором представление о бозонах не вводится a priori, дает преимущество перед обычными подходами [6].

Обычно метод ФИ используется в данной задаче следующим образом: путем точной замены переменных теория переформулируется в терминах некоего зависящего от времени среднего поля, затем в ФИ тем или иным способом отбираются траектории, дающие в ФИ главный вклад; данный подкласс путей в пространстве конфигураций среднего поля и задает эффективную квантовую механику для уже небольшого числа коллективных переменных, параметризующих этот подкласс траекторий [4]. Такой подход встречает трудности, связанные с сильной нелинейностью и нелокальностью по времени эффективного лагранжиана для среднего поля [4]. В работе автора [7] был сформулирован метод «эффективной киральной динамики» для произвольной многочастичной ферми-системы, позволяющий избавиться от сильной временной нелокальности в лагранжиане и сильно упростить задачу. Суть его состоит в переходе в ФИ от интегрирования по параметрам эффективного среднего потенциала, создаваемого частицами, к интегрированию по «данным рассеяния» на этом потенциале. От метода адиабатических разложений [8, 9] данная методика отличается тем, что здесь диагонализуется не только мгновенный одночастичный гамильтониан, а гамильтониан с учетом всех неадиабатических поправок, так что в результате оказываются просуммированными все порядки адиабатического разложения.

В данной работе путь построения коллективного гамильтониана прослеживается на примере упрощенной многочастичной ферми-системы.

Рассмотрим систему нерелятивистских фермионов, взаимодействующих посредством двухчастичных сил. Ее динамика описывается гамильтонианом, записанным во вторично-квантованной форме,

$$H = e_i c_i^+ c_i + \frac{1}{2} c_i^+ c_k V_{ik,i'k'} c_{i'}^+ c_{k'}, \qquad (1)$$

где мы не конкретизируем пока вид матрицы взаимодействия V и одночастичный базис (он может быть оболочечным или хартри — фоковским), а c_i^+, c_i — стандартные ферми-операторы рождения и уничтожения*).

Для исследования коллективной динамики системы удобно рассмотреть след оператора эволюции системы $\mathcal{G}(T) = \mathrm{Tr}[e^{-iHT}]$. Используя эту величину (называемую далее для краткости статсуммой), удобно перейти к функциональному представлению и ввести бозевские переменные, связанные с коллективными степенями свободы. Для этого воспользуемся хорошо известной процедурой Хаббарда — Стратоновича [3], представив статсумму в виде:

$$\mathcal{G}(T) = \int D\{\Phi(t)\} \exp\left[i/2 \int_0^T dt\, \Phi_{ik}(t) (V^{-1})_{ik,i'k'} \Phi_{i'k'}(t)\right] \times$$

$$\times \mathrm{Tr}\left\{T \exp\left[-i \int_0^T dt\, (e_i \delta_{ik} + \Phi_{ik}(t))\, c_i^+ c_k\right]\right\}. \qquad (2)$$

Здесь $\Phi_{ik}(t)$ — набор c-числовых переменных, T перед экспонентой означает хронологическое произведение. Таким образом, мы приходим к замкнутой квантовомеханической теории для поля $\Phi(t)$, функционал действия в которой имеет вид ($G[\Phi]$ — функция Грина фермиона во внешнем поле Φ):

$$S|\Phi| = \int_0^T dt \left[\frac{1}{2} \Phi_{ik}(t) (V^{-1})_{ik,i'k'} \Phi_{i'k'}(t) - \mathrm{tr}\,(\log G^{-1}|\Phi|)\right]. \qquad (3)$$

В силу существенной нелокальности и нелинейности действия S в выражении (3) трудно осуществить разделение коллективных и одночастичных степеней свободы. Эту трудность позволяет обойти метод введения киральных переменных [7]. От интегрирования в (2) по полю $\Phi(t)$ мы перейдем к интегрированию по параметрам

