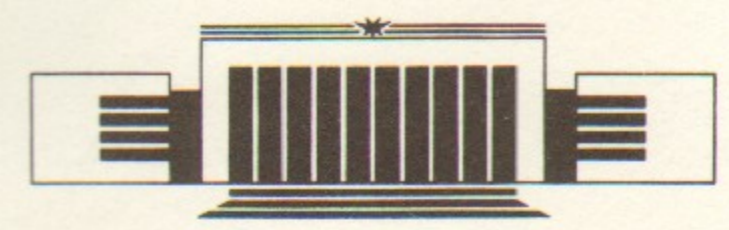




А.Г. Грозин

**СИСТЕМА REDUCE  
В ФИЗИКЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ  
Введение**

**ПРЕПРИНТ 90-42**



НОВОСИБИРСК

СИСТЕМА REDUCE  
В ФИЗИКЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Введение

А.Г. Грозин

Институт ядерной физики  
630090, Новосибирск 90, СССР

АННОТАЦИЯ

Настоящий препринт представляет собой первую часть пособия по применению языка аналитических вычислений REDUCE для вычисления сечений рассеяния и вероятностей распада в физике элементарных частиц. Он содержит обзор необходимых формул и примеры работы с векторами и матрицами Дирака в системе REDUCE.

REDUCE  
IN ELEMENTARY PARTICLE PHYSICS  
Introduction

A.G. Grozin

Institute of Nuclear Physics  
630090, Novosibirsk, USSR

ABSTRACT

This preprint is the first part of the problem book on using REDUCE for calculations of cross sections and decay probabilities in elementary particle physics. It contains the review of the necessary formulae and examples of using REDUCE for calculations with vectors and Dirac matrices.

© Институт ядерной физики СО АН СССР

1. КИНЕМАТИКА

**Введение.** Настоящая серия препринтов посвящена применению языка аналитических вычислений REDUCE [1] в физике элементарных частиц. Описание языка и его использования в других областях физики можно найти в [2]. Физика элементарных частиц является одной из основных и исторически первых областей приложения компьютерной алгебры. В REDUCE имеются специальные средства для вычислений в этой области.

Изложение носит практический характер. Мы проследим, как выводится ряд известных формул для сечений и вероятностей распадов на REDUCE. С теоретическими основаниями применяемых методов можно подробнее ознакомиться по имеющимся учебникам, например, [3].

Несколько слов об обозначениях. Мы используем систему единиц  $\hbar = c = 1$ . Для 4-векторов применяются обозначения Фейнмана: индекс пишется снизу и означает контравариантные компоненты, по повторяющемуся индексу подразумевается суммирование по правилу  $u_\mu v_\mu = u_0 v_0 - u_1 v_1 - u_2 v_2 - u_3 v_3$ . Например,  $x_\mu = (t, \vec{x})$ ,  $y, z) = (t, \vec{r})$  — радиус-вектор;  $p_\mu = (\varepsilon, \vec{p})$  — энергия-импульс;  $px = p_\mu x_\mu = \varepsilon t - \vec{p} \vec{r}$ . Оператор градиента

$$\partial_\mu = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right);$$

$\delta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$  при  $\mu = \nu$ , так что  $v_\mu = \delta_{\mu\nu} v_\nu$ . Единичный антисимметричный тензор  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  определен так, что  $\epsilon_{0123} = 1$ .

**Распады и реакции рассеяния.** Амплитуды вероятности переходов образуют  $S$ -матрицу:

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta(p_f - p_i) T_{fi}. \quad (1)$$

Здесь первый член соответствует отсутствию взаимодействия; во втором выделена  $\delta$ -функция сохранения энергии-импульса.

При вычислении вероятности перехода из начального состояния  $i$  в конечное состояние  $f$  возникает квадрат

$$[\delta(p_f - p_i)]^2 = \delta(p_f - p_i) \delta(0).$$

Как его понимать? Вспомнив, что  $(2\pi)^4 \delta(p) = \int e^{ipx} dx$ , мы получаем  $\delta(0) = VT/(2\pi)^4$ , где  $V$  и  $T$  — рассматриваемый объем и промежуток времени (они стремятся к бесконечности). Поэтому вероятность перехода в единицу времени  $W_{fi} = (2\pi)^4 \delta(p_f - p_i) |T_{fi}|^2 V$ . Физические величины не должны зависеть от нормировочного объема  $V$ .

В матричном элементе  $T_{fi}$  волновые функции начальных и конечных частиц нормированы на одну частицу в объеме  $V$ . Удобнее использовать волновые функции, нормированные релятивистски-инвариантным условием, чтобы плотность потока частиц  $j_\mu = 2p_\mu$ . Тогда  $T_{fi}$  выражается через инвариантный матричный элемент  $M_{fi}$  как

$$T_{fi} = M_{fi} \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_i V}} \prod_f \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_f V}}$$

где  $\prod_i$  и  $\prod_f$  означают произведения по всем начальным и конечным частицам. Кроме того, нас интересует переход не в одно конечное состояние, а в группу близких состояний. Число состояний каждой конечной частицы в элементе импульсного пространства  $d^3 \vec{p}$  равно  $V d^3 \vec{p} / (2\pi)^3$ . Поэтому

$$dW_{fi} = V \prod_i \frac{1}{2\epsilon_i V} |M_{fi}|^2 d\Phi_f, \quad (2)$$

где инвариантный фазовый объем<sup>\*)</sup>

$$d\Phi_f = (2\pi)^4 \delta(p_f - p_i) \prod_f \frac{d^3 \vec{p}_f}{(2\pi)^3 2\epsilon_f}. \quad (3)$$

Эта формула относится к определенным состояниям поляризации всех начальных и конечных частиц. Если нас интересует рождение конечных частиц с любыми поляризациями, по ним нужно просуммировать. Если начальные частицы не поляризованы, по их поляризациям нужно усреднить. Для этого в (2) вместо  $|M_{fi}|^2$  нужно использовать

$$\overline{|M_{fi}|^2} = \frac{1}{\prod_i n_i} \sum_{\sigma_i, \sigma_f} |M_{fi}|^2,$$

где  $n_i$  — число состояний поляризации  $i$ -й частицы (обычно  $n_i = 2s_i + 1$ ; для фотона 2, для нейтрино 1), а сумма берется по поляризациям начальных и конечных частиц.

Если в начальном состоянии имелась одна частица (с массой  $m$ ), то такой процесс (распад) естественно рассматривать в ее системе покоя. Вероятность распада в единицу времени дается формулой

$$d\Gamma = \frac{1}{2m} \overline{|M|^2} d\Phi \quad (4)$$

Среднее время жизни  $\tau = 1/\Gamma$ , где  $\Gamma$  — полная вероятность распада в единицу времени.

Если в начальном состоянии имелись две частицы (с импульсами  $p_1$  и  $p_2$ ), то в системе покоя 2 число взаимодействий в единицу времени в единице объема (которое является инвариантным) по определению равно  $dN/dVdT = n_2 n_1 |\vec{v}_1| d\sigma$ , где  $d\sigma$  называется

<sup>\*)</sup> Релятивистская инвариантность выражения  $d^3 \vec{p}/2\epsilon$  очевидна из его записи в виде  $\delta(p^2 - m^2) d^4 p$  (если ограничиться векторами  $p$ , направленными в будущее). Отметим общее тождество: рассмотрим фазовый объем  $d\Phi_{AB}$ , где  $A$  и  $B$  — любые группы частиц, и объединим группу  $B$  в единое целое, для чего домножим на  $\delta(p_B - \sum_B p_B)$  и на  $\delta(p_B^2 - m_B^2) dm_B^2$ . Получим

$$d\Phi_{AB} = d\Phi_{A(B)} d\Phi_B \frac{dm_B^2}{2\pi},$$

где  $d\Phi_{A(B)}$  — фазовый объем, в котором группа частиц  $B$  заменена на одну частицу массы  $m_B$ .

сечением рассеяния. Выражая  $dN/dVdT$  через плотности частиц в своих системах покоя  $n_{1,2}^0$ , получим

$$n_2^0 n_1^0 \frac{|\vec{p}_1|}{m_1} d\sigma = \frac{n_1^0 n_2^0}{m_1 m_2} \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} d\sigma.$$

Очевидно, в любой системе  $n/\varepsilon = n^0/m$ , так как  $j_\mu$  — вектор, параллельный  $p_\mu$ . Поэтому  $dN/dVdT = n_1 n_2 / \varepsilon_1 \varepsilon_2 I d\sigma$ , где введен инвариантный поток

$$I = \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}. \quad (5)$$

Если выразить его через скорости, то

$$I/\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \sqrt{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2},$$

так что в любой системе, где  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  параллельны (включая системы покоя 1 и 2 и систему центра масс) мы имеем просто  $dN/dVdT = n_1 n_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| d\sigma$ . Сечение равно

$$d\sigma = \frac{1}{4I} |M|^2 d\Phi. \quad (6)$$

Процессы, в которых три или более элементарных частиц сталкиваются и одновременно сближаются на столь малые расстояния, что могут провзаимодействовать, чрезвычайно маловероятны. Иногда они могут наблюдаться, например, поглощение нескольких фотонов из интенсивного лазерного пучка. Мы такие процессы рассматривать не будем.

**Распад 1→2.** В распаде  $a \rightarrow a_1 a_2$  закон сохранения энергии-импульса  $p = p_1 + p_2$  полностью определяет энергии и величину импульса продуктов распада. Переписав его в виде  $p - p_1 = p_2$  и возведя в квадрат, получим  $m^2 + m_1^2 - 2pp_1 = m_2^2$ , где в системе покоя  $a$   $pp_1 = m\varepsilon_1$ . Отсюда

$$\varepsilon_1 = \frac{m^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m}, \quad \varepsilon_2 = \frac{m^2 + m_2^2 - m_1^2}{2m}. \quad (7)$$

Величины импульсов продуктов распада  $|\vec{p}_{1,2}| = \sqrt{\varepsilon_{1,2}^2 - m_{1,2}^2}$ , очевидно, одинаковы:

$$\vec{p}^2 = \frac{m^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2m^2 m_1^2 - 2m^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_2^2}{4m^2}$$

$$= \frac{(m + m_1 + m_2)(m - m_1 - m_2)(m + m_1 - m_2)(m - m_1 + m_2)}{4m^2}. \quad (8)$$

Двухчастичный фазовый объем

$$d\Phi = (2\pi)^4 \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - m) \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 2\varepsilon_1} \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2\varepsilon_2}$$

может быть легко вычислен. Интеграл по  $d^3 \vec{p}_2$  снимается  $\delta$ -функцией сохранения импульса  $\delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$ . После интегрирования по углам,  $d^3 \vec{p}_1 = 4\pi p^2 dp$ , где  $p = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$ . Поэтому

$$d\Phi = \frac{1}{4\pi} \delta(\varepsilon_1(p) + \varepsilon_2(p) - m) \frac{p^2 dp}{\varepsilon_1(p) \varepsilon_2(p)} = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(p - p_0)}{\left| \frac{d\varepsilon_1}{dp} + \frac{d\varepsilon_2}{dp} \right|_{p=p_0}} \frac{p_0^2 dp}{\varepsilon_1(p_0) \varepsilon_2(p_0)},$$

где импульс  $p_0$  определяется как корень выражения под знаком  $\delta$ -функции и дается формулой (8). Учитывая, что  $d\varepsilon/dp = p/\varepsilon$ , получаем фазовый объем

$$\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\frac{p_0}{\varepsilon_1} + \frac{p_0}{\varepsilon_2}} \frac{p_0^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2},$$

поскольку  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = m$ , окончательно

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \frac{|\vec{p}|}{m} \quad (9)$$

**Распад 1→3.** В распаде  $a \rightarrow a_1 a_2 a_3$  закон сохранения энергии-импульса  $p = p_1 + p_2 + p_3$  не определяет полностью энергии и импульсы продуктов распада. Две величины, например, энергии  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ , можно выбирать произвольно; третья энергия находится из закона сохранения  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = m$ . Величины импульсов тем самым заданы; углы между ними определяются из того, что они образуют треугольник  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$ .

Удобно рассматривать все три энергии равноправно, и изображать распад точкой на диаграмме Далица (рис.1). В правильном треугольнике (со стороной  $a$ ) сумма расстояний от произвольной точки до его сторон  $h_i$  постоянна и равна его высоте  $h$ . Действительно, соединив эту точку с вершинами, мы разобьем треугольник с площадью  $ah/2$  на три треугольника с площадями  $ah_i/2$ . Поэтому каждой точке на диаграмме Далица, представляющей собой правильный треугольник с высотой  $m$ , соответствуют энергии  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ , такие, что  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = m$ .

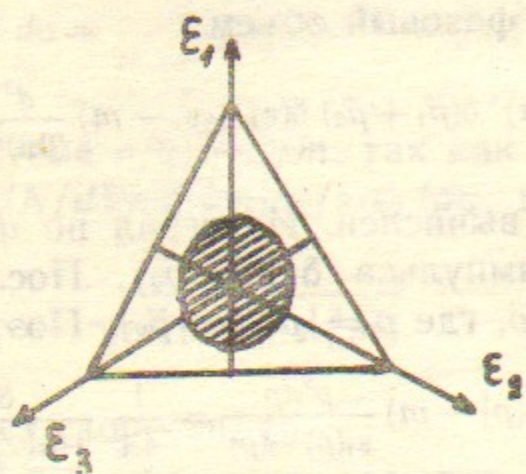


Рис. 1. Диаграмма Далица.

Однако не всякая точка на диаграмме допустима. Необходимо, чтобы величины импульсов  $|\vec{p}_1|$ ,  $|\vec{p}_2|$ ,  $|\vec{p}_3|$  удовлетворяли неравенству треугольника

$$||\vec{p}_2| - |\vec{p}_3|| \leq |\vec{p}_1| \leq |\vec{p}_2| + |\vec{p}_3|.$$

Возводя его в квадрат, получим

$$\vec{p}_2^2 + \vec{p}_3^2 - 2|\vec{p}_2| |\vec{p}_3| \leq \vec{p}_1^2 \leq \vec{p}_2^2 + \vec{p}_3^2 + 2|\vec{p}_2| |\vec{p}_3|,$$

или

$$-2|\vec{p}_2| |\vec{p}_3| \leq \vec{p}_1^2 - \vec{p}_2^2 - \vec{p}_3^2 \leq 2|\vec{p}_2| |\vec{p}_3|.$$

Еще раз возводя в квадрат, имеем

$$(\vec{p}_1^2 - \vec{p}_2^2 - \vec{p}_3^2)^2 - 4\vec{p}_2^2 \vec{p}_3^2 \leq 0,$$

или

$$\vec{p}_1^4 + \vec{p}_2^4 + \vec{p}_3^4 - 2\vec{p}_1^2 \vec{p}_2^2 - 2\vec{p}_1^2 \vec{p}_3^2 - 2\vec{p}_2^2 \vec{p}_3^2 \leq 0.$$

Это неравенство можно записать как

$$(|\vec{p}_1| + |\vec{p}_2| + |\vec{p}_3|)(|\vec{p}_1| - |\vec{p}_2| - |\vec{p}_3|)(|\vec{p}_1| + |\vec{p}_2| - |\vec{p}_3|)(|\vec{p}_1| - |\vec{p}_2| + |\vec{p}_3|) \leq 0;$$

в таком виде его эквивалентность неравенствам треугольника очевидна. Подставляя  $\vec{p}_i^2 = \epsilon_i^2 - m_i^2$ , получим для физической области на диаграмме Далица

$$(\epsilon_1^2 - m_1^2)^2 + (\epsilon_2^2 - m_2^2)^2 + (\epsilon_3^2 - m_3^2)^2 - 2(\epsilon_1^2 - m_1^2)(\epsilon_2^2 - m_2^2) - 2(\epsilon_1^2 - m_1^2)(\epsilon_3^2 - m_3^2) - 2(\epsilon_2^2 - m_2^2)(\epsilon_3^2 - m_3^2) \leq 0. \quad (10)$$

Вычислим трехчастичный фазовый объем

$$d\Phi = (2\pi)^4 \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - m) \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3 2\epsilon_1} \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2\epsilon_2} \frac{d^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2\epsilon_3}.$$

Интеграл по  $d^3\vec{p}_3$  уничтожает  $\delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3)$ ; записывая также  $d^3\vec{p}_1 = 4\pi p_1^2 dp_1$  и  $d^3\vec{p}_2 = 2\pi p_2^2 dp_2 d\cos\theta$ , где  $\theta$  — угол между  $\vec{p}_2$  и  $\vec{p}_1$ , получаем

$$d\Phi = \frac{1}{32\pi^3} \delta(\epsilon_1(p_1) + \epsilon_2(p_2) + \epsilon_3(-\vec{p}_1 - \vec{p}_2) - m) \frac{p_1^2 dp_1 p_2^2 dp_2 d\cos\theta}{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3}.$$

Величина  $\cos\theta$  входит только в

$$\epsilon_3(-\vec{p}_1 - \vec{p}_2) = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \cos\theta + m_3^2};$$

поэтому  $\delta$ -функция вместе с  $d\cos\theta$  дает

$$\frac{1}{\left| \frac{d\epsilon_3}{d\cos\theta} \right|} = \frac{\epsilon_3}{p_1 p_2}.$$

Учитывая также, что  $p_{1,2} dp_{1,2} = \epsilon_{1,2} d\epsilon_{1,2}$ , окончательно получаем

$$d\Phi = \frac{d\epsilon_1 d\epsilon_2}{32\pi^3}, \quad (11)$$

т. е. элемент фазового объема пропорционален элементу площади на диаграмме Далица.

