39

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

В.Н. Байер, В.М. Катков, В.М. Страховенко

СТРУКТУРА МАССОВОГО ОПЕРАТОРА ЭЛЕКТРОНА В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ, БЛИЗКОМ К КРИТИЧЕСКОМУ

ПРЕПРИНТ 90-55

НОВОСИБИРСК

Структура
массового оператора электрона
в однородном магнитном поле,
близком к критическому

В.Н. Байер, В.М. Катков, В.М. Страховенко

Институт ядерной физики
630090, Новосибирск 90, СССР

АННОТАЦИЯ

Исследован массовый оператор электрона M в однородном магнитном поле H, близком к критическому полю $H_0 = 4.41 \cdot 10^{13}$ Э. Вычислены реальная часть M (содержащая информацию об аномальном магнитном моменте электрона) и мнимая часть M (связанная с вероятностью излучения) в виде ряда по степеням $\eta \equiv H/H_0$ при любых значениях главного квантового числа n. Получено общее выражение для интенсивности излучения, пригодное для произвольных η и n и его асимптотические разложения. Показано, что ряд при $\eta \ll 1$ является асимптотическим. Проведен анализ области $\eta \gtrsim 1$, в частности радиационные поправки к основному состоянию при $\eta \gg 1$ вычислены со степенной точностью. Получены явные выражения для интенсивности и вероятности излучения в этой области для $n \gg 1$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Является общепризнанным, что магнитное поле нейтронных звезд (пульсаров) достигает значений $H \sim 4 \cdot 10^{12}$ Э (см., например, [1]), близких к критическому полю $H_0 = m^2/e = (m^2c^3/e\hbar) = 4{,}41 \cdot 10^{13}$ Э. Недавно было установлено, что во вспыхивающих источниках гамма-лучей, которые также, по-видимому, являются нейтронными звездами, магнитное поле имеет величину $H \sim 2 \cdot 10^{12}$ Э [2]. В этой связи представляется целесообразным получить адекватное описание радиационных эффектов в таких полях. Сюда относится излучение, а также поправки к массе и аномальному магнитному моменту. Иными словами, речь идет о нахождении поправок $\sim \eta \equiv H/H_0$ к формулам квазиклассической квантовой электродинамики во внешнем поле [3], дающей простое и эффективное описание электромагнитных явлений, точное по параметру $\chi = \gamma\eta$ $(\gamma = \varepsilon/m)$ и игнорирующее члены $\propto \eta$.

Поскольку характерные длины формирования указанных выше процессов $l_f \sim \lambda\!\!\!^{-}_c/\eta$ много меньше масштаба неоднородности магнитного поля нейтронной звезды, расчет можно проводить в приближении постоянного поля H. Точное выражение для массового оператора электрона в α-порядке в постоянном магнитном поле было получено в работах [4, 5]. Оно представляет собой двухкратный интеграл от удивительно компактного выражения, содержащего однако осциллирующие функции. По этой причине непосредственное использование его для вычисления радиационных эффектов оказывается крайне затруднительным.

В настоящей работе проведено разложение массового оператора и вычислены поправки к квазиклассическому приближению при любых значениях параметра γ. Полученные результаты выражаются через однократные интегралы и позволяют легко проследить за структурой массового оператора при переходе от нерелятивистского к ультрарелятивистскому пределу. Получено точное выражение для интенсивности излучения, являющееся функцией η и квантового числа n. С использованием этого выражения найдены асимптотические разложения интенсивности в разных областях. Отдельно исследована область $\eta \gtrsim 1$ при $n \gg 1$, а также область $\eta \gg 1$, представляющая несомненный теоретический интерес. Со степенной точностью вычислена поправка к массе электрона в основном состоянии $n=0$ в сверхсильном поле $(\eta \gg 1)$.

2. МАССОВЫЙ ОПЕРАТОР В ПОЛЯХ, МЕНЬШИХ КРИТИЧЕСКОГО

Воспользуемся полученным в работе [5], имеющим диагональный вид, выражением для массового оператора электрона в однородном магнитном поле:

$$M = \frac{\alpha m}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dx}{x} \int_0^1 du\, e^{-iux/2\eta} \left\{ \frac{1}{\Delta} \exp\left[\frac{i\rho}{\eta}\left(a(x) - \frac{ux}{2}\right)\right] \times \right.$$
$$\times \Big[(\rho(1-u) - u)\,(c(x) + u(s(x) - c(x))) - us(x) +$$
$$\left. + i\zeta\gamma_\perp\, u(1-u)\, x \left(\frac{c(x)}{x^2} - 1 + s(x)\right) + 1 + u \Big] - 1 - u \right\}. \qquad (1)$$

Здесь

$$\rho = 2n\eta = \gamma_\perp^2 - 1, \quad \eta = \frac{H}{H_0}, \quad n = n_0 + \frac{1-\zeta}{2},$$

$$a(x) = \operatorname{arctg} \frac{uc(x)}{x(1 - u\, s(x))}, \quad \Delta = 1 - 2u(1-u)\, s(x) + u^2\left(\frac{2c(x)}{x^2} - 1\right),$$

$$c(x) = 1 - \cos x, \quad s(x) = 1 - \frac{\sin x}{x}, \quad \zeta = \pm 1\ (n \geqslant 1), \quad \zeta = 1\ (n=0). \ (2)$$

При $\eta \ll 1$ вклад в интеграл (1) дают $ux \lesssim \eta \ll 1$. Разложение функций $a(x)$ и $\Delta^{-1}(x)$ по величине ux дает

$$a(x) \simeq \frac{u\,c(x)}{x}\left[1 + u\, s(x) + u^2 s^2(x)\right] - \frac{u^3 c^3(x)}{3x^3},$$

$$\Delta^{-1}(x) \simeq 1 + 2u(1-u)\, s(x) + 4u^2(1-u)^2 s^2(x) + u^2\left(1 - \frac{2c(x)}{x^2}\right). \qquad (3)$$

Возможность дальнейшего разложения экспоненты в (1) связана с величиной параметра $\rho\eta^2 \equiv \chi^2$. При $\rho \lesssim 1$ и $\eta \ll 1$ параметр χ всегда мал. В ультрарелятивистском пределе $(\rho \gg 1)$ вклад в интеграл (1) дают $x \lesssim 1/\sqrt{\rho} \ll 1$, тогда величина $\rho(a(x) - ux/2)/\eta \sim u^3 x^3 \rho/\eta \lesssim \rho\eta^2 = \chi^2$ и разложение соответствующей экспоненты можно проводить только при $\chi \ll 1$. Поскольку предел $\rho \gg 1$ хорошо изучен при любых значениях параметра χ (см., например, [3]), мы рассмотрим случай $\chi \ll 1$ при произвольных значениях параметра ρ. В этом случае, оставляя члены $\sim\eta^2$ включительно, получаем

$$\exp\left[\frac{i\rho}{\eta}\, a(x)\right] \simeq \exp\left(\frac{i\rho}{\eta x}\, uc\right)\left[1 + \frac{i\rho u^2 c}{\eta x}\left(s + us^2 - \frac{uc^2}{3x^2}\right) - \frac{\rho^2 u^4 c^2 s^2}{2\eta^2 x^2}\right]. \qquad (4)$$

Как известно, мнимая часть массового оператора связана с вероятностью излучения фотона следующим соотношением:

$$W = -\frac{2}{\gamma}\, \operatorname{Im} M. \qquad (5)$$

В интеграл по u для мнимой части массового оператора вклад дают $u \ll 1$, а область $u \sim 1$ экспоненциально подавлена. Это позволяет распространить интеграл по u до ∞, что значительно упрощает дальнейшие вычисления. Физический смысл экспоненциального подавления вероятности излучения при $u \sim 1$ состоит в следующем. Поскольку величина M инвариантна относительно преобразований Лоренца, перейдем в систему отсчета, где продольный вдоль магнитного поля импульс достаточно велик $p_\parallel/m \to \infty$. При этом остаются неизменными как величина магнитного поля H, так и значение параметра $\rho = p_\perp^2/m^2$. Однако, в этой системе $\gamma \gg 1$ и переменная u однозначно связана с частотой излученного фотона $u = \omega/\varepsilon$. С другой стороны, хорошо известно, что в классической области при $\chi \ll 1$ излучение частот $\omega \sim \varepsilon$ подавлено экспоненциально. Проводя интегрирование по u с учетом сказанного выше, получаем для вероятности излучения фотона следующее выражение (см. Приложение):

$$W = \frac{2\alpha m^2}{3\varepsilon}\,\eta^2\left[\frac{1}{\eta} f_0(\rho) - 1 - 2\rho + \zeta\gamma_\perp\left(f_1(\rho) - \frac{\eta}{2}\,(7 + 9\rho)\right) + \eta f_2(\rho)\right], \qquad (6)$$

где

$$f_0(\rho)=\frac{3}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2}\left(\frac{1+\rho c}{\mu}-1\right); \qquad \mu=1+\rho\left(1-\frac{2c}{x^2}\right);$$

$$f_1(\rho)=\frac{6}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2}\left(\frac{1}{\mu^2}\left(\frac{c}{x^2}+s-1\right)+\frac{1}{2}\right); \tag{7}$$

$$f_2(\rho)=\frac{24}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2}\left\{\frac{1}{\mu^3x^2}\left[s\left(1-\frac{3(1+\rho)}{\mu}\right)(1+s(\rho-1)-(1+2\rho)\,c)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\mu}(1+\rho c)(1+\rho)\left(\frac{c^2}{x^2}+3s^2\left(1-\frac{2(1+\rho)}{\mu}\right)\right)+(1+\rho)(s-c)\right]+\frac{7\rho+5}{12}\right\}.$$