*) Всюду подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

оператора эволюции фермионов, находящихся в поле $\Phi(t)$. Введем матрицу $U(t, t_0)$, описывающую эволюцию гейзенберговских ферми-операторов, и соответствующий оператор эволюции (ОЭ) $\hat{U}(t)$:

$$c_i(t) = U_{ik}(t, t_0)\, c_k(t_0), \quad c_i(t) = U_{ik}(t)\, c_k = \hat{U}(t)\, c_i \hat{U}^{-1}(t)\,, \tag{4}$$

$$U_{ik}(t, t_0) = U_{il}(t)\,(U^{-1}(t_0))_{lk}\,. \tag{4a}$$

Матрица $U(t, t_0)$ удовлетворяет уравнению движения с начальным условием

$$i\,\partial/\partial t\, U(t, t_0) = (e_i \delta_{ik} + \Phi_{ik}(t))\, U(t, t_0)\,, \quad U(t_0, t_0) = I\,. \tag{5}$$

Осуществим в (2), (3) переход к «киральным переменным», описывающим точный оператор временной эволюции (ОЭ) для фермионов во внешнем поле $h = h^0 + \Phi(t)$. ОЭ, в случае Ω фермионных состояний, является элементом группы $U(\Omega)$. Рассмотрим функционал I, определенный следующим образом:

$$I = \int D\{U\}\, \delta[\, h^0 + \Phi(t) - i\,(\partial/\partial t\, U)\, U^+]\, \mathrm{Det}\,[\, i\partial_t - [\, i\dot{U}_\Phi U_\Phi^+, \ldots]\,]\,. \tag{6}$$

Здесь $D\{U\}$ означает стандартную меру на группе $U(\Omega)$ [10]. Легко показать, используя свойства δ-функций и разлагая U вблизи U_Φ, определяемого как решение уравнения

$$i\dot{U}_\Phi U_\Phi^+ = h^0 + \Phi(t)\,, \tag{7}$$

что функционал I сводится к выражению

$$I = \sum_r \mathrm{sign}\,(\mathrm{Det}\,\{i\partial_t - [\, i\dot{U}_{\Phi, r} U_{\Phi, r}^+, \ldots]\})\,, \tag{8}$$

где целый индекс r определяет различные решения уравнения (7), таким образом, I совпадает с определяемой в топологии характеристикой — «степенью отображения» пространства $\{\Phi_{ik}(t)\}$ на многообразие $\{U_{ik}(t)\}$ [11]. Являясь целым числом, I представляет собой разность числа решений (7), для которых $\mathrm{Det}\{i\partial_t - [i\dot{U}_\Phi U_\Phi^+, \ldots]\}$ положителен, R_+, и числа решений с отрицательным значением детерминанта R_-. Разумно определить отображение так, чтобы его степень $I = R_+ - R_-$ равнялась единице, и, более того, чтобы оно было однозначным (каждой траектории $\Phi_{ik}(t)$ соответствовала только одна траектория $U_\Phi(t)$), этому соответствует постоянство знака функционального определителя. После этого величина $I = \mathrm{const}$ может быть внесена под знак функционального интеграла. Осуществляя затем интегрирование по

$\Phi_{ik}(t)$, получаем выражение для статсуммы через новые переменные:

$$\mathcal{G}(T) = \int D\{U\} \exp\left\{ i/2 \int_0^T dt\, [\, h^0_{ik} - i\,(\dot{U} U^+)_{ik}]\, V^{-1}_{ik, i'k'} [\, h^0_{i'k'} - i\,(\dot{U} U^+)_{i'k'}] \right\} \times$$

$$\times\, \mathrm{Det}\,\{ i\partial_t - [\, \dot{U} U^+, \ldots]\,\}\, \mathrm{Tr}\,[\, U(t)\, U^+(0)\,]\,. \tag{9}$$

Легко показать, что статсумма $G(T)$ (9) описывает теорию с действием, не содержащим нелокальных по времени функционалов, лагранжиан данной теории зависит лишь от групповых параметров и их первых производных.