**Рассеяние 2→1.** В реакциях рассеяния принято вводить переменную  $s = (p_1 + p_2)^2$ , равную квадрату энергии в системе центра масс. Инвариантный поток выражается через нее как

$$I^2 = \frac{1}{4} [s - (m_1 + m_2)^2] [s - (m_1 - m_2)^2] = \frac{1}{4} (\sqrt{s} + m_1 + m_2)(\sqrt{s} - m_1 - m_2)(\sqrt{s} + m_1 - m_2)(\sqrt{s} - m_1 + m_2). \quad (12)$$

В системе центра масс

$$I = \varepsilon_1 \varepsilon_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left( \frac{|\vec{p}|}{\varepsilon_1} + \frac{|\vec{p}|}{\varepsilon_2} \right) = \sqrt{s} |\vec{p}|,$$

где  $|\vec{p}|$  определяется формулой (8) с  $\sqrt{s}$  вместо  $m$ , что совпадает с (12).

Реакция  $a_1 a_2 \rightarrow a$  является обратной к распаду  $a \rightarrow a_1 a_2$ . В системе центра масс одночастичный фазовый объем

$$d\Phi = (2\pi)^4 \delta(\vec{p}) \delta(m - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2\varepsilon} = \frac{\pi}{m} \delta(\sqrt{s} - m).$$

Сечение равно

$$\sigma = \frac{\pi}{4m^2 |\vec{p}|} \overline{|M|^2} \delta(\sqrt{s} - m),$$

где  $\overline{|M|^2} = \frac{1}{n_1 n_2} \sum |M|^2$  для рассеяния отличается от  $\overline{|M|^2} = \frac{1}{n} \sum |M|^2$  для распада множителем  $n/n_1 n_2$ . Поэтому сечение связано с вероятностью  $\Gamma_i$  распада  $a \rightarrow a_1 a_2$  формулой

$$\sigma = \frac{2\pi^2}{p^2} \frac{n}{n_1 n_2} \Gamma_i \delta(\sqrt{s} - m). \quad (13)$$

Сечение, естественно, отлично от 0 только при  $\sqrt{s} = m$ .

Эта формула носит несколько формальный характер. Частица  $a$  обязательно нестабильна, поскольку она может распасться хотя бы на  $a_1 a_2$ . Поэтому на самом деле надо говорить не о реакции  $a_1 a_2 \rightarrow a$ , а о реакции  $a_1 a_2 \rightarrow f$  через промежуточное состояние  $a$ . Сечение  $d\sigma(a_1 a_2 \rightarrow f)$  получается из (13) домножением на вероятность распада  $a \rightarrow f$ , равную  $d\Gamma_f/\Gamma$ . Таким образом, наличие промежуточного состояния  $a$  проявляется как пик в сечении реакции  $a_1 a_2 \rightarrow f$  при  $\sqrt{s} = m$ .

Однако в действительности этот пик не является бесконечно узким. По соотношению неопределенностей, масса  $m$  нестабильной частицы  $a$  определена с точностью до  $1/\tau = \Gamma$ . Пик имеет ширину  $\Gamma$ , поэтому вероятность распада в единицу времени часто называют шириной.

Промежуточное состояние  $a$  дает в матричном элементе множитель  $1/(s - m^2)$  (пропагатор). Для нестабильной частицы, вместо  $m$  нужно подставить  $m - i\Gamma/2$ , так как волновая функция в ее системе покоя  $\exp[-i(m - i\Gamma/2)t]$  приводит к убыванию вероятности  $\exp(-\Gamma t)$ . Квадрат модуля пропагатора (при  $\Gamma \ll m$ , когда

только и можно говорить о приближенно стабильной частице) равен  $1/[(s - m^2)^2 + m^2 \Gamma^2]$ . Сравнивая интегралы по  $s$ , убеждаемся, что при  $\Gamma \rightarrow 0$  функция

$$\frac{m\Gamma}{\pi} \frac{1}{(s - m^2)^2 + m^2 \Gamma^2} \rightarrow \delta(s - m^2).$$

Поэтому с учетом конечной ширины мы должны произвести замену в  $\delta(\sqrt{s} - m) = 2m\delta(s - m^2)$ . Тогда получится формула Брейта-Вигнера

$$d\sigma = \frac{\pi}{p^2} \frac{n}{n_1 n_2} \frac{\Gamma_i d\Gamma_f}{(s - m^2)^2 + m^2 \Gamma^2}. \quad (14)$$

**Рассеяние 2→2.** В реакции  $a_1 a_2 \rightarrow a_3 a_4$  закон сохранения энергии-импульса  $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$  также оставляет свободными два параметра (например, энергию и угол рассеяния в системе центра масс). Принято характеризовать рассеяние инвариантными переменными Мандельстама

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \\ t &= (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2, \\ u &= (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Они не являются независимыми:

$$\begin{aligned} s + t + u &= (p_1 + p_2)^2 + (p_1 - p_3)^2 + (p_1 - p_4)^2 = \\ &= 3m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + 2p_1(p_2 - p_3 - p_4), \quad p_2 - p_3 - p_4 = -p_1, \end{aligned}$$

поэтому

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \quad (16)$$

Переменные  $s, t, u$  можно изобразить на диаграмме Мандельстама (рис. 2); являющейся правильным треугольником с высотой  $h = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2$ . Рассмотрим рассеяние в системе центра масс. Энергии и импульсы частиц  $a_1$  и  $a_2$  определяются формулами (7), (8), в которых вместо  $m$  стоит  $\sqrt{s}$ ; для частиц  $a_3$  и  $a_4$  вместо  $m_1$  и  $m_2$  стоят  $m_3$  и  $m_4$ . Переменная  $t$  связана с углом рассеяния:

$$t = m_1^2 + m_3^2 - 2(\varepsilon_1 \varepsilon_3 - |\vec{p}_1| |\vec{p}_3| \cos \theta). \quad (17)$$

Физическая область определяется условием  $\cos^2 \theta \leq 1$ , или

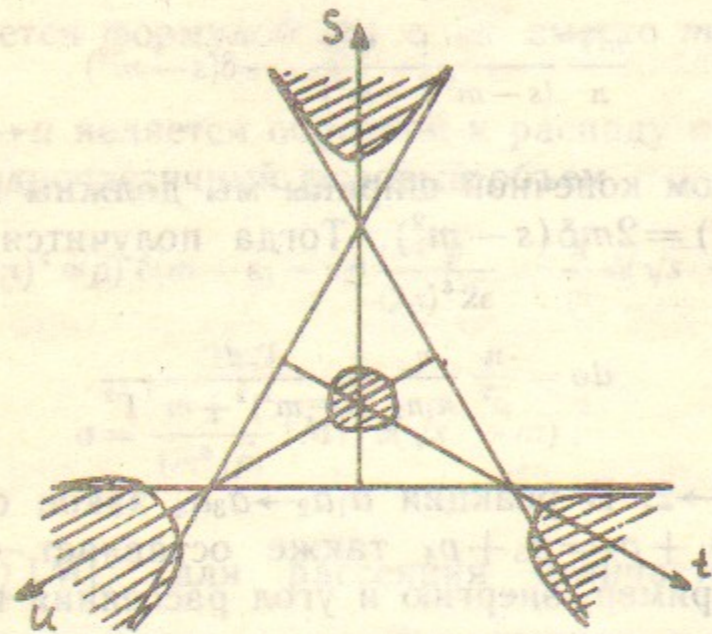


Рис. 2. Диаграмма Мандельштама.

$\vec{p}_1 \vec{p}_3 \leq [\epsilon_1 \epsilon_3 - (m_1^2 + m_3^2 - t)/2]^2$ . Поищем с помощью REDUCEa более красивую запись этого условия для  $s, t, u$ :

```
ORDER S,T,U,M1,M2,M3,M4;
E1:=(S+M1**2-M2**2)/(2*SQRT(S))$
E3:=(S+M3**2-M4**2)/(2*SQRT(S))$
A:=(E1*E3-(M1**2+M3**2-T)/2)**2-(E1**2-M1**2)*(E3**2-M3**2);
A:=(S**2*T+S*T**2-S*T*M1**2-S*T*M2**2-S*T*M3**2-
S*T*M4**2+S*M1**2*M2**2-S*M1**2*M4**2-S*M2**2*M3**2-
+S*M3**2*M4**2+T*M1**2*M3**2-T*M1**2*M4**2-T*M2**2*
M3**2+T*M2**2*M4**2+M1**4*M4**2-M1**2*M2**2*M3**2-
M1**2*M2**2*M4**2-M1**2*M3**2*M4**2+M1**2*M4**4+M2**4*
M3**2+M2**2*M3**4-M2**2*M3**2*M4**2)/(4*S)
```

Физическая область  $A \geq 0$

```
A:=NUM(A)$
```

Это выражение упростится, если прибавить к нему  $S*T*U$

```
H:=M1**2+M2**2+M3**2+M4**2$U:=H-S-T$A:=A+S*T*U;
```

```
A:=S*M1**2*M2**2-S*M1**2*M4**2-S*M2**2*M3**2+S*M3**2*M4**2
```

$$+T*M1**2*M3**2-T*M1**2*M4**2-T*M2**2*M3**2+T*M2**2*
M4**2+M1**4*M4**2-M1**2*M2**2*M3**2-M1**2*M2**2*M4**2-
M1**2*M3**2*M4**2+M1**2*M4**4+M2**4*M3**2+M2**2*M3**4-
M2**2*M3**2*M4**2$$

Теперь физическая область  $S*T*U \leq A$ ,  $A$  линейно по  $S, T$

```
FACTORIZE(SUB(S=0,T=0,A));
```

```
{M1*M4-M2*M3,
M1*M4+M2*M3,
M1**2-M2**2-M3**2+M4**2}
```

```
FACTORIZE(DF(A,S));
```

```
{-M1+M3,
M1+M3,
-M2+M4,
M2+M4}
```

```
FACTORIZE(DF(A,T));
```

```
{-M1+M2,
M1+M2,
-M3+M4,
M3+M4}
```

Эта формула довольно проста, но не симметрична. Домножим член без  $S$  и  $T$  на  $(S+T+U)/H$

```
CLEAR U;B:=SUB(S=0,T=0,A)$A:=A-B+B*(S+T+U)/H;
```

```
A:=(S*M1**4*M2**2+S*M1**2*M2**4-S*M1**2*M2**2*M3**2-S*
M1**2*M2**2*M4**2-S*M1**2*M3**2*M4**2-S*M2**2*M3**2*M4**2-
+S*M3**4*M4**2+S*M3**2*M4**4+T*M1**4*M3**2-T*M1**2*
M2**2*M3**2-T*M1**2*M2**2*M4**2+T*M1**2*M3**4-T*M1**2*
M3**2*M4**2+T*M2**4*M4**2-T*M2**2*M3**2*M4**2+T*M2**2*
M4**4+U*M1**4*M4**2-U*M1**2*M2**2*M3**2-U*M1**2*M2**2*
M4**2-U*M1**2*M3**2*M4**2+U*M1**2*M4**4+U*M2**4*M3**2-
+U*M2**2*M3**4-U*M2**2*M3**2*M4**2)/(M1**2+M2**2+
M3**2+M4**2)
```

```
CLEAR B;
```

```
FACTORIZE(DF(NUM(A),S));
```

```
{-M1*M2+M3*M4,
```

$$\begin{aligned}
& M1 * M2 + M3 * M4, \\
& -M1^2 - M2^2 + M3^2 + M4^2 \\
& \text{FACTORIZE(DF(NUM(A),T))}; \\
& (-M1 * M3 + M2 * M4, \\
& M1 * M3 + M2 * M4, \\
& -M1^2 + M2^2 - M3^2 + M4^2) \\
& \text{FACTORIZE(DF(NUM(A),U))}; \\
& (M1 * M4 - M2 * M3, \\
& M1 * M4 + M2 * M3, \\
& M1^2 - M2^2 - M3^2 + M4^2)
\end{aligned}$$

Мы получили симметричный результат:

$$\begin{aligned}
& stu < as + bt + cu, \tag{18} \\
& ha = (m_1^2 m_2^2 - m_3^2 m_4^2)(m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 - m_4^2), \\
& hb = (m_1^2 m_3^2 - m_2^2 m_4^2)(m_1^2 + m_3^2 - m_2^2 - m_4^2), \\
& hc = (m_1^2 m_4^2 - m_2^2 m_3^2)(m_1^2 + m_4^2 - m_2^2 - m_3^2), \\
& h = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2.
\end{aligned}$$

В действительности неравенство (18) описывает не одну физическую область. При  $|s|, |t|, |u| \rightarrow \infty$  в (18) можно заменить правую часть на 0, так что границы физической области асимптотически приближаются к прямым  $s=0, t=0, u=0$ . Их качественный вид изображен на рис. 2. В реакции  $a_1 a_2 \rightarrow a_3 a_4$  (и обратной к ней  $a_3 a_4 \rightarrow a_1 a_2$ ), кроме выполнения (18), требуется, чтобы все четыре импульса  $p_1, p_2, p_3, p_4$  были направлены в будущее. Это соответствует той из областей, где  $s$  может стремиться к  $+\infty$ , т. е. области вблизи оси  $s$  на рис. 2. Закон сохранения энергии-импульса и условие (18) допускают также случай, когда два импульса, скажем,  $p_2$  и  $p_3$ , направлены в прошлое. Физически это соответствует реакции  $a_1 \bar{a}_3 \leftrightarrow \bar{a}_2 a_4$ , где импульсы античастиц  $\bar{a}_3$  и  $\bar{a}_2$  равны  $-p_3$  и  $-p_2$  и направлены, как положено, в будущее. Для этой реакции роль  $s$  играет переменная  $t$  исходной реакции; ее физическая область лежит вблизи оси  $t$ . Точно так же, если направлены в прошлое импульсы  $p_2$  и  $p_4$ , то это соответствует реакции  $a_1 \bar{a}_4 \leftrightarrow \bar{a}_2 a_3$ , где импульсы  $\bar{a}_4$  и  $\bar{a}_2$  равны  $-p_4$  и  $-p_2$ ; роль  $s$  для нее играет переменная  $u$  исходной реакции, и ее физическая область лежит вблизи оси  $u$ . Эти три реакции называют  $s, t, u$  каналами одной обобщенной реакции. Разумеется, разрешены так-

же реакции  $\bar{a}_1 \bar{a}_2 \leftrightarrow \bar{a}_3 \bar{a}_4, a_3 \bar{a}_1 \leftrightarrow a_2 \bar{a}_4, a_4 \bar{a}_1 \leftrightarrow a_2 \bar{a}_3$ , соответствующие тому, что направлены в прошлое: все четыре импульса,  $p_1$  и  $p_4, p_1$  и  $p_3$ .

Если одна из масс, например  $m_1$ , больше суммы остальных, то, кроме каналов рассеяния, есть еще канал распада  $a_1 \rightarrow \bar{a}_2 a_3 a_4$  ( $\bar{a}_2$  имеет импульс  $-p_2, p_2$  направлен в прошлое). Его физическая область лежит в треугольнике  $s > 0, t > 0, u > 0$  (так как, например,  $s = (p_3 + p_4)^2 \geq (m_3 + m_4)^2$ ). Переменные Мандельстама связаны с энергиями:

$$\begin{aligned}
s &= m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 \epsilon_2, \\
t &= m_1^2 + m_3^2 - 2m_1 \epsilon_3, \\
u &= m_1^2 + m_4^2 - 2m_1 \epsilon_4,
\end{aligned} \tag{19}$$

так что диаграмма Мандельстама связана линейным преобразованием с диаграммой Далица. С учетом (19), неравенство для физической области (18) эквивалентно (10) (задача: проверьте на REDUCEe).

Получим формулу для сечения рассеяния  $2 \rightarrow 2$ . Мы уже вычисляли двухчастичный фазовый объем в системе центра масс и получили  $\frac{1}{4\pi} \frac{|\vec{p}_f|}{\sqrt{s}}$ , где  $|\vec{p}_f| = |\vec{p}_3| = |\vec{p}_4|$ . Если бы мы не проинтегрировали его по телесному углу, мы бы получили тот же ответ, умноженный на  $d\Omega/4\pi$ . Поэтому в системе центра масс ( $I = \sqrt{s} |\vec{p}_i|$ )

$$d\sigma = \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|} \frac{|M|^2}{(8\pi)^2 s} d\Omega. \tag{20}$$

Удобнее использовать сечение в инвариантных переменных, которые легко записать в любой желаемой системе. Записав  $d\Omega = 2\pi d \cos\theta$  и выразив из (17)  $d \cos\theta = dt/2|\vec{p}_i| |\vec{p}_f|$ , получим

$$d\sigma = \frac{|M|^2}{64\pi I^2} dt, \tag{21}$$

где  $I^2$  дается формулой (12).

Сечения прямой и обратной реакции связаны формулой

$$\frac{d\sigma(a_1 a_2 \rightarrow a_3 a_4)}{d\sigma(a_3 a_4 \rightarrow a_1 a_2)} = \frac{n_3 n_4}{n_1 n_2} \frac{\bar{p}_3^2}{\bar{p}_1^2} \tag{22}$$

(принцип детального равновесия).



**Рассеяние во внешнем поле.** Если рассматриваемую систему можно разделить на такие две части, что влиянием первой из них на движение второй можно пренебречь, то задача сводится к движению первой подсистемы во внешнем поле, созданном второй подсистемой, совершающей заданное движение. Мы ограничимся случаем статического внешнего поля, которое, очевидно, задает выделенную систему отсчета. В статическом поле сохраняется энергия, но не импульс. Поэтому вместо (1) мы имеем

$$S_{fi} = \delta_{fi} + 2\pi i \delta(\epsilon_f - \epsilon_i) T_{fi}.$$

Повторяя те же рассуждения, для вероятности перехода в единицу времени мы имеем

$$W_{fi} = 2\pi \delta(\epsilon_f - \epsilon_i) |T_{fi}|^2.$$

Мы ограничимся процессами рассеяния одной частицы на внешнем поле. Тогда

$$dW_{fi} = 2\pi \delta(\epsilon_f - \epsilon_i) |M'|^2 \frac{1}{2\epsilon_i V} \prod_f \frac{d^3 \vec{p}_f}{(2\pi)^3 2\epsilon_f}.$$

Поделив эту вероятность на поток начальных частиц  $|\vec{v}_i|/V$ , получим формулу для сечения:

$$d\sigma = \frac{1}{2|\vec{p}_i|} |M'|^2 d\Phi', \quad d\Phi' = 2\pi \delta(\epsilon_f - \epsilon_i) \prod_f \frac{d^3 \vec{p}_f}{(2\pi)^3 2\epsilon_f}. \quad (23)$$

Можно рассматривать рассеяние на внешнем поле как обычное рассеяние на бесконечно тяжелой частице — источнике поля. По общим формулам,

$$I = \mathcal{M} \epsilon_i, \quad d\Phi = \frac{1}{2\mathcal{M}} d\Phi',$$

где  $\mathcal{M} \rightarrow \infty$  масса источника. Это согласуется с (6), если матричный элемент во внешнем поле  $M'$  связан с матричным элементом с участием источника формулой  $M' = M/2\mathcal{M}$ . Множители  $\sqrt{2\mathcal{M}}$  происходят от нормировки волновой функции источника в начальном и конечном состояниях.