Графики функций f_0, f_1, f_2 представлены на рис. 1. Вычисление $\operatorname{Re} M$ является более сложной задачей, поскольку вклад в реальную часть M дает вся область интегрирования переменной u. После взятия элементарных интегралов по u, в оставшемся интеграле по x в области $\eta \ll x \ll 1$ содержатся члены $\propto dx/x$, приводящие к появлению в $\operatorname{Re} M$ фактора $\ln(1/\eta)$. Для явного выделения членов с логарифмом удобно разбить интервал интегрирования по x на два, а их границей выбрать значение x_0, удовлетворяющее условию $1 \gg x_0 \gg \eta$. В результате получаем (см. Приложение)

$$\operatorname{Re} M=\frac{\alpha m}{2\pi}\left\{-\frac{1}{2}\zeta\gamma_\perp\eta+\eta^2\left[\varphi_1(\rho)+\frac{4}{3}(1+2\rho)\ln\frac{1}{2\eta}\right]-\right.$$

$$\left.-\zeta\gamma_\perp\eta^3\left[\varphi_2(\rho)-\left(\frac{14}{3}+6\rho\right)\ln\frac{1}{2\eta}\right]\right\}, \tag{8}$$

где

$$\varphi_1(\rho)=4\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^3}\left\{1-2(1+2\rho)\,s+\frac{1}{\mu^2}\left[(1-\rho)\,s+(1+2\rho)\,c-1\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{2s(1+\rho)(1+\rho c)}{\mu^3}\right\}-\frac{1}{18}+\frac{20}{9}\rho,$$

$$\varphi_2(\rho)=4\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^3}\left\{\frac{4}{\mu^3}\left(\frac{c}{x^2}+s-1\right)\left[\left(\frac{3(1+\rho)}{\mu}-1\right)s-1\right]-\right.$$

$$\left.-2+(7+9\rho)\,s\right\}+\frac{1}{9}+3\rho.$$

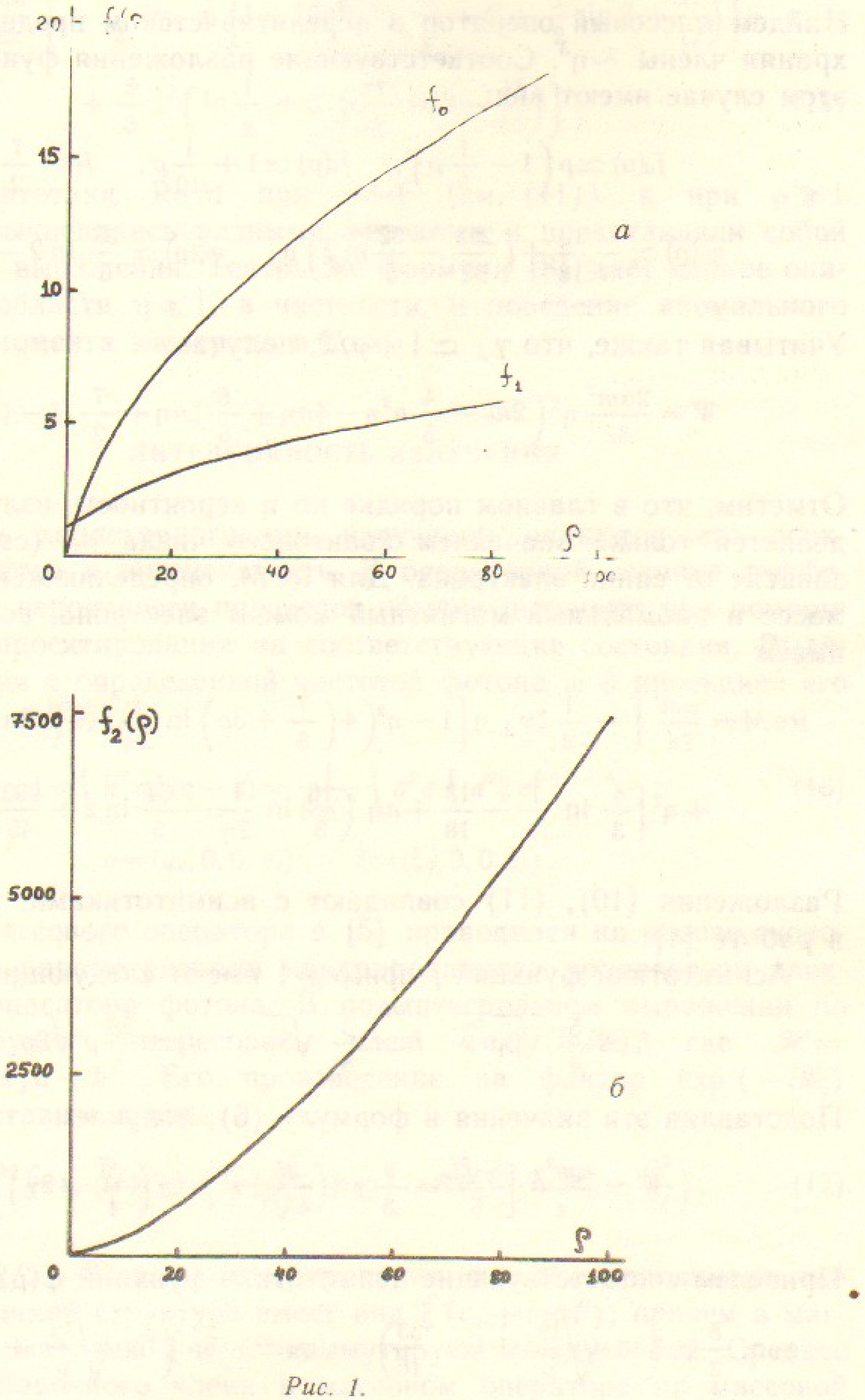

Рис. 1.

Найдем массовый оператор в нерелятивистском пределе $\rho \ll 1$, сохраняя члены $\sim \eta^3$. Соответствующие разложения функций f и φ в этом случае имеют вид:

$$f_0(\rho) \simeq \rho\left(1 - \frac{1}{5}\rho\right), \quad f_1(\rho) \simeq 1 + \frac{1}{10}\rho, \quad f_2 \simeq \frac{7}{2};$$

$$\varphi_1(\rho) \simeq -\frac{13}{18} + \left(\frac{293}{90} - \frac{32}{5}\ln 2\right)\rho, \quad \varphi_2(\rho) \simeq \frac{32}{5}\ln 2 - \frac{83}{90}. \tag{9}$$

Учитывая также, что $\gamma_\perp \simeq 1 + \rho/2$, получаем

$$W = \frac{2\alpha m^2}{3\varepsilon}\eta^2\left(2n_0 - \frac{4}{5}n^2\eta - 4n\eta + \frac{6}{5}\zeta n\eta + \frac{7}{2}(1-\zeta)\eta\right). \tag{10}$$

Отметим, что в главном порядке по η вероятность излучения определяется только значением квантового числа n_0 (см. (1)) и не зависит от спина электрона. Для $\mathrm{Re}\, M$, определяющей поправки к массе и аномальный магнитный момент электрона, соответственно имеем

$$\mathrm{Re}\, M = \frac{\alpha m}{2\pi}\left\{-\frac{1}{2}\zeta\gamma_\perp\eta\left[1 - \eta^2\left(4\left(\frac{7}{3} + 3\rho\right)\ln\frac{1}{2\eta} - \frac{64}{5}\ln 2 + \frac{83}{45}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + \eta^2\left[\frac{4}{3}\ln\frac{1}{2\eta} - \frac{13}{18} + n\eta\left(\frac{16}{3}\ln\frac{1}{2\eta} - \frac{64}{5}\ln 2 + \frac{293}{45}\right)\right]\right\}. \tag{11}$$

Разложения (10), (11) совпадают с асимптотиками, полученными в работе [4].

Асимптотики функций f при $\rho \gg 1$ имеют следующий вид:

$$f_0 \simeq \frac{5}{4}\sqrt{3\rho}, \quad f_1 \simeq \frac{3}{8}\sqrt{3\rho}, \quad f_2 \simeq \frac{35}{8}\rho\sqrt{3\rho}. \tag{12}$$

Подставляя эти значения в формулу (6), получаем

$$W \simeq \frac{\alpha m^2\chi}{\varepsilon}\left[\frac{5\sqrt{3}}{6} - \frac{4}{3}\chi + \frac{35}{4\sqrt{3}}\chi^2 + \zeta\chi\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - 3\chi\right)\right]. \tag{13}$$

Приведем соответствующие асимптотики функций $\varphi(\rho)$:

$$\varphi_1 \simeq \frac{8}{3}\rho\left(\ln\sqrt{\frac{12}{\rho}} + C - \frac{33}{16}\right), \quad \varphi_2 \simeq -6\rho\left(\ln\sqrt{\frac{12}{\rho}} + C - \frac{37}{12}\right), \tag{14}$$

$$C = 0.577215\ldots$$

Тогда имеем для $\mathrm{Re}\, M$ при $\rho \gg 1$ следующее выражение:

$$\mathrm{Re}\, M \simeq \frac{\alpha m}{2\pi}\left\{-\frac{1}{2}\zeta\gamma_\perp\eta\left[1 - 12\chi^2\left(\ln\frac{1}{\chi} + C + \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{37}{12}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{8}{3}\chi^2\left(\ln\frac{1}{\chi} + C + \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{33}{16}\right)\right\}. \tag{15}$$

Ранее асимптотики $\mathrm{Re}\, M$ при $n \sim 1$ (см. (11)) и при $\rho \gg 1$ (см. (15)) вычислялись разными методами и представляли собой независимые выражения. Теперь же формула (8) дает единое описание всей области $\eta \ll 1$, в частности, и поведение аномального магнитного момента электрона в поле.

3. ИНТЕНСИВНОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ

Важными характеристиками излучения являются его спектральный состав и интенсивность. В операторной технике дифференциальные вероятности процессов обычно получают при помощи операторов проектирования на соответствующие состояния. Выделим состояния с определенной частотой фотона ω и проекцией его импульса на ось $\vec{e}_z \parallel \vec{H}$:

$$1 = \int d^2q\,\delta(q-k) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2q \int d^2\xi\, e^{i(q-k)\xi}, \tag{16}$$

$$q = (q_0, 0, 0, q_z), \quad \xi = (\xi_0, 0, 0, \xi_z).$$

Расчет массового оператора в [5] проводился на основе экспоненциальной параметризации квадрированного пропагатора электрона и пропагатора фотона. В подынтегральном выражении по d^4k нас будет интересовать член $\hat{k}\exp(is\mathcal{H})$, где $\mathcal{H} = (\mathcal{P}^2 - 2\mathcal{P}k)u + k^2$. Его произведение на фактор $\exp(-ik\xi)$ можно представить в виде

$$e^{-ik\xi}\hat{k}\exp(is\mathcal{H}) = \left(\hat{\varkappa} + \frac{\hat{\xi}}{2s}\right)\exp\left(is\mathcal{H}(\varkappa) - iu\mathcal{P}\xi - \frac{i\xi^2}{4s}\right), \tag{17}$$

где $\varkappa = k - \xi/2s$. После интегрирования по $d^4\varkappa$ дополнительный член в матричной структуре имеет вид $\hat{\xi}(c_1 + c_2\sigma F)$, причем в магнитном поле матрицы $\hat{\xi}$ и σF коммутируют между собой. Среднее значение добавочного члена в массовом операторе на массовой оболочке можно вычислить, используя следующие антикоммутаторы:

$$\{\xi, \hat{\mathscr{P}}\} = 2\xi\mathscr{P},$$

$$\{\xi\sigma F, R\} = \frac{1}{4}\{\xi\sigma F, \{\sigma F, \hat{\mathscr{P}}\}\} = \frac{1}{2}\xi\mathscr{P}(\sigma F)^2 = 2\xi\mathscr{P}H^2,$$

$$R = \gamma^5\mathscr{P}F^*\gamma, \quad R^2 = \mathscr{P}F^{*2}\mathscr{P} = H^2\varepsilon_\perp^2. \tag{18}$$

Учитывая, что собственным значением оператора R является величина $\zeta\sqrt{R^2}$, получаем

$$\langle\xi\rangle = \frac{1}{m}\xi\mathscr{P}, \quad \langle\xi\sigma F\rangle = \frac{2}{\varepsilon_\perp}\zeta H\xi\mathscr{P}. \tag{19}$$

Интеграл по ξ от выражения (17) с учетом (19) является гауссовым:

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2\xi(1, \xi\mathscr{P}) \exp\left(iq\xi - iu\xi\mathscr{P} - \frac{i\xi^2}{4s}\right) =$$

$$= \frac{s}{\pi}\left(1, i\frac{d}{du}\right)\exp\left(i(q-up)^2 s\right), \quad p = (\varepsilon, 0, 0, p_z). \tag{20}$$

В результате получаем для массового оператора следующее ковариантное выражение:

$$dM = \frac{\alpha d^2q}{2\pi^2 m}\int_0^\infty \frac{dx}{2\eta}\int_0^1 \frac{du}{u\Delta}\exp\left\{-\frac{iux}{2\eta} + \frac{ix(q-up)^2}{2\eta u m^2}\right\}\times$$

$$\times\left\{\exp\left(\frac{i\rho}{\eta}\left(a(x) - \frac{ux}{2}\right)\right)\left[\left(\rho - \frac{pq}{m^2}\right)(c + u(s-c)) +\right.\right.$$

$$+ i\zeta\gamma_\perp u\left(1 - \frac{pq}{\varepsilon_\perp^2}\right)\left(\frac{c}{x} - \sin x\right) + i\zeta\left(u\gamma_\perp - \frac{pq}{m\varepsilon_\perp}\right)(1-s) -$$

$$\left.\left. - us + 1 - u\rho + \frac{pq}{m^2}\right] - 1 + u\rho - \frac{pq}{m^2}\right\}. \tag{21}$$

Наиболее простой вид спектрального распределения вероятности излучения при произвольных значениях параметра ρ получается в системе бесконечного импульса $p_z \to \infty$. (Отметим, что при $p_z/m \gg 1$ классическое движение частицы в магнитном поле такое же, как в спиральном ондуляторе.) В этом приближении $\gamma = \varepsilon/m \gg 1$ и вклад в интеграл по d^2q дают $q_0 - q_z \sim q_0/\gamma$. С релятивистской точностью получаем

$$q_0 - q_z \simeq \frac{q^2}{2q_0}, \quad qp = q_0\varepsilon - q_z p_z \simeq \frac{q^2\varepsilon}{2q_0} + \frac{q_0 p^2}{2\varepsilon},$$

$$\frac{(q-up)^2}{u} \simeq \left(\frac{1}{u} - \frac{\varepsilon}{q_0}\right)q^2 + \left(u - \frac{q_0}{\varepsilon}\right)p^2.$$

Умножим выражение для dM на фактор i/γ и распространим интеграл по x от $-\infty$ до ∞. В теории излучения при интегрировании по углам вылета фотона или, как в (21), по d^2q возникают интегралы вида

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\infty F(x)\, f(xy)\, dx\, dy = \lim_{a\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, dx\int_0^a f(xy)\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x}(F(x) - F(0))\int_0^\infty f(y)\, dy.$$

В выражении для вероятности излучения вычитание, содержащееся в массовом операторе (1) и дополнительно возникающее при интегрировании по d^2q, можно обеспечить, сместив контур интегрирования чуть ниже вещественной оси. Переходя теперь в (21) к переменным $q_0 - q_z \simeq q^2/2q_0$, $q_0 \equiv \omega$, и проводя интегрирование по d^2q и переменной u, получаем для спектрального распределения вероятности следующее выражение:

$$dW = \frac{i\alpha m^2 d\omega}{2\pi\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x - i0}\left[\left(\rho - (1+\rho)u + \frac{i\eta}{x}\frac{d}{du}u\right)\times\right.$$

$$\times(c + u(s-c)) + i\zeta\gamma_\perp\left(1 - u + \frac{i\eta}{(1+\rho)x}\frac{d}{du}u\right)u\left(\frac{c}{x} - \sin x\right) +$$

$$\left. + \left(u - \frac{\zeta\eta}{\gamma_\perp}\frac{d}{du}u\right)(1-s) + 1 - \frac{i\eta}{x}\frac{d}{du}u\right]\times$$

$$\times\frac{1}{\Delta}\exp\left\{-\frac{iux}{2\eta} + \frac{i\rho}{\eta}\left(a(x) - \frac{ux}{2}\right)\right\}, \quad u = \frac{\omega}{\varepsilon}. \tag{22}$$

Умножив dW на ω, получим спектральное распределение интенсивности излучения в ондуляторном пределе. Проводя интегрирование по $\omega(u)$, получим следующее выражение для полной интенсивности излучения:

$$I=\frac{i\alpha m^2}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x-i0}\int\limits_0^1\frac{u\,du}{\Delta}\exp\left\{-\frac{iux}{2\eta}+\frac{i\rho}{\eta}\left(a(x)-\frac{ux}{2}\right)\right\}\times$$

$$\times\left[\left(\rho-(1+\rho)\,u-\frac{i\eta}{x}\right)(c+u(s-c))+i\zeta\gamma_\perp u\left(1-u-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{i\eta}{(1+\rho)\,x}\right)\left(\frac{c}{x}-\sin x\right)+\left(\frac{\zeta\eta}{\gamma_\perp}+u\right)(1-s)+1+\frac{i\eta}{x}\right]. \qquad (23)$$

Отметим, что выражение (23) имеет инвариантный вид и не зависит от системы отсчета, в которой проводились вычисления.