В дальнейшем мы будем рассматривать систему N бесспиновых фермионов, занимающих уровни одномерного гармонического осциллятора. Взаимодействие взято в виде суммы факторизованных частично-дырочных слагаемых, так что система описывается следующими формулами:

$$E_j = e(j + 1/2)\,, \qquad j, k = 0, 1, 2, \ldots \infty$$

$$V_{jk, j'k'} = q_a\, q_{a, jk}\, q_{a, j'k'} + f_b\, \delta_{ik}\, g_{b, jk}\,, \qquad a = 0, 1, 2; \quad b = 1, 2; \tag{10}$$

где q_a и f_b ($q_a > 0$) — параметры взаимодействия, а коэффициенты $g_{a, jk}$ определены следующим образом:

$$g_{0, jk} = \delta_{jk}(j + 1/2)\,,$$

$$g_{1, jk} = \frac{1}{4i}\left(\sqrt{(j+1)k}\ \delta_{k, j+2} - \sqrt{j(k+1)}\ \delta_{j, k+2}\right),$$

$$g_{2, jk} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{(j+1)k}\ \delta_{k, j+2} + \sqrt{j(k+1)}\ \delta_{j, k+2}\right). \tag{11}$$

Для описания среднего поля в данной задаче достаточно трех переменных Φ_a ($a = 0, 1, 2$); при этом матрица V_{ab} диагональна ($V_{00} = q_0$, $V_{11} = q_1$, $V_{22} = q_2$), а зависящий от времени одночастичный гамильтониан $h(t)$, включающий «оболочечные» энергии и флуктуирующее среднее поле, создаваемое частицами, принимает вид:

$$h(t) = 2eK_0 + F_1 K_1 + F_2 K_2 + \Phi_0 K_0' + \Phi_1 K_1' + \Phi_2 K_2'\,,$$

$$F_b = N f_b\,, \tag{12}$$

где комбинированные операторы K_a определены выражениями

$$K_a = g_{a,jk} c_j^+ c_k . \qquad (13)$$

Переходя к киральным переменным, $\hat{U}(t)$ (4) представим в виде оператора конечных вращений для SU(1,1) (это можно сделать в силу замкнутости тройки операторов K_a относиттельно коммутации):

$$\hat{U}(t) = \exp(-i\alpha(t)\,K_0)\,\exp(-i\beta(t)\,K_2)\,\exp(-i\gamma(t)\,K_0)\,, \qquad (14)$$

где введены зависящие от времени «углы Эйлера». Рассматривая действие оператора $U(t)$ на слэтеровские детерминанты, составленные из одночастичных волновых функций референтного базиса, $|i\rangle$, можно заметить, что переменные α и β описывают деформации коллективного поля $\Phi(t)$, в то время как переменная γ имеет смысл общего масштаба квазиэнергий в периодически меняющемся внешнем поле Φ. Таким образом, переменные α и β периодически меняются со временем, а на переменную γ периодичесних условий не накладывается. С учетом этого получаем, что след ОЭ за период дается канонической статсуммой по всем возможным способам заполнения квазичастичных уровней при фиксированном полном числе частиц N:

$$\mathrm{Tr}\,[\,U(T,0)\,] = \sum_{\{n_j\}} \exp(-i\,(\gamma(T)-\gamma(0))\,n_j\,(j+1/2)\,. \qquad (15)$$

Выразим старые переменные — компоненты поля $\Phi(t)$ через новые переменные — углы Эйлера (киральные переменные), пользуясь уравнением движения для ОЭ (5), (14) и формулой Фейнмана для дифференцирования операторных экспонент [12]:

$$\Phi_0(t) = \dot{\alpha}(t) + \dot{\gamma}(t)\,\mathrm{ch}\,\beta(t) - 2e\,,$$

$$\Phi_1(t) = \dot{\gamma}(t)\,\mathrm{sh}\,\beta(t)\cos\alpha(t) - \dot{\beta}(t)\sin\alpha(t) - F_1\,,$$

$$\Phi_2(t) = \dot{\gamma}(t)\,\mathrm{sh}\,\beta(t)\sin\alpha(t) + \dot{\beta}(t)\cos\dot{\alpha}(t) - F_2\,. \qquad (16)$$