Если в конечном состоянии имеется одна частица, то фазовый объем

$$d\Phi' = 2\pi \delta(\epsilon_f - \epsilon_i) \frac{p_f^2 dp_f d\Omega}{(2\pi)^3 2\epsilon_f} = \frac{p_f d \cos \theta}{4\pi}$$

(мы предположили, что поле сферически симметрично, так что достаточно одного угла рассеяния  $\theta$ ). Поэтому в системе покоя поля

$$d\sigma = \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|} \frac{|M'|^2}{(4\pi)^2} d\Omega. \quad (24)$$

Можно переписать сечение через инвариантную переменную  $t = (p_f - p_i)^2 = -(\vec{p}_f - \vec{p}_i)^2 = -\vec{p}_f^2 - \vec{p}_i^2 + 2|\vec{p}_i| |\vec{p}_f| \cos \theta$ :

$$d\sigma = \frac{|M'|^2}{16\pi \vec{p}_i^2} dt. \quad (25)$$

**Кинематические вычисления на REDUCEe.** Запись векторов и тензоров на REDUCEe уже обсуждалась в [2], п. 1. Напомним только, что индексы считаются частными случаями векторов — единичными координатными ортами. Так, если  $p, q$  — векторы, а  $\mu, \nu$  — индексы, то  $p \cdot q$  означает скалярное произведение векторов  $p_\mu q_\mu$ ;  $p \cdot m$  — скалярное произведение вектора  $p$  на орт  $\mu$ -й оси, т. е. компоненту  $p_\mu$ ;  $m \cdot n$  — скалярное произведение ортов  $\mu$ -й и  $\nu$ -й осей, т. е.  $\delta_{\mu\nu}$ . Все векторы и индексы задачи следует описывать командой VECTOR. Индексы, по которым должна проводиться свертка, следует описывать командой INDEX непосредственно перед тем присваиванием, где проводится свертка, и удалять индексное свойство командой REMIND непосредственно после этого присваивания во избежание сообщения UNMATCHED INDEX ERROR. Размерность пространства (на которую заменяются свертки  $m \cdot m$ ,  $m \cdot n * m \cdot n$  и т. д. при INDEX  $m, n$ ;) по умолчанию равна 4, что как раз приспособлено для релятивистских вычислений.

В REDUCEe встроен 4-мерный единичный антисимметричный тензор: EPS(M,N,R,S) означает  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ , EPS(P,M,Q,N) означает  $\epsilon_{\rho\mu\sigma\nu} p_\rho q_\sigma$  и т. д. (опять векторы и индексы равноправны). Его свойства:

VECTOR P1,P2,P3,P4,Q1,Q2,Q3,Q4; INDEX M1,M2,M3,M4;

EPS(M1,M2,M3,M4)\*EPS(M1,M2,M3,M4);

-24

EPS(P1,M1,M2,M3)\*EPS(Q1,M1,M2,M3);

-6\*P1.Q1

EPS(P1,P2,M1,M2)\*EPS(Q1,Q2,M1,M2);

$$-2*(P2.Q2*P1.Q1 - P2.Q1*P1.Q2)$$

EPS (P1,P2,P3,M1)\*EPS (Q1,Q2,Q3,M1);

$$- (P2.Q3*P1.Q2*Q1.P3 - P2.Q3*P1.Q1*Q2.P3 - P2.Q2*P1.Q3*Q1.P3 + P2.Q2*P1.Q1*Q3.P3 + P2.Q1*P1.Q3*Q2.P3 - P2.Q1*P1.Q2*Q3.P3)$$

Заметим, что вместо любого антисимметричного тензора с  $n$  индексами можно рассматривать дуальный к нему антисимметричный псевдотензор с  $4-n$  индексами, получаемый сверткой с  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  по последним  $n$  индексам и делением на  $n!$ . Тензор, дуальный к дуальному, равен минус исходному тензору, что следует из этих свойств  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ . Так что исходный и дуальный тензоры содержат эквивалентную информацию; переход к дуальному тензору особенно удобен, когда он уменьшает число индексов.

Квадраты и скалярные произведения входящих в задачу векторов следует, как правило, выражать через инвариантные переменные задачи, поскольку их число меньше числа скалярных произведений. Квадраты векторов можно задавать командой LET, но для этого имеется специальная форма записи, сообщающая, что импульс должен быть на массовой поверхности:

```
MASS P=M;P.P;MSHELL P;P.P;
P.P
M2
```

Это требование можно отменять и восстанавливать:

```
CLEAR P.P;P.P;MSHELL P;P.P;
P.P
M2
```

Остальные скалярные произведения задаются командой LET.

Крайне неудобно работать с зависимым набором переменных типа  $s, t, u$  или  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ , поскольку при этом форма записи выражений становится неоднозначной. Следует выбрать независимые переменные (например,  $s, t$  или  $\epsilon_1, \epsilon_2$ ), и выражать через них остальные.

Если независимых векторов в задаче достаточно много, то может потребоваться выразить через инвариантные переменные не только скалярные произведения, но и функции EPS от четверок векторов:

```
LET EPS(P1,P2,P3,P4)=X;
```

Здесь возникает проблема: REDUCE приводит при вычислении аргументы EPS(P1,P2,P3,P4) к какому-то своему порядку. Левая часть подстановки не вычисляется, поэтому подстановка будет применяться только в том случае, если в левой части вы случайно угадали этот порядок (вероятность этого равна  $1/4!$ , т. е. мала). Эта проблема решена в пакете RTENSOR [4], в котором подстановка применяется ко всякому выражению, которое может быть сведено к ее левой части с учетом свойств симметрии. Если же вы используете REDUCE без этого расширения, остается только экспериментально определить, к какому порядку приводит REDUCE аргументы, написав ему EPS(P1,P2,P3,P4); и только потом писать LET-подстановку, разместив аргументы в левой части так, как в ответе REDUCEa.

Таким образом, программа вычисления распада или сечения должна начинаться с кинематики — таблицы умножения импульсов. Приведем такую таблицу для распада  $1 \rightarrow 2$ :

```
MASS P=M,P1=M1,P2=M2;MSHELL P,P1,P2;
LET P.P1=(M**2+M1**2-M2**2)/2,
P.P2=(M**2+M2**2-M1**2)/2,
P1.P2=(M**2-M1**2-M2**2)/2;
```

Для распада  $1 \rightarrow 3$ :

```
MASS P=M,P1=M1,P2=M2,P3=M3;MSHELL P,P1,P2,P3;
LET P.P1=M*E1,P.P2=M*E2,P.P3=M*(M-E1-E2),
P1.P2=(M**2+M3**2-M1**2-M2**2)/2-M*(M-E1-E2),
P1.P3=(M**2+M2**2-M1**2-M3**2)/2-M*E2,
P2.P3=(M**2+M1**2-M2**2-M3**2)/2-M*E1;
```

Для рассеяния  $2 \rightarrow 2$ :

```
MASS P1=M1,P2=M2,P3=M3,P4=M4;MSHELL P1,P2,P3,P4;
LET P1.P2=(S-M1**2-M2**2)/2,P3.P4=(S-M3**2-M4**2)/2,
P1.P3=(M1**2+M3**2-T)/2,P2.P4=(M2**2+M4**2-T)/2,
P1.P4=(S+T-M2**2-M3**2)/2,P2.P3=(S+T-M1**2+M4**2)/2;
```

Кроме импульсов, в вычисления часто входят векторы поляризации. Их квадраты равны  $-1$ , и они ортогональны соответствующим импульсам:

```
MASS E1=I,E2=I;MSHELL E1,E2;LET P1.E1=0,P2.E2=0;
```

В конце концов, для этих векторов либо подставляются явные выражения через импульсы (возможно, с EPS), либо проводится усреднение с матрицей плотности.

Приведем пакет процедур KPACK для упрощения кинематичес-

ких вычислений. Он содержит процедуру CALLET, которая обсуждалась в [2], и простую процедуру вычисления определенного интеграла:

```
PROCEDURE DINT(Y,X,A,B);
BEGIN SCALAR Z;Z:=INT(Y,X);Z:=SUB(X=B,Z)-SUB(X=A,Z);RETURN Z
END;
```

Далее, в него входят процедуры вычисления энергии и импульса первой частицы в двухчастичном распаде, инвариантного потока и двухчастичного фазового объема:

```
PROCEDURE EE(M,M1,M2);(M**2+M1**2-M2**2)/(2*M);
PROCEDURE PP(M,M1,M2);
SQRT((M+M1+M2)*(M-M1-M2)*(M+M1-M2)*(M-M1+M2))/(2*M);
PROCEDURE JJ(S,M1,M2);SQRT(S)*PP(SQRT(S),M1,M2);
PROCEDURE PH2(M,M1,M2);PP(M,M1,M2)/(4*PI*M);
```

И наконец, наиболее важные процедуры вычисляют пределы изменения E2 при данном E1 в трехчастичном распаде (диаграмма Далица) и пределы изменения T при данном S в двухчастичном рассеянии (диаграмма Мандельштама). Они возвращают два результата при помощи CALLET.

```
PROCEDURE DALITZ(M,M1,M2,M3,E1,E2M,E2P);
BEGIN SCALAR A,B,D;
A:=2*M*E1-M**2-M1**2;B:=(M-E1)*(A-M2**2+M3**2);
D:=SQRT((A+(M2+M3)**2)*(A+(M2-M3)**2))*SQRT(E1**2-M1**2);
CALLET(E2M,(B-D)/A);CALLET(E2P,(B+D)/A);
END;
```

```
PROCEDURE MANDEL(M1,M2,M3,M4,S,TM,TP);
BEGIN SCALAR B,D;
B:=S**2-(M1**2+M2**2+M3**2+M4**2)*S
+(M1**2-M2**2)*(M3**2-M4**2);
D:=SQRT((S-(M1+M2)**2)*(S-(M1-M2)**2)
*(S-(M3+M4)**2)*(S-(M3-M4)**2));
CALLET(TM,-(B-D)/(2*S));CALLET(TP,-(B+D)/(2*S));
END;
```

## 2. ПОЛЯ

**Поля и лагранжиан.** Динамика полей  $\varphi_a(x)$  определяется лагранжианом  $L$  — скалярной функцией полей и их производных

$\partial_\mu \varphi_a(x)$ . Действие

$$S = \int L(\varphi_a, \partial_\mu \varphi_a) d^4x, \quad (1)$$

для реально осуществляющейся конфигурации полей  $\varphi_a(x)$  минимально (или по крайней мере стационарно) по сравнению с другими возможными конфигурациями, удовлетворяющими тем же граничным условиям. Проведем локальную вариацию поля  $\varphi_a \rightarrow \varphi_a + \delta\varphi_a$ :

$$\delta S = \int \left( \frac{\partial L}{\partial \varphi_a} \delta\varphi_a + \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \varphi_a} \partial_\mu \delta\varphi_a \right) d^4x = \int \left( \frac{\partial L}{\partial \varphi_a} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \varphi_a} \right) \delta\varphi_a d^4x,$$

где второй член проинтегрирован по частям. Отсюда уравнения движения:

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi_a(x)} = \frac{\partial L}{\partial \varphi_a} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \varphi_a} = 0. \quad (2)$$

Добавление к лагранжиану дивергенции  $\partial_\mu f_\mu(\varphi_a)$  изменяет действие на величину, зависящую лишь от полей на границах, и потому не влияет на уравнения движения. Из (2) следует, что тензор энергии-импульса

$$T_{\nu\mu} = \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \varphi_a} \partial_\nu \varphi_a - L \delta_{\mu\nu} \quad (3)$$

удовлетворяет закону сохранения

$$\partial_\mu T_{\nu\mu} = 0. \quad (4)$$

Это частный случай теоремы Нетер: каждому непрерывному семейству преобразований симметрии  $x_\mu \rightarrow x'_\mu(\alpha)$ ;  $\varphi_a \rightarrow \varphi'_a(\alpha)$  соответствует закон сохранения. Когда параметр преобразования  $\delta\alpha$  бесконечно мал,  $x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu$ ,  $\varphi'_a(x') = \varphi_a(x) + \delta\varphi_a$ . Преобразование симметрии не меняет действия:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int L(\varphi'_a, \partial'_\mu \varphi'_a) d^4x' - \int L(\varphi_a, \partial_\mu \varphi_a) d^4x = \\ &= \int \left[ \frac{\partial L}{\partial \varphi_a} \delta\varphi_a + \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \varphi_a} (\partial_\mu \delta\varphi_a - (\partial_\mu \delta x_\nu) (\partial_\nu \varphi_a)) + L \delta_\mu \delta x_\mu \right] d^4x, \end{aligned}$$

где учтено, что  $\partial'_\mu = (\delta_{\mu\nu} - \partial_\mu \delta x_\nu) \partial_\nu$ ,  $d^4x' = (1 + \partial_\mu \delta x_\mu) d^4x$ . Первые два члена в силу уравнений движения (2) дают

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \varphi_a} \delta \varphi_a \right).$$

Остальные равны  $-T_{\nu\mu} \partial_\mu \delta x_\nu$ ; интегрируя по частям с учетом закона сохранения (4), получим  $-\partial_\mu (T_{\nu\mu} \delta x_\nu)$ . Окончательно

$$\delta S = -\delta \alpha \int \partial_\mu J_\mu d^4x,$$

где

$$J_\mu \delta \alpha = T_{\nu\mu} \delta x_\nu - \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \varphi_a} \delta \varphi_a. \quad (5)$$

Поскольку  $\delta S = 0$  в любой области, ток  $J_\mu$  сохраняется:

$$\partial_\mu J_\mu = 0. \quad (6)$$

Токи, определенные формулами (3), (5), называются каноническими (или нетеровскими). Они не являются единственными. Не нарушая закона сохранения (6), можно заменить  $J_\mu \rightarrow \tilde{J}_\mu$ :

$$\tilde{J}_\mu = J_\mu + \partial_\nu f_{\nu\mu}(\varphi_a), \quad (7)$$

где  $f_{\nu\mu} = -f_{\mu\nu}$ .

Симметрия относительно сдвигов  $\delta x_\mu = \delta \alpha_\mu$ ,  $\delta \varphi_a = 0$  приводит к сохранению энергии-импульса (4). Симметрия относительно поворотов  $\delta x_\mu = \delta \alpha_{\mu\nu} x_\nu$ ,  $\delta \varphi_a = 1/2 \delta \alpha_{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu}^{ab} \varphi_b$  приводит к сохранению момента. Здесь  $\delta \alpha_{\mu\nu} = -\delta \alpha_{\nu\mu}$ , так как при поворотах скалярные произведения не меняются:

$$u_\mu v_\mu \rightarrow (u_\mu + \delta \alpha_{\mu\nu} u_\nu) (v_\mu + \delta \alpha_{\mu\lambda} v_\lambda) = u_\mu v_\mu + \delta \alpha_{\mu\nu} (u_\mu v_\nu + u_\nu v_\mu) = u_\mu v_\mu.$$

Матрицы  $\Sigma_{\mu\nu} = -\Sigma_{\nu\mu}$  определяют преобразование полей при поворотах (для скалярных полей  $\Sigma_{\mu\nu} = 0$ ). Теорема Нетер (5) дает

$$J_\mu \delta \alpha = -1/2 \delta \alpha_{\lambda\nu} M_{\lambda\nu\mu},$$

где тензор момента

$$M_{\lambda\nu\mu} = x_\lambda T_{\nu\mu} - x_\nu T_{\lambda\mu} + S_{\lambda\nu\mu}, \quad S_{\lambda\nu\mu} = \Sigma_{\lambda\nu}^{ab} \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \varphi_a} \varphi_b. \quad (8)$$

Первый член представляет собой орбитальный момент, а второй — спиновый (он равен нулю для скалярных полей).