Проведем разложение интенсивности излучения по степеням η при $\eta\ll1$, $\chi^2=\rho\eta^2\ll1$, как это было сделано выше для вероятности процесса. В результате имеем (см. Приложение)

$$I=\alpha m^2\eta^2\left\{\frac{2}{3}\rho+\eta\left[f_4(\rho)+\zeta\sqrt{1+\rho}\left(\rho+\frac{2}{3}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\eta^2\left[8(4\rho+1)\left(\rho+\frac{2}{3}\right)+\zeta\sqrt{1+\rho}\;f_5(\rho)\right]\right\}, \qquad (24)$$

где

$$f_4(\rho)=\frac{16}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{x^4}\left\{\frac{1}{\mu^3}\left[(1+2\rho)\,c+s\left(1+(1+\rho c)\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\left(1-\frac{3}{\mu}(1+\rho)\right)\right)-\frac{1}{4}c\mu\right]-\frac{x^2}{24}(12\rho+5)\right\},$$

$$f_5(\rho)=\frac{16}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{x^4}\left\{\frac{6}{\mu^4}\left(\frac{c}{x^2}+s-1\right)\left[1+2s\left(1-\frac{2}{\mu}(1+\rho)\right)\right]+\right.$$

$$+3-\frac{x^2}{4}(12\rho+7)+\frac{1}{1+\rho}\left[\frac{1}{\mu^3}\left(1-s-\frac{c}{x^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+s(1-s)\left(1-\frac{3}{\mu}(1+\rho)\right)\right)-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{24}(15\rho+11)\right]\right\}. \qquad (25)$$

Графики функций f_4, f_5 представлены на рис. 2. В пределе нерелятивистского поперечного движения ($\rho\ll1$) имеем

$$f_4(\rho)\simeq-\frac{2}{3}-\frac{11}{3}\rho,\quad f_5(0)\simeq-\frac{16}{3}. \qquad (26)$$

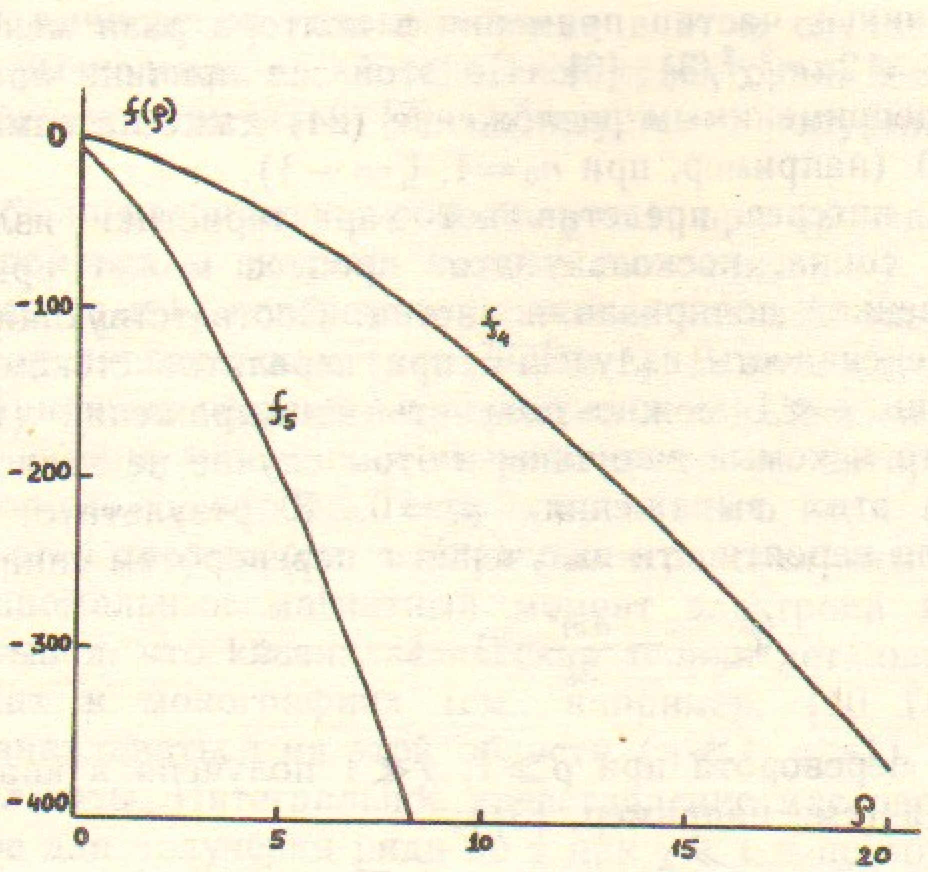

Рис. 2.

В этом случае получаем для интенсивности излучения с учетом поправок $\sim\eta$ следующщее выражение:

$$I\simeq\frac{2}{3}\alpha m^2\eta^3[2n-1+\zeta+\eta((4\zeta-11)\,n+8(1-\zeta))]=$$

$$=\frac{2}{3}\alpha m^2\eta^3\left[(2+\eta(4\zeta-11))\,n_0+\frac{1-\zeta}{2}\eta\right]. \qquad (27)$$

В случае ультрарелятивистского поперечного движения ($\rho\gg1$), когда параметр $\chi=\eta\sqrt{\rho}$ все еще мал ($\chi\ll1$), получаем

$$f_4(\rho)\simeq-\frac{55}{8\sqrt{3}}\rho^{3/2},\quad f_5(\rho)\simeq-\frac{35\sqrt{3}}{4}\rho^{3/2},$$

$$I\simeq\alpha m^2\chi^2\left[\frac{2}{3}-\frac{55}{8\sqrt{3}}\chi+32\chi^2+\zeta\chi\left(1-\frac{35\sqrt{3}}{4}\chi\right)\right]. \qquad (28)$$

Отметим, что разложения (24), (27), (28) являются асимптотическими, что приводит в них к большой величине численных коэффициентов и соответственно уменьшает пределы применимости. Так, например, в случае $\rho\gg1$ уже при $\chi=0{,}1$ интенсивность излучения неполяризованных частиц примерно в полтора раза меньше классической ($I_{cl}=2\alpha m^2\chi^2/3$) [6]. По этой же причине при $\eta\sim1/10$ становится неприменимым разложение (24) даже на самых низких уровнях (27) (например, при $n_0=1$, $\zeta=-1$).

Большой интерес представляют характеристики излучения с переворотом спина, поскольку этот процесс может приводить к преимущественной поляризации частиц. Соответствующие вероятность и интенсивность излучения при нерелятивистском поперечном движении $\rho\ll1$ можно получить из выражений (10), (27), учитывая, что искомые величины в этом случае не зависят от ρ и положить в этих выражениях $n_0=0$. В результате получаем, например, для вероятности излучения с переворотом спина

$$W_{\zeta,-\zeta}=\frac{\alpha m^2}{3\varepsilon}\eta^3(1-\zeta), \quad \rho\ll1. \tag{29}$$

Вероятность переворота при $\rho\gg1$, $\chi\ll1$ получена в квазиклассической теории (см., например, [3]):

$$W_{\zeta,-\zeta}=\frac{\alpha m^2}{2\varepsilon}\chi^3\left(\frac{5\sqrt{3}}{8}-\zeta\right). \tag{30}$$

Недавно задача излучения электрона в произвольном внешнем электромагнитном поле решалась с учетом первой квантовой поправки [7]. В задаче излучения квантовые поправки выглядят как разложение по степеням параметров χ, η (если электрическое поле $E=0$). В этом смысле в [7] сформулирован способ нахождения первого члена разложения по χ или η. Используемые нами квазиклассические выражения являются точными*) по χ (но при $\eta=0$), а формула (1) является точной как по χ, так и по η, т. е. содержит все квантовые эффекты точно. Следует иметь в виду, что в работе авторов [5] массовый оператор (а, значит, и вероятность излучения) найден в постоянном внешнем поле произвольной конфигурации (с полями $\vec{H}$ и $\vec{E}$), так что из [5] непосредственно следует обобщение (1) на этот случай. Что касается переходов с переворотом спина, то следует учесть, что спин-флиповая амплитуда пропорциональна $\hbar$ ($\propto\hbar\omega/\varepsilon$) и, следовательно, с самого начала выражение для вероятности содержит нужную степень $\hbar$. Поэтому для вычисления главного члена в этом случае достаточно проводить вычисления на классической траектории. В силу сказанного последняя формула в [7] согласуется с полученной ранее в [9].

*) Квазиклассическое приближение применимо, естественно, и в нерелятивистской области в случае больших квантовых чисел. Такая ситуация встретилась в задаче об излучении в ондуляторе [8], где поперечное движение было нерелятивистским.

Выше была рассмотрена область $\chi\ll1$, при произвольных значениях параметра ρ, включая низшие состояния $n\sim1$. При $\chi\gtrsim1$ в слабом поле ($\eta\ll1$) поперечное движение частицы заведомо является ультрарелятивистским ($\rho=\chi^2/\eta^2\gg1$). В этом случае при расчете радиационных эффектов применима квазиклассическая теория излучения, сформулированная впервые двумя из авторов для случая неоднородного, вообще говоря, магнитного поля (см. в [3]). В рамках этой теории (см. в [3]) были рассмотрены поправки к массе и аномальный магнитный момент электрона во внешнем поле. Учитывая, что квазиклассическая теория детально изложена в учебниках и монографиях (см., например, [10, 11]), мы не будем останавливаться на этой области ($\eta\ll1$, $\chi\gtrsim1$), а приведем лишь результаты. Интегральное представление массового оператора, удобное для получения ряда по χ при $\chi\ll1$ и по обратным степеням χ при $\chi\gg1$ в квазиклассической теории имеет вид

$$M=\frac{\alpha m}{48\sqrt{3}}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-0-i\infty}^{-0+i\infty}ds\,(3\chi)^{s+1}\frac{e^{-i\pi s/2}}{\sin\pi s}\times$$
$$\times\left[\frac{i}{\cos(\pi s/2)}(3s^2+3s+10)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{5}{6}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{3\zeta s(s+1)}{\sin(\pi s/2)}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{2}{3}\right)\right]. \tag{31}$$

Для интенсивности излучения соответственно имеем

$$I=\frac{\alpha m^2}{24\sqrt{3}}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-0-i\infty}^{-0+i\infty}ds\,(3\chi)^{s+2}\frac{(s+1)}{\sin\pi s}\times$$
$$\times\left[\zeta s(s+2)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{7}{6}\right)-\right.$$
$$\left.-(s^2+2s+8)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{4}{3}\right)\right]. \tag{32}$$

При $\chi\ll1$, замыкая в выражениях (31), (32) контур интегрирования направо, получаем асимптотические ряды по степеням χ. При

$\chi \gg 1$ контур интегрирования следует замкнуть налево, полюсные особенности подынтегральных выражений лежат при $s<0$ и получаются ряды по обратным степеням χ.