Отметим, что данные уравнения, если опустить в них постоянные слагаемые в правых частях и сделать замену $(\beta \to i\beta)$, совпадают с кинематическими уравнениями Эйлера в задаче о вращении твердого тела [13], являясь их аналогом для случая псевдоевклидовой метрики, когда в качестве генераторов поворотов выступают генераторы SU(1,1). В результате для статсуммы $G(T)$ имеем

$$\mathscr{G}(T) = \int D\{\alpha(t)\}\,D\{\beta(t)\}\,\mathrm{sh}\,\beta(t)\,D\{\tilde{\gamma}(t)\}\times$$
$$\times\exp\left\{i\int_0^T dt\left(L_0\{\alpha,\beta\} + G(\alpha,\beta)\,\frac{\dot{\gamma}^2}{2} + A\{\alpha,\beta\}\,\dot{\gamma}\right)\right\}\times$$
$$\times\mathrm{Det}\,\{\partial_t - [\,\dot{U}U^+,\ldots]\}\,Z\,, \qquad (17)$$

где лагранжиан $L_0\{\alpha,\beta\}$, не зависящий от переменной γ, дается формулой:

$$L_0\{\alpha,\beta\} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{q_0}\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2\left(\frac{1}{q_1}\cos^2\alpha + \frac{1}{q_2}\sin^2\alpha\right)\right] - 2e\dot{\alpha}/q_0 +$$
$$+\mathrm{sh}\,\beta\left(\frac{F_1}{q_1}\sin\alpha + \frac{F_2}{q_2}\cos\alpha\right)\dot{\alpha} + \frac{1}{2}\left(\frac{4e^2}{q_0} + \frac{F_1^2}{q_1} + \frac{F_2^2}{q_2}\right), \qquad (18)$$

коэффициенты $G(\alpha,\beta)$ и $A\{\alpha,\beta\}$ определяются следующими выражениями

$$G(\alpha,\beta) = \frac{1}{q_0}\mathrm{ch}^2\beta + \mathrm{sh}^2\beta\left(\frac{\cos^2\alpha}{q_1} + \frac{\sin^2\alpha}{q_2}\right),$$

$$A\{\alpha,\beta\} = \frac{1}{q_0}\mathrm{ch}^2\beta\dot{\alpha} + \frac{q_1-q_2}{2q_1q_2}\mathrm{sh}\,\beta\sin(2\alpha)\,\dot{\beta} - \frac{2e}{q_0}\mathrm{ch}\,\beta -$$
$$-\frac{F_1}{q_1}\mathrm{sh}\,\beta\cos\alpha - \frac{F_2}{q_2}\mathrm{sh}\,\beta\sin\alpha\,, \qquad (19)$$

а Z определяется выражением (15).

Важно отметить, что интегрирование в (17) ведется в функциональном пространстве $\{\alpha,\beta,\gamma\}$, вообще говоря, по незамкнутым траекториям, и знак «тильда» в (17) означает, что включаются траектории, начальное и конечное значения γ на которых могут различаться на величину в пределах от 0 до 2π, в то время как переменные α и β подчиняются обычным периодическим условиям: $\beta(T) = \beta(0)$, $\alpha(T) = \alpha(0) + 2\pi k$ (k — целое). Имея в виду получение в дальнейшем эффективного гамильтониана, хотелось бы привести статсумму $G(T)$ к стандартному виду (сумма вкладов от замкнутых траекторий). Это будет достигнуто за счет взятия интеграла по $D\{\tilde{\gamma}\}$, для чего необходимо вычислить входящий в (17) детерминант и преобразовать статсумму Z. Нетрудно показать, что функциональный детерминант в (17) совпадает с $\mathrm{Det}\,(\partial_t - \dot{\gamma})$ и равен $\sin((\gamma(T)-\gamma(0))/2)$ с точностью до функциональной константы. Как отмечалось выше, условием взаимной однозначности отображения $\Phi \to U$ является знакопостоянство этого определителя. Для этого мы должны потребовать выполнения условия $0 \leqslant \gamma(T) - \gamma(0) < 2\pi$ для значений переменной на концах временного интервала, что соответствует учету в (17) только траекторий с нулевым числом наматывания на окружность $0{,}2\pi$.