Закон сохранения момента  $\partial_\mu M_{\lambda\nu\mu} = 0$  с учетом закона сохранения энергии-импульса (4) дает

$$\partial_\mu M_{\lambda\nu\mu} = T_{\nu\lambda} - T_{\lambda\nu} + \partial_\mu S_{\lambda\nu\mu} = 0. \quad (9)$$

Канонический тензор энергии-импульса (3), вообще говоря, несимметричен (из (9) видно, что он симметричен для скалярных полей). Можно выбрать преобразование (7)  $\tilde{T}_{\nu\mu} = T_{\nu\mu} + \partial_\lambda f_{\nu\mu\lambda}$ ,  $f_{\nu\mu\lambda} = -f_{\lambda\nu\mu}$ , так, что тензор  $\tilde{T}_{\nu\mu}$  будет симметричным. Это необходимо в теории гравитации. Для этого, согласно (9), требуется  $\partial_\mu (-f_{\nu\lambda\mu} + f_{\lambda\nu\mu} + S_{\lambda\nu\mu}) = 0$ . Попробуем приравнять нулю выражение в скобках. Добавив уравнения с переименованными индексами, получим систему

$$f_{\lambda\nu\mu} - f_{\nu\lambda\mu} = -S_{\lambda\nu\mu},$$

$$f_{\mu\lambda\nu} - f_{\lambda\mu\nu} = -S_{\mu\lambda\nu},$$

$$f_{\nu\mu\lambda} - f_{\mu\nu\lambda} = -S_{\nu\mu\lambda}.$$

Складывая первые два уравнения и вычитая третье, с учетом антисимметрии  $f_{\lambda\nu\mu}$  найдем решение

$$f_{\lambda\nu\mu} = -\frac{1}{2} (S_{\lambda\nu\mu} + S_{\mu\lambda\nu} - S_{\nu\mu\lambda}). \quad (10)$$

Теперь тензор  $\tilde{T}_{\nu\mu}$  симметричен. Поэтому тензор момента

$$\tilde{M}_{\lambda\nu\mu} = x_\lambda \tilde{T}_{\nu\mu} - x_\nu \tilde{T}_{\lambda\mu} \quad (11)$$

удовлетворяет закону сохранения  $\partial_\mu \tilde{M}_{\lambda\nu\mu} = \tilde{T}_{\nu\lambda} - \tilde{T}_{\lambda\nu} = 0$ . Он связан с каноническим (8) преобразованием (7)  $\tilde{M}_{\lambda\nu\mu} = M_{\lambda\nu\mu} + \partial_\alpha f_{\lambda\nu\mu\alpha}$ , где  $f_{\lambda\nu\mu\alpha} = -f_{\lambda\nu\alpha\mu} = x_\lambda f_{\nu\mu\alpha} - x_\nu f_{\lambda\mu\alpha}$ .

**Скалярные и векторные поля.** Рассмотрим теорию одного действительного скалярного поля  $\varphi(x)$ . Лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi) (\partial_\mu \varphi) - \frac{m^2}{2} \varphi^2 \quad (12)$$

приводит к уравнению движения

$$(\partial^2 + m^2) \varphi = 0. \quad (13)$$

Его решениями являются волны  $\text{Re } A e^{-ipx}$  при

$$p^2 = m^2, \quad (14)$$

так что величина  $m$  имеет смысл массы. Уравнение движения (13)

линейно, так что сумма таких волн тоже является решением. Взаимодействие между ними отсутствует.

Добавление к лагранжиану (12) членов более высоких степеней по  $\varphi$  приводит к нелинейным добавкам в уравнении движения, т. е. появлению взаимодействия:

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial_\mu\varphi) - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{f}{3!}\varphi^3 - \frac{g}{4!}\varphi^4 \dots$$

$$(\partial^2 + m^2)\varphi + \frac{f}{2!}\varphi^2 + \frac{g}{3!}\varphi^3 \dots = 0. \quad (15)$$

Слабое взаимодействие можно учитывать по теории возмущений. Как и в квантовой механике, ряды теории возмущений являются асимптотическими, а не сходящимися. Действительно, плотность энергии

$$T_{00} = \frac{1}{2}(\bar{\nabla}\varphi)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \frac{f}{3!}\varphi^3 + \frac{g}{4!}\varphi^4 \dots \quad (16)$$

В случае добавки  $(f/3!)\varphi^3$ , энергия неограничена снизу при больших  $\varphi$ , и вакуум  $\varphi=0$  неустойчив. Казалось бы, в случае добавки  $(g/4!)\varphi^4$  при  $g>0$  все должно быть хорошо. Но если бы ряды теории возмущений сходились при  $g>0$ , то они должны были бы сходиться и при  $g<0$ , что невозможно по той же причине.

Рассмотрим теперь комплексное скалярное поле  $\varphi$  с лагранжианом

$$L = (\partial_\mu\varphi^*)(\partial_\mu\varphi) - m^2\varphi^*\varphi - \frac{g}{2}(\varphi^*\varphi)^2. \quad (17)$$

Можно рассматривать  $\varphi$  и  $\varphi^*$  как два независимых поля. Дифференцирование по  $\varphi^*$  дает уравнение движения

$$(\partial^2 + m^2)\varphi + g(\varphi^*\varphi)\varphi = 0, \quad (18)$$

а дифференцирование по  $\varphi$  — сопряженное ему уравнение. Лагранжиан симметричен относительно преобразований

$$\varphi \rightarrow e^{i\alpha}\varphi, \quad \varphi^* \rightarrow e^{-i\alpha}\varphi^*, \quad (19)$$

образующих группу  $U(1)$ . Бесконечно малые преобразования  $\delta\varphi = i\delta\alpha\varphi$ ,  $\delta\varphi^* = -i\delta\alpha\varphi^*$ . По теореме Нетер (5), сохраняется ток

$$j_\mu = i(\varphi^*\partial_\mu\varphi - \varphi\partial_\mu\varphi^*). \quad (20)$$

Решением уравнения движения (18) при  $g=0$  являются волны  $\varphi = Ae^{-ipx}$ ; для них  $j_\mu = |A|^2 2p_\mu$ . Стандартной релятивистской нормировке  $j_\mu = 2p_\mu$  соответствует  $|A|=1$ .

Теория со многими полями может иметь более сложную симметрию. Пусть  $\varphi$  — столбец полей, и лагранжиан инвариантен относительно преобразований

$$\varphi \rightarrow U(\alpha)\varphi. \quad (21)$$

Здесь  $\alpha$  — параметры непрерывной группы, а  $U(\alpha)$  — матрицы представления, по которому преобразуются поля  $\varphi$ . Бесконечно малые преобразования записываются в виде  $U(\alpha) = 1 + i\delta\alpha^a t^a$ , где  $t^a$  называются генераторами этого представления. По теореме Нетер, сохраняются токи

$$j_\mu^a = i(\varphi^+ t^a \partial_\mu\varphi - (\partial_\mu\varphi^+) t^a \varphi). \quad (22)$$

Если группа неабелева, генераторы не коммутируют:  $[t^a, t^b] = if^{abc}t^c$ , где  $f^{abc}$  называются структурными константами группы. Генераторы принято нормировать условием  $\text{Spt}^a t^b = (1/2)\delta^{ab}$ .

Перейдем к теории действительного векторного поля  $A_\mu(x)$ . Его лагранжиан

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A_\mu A_\mu, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (23)$$

приводит к уравнению движения

$$\partial_\nu F_{\nu\mu} - m^2 A_\mu = 0. \quad (24)$$

Применив к нему  $\partial_\mu$ , получим (при  $m \neq 0$ )

$$\partial_\mu A_\mu = 0. \quad (25)$$

С учетом этого, (24) дает

$$(\partial^2 + m^2)A_\mu = 0. \quad (26)$$

Решениями уравнения (24) или эквивалентных ему (25), (26) являются волны  $A_\mu = e_\mu e^{-ipx}$  с  $p^2 = m^2$ , у которых вектор поляризации  $e_\mu$  ортогонален  $p_\mu$ . В системе покоя  $e$  имеет только пространственные компоненты, т. е. теория действительно описывает векторную частицу.

Безмассовое векторное поле — особый случай. Лагранжиан инвариантен относительно калибровочных преобразований

$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f(x)$ , где  $f$  — произвольная функция. Уравнение движения (21)  $\partial_\nu F_{\nu\mu} = 0$  не приводит к (25).

Нельзя ли построить теорию, инвариантную относительно преобразований (19), являющихся произвольными функциями координат? Лагранжиан (17) не имеет такой калибровочной симметрии, поскольку производная  $\partial_\mu \psi$  не переходит просто в  $e^{i\alpha} \partial_\mu \psi$ . Попробуем заменить  $\partial_\mu \psi$  на ковариантную производную  $D_\mu \psi = (\partial_\mu - ieA_\mu) \psi$ , и потребовать, чтобы она преобразовывалась как  $\psi$ :

$$(D_\mu \psi)' = (\partial_\mu - ieA'_\mu) e^{i\alpha} \psi = e^{i\alpha} (\partial_\mu - ieA_\mu) \psi.$$

Для этого поле  $A_\mu$  должно преобразовываться как  $A'_\mu = A_\mu + 1/e \partial_\mu \alpha$ .

Кроме замены  $\partial_\mu$  на  $D_\mu$ , нам нужен калибровочно-инвариантный лагранжиан самого поля  $A_\mu$ . Чтобы понять, из чего его можно построить, рассмотрим коммутатор  $[D_\mu, D_\nu] = -ieF_{\mu\nu}$ ,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Он калибровочно-инвариантен:

$$([D_\mu, D_\nu] \psi)' = e^{i\alpha} [D_\mu, D_\nu] \psi = [D_\mu, D_\nu] e^{i\alpha} \psi.$$

Из тензора напряженности поля  $F_{\mu\nu}$  можно построить лагранжиан  $(-1/4) F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ .

Именно так описывается электромагнитное взаимодействие,  $A_\mu$  — это электромагнитное поле. Его кванты — безмассовые векторные частицы — фотоны. Можно построить и теории, симметричные относительно локальных (калибровочных) преобразований любой группы (21). Мы их обсудим далее.

**Спинорное поле.** Частицы со спином  $1/2$  (например, электроны) описываются спинорным полем  $\psi$  — 4-компонентным столбцом. Вместо эрмитово-сопряженной строки  $\psi^\dagger$  удобно использовать дираковски-сопряженную  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \beta$ , где  $\beta = \beta^\dagger$  — матрица. Дираковское сопряжение для строки  $\bar{\psi}$  определяется как столбец  $\bar{\bar{\psi}} = \beta^{-1} \bar{\psi}^\dagger$ , а для матрицы  $\Gamma$  — как матрица  $\bar{\Gamma} = \beta^{-1} \Gamma^\dagger \beta$ . Для скаляра оно совпадает с комплексным сопряжением. Тогда  $\bar{\bar{\psi}} = \psi$ ,  $\bar{\bar{\bar{\psi}}} = \bar{\psi}$ ,  $\bar{\bar{\Gamma}} = \Gamma$ ;  $(\bar{\psi}_1 \psi_2)^* = \bar{\psi}_2 \psi_1$ ,  $\bar{\Gamma}_1 \bar{\Gamma}_2 = \bar{\Gamma}_2 \bar{\Gamma}_1$ ,  $\bar{\Gamma} \bar{\psi} = \bar{\psi} \bar{\Gamma}$ , и т. д.

При преобразованиях Лоренца, когда векторы преобразуются как  $v_\mu \rightarrow L_{\mu\nu} v_\nu$ , спиноры — как  $\psi \rightarrow U \psi$ , где  $U$  — матрица, зависящая от параметров преобразования. Тогда  $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} \bar{U}$ ; дираковское сопряжение определено специально для того, чтобы  $\bar{\psi} \psi$  было скаляром:  $\bar{\psi} \psi \rightarrow \bar{\psi} \bar{U} U \psi = \bar{\psi} \psi$ , откуда  $\bar{U} U = 1$ , т. е.  $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} U^{-1}$ . Вводятся также матрицы Дирака  $\gamma_\mu$ , такие, что  $\bar{\psi}_1 \gamma_\mu \psi_2$  преобразуется как

вектор:  $\bar{\psi}_1 \gamma_\mu \psi_2 \rightarrow \bar{\psi}_1 U^{-1} \gamma_\mu U \psi_2 = L_{\mu\nu} \bar{\psi}_1 \gamma_\nu \psi_2$ , т. е.  $U^{-1} \gamma_\mu U = L_{\mu\nu} \gamma_\nu$ . В этом смысле  $\gamma_\mu$  образуют вектор, когда стоят между  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ :

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_1 \gamma_\mu \gamma_\nu \dots \gamma_\lambda \psi_2 &\rightarrow \bar{\psi}_1 U^{-1} \gamma_\mu U U^{-1} \gamma_\nu U \dots U^{-1} \gamma_\lambda U \psi_2 = \\ &= L_{\mu\mu'} L_{\nu\nu'} \dots L_{\lambda\lambda'} \bar{\psi}_1 \gamma_{\mu'} \gamma_{\nu'} \dots \gamma_{\lambda'} \psi_2 \end{aligned}$$

есть тензор. Следы произведений  $\gamma$  матриц есть тензоры, не меняющие формы при преобразованиях Лоренца:

$$\begin{aligned} \text{Sp } \gamma_\mu \gamma_\nu \dots \gamma_\lambda &= \text{Sp } U^{-1} \gamma_\mu U U^{-1} \gamma_\nu U \dots U^{-1} \gamma_\lambda U = \\ &= L_{\mu\mu'} L_{\nu\nu'} \dots L_{\lambda\lambda'} \text{Sp } \gamma_{\mu'} \gamma_{\nu'} \dots \gamma_{\lambda'}, \end{aligned}$$

поэтому они могут выражаться только через  $\delta_{\mu\nu}$ . Потребуем также, чтобы  $\bar{\gamma}_\mu = \gamma_\mu$ . Для любого вектора  $v$ , введем обозначение  $\hat{v} = v_\mu \gamma_\mu$ .

Теперь мы можем выписать лагранжиан спинорного поля:

$$L = \bar{\psi} (i\hat{\partial} - m) \psi. \quad (27)$$

На первый взгляд, он не является действительным:

$$L^* = \bar{\psi} (-i\hat{\partial} - m) \psi,$$

но разность  $L - L^* = \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi)$  несущественна как полная дивергенция. Можно, конечно, записать явно действительный лагранжиан

$$L = \bar{\psi} (i(\hat{\partial} - \hat{\delta})/2 - m) \psi,$$

но он эквивалентен (27). Рассматривая  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  как независимые поля, из (27) получаем дифференцированием по  $\bar{\psi}$  уравнение движения:

$$(i\hat{\partial} - m) \psi = 0. \quad (28)$$

Дифференцирование по  $\psi$  даст, конечно, сопряженное уравнение

$$\bar{\psi} (-i\hat{\delta} - m) = 0.$$

Волна  $\psi = u e^{-ipx}$  является решением уравнения Дирака (28) при

$$(\hat{p} - m) u_{p\sigma} = 0, \quad (29)$$

где индекс  $\sigma$  нумерует независимые решения при данном  $p$ . Сопряженное уравнение имеет вид  $\bar{u}_{p\sigma} (\hat{p} - m) = 0$ . Умножая (29) слева

на  $(\hat{p} + m)$ , получим  $(\hat{p}^2 - m^2)u_{p\sigma} = 0$ . Это уравнение должно иметь ненулевые решения  $u_{p\sigma}$  лишь при  $p^2 = m^2$ , т. е. для всех  $p_\mu$  должно выполняться условие  $\hat{p}^2 = p_\mu p_\nu (\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu) / 2 = p^2$ . Для этого требуется

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}. \quad (30)$$

Эта формула полностью определяет алгебраические свойства  $\gamma$ -матриц.

Лагранжиан (28) инвариантен относительно фазовых преобразований  $\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi$ ,  $\bar{\psi} \rightarrow e^{-i\alpha}\bar{\psi}$ . По теореме Нетер, это приводит к сохранению тока

$$j_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi. \quad (31)$$

Мы договорились нормировать волновые функции условием  $j_\mu = 2p_\mu$ , т. е.

$$\bar{u} \gamma_\mu u = 2p_\mu. \quad (32)$$

Умножая его на  $p_\mu$  и учитывая уравнение Дирака (29), получим эквивалентную (при  $m \neq 0$ ) форму условия нормировки:

$$\bar{u} u = 2m. \quad (33)$$

Квантовая электродинамика описывает взаимодействие точечных частиц со спином 1/2 и зарядами  $ze$  (лептонов и кварков) с фотонами. Здесь  $e$  — элементарный заряд; у электрона, мюона и  $\tau$ -лептона  $z = -1$ , у всех видов нейтрино  $z = 0$ , у  $u$ -,  $c$ -,  $t$ -кварков  $z = 2/3$ , у  $d$ -,  $s$ -,  $b$ -кварков  $z = -1/3$ . Вместо  $e$  обычно используют постоянную тонкой структуры  $\alpha = e^2/4\pi$ .

Лагранжиан свободных спинорных полей

$$L_0 = \sum_i \bar{\psi}_i (i\hat{\partial} - m_i) \psi_i$$

инвариантен относительно многих фазовых преобразований. Особую роль играет  $U(1)$ -группа  $\psi_i \rightarrow e^{iz_i\alpha} \psi_i$ , с симметрией относительно которой связано сохранение электромагнитного тока

$$j_\mu = \sum_i z_i \bar{\psi}_i \gamma_\mu \psi_i.$$

В квантовой электродинамике эта симметрия делается локальной при помощи замены  $\partial_\mu \psi_i$  на  $D_\mu \psi_i = (\partial_\mu - ie z_i A_\mu) \psi_i$ . В результате к

$L_0$  добавляется лагранжиан взаимодействия  $e j_\mu A_\mu$ ; нужно добавить также лагранжиан свободного электромагнитного поля  $-F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}/4$ .

**Работа с матрицами Дирака в REDUCEe.** Наряду с вектором  $\gamma_\mu$ , вводят псевдоскаляр

$$\gamma_5 = \frac{i}{4!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma = -i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3, \quad \gamma_5^2 = 1, \quad \gamma_5 \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_5 = 0. \quad (34)$$

В REDUCEe предусмотрена возможность работать с несколькими независимыми наборами  $\gamma$ -матриц, относящимися к разным фермионным линиям. Матрица  $\gamma_\mu$ , относящаяся к линии F, обозначается G(F,M). Индексы и векторы равноправны, поэтому матрица  $\hat{p}$ , относящаяся к той же линии, обозначается G(F,P). Произведение  $\hat{p} \gamma_\mu \hat{q} \gamma_\nu$  обозначается сокращенно G(F,P,M,Q,N). Матрица  $\gamma_5$ , относящаяся к линии F, обозначается G(F,A). Объект A должен быть описан в команде VECTOR; ни в каком другом смысле его использовать нельзя.

При вычислении  $\gamma$ -матричного выражения  $x$ , REDUCE автоматически вычисляет  $\text{Sp } x / \text{Sp } 1$  (где  $\text{Sp } 1 = 4$ ). Шпуры  $\text{Sp } \gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_n}$  являются тензорами, и могут выражаться только через  $\delta_{\mu\nu}$ . Поэтому они отличны от нуля только для четного числа  $\gamma$ -матриц.