Поскольку главные по $\rho \gg 1$ члены разложения массового оператора и интенсивности излучения есть функции только одного инвариантного параметра χ, выражения (13), (15), (28) совпадают с соответствующими членами ряда при $\chi \ll 1$ выражений (31), (32). Анализ радиационных эффектов в приближении постоянного поля при $\chi \gtrsim 1$, кроме монографий [10, 11], можно найти также в работах [6, 12]. Например, в работе [12] показано, что в области $1 \leqslant \chi \leqslant 15$ интенсивность излучения с точностью лучше 10% описывается простой формулой $I \simeq 2\alpha m^2 \chi/15$. Для таких χ $\bar{\omega} \simeq \varepsilon\chi/(2+5\chi)$ и становится возможным образование e^+e^--пар излученным фотоном в магнитном поле. Впрочем, рассмотрение каскадных процессов выходит за рамки настоящей работы.

4. РАДИАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ В СИЛЬНЫХ ПОЛЯХ ($H \gtrsim H_0$)

Выше были рассмотрены радиационные эффекты в слабом поле ($\eta \ll 1$) при произвольных значениях квантового числа n (параметра ρ) от $n=0$ до $n \gg \eta^{-3}$. Обратимся к случаю, когда магнитное поле порядка ($\eta \sim 1$) или значительно больше критического ($\eta \gg 1$). При $\eta \sim 1$ вычисления радиационных эффектов для частиц, находящихся на низших уровнях Ландау, необходимо проводить численно. Примером таких вычислений является расчет аномального магнитного момента электрона, проведенный в работе [13]. Простые аналитические выражения удается получить при $n=0$, $\eta \gg 1$ или для больших значений $n \gg 1$, но без ограничения на параметр η. Поправки к массе электрона в основном состоянии рассматривались в работах [14—16]. Наиболее продвинутый количественный результат получен в работе [16], где поправка к массе электрона вычислена с логарифмической точностью. В этой работе использовалось выражение для массового оператора в основном состоянии, полученное в [14], которое согласуется с формулой (1) при $n=0$. Ниже мы проведем вычисления для этого случая со степенной точностью.

Воспользовавшись соотношением

$$\Delta = \delta\delta^*, \quad \delta = 1 - u + \frac{iu}{x}\left(e^{-ix} - 1\right), \tag{33}$$

выражение для M, определяемое формулой (1), при $n=0$ ($\zeta=1$) можно представить в виде

$$M = \frac{\alpha m}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dx}{x} \int_0^1 du\, e^{-iux/2\eta} \left(\frac{1 + ue^{-ix}}{\delta} - 1 - u \right). \tag{34}$$

Учитывая, что функция $\delta(x)$ не имеет нулей в четвертой четверти комплексной переменной x, развернем контур интегрирования на нижнюю полуось. В результате получаем

$$M = \frac{\alpha m}{2\pi} \int_0^\infty dz \int_0^1 du\, e^{-uz/2\eta} \left[\frac{1 + ue^{-z}}{(1-u)\,z + u(1 - e^{-z})} - \frac{1+u}{z} \right]. \tag{35}$$

В случае $\eta \gg 1$ область интегрирования по z удобно разбить на две: $z \leqslant z_0$ и $z \geqslant z_0$, где $\eta \gg z_0 \gg 1$. В первой области можно заменить общий экспоненциальный фактор на единицу, а во второй пренебречь членами, пропорциональными e^{-z}. Кроме того, в области $z \geqslant z_0$ разобьем интервал интегрирования по u на два с границей u_0, удовлетворяющей условиям $1 - u_0 \ll 1$, $(1-u_0) z_0 \gg 1$ и проведем соответствующие разложения. Выделив в явном виде логарифмические члены и проводя «сшивку» интегралов в указанных областях, получаем со степенной точностью следующее выражение для поправки к массе электрона в основном состоянии:

$$M = \frac{\alpha m}{4\pi} \left[\left(\ln 2\eta - C - \frac{3}{2} \right)^2 + A + O\left(\frac{1}{\eta}\right) \right], \tag{36}$$

где

$$A = \frac{5\pi^2}{6} - \frac{19}{4} + 2\left[\int_0^1 dz \left(g(z) - \frac{3}{2z} \right) + \int_1^\infty dz \left(g(z) - \frac{\ln z}{z-1} \right) \right] = 4{,}02816\ldots;$$

$$g(z) = \frac{e^{-z}}{\xi(z)} + \left(\frac{1}{\xi(z)} - \frac{ze^{-z}}{\xi^2(z)} \right) \ln\left(1 + \frac{\xi(z)}{z} \right), \tag{37}$$

$$\xi(z) = 1 - z - e^{-z}.$$

Рассмотрим массовый оператор электрона в сильном поле ($\eta \gtrsim 1$) на высоких возбужденных уровнях $n = \rho/2\eta \gg 1$. В этом случае основной вклад в интеграл (1) определяется областью, ограничивающей величину члена $\propto n$ в показателе экспоненты, который представим в виде

$$2n\left(\operatorname{arctg}\frac{u(1-\cos x)}{u\sin x+(1-u)x}-\frac{ux}{2}\right)=$$

$$=-2n\left(\operatorname{arctg}\frac{zt}{1-z(1-t\operatorname{ctg}t)}-zt\right)\equiv-2n\varphi(t)\,, \tag{38}$$

$$z=1-u\,,\qquad t=x/2\,.$$

Из выражения (38) видно, что при $n\gg1$ основной вклад в интеграл (1) дает область $zt\ll1$, или $u\ll1$. В случае $zt\ll1$ разложение функций $\varphi(t)$ и Δ^{-1} в ряд по этому параметру имеет вид

$$\varphi(t)=z^2t\left[(1-z^2t^2)\,b(t)+zb^2(t)-\frac{zt^2}{3}+\frac{z^3t^4}{5}+\ldots\right],$$

$$b(t)=1-t\operatorname{ctg}t\,,\qquad \Delta^{-1}=\frac{t^2}{\sin^2t}\,(1+2zb-z^2t^2+\ldots). \tag{39}$$

Из этого разложения видно, что при $z\sim1$ вклад дают $t\sim n^{-1/3}\ll1$, а при $t\sim1$ $z\sim n^{-1/2}\ll1$. В подынтегральном выражении в (1) главным является член $\propto z\rho$, который (при $t\ll1$) $\sim\rho t^2\sim\eta n^{1/3}\sim\chi^{2/3}$, а при $z\ll1$ с учетом фазового объема $\sim\rho z^2\sim\eta$. Вклад $\sim1/n$ в массовый оператор (но не интенсивность излучения) дает также область $u\sim1/n\ll1$. Отсюда видно, что главный член разложения по $n^{-1/3}$ в массовом операторе должен совпадать с соответствующей квазиклассической асимптотикой при $\chi\gg1$ (31), а отличие может сказаться только в следующих членах разложения. Учитывая проведенный выше анализ и воспользовавшись формулами (38), (39), получаем для первых трех членов разложения массового оператора следующие выражения (см. Приложение)*):

$$W=-\frac{2}{\gamma}\operatorname{Im}M=\frac{\alpha m^2}{\varepsilon}\left\{\frac{14}{27}\,\Gamma\!\left(\frac{2}{3}\right)(3\chi)^{2/3}-\frac{5}{6}-k_0\eta+\right.$$
$$+\frac{10}{9}\,\Gamma\!\left(\frac{1}{3}\right)(3\chi)^{-2/3}\left(1+\frac{7\eta^2}{25}\right)+\zeta'\left[\frac{1}{27}\,\Gamma\!\left(\frac{1}{3}\right)(3\chi)^{1/3}-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{2}{9}\,\Gamma\!\left(\frac{2}{3}\right)(3\chi)^{-1/3}+\frac{1}{4\chi}\left(1+\frac{22}{15}\eta^2\right)\right]\right\}; \tag{40}$$

*) Попытки анализа области $\eta\gtrsim1$ для вероятности излучения предпринимались в работах [17, 18].

$$k_0=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty dt\left(\frac{3}{t^2}-\frac{\sin^2t}{t^2-\sin^2t}\right)=1{,}5213\ldots;$$

$$\Delta m=\operatorname{Re}M=\alpha m\left\{\frac{7\sqrt3}{81}\,\Gamma\!\left(\frac{2}{3}\right)(3\chi)^{2/3}-\frac{1}{\pi}\left(1+\frac{5}{6}\,l(\chi)-\right.\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}\,\eta k_1(\eta)\right)-\frac{5}{9\sqrt3}\,\Gamma\!\left(\frac{1}{3}\right)(3\chi)^{-2/3}\left(1+\frac{7}{25}\eta^2\right)-$$
$$-\zeta'\left[\frac{1}{54\sqrt3}\,\Gamma\!\left(\frac{1}{3}\right)(3\chi)^{1/3}+\frac{1}{9\sqrt3}\,\Gamma\!\left(\frac{2}{3}\right)(3\chi)^{-1/3}-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{4\pi\chi}\left(\left(1+\frac{22}{15}\eta^2\right)l(\chi)+\frac{3}{4}+\eta^2\left(k_2(\eta)-\frac{1}{5}\right)\right)\right]\right\}. \tag{41}$$