Сумма по всем наборам чисел заполнения $\{n_j\}$ уровней квазиэнергии, Z, может быть преобразована следующим образом. Во-первых, применяя классификацию многочастичных конфигураций, использующую $SU(1,1)$, представим Z в виде:

$$Z = \sum_{k, w, \delta} \exp\left\{-i\int_0^T dt \dot{\gamma}(t)\, w\right\},$$

где сумма берется по всем значениям полного момента группы $SU(1,1)$, k, его нулевой проекции w $(w \geqslant k)$, а также дополнительному квантовому числу δ, нумерующему индивидуальные возбужденные состояния с одинаковыми значениями k и w. Сумму по w вычислим, заменяя w на $k+n$, где n — положительное целое число, и суммируя по всем n имеем:

$$Z = \frac{1}{i \sin(\gamma(T) - \gamma(0))} \sum_{k, \delta} \exp\left\{-\frac{i}{2}\left(k - \frac{1}{2}\right)\int_0^T dt \dot{\gamma}(t)\right\}. \tag{20}$$

Возникший знаменатель в точности сокращается с вычисленным ранее функциональным детерминантом; остающаяся сумма по k и δ по сути дела отвечает возможности возбуждений, заключающихся в индивидуальной переброске частиц с одного уровня квазиэнергий на другой.

Статсумма $G(T)$, таким образом, может быть приведена к следующему виду:

$$\mathscr{G}(T) = \sum_{k, \delta} \int D\{\alpha\}\, D\{\beta\} \operatorname{sh}\beta \exp\left\{i\int_0^T dt\, L\{\alpha, \beta\}\right\} I\{\alpha, \beta\}, \tag{21}$$

где функционал I определяется континуальным интегралом

$$I\{\alpha, \beta\} = \int D\{\bar{\gamma}\} \exp\left\{i\int_0^T dt \left[\frac{1}{2} G(\alpha, \beta)\dot{\gamma}^2 + \left(A\{\alpha, \beta\} - k + \frac{1}{2}\right)\dot{\gamma}\right]\right\}, \tag{22}$$

данный интеграл может быть вычислен, поскольку действие в нем

зависит только от производной (циклическая переменная), которая к тому же входит билинейным образом. С точностью до несущественного постоянного множителя имеем:

$$I\{\alpha, \beta\} = \prod_t (G(\alpha, \beta))^{1/2} \exp\left\{-\frac{i}{2}\int_0^T dt \frac{(A(\alpha(t), \beta(t)) - k + 1/2)^2}{G(\alpha(t), \beta(t))}\right\}. \tag{23}$$

Комбинируя (21) с (23), мы сводим статсумму $G(T)$ к интегралу по замкнутым путям в функциональном пространстве $\{\alpha, \beta\}$:

$$\mathscr{G}(T) = \int D\{\alpha\}\, D\{\beta\} \operatorname{sh}\beta\, G(\alpha, \beta)^{1/2} \exp\left\{i\int_0^T dt\, L_{\text{эфф}}\{\alpha, \beta\}\right\} \tag{24}$$

в котором действие $L_{\text{эфф}}$ дается формулой:

$$L_{\text{эфф}}\{\alpha, \beta\} = L_0\{\alpha, \beta\} + (A(\alpha, \beta) - k + 1/2)^2 / G(\alpha, \beta)\,. \tag{25}$$

Перейдем к выводу эффективного гамильтониана. Представим (25) в следующем виде:

$$L_{\text{эфф}} = \frac{1}{2} \dot{q}_i\, g_{ij}(q)\, \dot{q}_j + a_i(q)\, \dot{q}_i - U(q), \quad q_1 \equiv \alpha, \quad q_2 \equiv \beta\,, \tag{26}$$