VECTOR P1,P2,P3,P4,P5,P6;

G(F,P1);G(F,P1,P2);G(F,P1,P2,P3);G(F,P1,P2,P3,P4);

0

P2.P1

0

P2.P1\*P4.P3 - P2.P4\*P1.P3 + P2.P3\*P1.P4

G(F,P1,P2,P3,P4,P5,P6);

P2.P1\*P6.P5\*P4.P3 - P2.P1\*P6.P4\*P5.P3 + P2.P1\*P6.P3\*P5.P4 -

P2.P6\*P1.P5\*P4.P3 + P2.P6\*P1.P4\*P5.P3 - P2.P6\*P1.P3\*P5.P4 +

P2.P5\*P1.P6\*P4.P3 - P2.P5\*P1.P4\*P6.P3 + P2.P5\*P1.P3\*P6.P4 -

P2.P4\*P1.P6\*P5.P3 + P2.P4\*P1.P5\*P6.P3 - P2.P4\*P1.P3\*P6.P5 +

P2.P3\*P1.P6\*P5.P4 - P2.P3\*P1.P5\*P6.P4 + P2.P3\*P1.P4\*P6.P5

Подчеркнем еще раз, что любой  $p_i$  может быть с физической точки зрения вектором или индексом; в первом случае в шпуре стоит  $\hat{p}$ , а во втором  $\gamma_\mu$ .

Шпуры  $\text{Sp } \gamma_5 \gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_n}$  являются псевдотензорами, и содержат  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ . Поэтому они отличны от нуля только для четного  $n$ , начиная с 4.

G(F,A,P1,P2);G(F,A,P1,P2,P3,P4);G(F,A,P1,P2,P3,P4,P5,P6);

0

EPS(P2,P1,P4,P3)\*I

I\*(P2.P1\*EPS(P6,P5,P4,P3) + P2.P6\*EPS(P1,P5,P4,P3) - P2.P5\*  
EPS(P1,P6,P4,P3) + P2.P4\*EPS(P1,P6,P5,P3) - P2.P3\*EPS(P1,  
P6,P5,P4) - P1.P6\*EPS(P2,P5,P4,P3) + P1.P5\*EPS(P2,P6,P4,  
P3) - P1.P4\*EPS(P2,P6,P5,P3) + P1.P3\*EPS(P2,P6,P5,P4) +  
P6.P5\*EPS(P2,P1,P4,P3) - P6.P4\*EPS(P2,P1,P5,P3) + P6.P3\*  
EPS(P2,P1,P5,P4) + P5.P4\*EPS(P2,P1,P6,P3) - P5.P3\*EPS(P2,  
P1,P6,P4) + P4.P3\*EPS(P2,P1,P6,P5))

Для последнего шпура в задаче к п. 22 в первом издании учебника [3] (том 1, с.102) приводится более короткое выражение. Дело в том, что в 4-мерном пространстве любой тензор, антисимметричный по пяти или более индексам, в частности  $\varepsilon_{[\mu\nu\rho\sigma}\delta_{\alpha]\beta}$ , равен нулю. В силу этого тождества, запись выражений с  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  и  $\delta_{\alpha\beta}$  неоднозначна.

Чтобы REDUCE не вычислял шпуров  $\gamma$ -матричных выражений, относящихся к линии F, ему надо сказать NOSPUR F; команда SPUR F; вернет его к прежнему образу действий. Следует проводить все вычисления в состоянии NOSPUR F; непосредственно перед присваиванием, в котором должен вычисляться шпур, следует выполнить команду SPUR F; а непосредственно после него опять NOSPUR F;. Дело в том, что в состоянии SPUR F; возможны неожиданности, например:

G(F,P1)\*SUB(P2=P3+P4,G(F,P2));

0

Функция SUB вычисляет свой аргумент; в режиме SPUR F; она получает 0, что вряд ли соответствует намерениям автора этой программы.

Кроме того, вычисление шпуров при ON GCD; иногда приводит к прекращению работы с сообщением CATASTROPHIC ERROR. Поэтому следует сначала вычислить шпуры в выражениях для всех диаграмм при OFF GCD; а потом уже складывать их с приведением к общему знаменателю, включив этот флаг.

Имеющаяся версия REDUCEa не позволяет использовать в одном выражении  $\gamma$ -матрицы, относящиеся к разным линиям, если хоть одна из этих линий находится в состоянии NOSPUR. Такие попытки приводят к сообщению NOT YET IMPLEMENTED или даже к прекращению работы с сообщением CATASTROPHIC

ERROR. Это обстоятельство сильно уменьшает преимущества использования  $\gamma$ -матриц от разных линий.

В состоянии NOSPUR F; REDUCE производит некоторые упрощения  $\gamma$ -матричных выражений:

NOSPUR F;INDEX M;G(F,P1,P1);  
P1.P1

G(F,M,M);G(F,M,P1,M);

4

-2\*G(F,P1)

G(F,M,P1,P2,M);G(F,M,P1,P2,P3,M);

2\*(G(F,P2,P1) + G(F,P1,P2))

-2\*G(F,P3,P2,P1)

G(F,M,P1,P2,P3,P4,M);G(F,M,P1,P2,P3,P4,P5,M);

2\*(G(F,P2,P3,P4,P1) + G(F,P1,P4,P3,P2))

-2\*G(F,P5,P4,P3,P2,P1)

Эти примеры наводят на совершенно правильную мысль, что выражение  $\gamma_{\mu\dots\mu}$  с нечетным числом  $\gamma$ -матриц внутри равно  $(-2)$  на произведение тех же  $\gamma$ -матриц в обратном порядке. Для четного числа  $\gamma$ -матриц получается 2 на произведение, в котором первая матрица поставлена на последнее место, плюс то же в обратном порядке (или наоборот, последняя матрица переносится на первое место). В случае 2  $\gamma$ -матриц ответ можно записать проще: как  $4*P1.P2$ .

Матрицы  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  антикоммутируют друг с другом, и их квадраты равны 1, -1, -1, -1. Любое их произведение сводится к виду, в котором каждая из этих 4 матриц входит 0 или 1 раз. Всего таких матриц 16. Обозначим их  $\gamma_A$ . Их квадраты  $\gamma_A^2 = \varepsilon_A = \pm 1$ . Любое  $\gamma$ -матричное выражение  $\Gamma$  разлагается по этим матрицам:  $\Gamma = \Gamma_A \gamma_A$ , где свертка определена как  $\sum_A \varepsilon_A \Gamma_A \gamma_A$ .

Шпуры всех матриц  $\gamma_A$ , кроме первой, равны нулю, поэтому коэффициенты  $\Gamma_A = \frac{1}{4} \text{Sp } \gamma_A \Gamma$ . Отсюда получаем соотношение полноты:

$$\Gamma = \gamma_A \frac{1}{4} \text{Sp } \gamma_A \Gamma. \quad (35)$$

В частности, произведение  $\gamma_A \gamma_B = c_{ABC} \gamma_C$ , где



$$c_{ABC} = \frac{1}{4} \text{Sp } \gamma_A \gamma_B \gamma_C.$$

Его шпур  $\frac{1}{4} \text{Sp } \gamma_A \gamma_B = \delta_{AB}$ , где  $\delta_{AA} = \varepsilon_A$ , так что  $\gamma_A = \delta_{AB} \gamma_B$ .

Применим соотношение полноты (35) к  $\Gamma = \psi_4 \bar{\psi}_3$ , и возьмем его в обкладках  $\bar{\psi}_1 \dots \psi_2$ :

$$(\bar{\psi}_1 \psi_4)(\bar{\psi}_3 \psi_2) = \frac{1}{4} (\bar{\psi}_1 \gamma_E \psi_2)(\bar{\psi}_3 \gamma_E \psi_4).$$

Мы получили соотношение, выражающее произведение билинейных форм линий 1-4 и 3-2 через произведения 1-2 и 3-4. Другие формулы такого типа (они называются соотношениями Фирца) получаются заменой  $\psi_2 \rightarrow \gamma_B \psi_2$ ,  $\psi_4 \rightarrow \gamma_A \psi_4$ :

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}_1 \gamma_A \psi_4)(\bar{\psi}_3 \gamma_B \psi_2) &= \frac{1}{4} (\bar{\psi}_1 \gamma_E \gamma_B \psi_2)(\bar{\psi}_3 \gamma_E \gamma_A \psi_4) = \\ &= \frac{1}{4} c_{EBC} c_{EAD} (\bar{\psi}_1 \gamma_C \psi_2)(\bar{\psi}_3 \gamma_D \psi_4). \end{aligned}$$

Окончательно

$$(\bar{\psi}_1 \gamma_A \psi_4)(\bar{\psi}_3 \gamma_B \psi_2) = \frac{1}{4} f_{ABCD} (\bar{\psi}_1 \gamma_C \psi_2)(\bar{\psi}_3 \gamma_D \psi_4), \quad (36)$$

где коэффициенты Фирца

$$f_{ABCD} = c_{EBC} c_{EAD} = \frac{1}{4} \text{Sp } \gamma_A \gamma_D \gamma_B \gamma_C$$

в силу соотношений полноты (35).

Матрицы  $\gamma_A$  являются компонентами антисимметричных тензоров  $1, \gamma_\mu, \gamma_{[\mu} \gamma_\nu], \gamma_{[\mu} \gamma_\nu \gamma_\rho], \gamma_{[\mu} \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma]$  (антисимметричных тензоров с большим числом индексов в 4-мерном пространстве не существует). Вместо тензора  $\gamma_{[\mu} \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma]$  удобнее использовать дуальный ему псевдоскаляр  $\gamma_5$  (34), а вместо  $\gamma_{[\mu} \gamma_\nu \gamma_\rho]$  — псевдовектор  $\gamma_\mu \gamma_5$ . Тензор  $\gamma_{[\mu} \gamma_\nu]$  обозначается  $\sigma_{\mu\nu}$ . Канонический вид  $\gamma$ -матричного выражения

$$\Gamma = \Gamma_A \gamma_A = \Gamma_S + \Gamma_P \gamma_5 + \Gamma_{V\mu} \gamma_\mu - \Gamma_{A\mu} \gamma_\mu \gamma_5 - \frac{1}{2} \Gamma_{T\mu\nu} \sigma_{\mu\nu},$$

$$\Gamma_S = \frac{1}{4} \text{Sp } \Gamma, \quad \Gamma_P = \frac{1}{4} \text{Sp } \gamma_5 \Gamma, \quad \Gamma_{V\mu} = \frac{1}{4} \text{Sp } \gamma_\mu \Gamma,$$

$$\Gamma_{A\mu} = \frac{1}{4} \text{Sp } \gamma_\mu \gamma_5 \Gamma, \quad \Gamma_{T\mu\nu} = \frac{1}{4} \text{Sp } \sigma_{\mu\nu} \Gamma. \quad (37)$$

Множитель 1/2 связан с тем, что при свертке двух антисимметричных тензоров каждый член входит дважды.

Проверим свойства  $\gamma_A$  на REDUCEe:

```

NOSPUR F; VECTOR A,M1,N1,M2,N2,M3,N3;
ARRAY G1(4),G2(4),G3(4),GG(4);
G1(0):=1$G1(1):=G(F,A)$G1(2):=G(F,M1)$G1(3):=G(F,M1,A)$
G1(4):=(G(F,M1,N1)-G(F,N1,M1))/2$
FOR I:=0:4 DO
<< G2(I):=SUB(M1=M2,N1=N2,G1(I));
    G3(I):=SUB(M1=M3,N1=N3,G1(I))>>;
GG(0):="S"$GG(1):="P"$GG(2):="V"$GG(3):="A"$GG(4):="T"$
SPUR F;
FOR II:=0:4 DO
<< R:=DUMMY(G1(II));
    IF R NEQ 0 THEN WRITE GG(II)," ",R; >>;
S 1
FOR II:=0:4 DO FOR I2:=0:4 DO
<< R:=DUMMY(G1(II)*G2(I2));
    IF R NEQ 0 THEN WRITE GG(II),GG(I2)," ",R; >>;
SS 1
PP 1
VV M2.M1
AA -M2.M1
TT -(N2.N1*M2.M1 - N2.M1*M2.N1)

```

Найдем коэффициенты  $c_{ABC}$ , определяющие таблицу умножения матриц  $\gamma_A$ :

```

% Таблица умножения
FOR II:=0:4 DO FOR I2:=0:4 DO FOR I3:=0:4 DO
<< R:=DUMMY(G1(II)*G2(I2)*G3(I3));
    IF R NEQ 0 THEN WRITE GG(II),GG(I2),GG(I3)," ",R; >>;
SSS 1
SPP 1
SVV M3.M2
SAA -M3.M2

```

STT — (N3.N2\*M3.M2 — N3.M2\*M3.N2)

PSP 1

PPS 1

PVA M3.M2

PAV — M3.M2

PTT EPS(N3,M3,N2,M2)\*I

VSV M3.M1

VPA — M3.M1

VVS M2.M1

VVT — (N3.M2\*M3.M1 — N3.M1\*M3.M2)

VAP M2.M1

VAT EPS(N3,M3,M2,M1)\*I

VTV M3.N2\*M2.M1 — M3.M2\*N2.M1

VTA EPS(M3,N2,M2,M1)\*I

ASA — M3.M1

APV M3.M1

AVP — M2.M1

AVT — EPS(N3,M3,M2,M1)\*I

AAS — M2.M1

AAT N3.M2\*M3.M1 — N3.M1\*M3.M2

ATV — EPS(M3,N2,M2,M1)\*I

ATA — (M3.N2\*M2.M1 — M3.M2\*N2.M1)

TST — (N3.N1\*M3.M1 — N3.M1\*M3.N1)

TPT EPS(N3,M3,N1,M1)\*I

TVV — (M3.N1\*M2.M1 — M3.M1\*M2.N1)

TVA EPS(M3,M2,N1,M1)\*I

TAV — EPS(M3,M2,N1,M1)\*I

TAA M3.N1\*M2.M1 — M3.M1\*M2.N1

TTS — (N2.N1\*M2.M1 — N2.M1\*M2.N1)

TTP EPS(N2,M2,N1,M1)\*I

TTT N3.N2\*M3.N1\*M2.M1 — N3.N2\*M3.M1\*M2.N1 — N3.M2\*M3.N1\*N2.

M1 + N3.M2\*M3.M1\*N2.N1 — N3.N1\*M3.N2\*M2.M1 + N3.N1\*M3.M2

\*N2.M1 + N3.M1\*M3.N2\*M2.N1 — N3.M1\*M3.M2\*N2.N1

Тождества Фирца (36) особенно часто используются для скаляров. Вычислим коэффициенты Фирца, частично свернутые по A и B в пределах одного из классов S, P, V, A, T:

% Коэффициенты Фирца

INDEX M1,N1;

FOR I1:=0:4 DO FOR I2:=0:4 DO FOR I3:=0:4 DO

<< R:=DUMMY(G1(I1)\*G2(I2)\*G1(I1)\*G3(I3));

IF R NEQ 0 THEN WRITE GG(I1),GG(I1),GG(I2),GG(I3)," ",R;>>;

SSSS 1

SSPP 1

SSVV M3.M2

SSAA — M3.M2

SSTT — (N3.N2\*M3.M2 — N3.M2\*M3.N2)

PPSS 1

PPPP 1

PPVV — M3.M2

PPAA M3.M2

PPTT — (N3.N2\*M3.M2 — N3.M2\*M3.N2)

VVSS 4

VVPP — 4

VVVV — 2\*M3.M2

VVAA — 2\*M3.M2

AASS — 4

AAPP 4

AAVV — 2\*M3.M2

AAAA — 2\*M3.M2

TTSS — 12

TTPP — 12

TTTT — 4\*(N3.N2\*M3.M2 — N3.M2\*M3.N2)

В теории слабых взаимодействий используются и тождества Фирца для псевдоскаляров. Для их вывода заменим  $\gamma_B \rightarrow \gamma_B \gamma_5$ :

% Псевдоскалярные

FOR I1:=0 STEP 2 UNTIL 4 DO FOR I2:=0:4 DO FOR I3:=0:4 DO

<< R:=DUMMY(G1(I1)\*G2(I2)\*G1(I1)\*G(F,A)\*G3(I3));

IF R NEQ 0 THEN WRITE GG(I1),GG(I1),GG(I2),GG(I3)," ",R;>>;

SSSP 1

SSPS 1

SSVA — M3.M2

SSAV M3.M2

SSTT EPS(N3,M3,N2,M2)\*I

VVSP 4

VVPS — 4

VVVA 2\*M3.M2

VVAV 2\*M3.M2

TTSP — 12  
 TTPS — 12  
 TTTT 4\*EPS(N3,M3,N2,M2)\*I

Приведем пакет GPACK, содержащий некоторые полезные описания и процедуры для работы с  $\gamma$ -матричными выражениями. Он начинается с описания  $\gamma_5$  и  $\sigma_{\mu\nu}$ :

```
VECTOR A; OPERATOR SIG;
FOR ALL F,M,N LET SIG(F,M,N) = (G(F,M,N) - G(F,N,M))/2;
```

Далее, он содержит процедуру приведения  $\gamma$ -матричного выражения к каноническому виду (37):

```
INDEX I.I1,I.I2;
PROCEDURE GSIM(F,X);
BEGIN SCALAR Y;
  NOSPUR !F; Y := SUB(F=!F,X);
  VECTOR !V1,!V2; LET !V1,!V2=0;
  SPUR !F;
  Y := Y*(1 + !P*G(!F,A) + !V*G(!F,!V1) + !A*G(!F,A,!V1)
    + !T*G(!F,!V2,!V1));
  NOSPUR !F;
  !P := G(!F,A); !V := G(!F,!V1); !A := G(!F,!V1,A);
  !T := (G(!F,!V1,!V2) - G(!F,!V2,!V1))/4;
  Y := Y;
  INDEX !V1,!V2; Y := Y;
  REMIND !V1,!V2,!I1,!I2;
  Y := SUB(!V1=!I1,!V2=!I2,Y);
  CLEAR !S,!P,!V,!A,!T; CLEAR !V1,!V2;
  INDEX !I1,!I2; Y := SUB(!F=F,Y);
  RETURN Y
END;
```

Эта процедура одновременно вычисляет  $\Gamma_S$ ,  $\Gamma_P$ ,  $\Gamma_{V\mu}$ ,  $\Gamma_{A\mu}$  и  $\Gamma_{T\mu\nu}$ , умноженные на 1, .P, .V, .A и .T. Затем они заменяются на нужные  $\gamma$  матричные структуры (37). Индексы .I1, .I2 могут остаться в ответе, если они входят в EPS и G. Это не мешает применить GSIM к такому ответу, домноженному на любое выражение, так как во всей процедуре используются индексы .V1, .V2. Однако не следует перемножать два результата GSIM, так как при этом может возникнуть путаница с индексами.