где

$$\chi^2=2n\eta^3,\qquad \zeta'=\zeta\sqrt{1+1/\rho}\,,\qquad l(\chi)=\ln\frac{\chi}{\sqrt3}-C\,,$$

$$k_1(\eta)=\int\limits_0^\infty dt\,e^{-t/\eta}\left(\frac{1}{t\operatorname{cth}t-1}-\frac{\operatorname{cth}t}{t}-\frac{2}{t^2}\right),$$

$$k_1(\eta\gg1)\simeq-0{,}56902\ldots+\ln\eta/\eta\,,$$

$$k_2(\eta)=\int\limits_0^\infty\frac{dt}{t}\,e^{-t/\eta}\left(\frac{1}{t\operatorname{cth}t-1}-\frac{3}{t^2}-\frac{1}{5}\right),$$

$$k_2(\eta\gg1)\simeq-\frac{1}{5}\ln\eta+0{,}5519\,. \tag{42}$$

Графики функций k_1, k_2 приведены на рис. 3. При $\eta\ll1$ формулы (40), (41) совпадают с соответствующим разложением интеграла (31) по обратным степеням χ.

В пределе сверхсильного поля ($\eta\gg1$) получаем из формул (40) — (42) следующие выражения для вероятности излучения и поправки к массе электрона*):

$$W=\frac{\alpha m^2}{\varepsilon}\left[\eta(a_1n^{1/3}-k_0+a_2n^{-1/3})+\zeta\sqrt{\eta}\,(a_3n^{1/6}+a_4n^{-1/2})\right], \tag{43}$$

*) Поправка к массе электрона в сверхсильном электрическом поле ($E\gg E_0$) обсуждалась в работе [19].

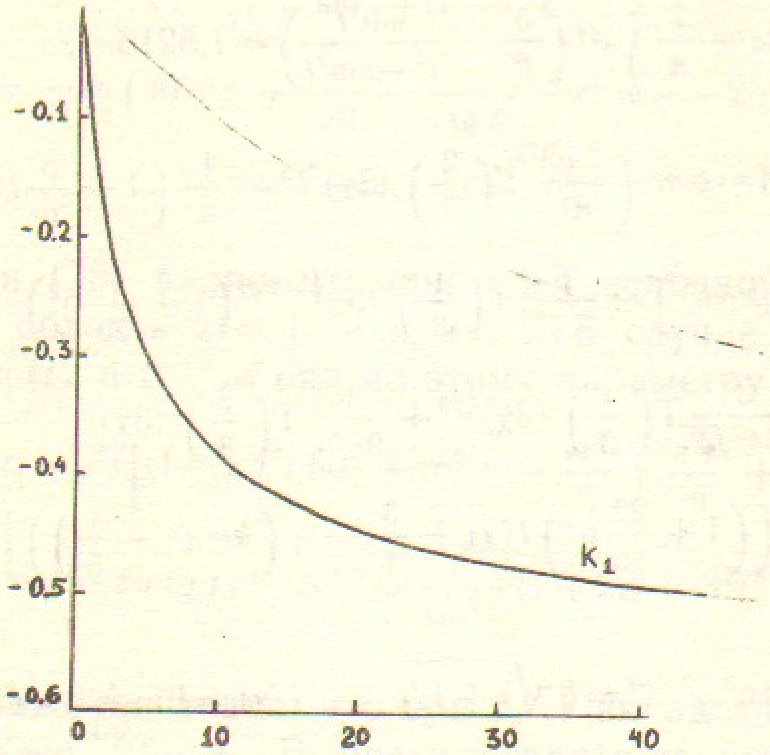

Рис. 3.

где

$$a_1=1{,}8401\,,\qquad a_2=0{,}3180\,,\qquad a_3=0{,}1606\,,\qquad a_4=0{,}2593\,;$$

$$\Delta m=\alpha m\left[\eta(b_1 n^{1/3}-\varkappa_0+b_2 n^{-1/3})+\right.$$
$$\left.+\zeta\sqrt{\eta}\left(-b_3 n^{1/6}+\frac{1}{2\pi\sqrt{2n}}(\ln\eta+c_1\ln n-c_2)\right)\right], \qquad (44)$$

где

$$b_i=\frac{1}{2\sqrt{3}}a_i\,,\qquad \varkappa_0=-\frac{1}{4\pi}k_1(\infty)\,,\qquad c_1=\frac{11}{30},\qquad c_2=0{,}3964\,.$$

Расчет интенсивности излучения по формуле (23) проводится так же, как и для массового оператора, с тем лишь отличием, что в оставленные члены разложения не дает вклада область $u\ll 1$. В результате имеем

$$I=\alpha m^2\left\{\frac{32}{243}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)(3\chi)^{2/3}-\frac{2}{3}+\frac{2}{81}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)(3\chi)^{-2/3}\times\right.$$
$$\times(55+4\eta^2/5)+\zeta'\left[\frac{5}{243}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)(3\chi)^{1/3}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{14}{81}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)(3\chi)^{-1/3}+\frac{1}{4\chi}\left(1+\frac{76}{45}\eta^2\right)\right]\right\}. \qquad (45)$$

При $\eta\gg 1$ получаем

$$I=\alpha m^2\left[\eta(d_1 n^{1/3}+d_2 n^{-1/3})+\zeta\sqrt{\eta}\,(d_3 n^{1/6}+d_4 n^{-1/2})\right], \qquad (46)$$

где $d_1=0{,}4673$, $d_2=0{,}0202$, $d_3=0{,}0892$, $d_4=0{,}2986$.

Из спиновой части поправки к массе электрона можно получить выражение для аномального магнитного момента. В единицах $\alpha/2\pi$ это выражение имеет вид

$$\mu(\chi,\eta)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)(3\chi)^{-2/3}+6\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)(3\chi)^{-4/3}\right]-$$
$$-\frac{1}{\chi^2}\left[\left(1+\frac{22}{15}\eta^2\right)l(\chi)+\frac{3}{4}+\eta^2\left(k_2(\eta)-\frac{1}{5}\right)\right]. \qquad (47)$$

При $\eta\gg 1$, используя асимптотику $k_2(\eta)$ (42), получаем

$$\mu_n(\eta)=\frac{1}{\eta}\left[\frac{c_3}{n^{1/3}}-\frac{1}{n}(\ln\eta+c_1\ln n-c_2)\right], \qquad (48)$$

где c_1, c_2 определены в формуле (44), $c_3=0{,}4120$.

Отметим, что с логарифмической точностью формула (48) справедлива и для низших возбужденных уровней $n\geqslant 1$ (см. работу [13] и цитированную там литературу). Из выражения (48) видно, что при $n\gg 1$ аномальный магнитный момент обращается в нуль ($\mu_n(\eta_0)=0$) и имеет минимум $\mu_n(\eta_m)$ при больших значениях параметра η, что оправдывает использование асимптотики (48) в этой области. При этом

$$\eta_0=\exp(c_3 n^{2/3}-c_1\ln n+c_2)\,,\qquad \eta_m=e\eta_0\,. \qquad (49)$$

Используя формулу (49) для $n=1$, 2, получаем: $\eta_m(n=1)\simeq 6{,}10$, $\mu_1(\eta_m)\simeq -0{,}164$, $\eta_m(n=2)\simeq 6{,}03$, $\mu_2(\eta_m)=-0{,}083$. Эти значения и поведение функции (48) при $\eta\geqslant\eta_m$ достаточно хорошо согласуются с результатами численного расчета аномального магнитного момента, проведенного в работе [13].