где коэффициенты g_{ij} и потенциальная энергия $U(q)$ в каждом секторе $\{k, \delta\}$ определяются формулами:

$$g_{ij} = \frac{1}{q_0 q_1 q_2 G} \left\| \begin{matrix} \operatorname{sh}^2\beta(q_2\cos^2\alpha + q_1\sin^2\alpha) & (q_2 - q_1)\operatorname{sh}(2\beta)\sin(2\alpha)/4 \\ (q_2 - q_1)\operatorname{sh}(2\beta)\sin(2\alpha)/4 & q_0\operatorname{sh}^2\beta + \operatorname{ch}^2\beta(q_1\cos^2\alpha + q_1\sin^2\alpha) \end{matrix} \right\|, \tag{27а}$$

$$a_1 = \frac{1}{q_0 G}[\operatorname{sh}(2\beta)(F_1\cos\alpha/q_1 + F_2\sin\alpha/q_2)/2 - 2e(G - \operatorname{ch}^2\beta/q_0) +$$

$$+ (k - 1/2)\, w(q_0 G - \operatorname{ch}\beta)]\,, \tag{27б}$$

$$a_2 = \frac{1}{G}\left[\frac{q_1 - q_2}{2q_1q_2}\operatorname{sh}\beta\sin(2\alpha)(2e\operatorname{ch}\beta/q_0 - k + 1/2) +\right.$$

$$\left. + F_1\sin\alpha(\operatorname{ch}^2\beta/q_0 + \operatorname{sh}^2\beta/q_2)/q_1 - F_2\cos\alpha(\operatorname{ch}^2\beta/q_0 + \operatorname{sh}^2\beta/q_1)/q_2\right]. \tag{27в}$$

Детерминант матрицы g_{ij}, g, равен $\operatorname{sh}^2\beta(q_0q_1q_2G)^{-1}$, то есть мера интегрирования в (4.6) с точностью до константы совпадает с $|g|^{1/2}$. Процедура построения уравнения Шредингера по ФИ, задаваемому (26), с последующим извлечением из него соответствующего оператора Гамильтона H, описана в работах [14—16], мы не будем обсуждать здесь связанные с ней принципиальные вопросы, носящие общий характер [17], приведем лишь окончательный результат:

$$H = H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + U(q)\,, \tag{28а}$$

$$H_1 = -\frac{1}{2}|g|^{-1/2}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(|g|^{1/2} g^{ij}\frac{\partial}{\partial q_j}\right), \tag{28б}$$

$$H_2 = \frac{i}{2}|g|^{-1/2}\left(\frac{\partial}{\partial q_i}|g|^{1/2} g^{ij} a_j\right), \tag{28в}$$

$$H_3 = i a_i g^{ij}\frac{\partial}{\partial q_j}\,, \qquad H_4 = \frac{1}{2} a_i g^{ij} a_j\,. \tag{28г}$$

где $g^{ij} = (g^{-1})$. Используя данное выражение и формулы (28), получаем после элементарных, но утомительных выкладок:

$$H = 2eP_0 + F_1P_1 + F_2P_2 + q_0P_0^2 + q_1P_1^2 + q_2P_2^2\,, \tag{29}$$

где операторы P_a определяются выражениями:

$$P_0 = k - 1/2 - i\frac{\partial}{\partial\alpha}\,, \tag{30а}$$

$$P_1 = i\left(\operatorname{cth}\beta\cos\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial\beta}\right) - (k-1/2)\operatorname{th}\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\alpha\,, \tag{30б}$$

$$P_2 = i\left(\operatorname{cth}\beta\sin\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} - \cos\alpha\frac{\partial}{\partial\beta}\right) - (k-1/2)\operatorname{th}\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\alpha\,. \tag{30в}$$