Посмотрим несколько примеров:

```
GSIM(F,G(F,P1,P2));
2*P2.P1 - G(F,P2,P1) + G(F,P1,P2)
```

2

```
GSIM(F,G(F,P1,P2,P3));
P2.P1*G(F,P3) + P2.P3*G(F,P1) - P1.P3*G(F,P2) + G(F,A,.I1)*
EPS(P2,P1,.I1,P3)*I
```

```
GSIM(F,G(F,P1,P2,P3,P4));
(2*P2.P1*P4.P3 - P2.P1*G(F,P4,P3) + P2.P1*G(F,P3,P4) - 2*P2.
P4*P1.P3 - P2.P4*G(F,P1,P3) + P2.P4*G(F,P3,P1) + 2*P2.P3*P1.
P4 + P2.P3*G(F,P1,P4) - P2.P3*G(F,P4,P1) + P1.P4*G(F,P2,P3)
) - P1.P4*G(F,P3,P2) - P1.P3*G(F,P2,P4) + P1.P3*G(F,P4,P2)
- P4.P3*G(F,P2,P1) + P4.P3*G(F,P1,P2) + 2*G(F,A)*EPS(P2,P1,
P4,P3)*I)/2
```

```
GSIM(F,G(F,A,P1,P2));
(4*P2.P1*G(F,A) + G(F,.I2,.I1)*EPS(P2,P1,.I2,.I1)*I - G(F,
.I1,.I2)*EPS(P2,P1,.I2,.I1)*I)/4
```

```
GSIM(F,G(F,A,P1,P2,P3));
P2.P1*G(F,A,P3) + P2.P3*G(F,A,P1) - P1.P3*G(F,A,P2) + G(F,
.I1)*EPS(P2,P1,.I1,P3)*I
```

```
GSIM(F,G(F,A,P1,P2,P3,P4));
(4*P2.P1*P4.P3*G(F,A) + P2.P1*G(F,.I2,.I1)*EPS(P4,P3,.I2,.I1)
)*I - P2.P1*G(F,.I1,.I2)*EPS(P4,P3,.I2,.I1)*I - 4*P2.P4*P1.
P3*G(F,A) + P2.P4*G(F,.I2,.I1)*EPS(P1,P3,.I2,.I1)*I - P2.P4
*G(F,.I1,.I2)*EPS(P1,P3,.I2,.I1)*I + 4*P2.P3*P1.P4*G(F,A) -
P2.P3*G(F,.I2,.I1)*EPS(P1,P4,.I2,.I1)*I + P2.P3*G(F,.I1,
.I2)*EPS(P1,P4,.I2,.I1)*I - P1.P4*G(F,.I2,.I1)*EPS(P2,P3,
.I2,.I1)*I + P1.P4*G(F,.I1,.I2)*EPS(P2,P3,.I2,.I1)*I + P1.
P3*G(F,.I2,.I1)*EPS(P2,P4,.I2,.I1)*I - P1.P3*G(F,.I1,.I2)*
EPS(P2,P4,.I2,.I1)*I + P4.P3*G(F,.I2,.I1)*EPS(P2,P1,.I2,.I1)
)*I - P4.P3*G(F,.I1,.I2)*EPS(P2,P1,.I2,.I1)*I + 4*EPS(P2,P1,
P4,P3)*I)/4
```

Дираковское сопряжение обладает свойствами

$$\bar{\gamma}_\mu = \gamma_\mu, \quad \bar{\gamma}_5 = -\gamma_5, \quad \overline{\gamma_\mu \gamma_5} = \gamma_\mu \gamma_5, \quad \bar{\sigma}_{\mu\nu} = -\sigma_{\mu\nu}, \quad \overline{\Gamma_1 \Gamma_2} = \Gamma_2 \Gamma_1. \quad (38)$$

Оно производится процедурой GCON, использующей пакет

LETT [5], и ее основная часть сводится к обращению порядка аргументов функции.

```
LOAD NCMP;
"NCMPI LOADED (VERSION 07.04.87)"
"LETT VERSION 21.11.85"

PROCEDURE GCON(F,X);
BEGIN SCALAR Y;NOSPUR !F;OPERATOR !G;
  FOR ALL &U LET G(F,&U) = !G(!F,&U);Y = SUB(I = -I,A = -A,X);
  FOR ALL &U CLEAR G(F,&U);
  FOR ALL &U,&V,!X LET !G(&U,!F,&V,!X) = !G(&U,!X,!F,&V);
  Y = Y;FOR ALL &U,&V,!X CLEAR !G(&U,!F,&V,!X);
  FOR ALL &U LET !G(&U,!F) = G(F,&U);Y = Y;
  FOR ALL &U CLEAR !G(&U,!F);CLEAR !G;
  RETURN Y
END;
```

Посмотрим несколько примеров:

```
GCON(F,G(F,P1));GCON(F,G(F,P1,P2));
GCON(F,G(F,P1,P2,P3));
G(F,P1)
G(F,P2,P1)
G(F,P3,P2,P1)
GCON(F,G(F,A));GCON(F,G(F,A,P1));GCON(F,G(F,A,P1,P2));
-G(F,A)
G(F,A,P1)
-G(F,A,P2,P1)
```

Вычислим коммутаторы:

```
GSIM(F,G(F,P1)*SIG(F,P2,P3) - SIG(F,P2,P3)*G(F,P1));
2*(P2.P1*G(F,P3) - P1.P3*G(F,P2))

GSIM(F,SIG(F,P1,P2)*SIG(F,P3,P4) - SIG(F,P3,P4)*SIG(F,P1,P2));
-(P2.P4*G(F,P1,P3) - P2.P4*G(F,P3,P1) - P2.P3*G(F,P1,P4) +
P2.P3*G(F,P4,P1) - P1.P4*G(F,P2,P3) + P1.P4*G(F,P3,P2)
+ P1.P3*G(F,P2,P4) - P1.P3*G(F,P4,P2))
```

Они позволяют найти матрицу  $U$  для бесконечно малого преобразования Лоренца  $v_\mu \rightarrow v_\mu + \delta\alpha_{\mu\nu}v_\nu$ . Она должна иметь вид  $U = 1 + c\delta\alpha_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}$ . Необходимо потребовать  $U^{-1}\gamma_\mu U = \gamma_\mu + c[\gamma_\mu, \sigma_{\rho\sigma}] \times \delta\alpha_{\rho\sigma} = \gamma_\mu + \delta\alpha_{\mu\nu}\gamma_\nu$ . С учетом коммутатора, получим  $c = 1/4$ .

### 3. ДИАГРАММЫ ФЕЙНМАНА

**Правила Фейнмана.** Матричные элементы различных процессов  $iM$  вычисляются в теории возмущений по взаимодействию. Для этого используется диаграммная техника Фейнмана. Сначала для интересующего нас процесса рисуется набор диаграмм, а затем им по определенным правилам сопоставляются выражения для вкладов в матричный элемент. Мы не будем выводить правила диаграммной техники, интересующиеся найдут этот вывод во многих учебниках. Мы просто сначала сформулируем их на простейшем примере теории скалярного поля (2.15), а затем покажем, как обобщить их на более сложные теории.

На диаграмме распространение частицы каждого сорта изображается соответствующей линией, а взаимодействие — вершиной. Внешние линии диаграммы соответствуют реальным начальным и конечным частицам, которые лежат на массовой поверхности  $p^2 = m^2$ . Внутренние линии, начинающиеся и кончающиеся в вершинах диаграммы, соответствуют виртуальным частицам; они не лежат на массовой поверхности. В каждой вершине выполняется закон сохранения энергии-импульса. По импульсам, оставшимся нефиксированными, проводится интегрирование  $d^4p/(2\pi)^4$ .

Каждой вершине сопоставляется константа взаимодействия, которая считается малым параметром теории возмущений. Поэтому главный вклад в матричный элемент дают диаграммы с минимальным числом вершин. Такие диаграммы не содержат петель, и называются древесными. В них все импульсы определены законами сохранения. Более сложные диаграммы дают поправки, называемые радиационными. Первая радиационная поправка дается однопетлевыми диаграммами. В них проводится интегрирование по одному петлевому индексу. Вторая радиационная поправка дается двухпетлевыми диаграммами с двумя импульсами интегрирования, и т. д. В ближайших главах мы будем иметь дело только с древесными диаграммами. Методы вычисления радиационных поправок рассмотрим далее.

В теории скалярного поля (2.15) внешним линиям ничего не сопоставляется. Внутренним линиям сопоставляется  $iG(p)$ , где пропагатор

$$G(p) = \frac{1}{p^2 - m^2}. \quad (1)$$

При интегрировании по импульсам существенно, как понимать полюс при  $p^2 = m^2$ . Стабильную частицу нужно рассматривать как предельный случай нестабильной с массой  $m - i\Gamma/2$  при  $\Gamma \rightarrow +0$ , так что  $G(p) = 1/(p^2 - m^2 + i0)$ .

Правила построения диаграмм в теории (2.15) мы сформулируем в два этапа. Для простоты, пусть есть только взаимодействие  $(-f/3!)\varphi^3$ . Для получения вклада  $n$ -го порядка теории возмущений по  $f$  в  $iM$ , рисуем сначала  $n$  помеченных треххвостых вершин (пронумерованных, с пронумерованными хвостами). Затем всеми возможными способами присоединяем внешние линии, а оставшиеся хвосты соединяем внутренними. Каждой вершине сопоставляется  $-if/3!$ . Наконец, полученный вклад делим на  $n!$ .

Эти правила можно значительно упростить. Имеется  $n!$  помеченных диаграмм, отличающихся нумерацией вершин, что сокращает  $1/n!$ . Линии можно присоединить к вершине  $3!$  способами, что сокращает знаменатель в  $-if/3!$ . Так что можно сразу рисовать непомеченные диаграммы, в которых вершины и их хвосты не пронумерованы. Вершинам сопоставляется  $-if$ , и нет никакого дополнительного общего множителя.

Однако такой упрощенный способ дает неверный результат, если диаграмма содержит симметричные части. Так, на рис. 3,а, при любом способе присоединения внешних линий есть лишь 2



Рис. 3. Диаграммы с симметричными частями.

(вместо 4) способов соединения вершин внутренними линиями, и непомеченную диаграмму следует домножить на фактор симметрии  $1/2$ . Аналогично, на рис. 3,б перестановка верхней и нижней пар вершин дает ту же помеченную диаграмму, а не новую, и опять нужен множитель  $1/2$ . Вообще, если в диаграмме есть  $n$  симметричных частей, ее нужно домножить на фактор симметрии  $1/n!$ .

Сформулируем теперь обобщение правил Фейнмана на случай любой теории. Пусть есть  $n$  действительных полей  $\varphi_i$ . Среди них могут быть скаляры, компоненты векторов и спиноров и т. д. Комплексное поле всегда можно рассматривать как пару действительных. Впрочем, комплексные поля встречаются столь часто, что правила для них мы сформулируем отдельно.

Лагранжиан делится на невозмущенную часть  $L_0$ , квадратичную по полям, и возмущение. Распространение частиц определяется невозмущенным лагранжианом, который всегда можно переписать в виде

$$\frac{1}{2} \varphi_i M_{ij}(\partial) \varphi_j$$

(добавив полную дивергенцию). Матрица  $M$  зависит от оператора дифференцирования  $\partial$ . В импульсном представлении  $\partial \rightarrow -ip$ . Внутренней линии на диаграмме сопоставляется  $iG_{ij}$ , где пропагатор

$$G_{ij} = [M(-ip)]_{ij}^{-1}. \quad (2)$$

Внешним линиям сопоставляются волновые функции начальных и конечных частиц, нормированные стандартным условием  $2\epsilon$  частиц в единице объема.

Взаимодействие частиц определяется возмущением. Каждый член в  $L$ , имеющий вид  $g_{i_1 \dots i_n} \varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_n}$ , дает вершину с  $n$  помеченными хвостами, которой сопоставляется  $ig_{i_1 \dots i_n}$ . Если  $g$  содержит оператор дифференцирования  $\partial$ , действующий на  $\varphi_{i_k}$ , то он заменяется на  $-ip$ , где  $p$  — импульс, втекающий в вершину по соответствующей линии. От помеченной вершины можно перейти к непомеченной, просуммировав по перестановкам однотипных линий.

Проверим самосогласованность сформулированных правил. Ничто не мешает разбить квадратичную часть лагранжиана  $\frac{1}{2} \varphi_i M_{ij} \varphi_j$  на  $\frac{1}{2} \varphi_i M_{ij}^0 \varphi_j$  и  $\frac{1}{2} \varphi_i \delta M_{ij} \varphi_j$ , и отнести второй член к возмущению. Тогда пропагатором будет  $G_0 = M_0^{-1}$ , и появится двуххвостая вершина  $\delta M$ . Последовательность диаграмм рис. 4 дает

$$iG = iG_0 + iG_0 i\delta M iG_0 + iG_0 i\delta M iG_0 i\delta M iG_0 + \dots = i(M_0 + \delta M)^{-1},$$

как и должно быть.

Наконец, сформулируем правила для комплексных полей. Их распространение изображается направленной линией. Внешней линии, входящей в диаграмму, сопоставляется волновая функция,



Рис. 4. Диаграммы для пропагатора.

а выходящей — сопряженная волновая функция. Невозмущенный лагранжиан имеет вид  $\varphi_i^* M_{ij}(\partial) \varphi_j$  (возможно, после добавления дивергенции). Пропагатор  $G_{ij} = [M(-ip)]_{ij}^{-1}$ , где  $p$  — импульс, текущий по направлению линии. Члену возмущения

$$G_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_m} \varphi_{i_1}^* \dots \varphi_{i_n}^* \varphi_{j_1} \dots \varphi_{j_m}$$

соответствует вершина с  $m$  входящими и  $n$  выходящими линиями. Оператор  $\partial$ , действующий на  $\varphi_i$ , заменяется на  $-ip$ , а на  $\varphi_i^*$  — на  $ip$ .

Рассмотрим несколько примеров. Лагранжиан скалярного поля (2.15) приводится к виду

$$-\frac{1}{2} \varphi (\partial^2 + m^2) \varphi - \frac{f}{3!} \varphi^3 - \frac{g}{4!} \varphi^4,$$

что дает пропагатор  $G(p) = 1/(p^2 - m^2)$ , 3-хвостую вершину  $-if$  и 4-хвостую вершину  $-ig$ .

Заметим, что поскольку действие (2.1) безразмерно, лагранжиан имеет размерность  $m^4$ , и следовательно поле  $\varphi$  имеет размерность  $m$ . Поэтому константа взаимодействия  $f$  имеет размерность  $m$ , а  $g$  безразмерна. Константы взаимодействия с большими степенями  $\varphi$  имеют размерность отрицательных степеней массы.

Как мы увидим далее, петлевые интегралы могут расходиться при больших импульсах. В этом пределе  $G(p) = 1/p^2$ . Если константа взаимодействия имеет размерность  $m^{-n}$ , то добавление такой вершины дает под интегралом в числителе на  $n$  степеней  $p$  больше, чем в знаменателе. Т. е. чем сложнее диаграмма, тем сильнее она расходится. С точки зрения теории перенормировок, для доопределения такой теории требуется бесконечное число контрчленов. Теории со взаимодействием  $\varphi^n$  при  $n > 4$  неперенормируемы, т. е. по существу не определены в рамках теории возмущений.

Следующий пример — массивное векторное поле (2.23). Его лагранжиан (после добавления дивергенции)

$$L_0 = \frac{1}{2} A_\mu [(\partial^2 + m^2) \delta_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu] A_\nu,$$

так что

$$M_{\mu\nu}(-ip) = -(p^2 - m^2) \delta_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu,$$

Матрица

$$D_{\mu\nu}(p) = \frac{\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}}{p^2 - m^2} \quad (3)$$

является обратной в смысле  $M_{\mu\nu} D_{\nu\lambda} = -\delta_{\mu\lambda}$ . Внутренней линии векторного поля сопоставляется  $-iD_{\mu\nu}(p)$ , внешней — единичный вектор поляризации  $e_\mu$ , ортогональный к  $p_\mu$ . Если используются комплексные векторы поляризации (например, циркулярные), то линии начальной частицы сопоставляется  $e_\mu$ , а конечной  $e_\mu^*$  ( $e_\mu^* e_\mu = -1$ ).

Пропагатор  $D_{\mu\nu}(p)$  при  $p \rightarrow \infty$  ведет себя как константа вместо  $1/p^2$ . Из-за этого теории со взаимодействующим массивным векторным полем неперенормируемы.