Полученные выше выражения для вероятности и интенсивности излучения позволяют оценить его характерные частоты. В слабом поле $\eta\ll 1$ в случае нерелятивистского поперечного движения ($\rho\ll 1$) получаем из формул (10), (15) для средней частоты излучения ($p_z=0$)

$$\bar{\omega} = \frac{I}{W} \simeq \eta m = \omega_0, \tag{50}$$

что соответствует дипольному излучению в осцилляторе с $\Delta n = 1$. Если продольный импульс велик ($p_z^2 \gtrsim m^2$), то для излучаемых частот необходимо учитывать доплеровское смещение. В случае, когда параметр ρ не мал, но мала величина параметра χ, средняя энергия фотона определяется выражением

$$\frac{\bar{\omega}}{\varepsilon} \simeq \frac{\rho\eta}{f_0(\rho)}, \quad \frac{\bar{\omega}}{\varepsilon}(\rho \gg 1) \simeq \frac{4\eta}{5}\sqrt{\frac{\rho}{3}} \sim \frac{\chi}{2}. \tag{51}$$

При $\chi \gtrsim 1$ энергия излучаемых квантов становится сравнимой с энергией электрона и при $\chi \gg 1$ $\bar{\omega} \simeq \varepsilon a_1/d_1 \sim \varepsilon/4$. В случае сверхсильных полей $\eta \gg 1$ при излучении с низших возбужденных уровней средняя энергия фотонов становится еще больше. Поскольку коэффициенты ряда по степеням $n^{-1/3}$ для вероятности и интенсивности излучения в этом случае достаточно быстро убывают, для оценки $\bar{\omega}$ можно использовать формулы (43), (46) вплоть до $n \sim 1$. Для неполяризованных частиц получаем для $\bar{\omega}$ при $\eta \gg 1$ следующее выражение:

$$\frac{\bar{\omega}}{\varepsilon} \simeq \frac{1}{4}\left(1 - \frac{5}{6}n^{-1/3} + \frac{1}{6}n^{-2/3}\right)^{-1} \tag{52}$$

Приложение

Проиллюстрируем детали расчета в пределе $\eta \ll 1$ на примере нахождения разложения массового оператора до членов $\sim \eta^2$ включительно. Следующие члены разложения в (6), (8) и соответствующее выражение для интенсивности (24) вычисляются аналогично. В соответствии со сказанным в тексте разобьем область интегрирования по x в (1) на две: $(0,\ x_0)$ и $(x_0,\ \infty)$, где $\eta \ll x_0 \ll 1$. В области $(0,\ x_0)$ можно использовать выражения (3), (4) и дополнительно разложить по x функции $c(x) = 1 - \cos x$, $s(x) = 1 - \sin x/x$. Тогда с принятой точностью, после замены переменной $x \to 2\eta x$ вклад области $(0,\ x_0)$ принимает вид

$$M_1 = \frac{\alpha m}{2\pi}\int_0^1 du \int_0^{x_0/2\eta} dx\, e^{-iux} \left\{\frac{\eta^2 x}{3}\langle \rho(1-u)[2(3-2u) - iu(1-u)^2 x] - \right.$$
$$\left. - u(3u^2 - 5u + 4)\rangle - i\eta\zeta\gamma_\perp u(1-u)\right\}. \tag{П.1}$$

Интегралы по x в (П.1) выражаются через функцию $\varphi(u) = (1 - e^{-iux_0/2\eta})/u$ и ее производные по u. В свою очередь, члены, содержащие производные функции $\varphi(u)$, проинтегрируем по частям. Во внеинтегральных членах можно положить $\varphi(0) = ix_0/2\eta$, $\varphi(1) = 1$, $\varphi'(1) = -1$. Единственный нетривиальный интеграл по u имеет вид

$$\int_0^1 du\, \varphi(u) \simeq \ln\left(\frac{x_0}{2\eta}\right) + C + i\frac{\pi}{2}, \tag{П.2}$$

где учтено, что $x_0/2\eta \gg 1$, C — постоянная Эйлера. Выполнив интегрирование по u, находим для вклада области $(0,\ x_0)$

$$M_1 = \frac{\alpha m}{2\pi}\left\{\eta^2\left[-\frac{5}{2} - \frac{8}{3}\rho + \frac{4}{3}(1+2\rho)\left(\ln\left(\frac{x_0}{2\eta}\right) + C + i\frac{\pi}{2}\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{5}{6}i\rho\frac{x_0}{\eta}\right] - \eta\zeta\gamma_\perp\left(\frac{1}{2} + \frac{2i\eta}{x_0}\right)\right\}. \tag{П.3}$$

В области $(x_0,\ \infty)$, воспользовавшись формулами (3), (4), имеем после замены $u = 2\eta z/x$:

$$M_2 = \frac{\alpha m\eta}{\pi}\left\{\int_{x_0}^{\infty}\frac{dx}{x^2}\int_0^{x/2\eta} dz\left[e^{-iz\mu}\langle 1 + \rho c(x) + \frac{2\eta z}{x} \times \right.\right.$$
$$\times\left[2s(x)(1+\rho c(x))\left(1 + iz\rho\frac{c(x)}{x^2}\right) + 1 + (\rho - 1)s(x) - \right.$$
$$\left.\left.\left. - (1+2\rho)c(x) + i\zeta\gamma_\perp x\left(s(x) - 1 + \frac{c(x)}{x^2}\right)\right]\rangle - e^{-iz}\left(1 + \frac{2\eta z}{x}\right)\right]\right\}. \tag{П.4}$$

Поскольку в (П.4) $\mu = 1 + \rho(1 - 2c(x)/x^2) > 1$ и верхний предел интеграла по z: $x/2\eta \gtrsim x_0/2\eta \gg 1$, это интегрирование с точностью до экспоненциально малых членов можно распространить до ∞, после чего оно становится тривиальным. Так, линейный по η член M_2 имеет вид

$$M_{21} = -\frac{i\alpha m\eta}{\pi}\int_{x_0}^{\infty}\frac{dx}{x^2}\left[\frac{1+\rho c(x)}{\mu} - 1\right] \simeq$$

$$\simeq -\frac{i\alpha m\eta}{\pi}\left\{\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}\left[\frac{1+\rho c(x)}{\mu}-1\right]-\frac{5}{12}\rho x_0\right\}. \qquad (\text{П.5})$$

В квадратичном по η члене интеграл по x расходится при $x_0 \to 0$. Вычитая и прибавляя члены, компенсирующие эту расходимость, находим в η^2-порядке

$$M_{22} = -\frac{2\alpha m\eta^2}{\pi}\left\{\int_0^\infty \frac{dx}{x^3}\left\langle\left[2s(x)\left(1+\rho c(x)\right)\left(1+\frac{2\rho c(x)}{\mu x^2}\right)+1+\right.\right.\right.$$

$$\left.+s(x)(\rho-1)-(1+2\rho)\,c(x)+i\zeta\gamma_\perp x\left(s(x)-1+\frac{c(x)}{x^2}\right)\right]\mu^{-2}-$$

$$\left.-1+i\frac{x}{2}\zeta\gamma_\perp+2(1+2\rho)\,s(x)\right\rangle-$$

$$\left.-\int_{x_0}^\infty \frac{dx}{x^3}\left[2(1+2\rho)\,s(x)+i\frac{x}{2}\zeta\gamma_\perp\right]\right\}. \qquad (\text{П.6})$$

Последний интеграл в (П.6) с нужной точностью равен

$$\int_{x_0}^\infty \frac{dx}{x^3}\left[2(1+2\rho)\,s(x)+i\frac{x}{2}\zeta\gamma_\perp\right]\simeq\frac{(1+2\rho)}{3}\left[\frac{11}{6}+\ln\frac{1}{x_0}-C\right]+i\zeta\frac{\gamma_\perp}{2x_0}. \qquad (\text{П.7})$$

Сумма выражений (П.3), (П.5) и (П.6) (с учетом (П.7)), в которой величина x_0, как и должно быть, сокращается, дает с точностью до членов $\sim\eta^2$ массовый оператор M, мнимая часть которого связана с вероятностью излучения, согласно (5).

Расчет асимптотики M при $n\gg1$ также проводился с помощью «сшивки». В качестве примера найдем часть M, не зависящую от спина. Обозначим эту часть через T. Члены в M, пропорциональные ζ, вычисляются точно также. Исходя из проведенного (см. обсуждение после (38), (39)) анализа, разобьем область интегрирования по u на три: $(0,\ u_1)$; $(u_1,\ u_2)$; $(u_2,\ 1)$. Параметры u_1, u_2 подчиним следующим условиям: $n^{-1}\ll u_1\ll1$, $n^{-1/2}\ll 1-u_2\ll1$. В первой области можно провести разложение по u, после чего для вклада этой области получаем

$$T_1=\frac{\alpha m\rho}{2\pi}\int_0^\infty\frac{dx}{x}c(x)\int_0^{u_1}du\,\exp\left[-inux\left(1-2c(x)/x^2\right)\right]=$$

$$=\frac{i\alpha m\eta}{\pi}\int_0^\infty\frac{dx}{x}\,c(x)\frac{\exp\left[-inu_1x\left(1-\frac{2c(x)}{x^2}\right)\right]-1}{1-2c(x)/x^2}\simeq$$

$$\simeq\frac{\alpha m\eta}{\pi}\left\{i\int_0^\infty\frac{dx}{x^2}\left[6-\frac{c(x)}{1-2c(x)/x^2}\right]+(2nu_1)^{1/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)(-3i)^{2/3}-\right.$$

$$\left.-\frac{7i\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{45}\left(-\frac{3i}{2nu_1}\right)^{1/3}\right\}. \qquad (\text{П.8})$$

Интеграл по x в (П.8) также вычислялся «сшивкой», с учетом условия $nu_1\gg1$. В области (u_1, u_2) вклад дают лишь малые значения $x\sim n^{-1/3}$. Выполняя соответствующее разложение, имеем

$$T_2=\frac{\alpha m}{2\pi}\int_{u_1}^{u_2}du\int_0^{x_1}\frac{dx}{x}\exp\left[-\frac{iux}{2\eta}\right]\left\{\frac{\rho x^2}{2}(1-u)\left\langle\left(1-\frac{2}{3}u\right)\times\right.\right.$$

$$\times\left[1+ux^2\left(\frac{1}{3}-\frac{u}{4}\right)+\frac{inu(1-u)^2x^5}{16\cdot45}(9u^2-12u+2)\right]-$$

$$\left.-\frac{x^2}{12}\left(1-\frac{4}{5}u\right)\right\rangle\exp\left[-\frac{inu(1-u)^2x^3}{12}\right]+$$

$$\left.+(1+u)\left(\exp\left[-\frac{inu(1-u)^2x^3}{12}\right]-1\right)\right\}. \qquad (\text{П.9})$$