Легко проверить непосредственными вычислениями, что данные операторы подчиняются коммутационным соотношениям алгебры SU(1,1):

$$[P_1, P_2] = -iP_0\,, \qquad [P_2, P_0] = iP_1\,, \qquad [P_0, P_1] = iP_2\,. \tag{31}$$

В силу коммутационных свойств (31) операторов (30а—30в) последние могут рассматриваться как генераторы вращения в трехмерном «изотопическом» пространстве с псевдоевклидовой метрикой и соответствуют трем проекциям «гиперболического момента» $\bar{P}$ на «внутренние оси» вращающегося «твердого тела». Тогда гамильтониан (29) описывает ротатор с компонентами момента инерции в главных осях q_0^{-1}, q_1^{-1} и q_2^{-1} соответственно; первые

три слагаемых в (29) описывают связь заряженного ротатора с внешним статическим «магнитным полем».

Сформулируем результаты работы. 1. Для модельной ферми-системы с двухчастичным взаимодействием методом интеграла по путям получен оператор Гамильтона для коллективной динамики, выраженный через переменные, описывающие флуктуации эффективного среднего поля (киральные переменные) и производные по ним. Существенно, что при выводе коллективное движение не предполагалось адиабатическим. 2. Динамика коллективных флуктуаций среднего поля с произвольно большой амплитудой оказалась эквивалентной динамике неаксиального заряженного ротатора в статическом магнитном поле в пространстве с псевдоевклидовой метрикой (см. (29) — (30)).

Использованный метод может быть применен (с соответствующей модификацией для случая группы Sp(6, R) вместо SU(1,1)) к задаче о фермионах в потенциале трехмерного осциллятора с квадруполь-квадрупольным взаимодействием, используемой как модель при рассмотрении вращающегося ядра [18]. Движение носит вращательно-колебательный характер. В следующей работе будет рассмотрено применение метода ФИ к реалистичной ядерной модели с учетом спаривания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беляев С.Т.* ЖЭТФ 1960, т.39, с.1387.
2. *Зелевинский В.Г.* Изв. АН СССР (сер. физ.) 1984, т.48, вып.10, с.79.
3. *Levit S., Negele J.W., Paltiel.* Phys. Rev., 1980, v.C21, p.1603.
4. *Ebert D, Reinhardt H.* Nucl. Phys., 1978, v.A298, p.60,
   Reinhardt H. Nucl. Phys., v.A298, p.77.
5. *Zelevinsky V.G.* Nucl. Phys., 1980, v.A337, p.40.
6. *Воров О.К., Зелевинский В.Г.* Материалы XXI Зимней школы ЛИЯФ, Л., 1987, с.195.
7. *Воров О.К.* ЯФ, 1989, т.49, с.1207.
8. *Беляев С.Т., Зелевинский В.Г.* ЯФ 1970, т.11, с.741.
9. *Зелевинский В.Г.* Изв. АН СССР (сер. физ.) 1984, т.48, N 10, с.2054.
10. *Кройц М.* Кварки, глюоны и решетки. М.: Мир, 1987, с.54.
11. *Шварц А.С.* Квантовая теория поля и топология М.: Наука, 1989, с.244.
12. *Киржниц Д.А.* Полевые методы теории многих частиц. М.: Госатомиздат, 1963.
13. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1965.
14. *Kleinert H.* Fortshr. der Phys., 1978, v. 26, p.565.
15. *Cheng K.S.* J. Math. Phys., 1972, v.13, p.1723.
16. *De Witt B.S.* Rev. Mod. Phys., 1957, v.29, p.377.
17. *Березин Ф.А.* УФН 1980, т.132, вып.3, с.497.
18. Зелевинский В.Г. ЯФ 1975, т.22, с.1085.

О.К. Воров

Современные методы построения эффективной динамики коллективных возбуждений с большой амплитудой в тяжелых ядрах. I. Простая модель

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 28 ноября 1990 г.
Подписано в печать 29.11 1990 г.
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1,1 печ.л., 1,0 уч.-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 137

Набрано в автоматизированной системе на базе фотонаборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и отпечатано на ротапринте Института ядерной физики СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.