Безмассовое векторное (электромагнитное) поле является исключением. При  $m \rightarrow 0$  матрица  $M_{\mu\nu}$  необратима, и пропагатор не существует (это связано с калибровочной неоднозначностью поля  $A_\mu$ ). Однако, если  $A_\mu$  взаимодействует с сохраняющимся током  $j_\mu$ , то продольная часть пропагатора  $\sim p_\mu p_\nu$  вообще несущественна (ниже этот вопрос рассмотрен подробнее). Можно использовать любой пропагатор вида

$$D_{\mu\nu}(p) = \frac{\delta_{\mu\nu}}{p^2} + D_1(p^2) p_\mu p_\nu. \quad (4)$$

Можно, например, не меняя содержания теории, добавить к лагранжиану член

$$-\frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu)^2,$$

что приводит к

$$D_{\mu\nu}(p) = \frac{\delta_{\mu\nu} - (1-\alpha) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}}{p^2}. \quad (5)$$

Наиболее часто используются калибровки Фейнмана ( $\alpha = 1$ ) и Ландау ( $\alpha \rightarrow 0$ ).

Константа калибровочного взаимодействия  $e$ , вводимого как  $D_\mu = \partial_\mu - ie z A_\mu$ , безразмерна, и теория с таким взаимодействием перенормируема.

Рассмотрим, наконец, электронное поле (2.27). Внутренней линии сопоставляется  $iS(p)$ , где пропагатор

$$S(p) = \frac{1}{\hat{p} - m} = \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2}. \quad (6)$$

Внешней линии начального электрона сопоставляется  $u_{p\sigma}$ , а конечного —  $\bar{u}_{p\sigma}$ . Вспомним, что уравнение Дирака имеет решения с отрицательными энергиями, и в вакууме все эти состояния заполнены. Незаполненное состояние (дырка) есть позитрон. Поэтому рождение позитрона с импульсом  $p$  есть уничтожение электрона с импульсом  $-p$ , и наоборот, уничтожение позитрона с импульсом  $p$  есть рождение электрона с импульсом  $-p$ . Так что линии начального позитрона соответствует  $\bar{u}_{-p\sigma}$ , а конечного —  $u_{-p\sigma}$ .

Частицы со спином  $1/2$  являются фермионами. Поэтому вклады диаграмм, отличающихся перестановкой линий тождественных фермионов в начальном или конечном состоянии, отличаются знаком. Диаграммы с одинаковым расположением фермионных линий (которые становятся одинаковыми, если убрать бозонные линии), имеют одинаковый знак. Кроме того, каждая замкнутая фермионная петля дает множитель  $-1$ .

Приведем сводку правил диаграммной техники в квантовой электродинамике. Распространение фермиона описывается направленной сплошной линией, а антифермиона — линией, направленной в обратную сторону. Распространение фотона изображается ненаправленной волнистой линией (так как фотон совпадает со своей античастицей). Взаимодействие изображается вершиной. Это может быть излучение или поглощение фотона фермионом или антифермионом, рождение фермион-антифермионной пары фотоном или аннигиляция фермион-антифермионной пары в фотон. Множители, соответствующие элементам диаграммы в выражении для вклада в  $iM$ , приведены на рис. 5. Матричные множители, соответствующие каждой фермионной линии, выписываются против стрелки, начиная с  $\bar{u}$  и кончая  $u$ . Замкнутая фермионная петля дает шпур.

Например, на рис. 6,а приведена единственная древесная диаграмма процесса  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . Ее вклад в  $iM$  равен

$$\bar{u}_{-p_2\sigma_2}(-ie\gamma_\mu)u_{p_1\sigma_1}(-iD_{\mu\nu}(p_1+p_2))\bar{u}_{p_3\sigma_3}(-ie\gamma_\nu)u_{-p_4\sigma_4}. \quad (7)$$

На рис. 6,б изображены несколько однопетлевых диаграмм, дающих радиационную поправку к этому процессу. Рис. 7 показывает знаки нескольких диаграмм процесса  $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ .

В квантовой электродинамике справедлива теорема Фарри: фермионная петля с нечетным числом фотонных хвостов равна нулю. Она следует из того, что четное число фотонов не может превратиться в нечетное (и наоборот) по сохранению C-четности.

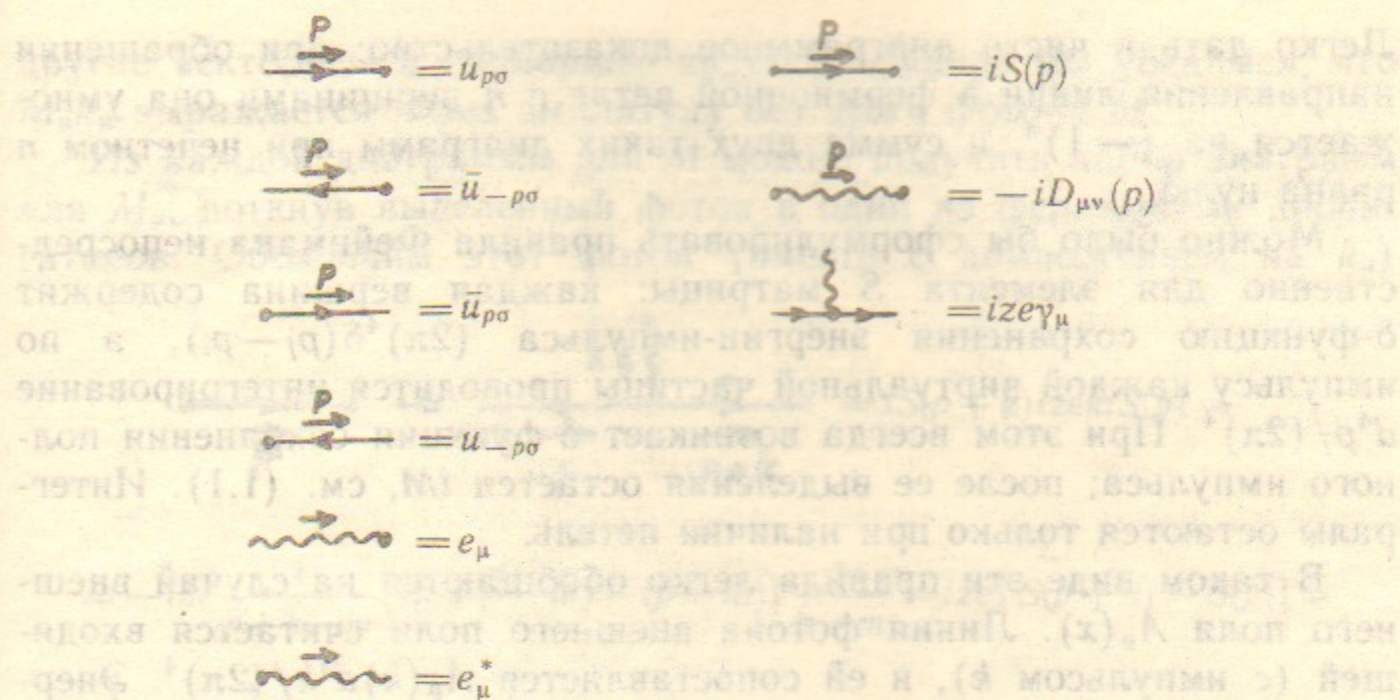


Рис. 5. Правила Фейнмана в квантовой электродинамике.

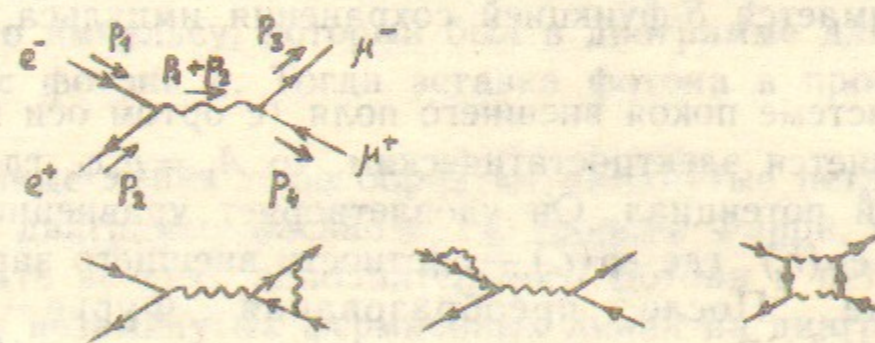


Рис. 6. Диаграммы процесса  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ .

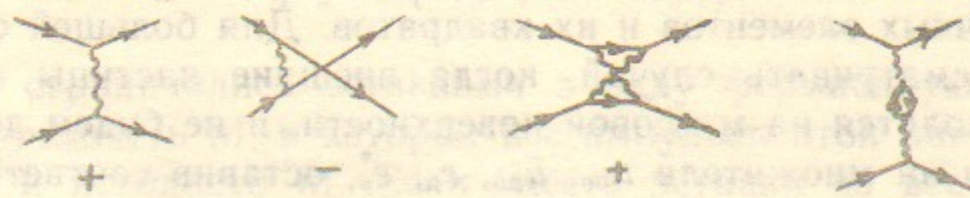


Рис. 7. Знаки диаграмм процесса  $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ .

Легко дать и чисто диаграммное доказательство: при обращении направления линии в фермионной петле с  $n$  вершинами она умножается на  $(-1)^n$ , и сумма двух таких диаграмм при нечетном  $n$  равна нулю.

Можно было бы сформулировать правила Фейнмана непосредственно для элемента  $S$  матрицы: каждая вершина содержит  $\delta$ -функцию сохранения энергии-импульса  $(2\pi)^4 \delta(p_f - p_i)$ , а по импульсу каждой виртуальной частицы проводится интегрирование  $d^4p / (2\pi)^4$ . При этом всегда возникает  $\delta$ -функция сохранения полного импульса; после ее выделения остается  $iM$ , см. (1.1). Интегралы остаются только при наличии петель.

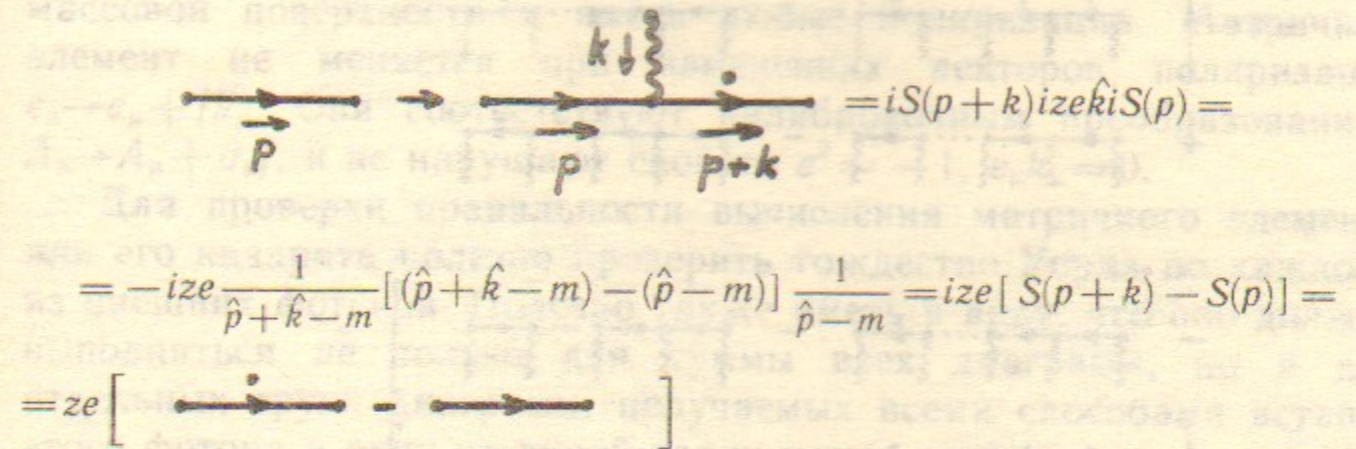
В таком виде эти правила легко обобщаются на случай внешнего поля  $A_\mu(x)$ . Линия фотона внешнего поля считается входящей (с импульсом  $k$ ), и ей сопоставляется  $A_\mu(k) d^4k / (2\pi)^4$ . Энергия и импульс в процессе не сохраняются. В случае стационарного поля,  $A_\mu(k) = 2\pi \delta(k_0) A_\mu(\vec{k})$ . Тогда энергия сохраняется: выделяется общий множитель  $2\pi \delta(\epsilon_f - \epsilon_i)$ , и остается  $iM'$ , см. (1.23). При вычислении  $iM'$ , внешнеполевому фотону сопоставляется  $A_\mu(\vec{k}) d^3\vec{k} / (2\pi)^3$ . Если в диаграмме есть только один такой фотон, то интеграл снимается  $\delta$ -функцией сохранения импульса, и остается  $A_\mu(\vec{p}_f - \vec{p}_i)$ .

Если в системе покоя внешнего поля (с ортом оси времени  $n_\mu$ ) это поле является электростатическим, то  $A_\mu = n_\mu \phi$ , где  $\phi$  — электростатический потенциал. Он удовлетворяет уравнению Пуассона  $\nabla^2 \phi(\vec{r}) = -e\rho(\vec{r})$ , где  $e\rho(\vec{r})$  — плотность внешнего заряда, создающего поле. После преобразования Фурье оно дает  $\phi(\vec{k}) = e\rho(\vec{k}) / \vec{k}^2$ . В случае точечного заряда  $e$ ,  $\rho(\vec{k}) = 1$ , т. е.  $\phi(\vec{k}) = e / \vec{k}^2$ . Если заряд не точечный, то это выражение домножается на формфактор  $\rho(\vec{k})$ . Для сферически-симметричного распределения, он зависит только от  $\vec{k}^2$ .

**Тождество Уорда.** Выведем диаграммным методом одно общее соотношение, очень полезное, в частности, для проверки вычислений матричных элементов и их квадратов. Для большей общности, будем рассматривать случай, когда внешние частицы не обязательно находятся на массовой поверхности, и не будем домножать диаграммы на множители  $u_{rs}, \bar{u}_{rs}, e_\mu, e_\mu^*$ , оставив соответствующие спинорные и векторные индексы свободными. Выделим один из фотонов (для определенности будем считать его входящим с импульсом  $k$ ). Пусть интересующая нас амплитуда будет  $M_\mu$ , где  $\mu$  — индекс поляризации этого фотона. Разумеется,  $M_\mu$  имеет и

другие векторные и спинорные индексы. Сейчас мы убедимся, что  $M_\mu k_\mu$  выражается через амплитуду без этого фотона  $M$ .

Из каждой диаграммы для  $M$  можно получить набор диаграмм для  $M_\mu$ , воткнув выделенный фотон в один из фермионных пропагаторов. Обозначим этот фотон (вместе с домножением на  $k_\mu$ )



$$= iS(p+k) i z e k i S(p) =$$

$$= -i z e \frac{1}{\hat{p} + \hat{k} - m} [(\hat{p} + \hat{k} - m) - (\hat{p} - m)] \frac{1}{\hat{p} - m} = i z e [S(p+k) - S(p)] =$$

$$= z e [ \text{diagram with a dot on the fermion line} ]$$

Рис. 8. Вставка фотона в электронную линию.

волнистой линией с точкой на конце; точка у пропагатора означает, что к его импульсу, который был в диаграмме для  $M$ , прибавлен импульс фотона  $k$ . Тогда вставка фотона в пропагатор дает рис. 8.

Фермионные линии либо образуют замкнутые петли, либо проходят через диаграмму насквозь. По теореме Фарри, мы можем не рассматривать вставку дополнительного фотона в петли. Рассмотрим одну из незамкнутых фермионных линий на диаграмме для  $M$ , и построим все диаграммы для  $M_\mu$ , получаемые вставкой фотона в пропагаторы этой линии (рис. 9). Здесь нижние фотонные линии соединяют выделенную фермионную линию с остальной частью диаграммы. Все члены, кроме крайних, попарно сократились, и мы получили тождество Уорда

$$M_\mu k_\mu = z e [M(p+k) - M(p)] \quad (8)$$

Мы пока ограничились вставками в одну фермионную линию, и получили разность  $M$ , в котором все импульсы этой линии сдвинуты на  $k$ , и исходного  $M$ . Если учесть вставки во все линии, то получится сумма членов такого типа.