Условия, наложенные на u_1, u_2, позволяют выбрать такое $x_1\ll1$, что $nu(1-u)^2x_1^3\gg1$, тогда интегрирование по x в (П.9) можно распространить до ∞. Выполняя это интегрирование (функция $\exp(-iux/2\eta)$ не разложена в (П.9) только для компактности записи), находим

$$T_2=\frac{\alpha m}{\pi}\int_{u_1}^{u_2}du\left\{\frac{(1-2u/3)}{1-u}\left[\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3i}{z}\right)^{2/3}-1\right]+\right.$$

$$+\frac{u(2/3-u)}{18(1-u)}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)(-3i)^{4/3}z^{2/3}-\frac{\Gamma(1/3)(-3i/z)^{4/3}}{15\cdot27\cdot\rho(1-u)^3}\left[7-\frac{56}{3}u+17u^2-6u^3\right]+$$

$$+\frac{(1+u)}{3}\left[\frac{1}{2}\ln 3+C-\ln\left(\frac{-i}{z}\right)\right]\Big\}, \qquad (\text{П}.10)$$

здесь $z=u/(1-u)\eta\sqrt{\rho}$. Для дальнейшего вычисления T_2 члены в (П.10), имеющие особенность при $u\to 0$ или $u\to 1$, следует преобразовать интегрированием по частям, выделив тем самым явную зависимость от параметров сшивки u_1 и u_2, после чего интегралы сводятся к табличным и для величины T_2 получаем

$$T_2=\frac{\alpha m}{\pi}\Big\{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)(-3i\eta\sqrt{\rho})^{2/3}\left[\frac{14\pi}{27\sqrt{3}}-\frac{1}{6}\delta^{2/3}-u_1^{1/3}\right]+$$

$$+\frac{1}{3}(\ln\delta-2)+\frac{i\Gamma(1/3)(-3i)^{1/3}}{(\eta\sqrt{\rho})^{2/3}}\left[\frac{\delta^{-2/3}}{12}-\frac{10\pi}{27\sqrt{3}}\right]-$$

$$-\frac{i\Gamma(1/3)}{9\cdot 15}\left(\frac{-3i\eta^4}{\rho}\right)^{1/3}\left[\frac{14\pi}{\sqrt{3}}+\delta^{-2/3}-21u_1^{-1/3}\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln 3+C+\frac{1}{3}-\ln(-i\eta\sqrt{\rho})\right]\Big\}, \qquad (\text{П}.11)$$

где $\delta=1-u_2$. В третьей области проведем разложение подынтегрального выражения в массовом операторе по малой величине $y=1-u$:

$$T_3=\frac{\alpha m\rho}{2\pi}\int_0^\infty\frac{dx}{x}\exp\left[\frac{-ix}{2\eta}\right]\left(\frac{x/2}{\sin(x/2)}\right)^2 s(x)\int_0^\delta dy\, y\times$$

$$\times\exp\left\{-inxy^2\left[1-\frac{\sin x}{x}\left(\frac{x/2}{\sin(x/2)}\right)^2\right]\right\}. \qquad (\text{П}.12)$$

Выполнив в (П.12) элементарное интегрирование по y и заменив $x\to 2x$, имеем

$$T_3=\frac{i\alpha m\eta}{4\pi}\int_0^\infty\frac{dx}{\sin^2 x}\,\frac{s(2x)\exp\left\{-i\frac{x}{\eta}\right\}}{1-\frac{\sin 2x}{2x}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2}F(x), \qquad (\text{П}.13)$$

$$F(x)=\exp\left\{-irx\left[1-\frac{\sin 2x}{2x}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\right]\right\}-1,$$

$$r=2n\delta^2\gg 1.$$

Дополнительный анализ показывает, что полюсы в (П.13), лежащие на действительной оси, обходятся снизу. Выберем значение x_2, удовлетворяющее условию $r^{-1/3}\ll x_2\ll 1$. В области $(0, x_2)$ можно провести разложение по $x\ll 1$, а в области (x_2, ∞) заменить $F(x)\to -1$. Теперь добавим и вычтем интеграл, в котором $F(x)$ заменена на -1 по контуру $x=x_2e^{i\varphi}$, $-\pi/2\leqslant\varphi\leqslant 0$ в комплексной плоскости x. Получившийся интеграл

$$\left(\int_{-ix_2}^{x_2}+\int_{x_2}^{\infty}\right)dx$$

с $F=-1$ можно развернуть вдоль отрицательной мнимой полуоси и перейти к переменной $-ix$, а интегралы в области $|x|\ll 1$ вычислить непосредственно. В результате находим для T_3:

$$T_3=\frac{\alpha m\eta}{2\pi}\Big\{\int_{x_2}^\infty\frac{dx\,e^{-x/\eta}}{2\,\mathrm{sh}^2x}\,\frac{1-\mathrm{sh}\,2x/2x}{1-\frac{\mathrm{sh}\,2x}{2x}\left(\frac{x}{\mathrm{sh}\,x}\right)^2}+$$

$$+\frac{1}{\eta}\left[\ln\left(\frac{i}{x_2}\right)+\frac{1}{3}\ln\left(\frac{-3i}{r}\right)-\frac{C}{3}\right]-\frac{1}{x_2}+\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)(-i)^{2/3}\left(\frac{r}{3}\right)^{1/3}+$$

$$+\frac{i\Gamma(1/3)}{3}\left(\frac{-3i}{r}\right)^{1/3}\left(\frac{2}{45}-\frac{1}{2\eta^2}\right)\Big\}. \qquad (\text{П}.14)$$

Организуя, как обычно, сходящееся при $x\to 0$ выражение в оставшемся интеграле и вычисляя в явном виде интегралы от вычитательных членов, после простых преобразований получаем из (П.14)

$$T_3=\frac{\alpha m\eta}{2\pi}\Big\{\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{dx}{x}e^{-x/\eta}\left[\frac{1}{\mathrm{cth}\,x-1/x}-\mathrm{cth}\,x-\frac{2}{x}\right]+$$

$$+\left(\frac{r}{3}\right)^{1/3}(-i)^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{i\Gamma(1/3)}{3}\left(-\frac{3i}{r}\right)^{1/3}\left(\frac{2}{45}-\frac{1}{2\eta^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{\eta}\left[\ln\left(\frac{1}{\eta}\right)-1+\frac{1}{3}\ln\left(\frac{3}{r}\right)+\frac{2}{3}\left(C+i\frac{\pi}{2}\right)\right]\Big\}. \qquad (\text{П}.15)$$

Нетрудно убедиться, что в сумме $T=T_1+T_2+T_3$ выражений (П.8), (П.11) и (П.15) параметры u_1 и u_2 сокращаются и воспроизводится результат, приведенный в тексте.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Michel F.O.* Rev. Mod. Phys., 1982, v.54, p.1.
2. *Fenimore E.E. et al.* Astrophys. J. (Let), 1988, v.335, p.471.
3. *Байер В.Н., Катков В.М., Фадин В.С.* Излучение релятивистских электронов.—М.: Атомиздат, 1973.
4. *Tsai W.Y., Yildiz A.* Phys. Rev., 1973, v.D8, p.3446.
5. *Байер В.Н., Катков В.М., Страховенко В.М.* ЖЭТФ, 1974, т.67, с.453.
6. *Baier V.N., Katkov V.M., Strakhovenko V.M.* Phys. Lett., 1986, v.A117, p.251.
7. *Багров В.Г., Белов В.В., Маслов В.П.* ДАН СССР, 1989, т.308, № 1, с.88.
8. *Байер В.Н., Катков В.М., Страховенко В.М.* ЖЭТФ, 1972, т.63, с.2121.
9. *Байер В.Н., Катков В.М.* ЖЭТФ, 1967, т.52, с.1422.
10. *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Квантовая электродинамика.—М.: Наука, 1989.
11. *Байер В.Н., Катков В.М., Страховенко В.М.* Электромагнитные процессы при высокой энергии в ориентированных монокристаллах.—Новосибирск: Наука, 1989.
12. *Baier V.N., Katkov V.M., Strakhovenko V.M.* Phys. Lett., 1986, v.A114, p.511.
13. *Байер В.Н., Катков В.М., Страховенко В.М.* ЯФ, 1976, т.24, с.379.
14. *Demeur M.* Acad. R. Belg. Cl. Sci. Mem., 1953, v.28, N 5, p.1643.
15. *Тернов И.М., Багров В.Г., Бородовицин В.А., Дорофеев О.Ф.* ЖЭТФ, 1968, т.55, с.2273.
16. *Jancovici B.* Phys. Rev., 1969, v.187, p.2275.
17. *Sokolov A.A., Zhukovskii V.Ch., Nikitina N.S.* Phys. Lett., 1973, v.A43, p.85.
18. *White D.* Phys. Rev., 1974, v.D10, p.1726; 1976, v.D13, p.1791.
19. *Артимович Г.К., Ритус В.И.* ЖЭТФ, 1986, т.90, с.816.

В.Н. Байер, В.М. Катков, В.М. Страховенко

Структура
массового оператора электрона
в однородном магнитном поле,
близком к критическому

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 15 марта 1990 г.
Подписано в печать 26.04 1990 г. МН 08578
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2,3 печ.л., 1,9 уч.-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ № 55

Набрано в автоматизированной системе на базе фотонаборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и отпечатано на ротапринте Института ядерной физики СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.