Посмотрим, что будет, если концы фермионной линии находятся на массовой поверхности и домножены на физические поляризованные спиноры  $u_{rs}$  и  $\bar{u}_{rs}$ . Мы должны рассмотреть вставку выделенного фотона в концы (рис. 10). Эти тождества похожи на



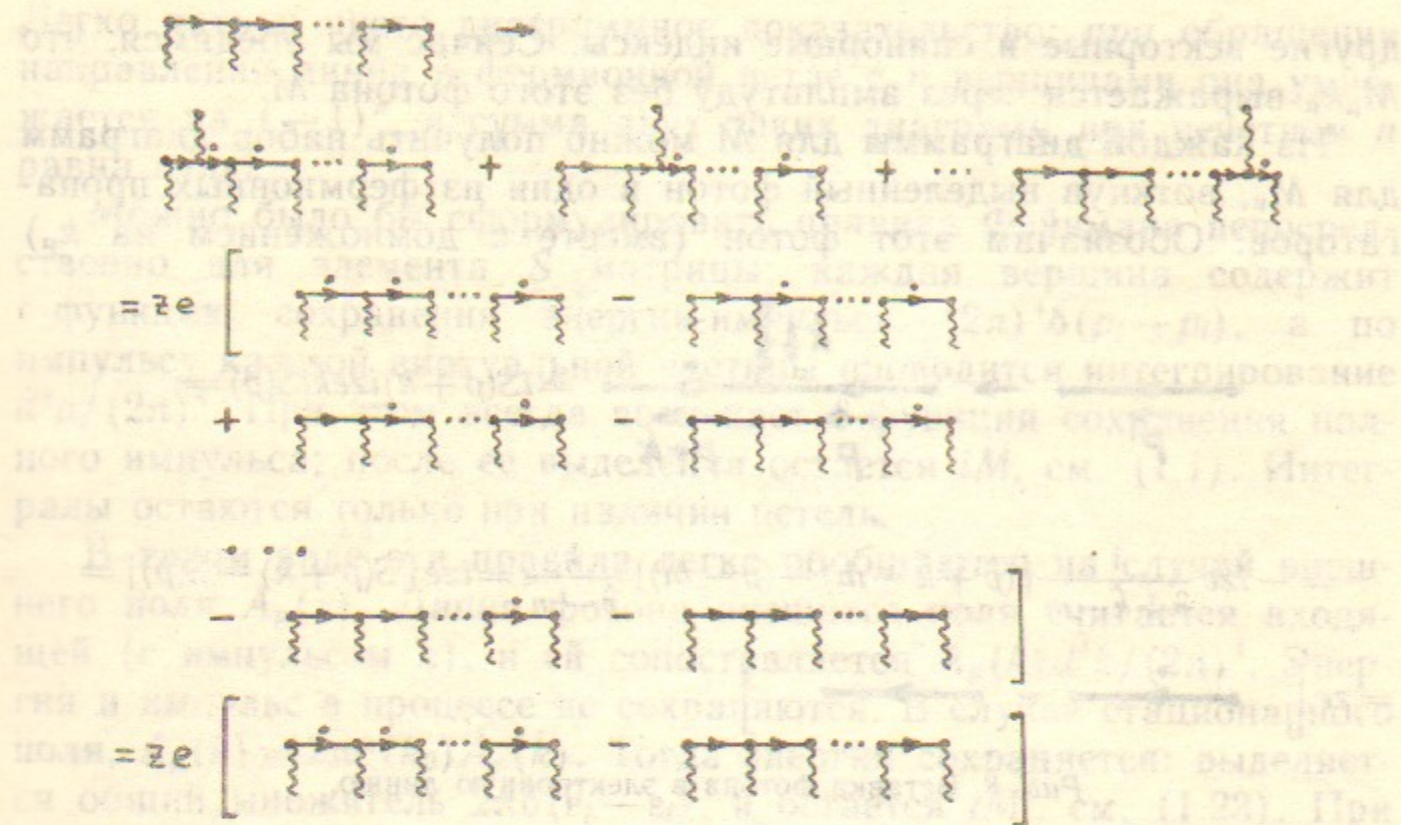


Рис. 9. Тождество Уорда.

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \\ \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \xrightarrow{k} \text{---} \xrightarrow{p+k} \text{---} \\ \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \end{array} = iS(p+k)izeku_{p\sigma} = \\
 & = -ze \frac{1}{\hat{p} + \hat{k} - m} [(\hat{p} + \hat{k} - m) - (\hat{p} - m)] u_{p\sigma} = -ze u_{p\sigma} = -ze \begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \\ \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \end{array} \\
 & \begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \\ \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \xrightarrow{k} \text{---} \xrightarrow{p+k} \text{---} \\ \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \end{array} = \bar{u}_{p+k, \sigma} izek_i S(p) = \\
 & = -ze \bar{u}_{p+k, \sigma} [(\hat{p} + \hat{k} - m) - (\hat{p} - m)] \frac{1}{\hat{p} - m} = ze \bar{u}_{p+k, \sigma} = ze \begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{p+k} \text{---} \\ \text{---} \xrightarrow{p+k} \text{---} \end{array}
 \end{aligned}$$

Рис. 10. Вставка фотона в концы электронной линии.

рис. 8, но в них отсутствует член, в котором внешняя линия сдвинулась с массовой поверхности. Поэтому на рис. 10 отсутствуют крайние члены, и получается 0. Итак,  $M_\mu k_\mu = 0$ , если все внешние заряженные частицы лежат на массовой поверхности и имеют физические поляризации. Нейтральные частицы могут лежать вне массовой поверхности и иметь любые поляризации. Матричный элемент не меняется при изменениях векторов поляризации  $e_\mu \rightarrow e_\mu + f k_\mu$ . Они соответствуют калибровочным преобразованиям  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f$ , и не нарушают свойств  $e^2 = -1$ ,  $e_\mu k_\mu = 0$ .

Для проверки правильности вычисления матричного элемента или его квадрата полезно проверить тождество Уорда по каждому из внешних фотонов. Полезно также иметь в виду, что оно должно выполняться не только для суммы всех диаграмм, но и для отдельных групп диаграмм, получаемых всеми способами вставки этого фотона в одну из линий заряженных частиц.

Зная тождество Уорда, нетрудно понять, почему продольная часть фотонного пропагатора (4) не влияет на матричный элемент. Действительно, рассмотрим совокупность диаграмм, в которых один конец фотонной линии фиксирован, а другой вставляется во все возможные места. Вклад продольной части пропагатора содержит на этом конце  $k$ , и сумма вкладов этих диаграмм равна нулю. Поэтому сумма всех диаграмм одинакова в любой калибровке (в частности, не зависит от  $\alpha$ ), тогда как выражения для отдельных диаграмм, разумеется, различны в разных калибровках.

**Стандартный алгоритм.** Теперь мы сформулируем стандартный алгоритм вычисления вероятностей распада и сечений рассеяния. Во многих случаях более эффективными могут оказаться другие алгоритмы, например, метод спиральных амплитуд, но мы их рассматривать не будем.

Матричный элемент имеет форму

$$M = \left( \prod_i \varphi_i^* \right) A \left( \prod_i \varphi_i \right), \quad (9)$$

где  $\varphi_i$ ,  $\varphi_i^*$  — волновые функции начальных и конечных частиц. Для спина 0 это скаляр, нормированный условием  $A^* A = 1$ ; для спина 1 — вектор  $e_\mu$ ,  $e_\mu^* e_\mu = -1$ ; для спина 1/2 — столбец  $u_{p\sigma}$ ,  $\bar{u}_{p\sigma} u_{p\sigma} = 2m$ . Квадрат модуля

$$|M|^2 = \text{Sp} A \left( \prod_i \varphi_i \varphi_i^* \right) A^* \left( \prod_i \varphi_i^* \varphi_i \right), \quad (10)$$

где след берется по всем спинорным и векторным индексам. В спинорном случае вместо комплексного сопряжения используется дираковское.

Для получения вероятности процесса с неполяризованными частицами нужно вычислить

$$\overline{|M|^2} = \frac{1}{\prod_i n_i} \sum |M|^2,$$

где сумма берется по поляризациям начальных и конечных частиц, а  $n_i$  — число спиновых состояний. Определим матрицы плотности неполяризованных частиц

$$\rho_i^0 = \frac{1}{n_i} \sum \varphi_i \varphi_i^*,$$

тогда

$$\overline{|M|^2} = \text{Sp } A \left( \prod_i \rho_i^0 \right) A^* \left( \prod_f n_f \rho_f^0 \right). \quad (11)$$

Если начальные частицы поляризованы (в общем случае, частично), то в этой формуле вместо  $\rho_i^0$  нужно использовать матрицы плотности  $\rho_i = \varphi_i \varphi_i^*$ . Обычно состояние частичной поляризации описывается набором параметров  $a_k$ , так что  $\rho = \rho_0 + \sum a_k \sigma_k$ , где  $\sigma_k$  — соответствующие матричные или тензорные структуры, и  $\text{Sp } \rho_0 \sigma_k = 0$ .

Как найти степень поляризации конечной частицы? Заменяя в (11) сумму по поляризациям  $n_f \rho_f^0$  на  $n_f \rho_f^1$ , мы получим вероятность процесса, в котором детектор регистрирует разные спиновые состояния частицы с различной вероятностью. Именно это свойство детектора описывается матрицей плотности  $\rho_f^1$ . Но такая вероятность должна быть пропорциональна  $\text{Sp } \rho_f \rho_f^1$ , где  $\rho_f$  — матрица плотности самой конечной частицы безотносительно к детектору. Поэтому интересующие нас параметры  $a_k$  можно найти из системы линейных уравнений

$$\frac{\overline{|M|^2}(a_k)}{\overline{|M|^2}(0)} = 1 + \frac{\text{Sp } \sigma_k \sigma_l}{\text{Sp } \rho_0^2} a_k a_l. \quad (12)$$

Найдем матрицу плотности неполяризованного электрона

$$2\rho_0 = \sum_{\sigma} u_{\rho\sigma} \bar{u}_{\rho\sigma},$$

где сумма берется по двум независимым спиновым состояниям. Поскольку единственным выделенным вектором является  $\rho$ , ее общий вид  $2\rho_0 = a\hat{p} + b$ . Из уравнения Дирака (2.29) следует  $(\hat{p} - m)2\rho_0 = 0$  (или  $2\rho_0(\hat{p} - m) = 0$ ), откуда  $b = ma$  т. е.  $2\rho_0 = a(\hat{p} + m)$ . Условие нормировки

$$\text{Sp } 2\rho = \sum_{\sigma} \bar{u}_{\rho\sigma} u_{\rho\sigma} = 4m,$$

откуда  $a = 1$ . Итак,

$$2\rho_0 = \hat{p} + m. \quad (13)$$

Частично поляризованный электрон характеризуется псевдовектором поляризации  $a$ , ортогональным  $\rho$ :  $\rho a_{\mu} = 0$ . В системе покоя электрона  $a_{\mu}$  имеет только пространственные компоненты, и равен удвоенному среднему спину. Поскольку  $a_{\mu}$  — псевдовектор, он должен входить в матрицу плотности  $\rho$  вместе с  $\gamma_5$ . Форма  $\rho = \rho_0(1 + c\gamma_5 \hat{a})$  удовлетворит уравнению Дирака (2.29) и сопряженному к нему, так как  $(1 + c\gamma_5 \hat{a})$  коммутирует с  $\rho_0$ . Для нахождения  $c$  используем (без доказательства) тот факт, что псевдовектор  $a_{\mu}$  равен среднему значению  $\gamma_5 \gamma_{\mu}$  [3]:  $a_{\mu} = \text{Sp } \rho \gamma_5 \gamma_{\mu} / \text{Sp } \rho$ , откуда  $c = 1$ . Итак,

$$\rho = \frac{1}{2}(\hat{p} + m)(1 + \gamma_5 \hat{a}). \quad (14)$$

Как мы видели, для процессов с позитронами приходится использовать волновые функции с отрицательной энергией  $\psi_{-p\sigma} = u_{-p\sigma} e^{ipx}$ . Они удовлетворяют уравнению  $(\hat{p} + m)u_{-p\sigma} = 0$  (или  $\bar{u}_{-p\sigma}(\hat{p} + m) = 0$ ), и нормированы условием  $\bar{u}_{-p\sigma} \gamma_{\mu} u_{-p\sigma} = 2\rho_{\mu}$  (или  $\bar{u}_{-p\sigma} u_{-p\sigma} = -2m$  при  $m \neq 0$ ). Для них матрицы плотности

$$\rho_0 = \frac{1}{2}(\hat{p} - m), \quad \rho = \frac{1}{2}(\hat{p} - m)(1 - \gamma_5 \hat{a}). \quad (15)$$

Матрица плотности неполяризованного фотона  $2\rho_{\mu\nu} = \sum e_{\mu} e_{\nu}^*$ , где сумма берется по двум поляризациям. Тожество Уорда позволяет использовать более простую форму. Пусть фотон летит по оси  $z$ :  $k_{\mu} = \varepsilon(e_{\mu}^0 + e_{\mu}^3)$ . В качестве двух независимых поперечных поляризаций можно выбрать орты  $e_{\mu}^1$  и  $e_{\mu}^2$ :  $2\rho_{\mu\nu} = e_{\mu}^1 e_{\nu}^1 + e_{\mu}^2 e_{\nu}^2$ . Однако в эту сумму можно включить и две нефизических поляризации — продольную и временную:

$$2\rho_{\mu\nu} = e_{\mu}^1 e_{\nu}^1 + e_{\mu}^2 e_{\nu}^2 + e_{\mu}^3 e_{\nu}^3 - e_{\mu}^0 e_{\nu}^0 = -\delta_{\mu\nu}.$$

Дело в том, что в силу тождеств Уорда

$$M_\mu k_\mu = M_\mu (e_\mu^0 + e_\mu^3) \varepsilon = 0.$$

$$\overline{|M|^2} = M_\mu M_\nu^* (e_\mu^1 e_\nu^1 + e_\mu^2 e_\nu^2 + e_\mu^3 e_\nu^3 - e_\mu^0 e_\nu^0) = M_\mu M_\nu^* (e_\mu^1 e_\nu^1 + e_\mu^2 e_\nu^2),$$

т. е. вероятности излучения (поглощения) продольного и временного фотона сокращаются. На практике удобно использовать матрицу плотности в виде

$$\rho_{\mu\nu}^0 = -\frac{1}{2} \delta_{\mu\nu}. \quad (16)$$

Матрица плотности частично поляризованного фотона  $\rho_{\mu\nu} = e_\mu e_\nu^* = \rho_{\nu\mu}^*$  определена с точностью до  $\rho_{\mu\nu} \rightarrow \rho_{\mu\nu} + f_\mu k_\nu + f_\nu k_\mu$ . При любом выборе ортов  $e_\mu^1, e_\mu^2$ , ортогональных к  $k_\mu$ , ее можно привести к виду, содержащему только 1, 2 компоненты:

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & i - \xi_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (1 + \xi \vec{\sigma}), \quad (17)$$

где  $\xi_i$  — параметры Стокса. Антисимметричная ее часть описывает циркулярную поляризацию;  $\xi_2$  есть средняя спиральность (псевдоскаляр). Параметры  $\xi_1, \xi_3$  описывают линейную поляризацию по осям 1, 2 и по диагоналям; они зависят от выбора ортов, но  $\xi_1^2 + \xi_3^2 = \xi_2^2$  — инвариант. Выбором ортов можно диагонализировать симметричную часть:

$$\rho^s = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \xi & 0 \\ 0 & 1 - \xi \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Таким образом,  $\rho^s$  характеризуется скаляром  $\xi$  — степенью линейной поляризации, и ее направлением  $e_\mu^1$ .

Сформулируем алгоритм вычисления  $\overline{|M|^2}$ . Сначала рисуем все диаграммы для  $M$ . Каждый член в  $\overline{|M|^2}$  соответствует выбору вклада одной диаграммы в  $M$  и одной в  $M^*$ . Рисуем эту диаграмму для  $M$  так, что линии конечных частиц смотрят вправо. Правее, за штриховой чертой, рисуем зеркально отраженную диаграмму для  $M^*$ . Соединяем линии конечных и начальных частиц этих двух диаграмм. Мы получили квадрированную диаграмму. Если есть  $n$  диаграмм для  $M$ , то будет  $n^2$  квадрированных диаграмм для  $\overline{|M|^2}$ . Например, на рис. 11 изображена единственная древесная диаграмма процесса  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$  и соответствующая квадрированная диаграмма.

В левой части элементам диаграммы сопоставляются выражения по обычным правилам, в правой — сопряженные выражения (в спинорном случае дираковски сопряженные). Линиям конечных частиц, пересекающих штриховую черту, сопоставляются  $n_f \rho_f^0$  (суммирование по поляризациям); линиям начальных частиц —  $\rho_i^0$  (усреднение).

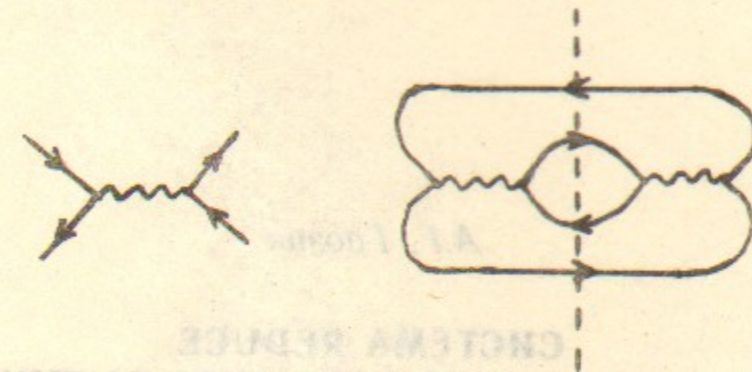
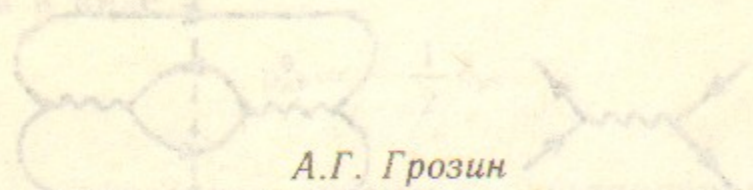


Рис. 11. Диаграмма и квадрированная диаграмма процесса  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hearn A.C. REDUCE User's Manual. RAND Pub. CP78 (rev. 7/87).
2. Грозин А.Г. Препринты ИЯФ 88-118, 136, 140, 1988.
3. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика. Наука, 1989.
4. Родионов А.Я., Таранов А.Ю. Препринт НИИЯФ МГУ 88-29/50, 1988.
5. Kryukov A.P., Rodionov A.Ya. Comp. Phys. Comm. v.48, 1988, p.327.



А.Г. Грозин

## СИСТЕМА REDUCE В ФИЗИКЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Введение

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = 0 \quad (7)$$

де  $p_i$  — параметры Стокса. Антикоммутируют со частью операторов циркулярную поляризацию.  $\sigma_i$  — сродная спиральность (спин-паритет). Параметры  $\sigma_i$  — сродная спиральность и поляризация.  $\sigma_i = \pm 1$  (или  $\pm 2$ ) — это означает, что  $\sigma_i$  — это сродная спиральность и поляризация.  $\sigma_i = \pm 1$  (или  $\pm 2$ ) — это означает, что  $\sigma_i$  — это сродная спиральность и поляризация.  $\sigma_i = \pm 1$  (или  $\pm 2$ ) — это означает, что  $\sigma_i$  — это сродная спиральность и поляризация.

Ответственный за выпуск С.Г. Попов

Работа поступила 15 марта 1990 г.

Подписано в печать 28.03 1990 г. МН 08480

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2,5 печ.л., 2,0 уч.-изд.л.

Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ № 42

Набрано в автоматизированной системе на базе фото-наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и отпечатано на ротапинтере Института ядерной физики СО АН СССР.

Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.