

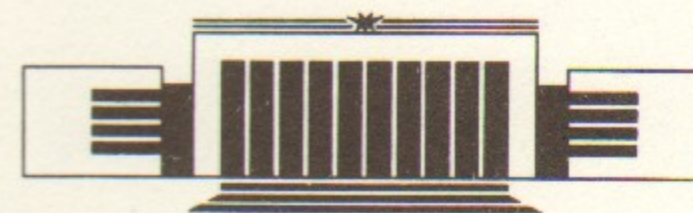


ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Т.А. Всеволожская

**РАДИАЦИОННОЕ ПРИРАЩЕНИЕ  
ЭМИТТАНСА ПУЧКА В ФИНАЛЬНОЙ  
ЛИНЗЕ ЛИНЕЙНОГО КОЛЛАЙДЕРА**

**ПРЕПРИНТ 90-41**



НОВОСИБИРСК

Радиационное приращение  
эмиттанса пучка в финальной линзе  
линейного коллайдера

Т.А. Всеволожская

Институт ядерной физики  
630090, Новосибирск 90, СССР

АННОТАЦИЯ

Рассматривается увеличение поперечного эмиттанса электронного пучка за счет квантовых флуктуаций синхротронного излучения в прямолинейных фокусирующих элементах. Приводится общее выражение для приращения эмиттанса и его анализ для плоского пучка с соотношением размеров  $x \gg y$  в финальном квадруполе линейного коллайдера. Эмиттанс  $\epsilon_y$  в этом случае экспоненциально увеличивается с показателем  $\text{const} \cdot (\epsilon_x / 2\beta_{0x})^{3/2} / \beta_{0y}^2$ , определяемым значениями  $\beta$ -функций в месте встречи и эмиттансом по  $x$  с константой, зависящей от энергии как  $\mathcal{E}^5$  и составляющей более или порядка  $10^5 \text{ м}^2$  при  $\mathcal{E} = 1 \text{ ТэВ}$  для близкой к четвертьволновой фокусировки по  $y$ .

Высокие энергии ( $\sim 1 \text{ ТэВ}$ ) разрабатываемых в настоящее время проектов линейных коллайдеров и чрезвычайно малый размер пучков в месте встречи (вплоть до  $10^{-8} \text{ м}$ ) делают актуальным рассмотрение увеличения эмиттанса пучка за счет квантовых флуктуаций излучения частиц в светосильной линзе, фокусирующей пучок к месту встречи. Вычисление этого эффекта в приближении одномерного поперечного движения частиц проводится в работе [1], однако при этом выпадает из рассмотрения практически очень важный случай, когда пучок, имеющий ленточную форму в месте встречи с соотношением поперечных размеров  $x \gg y$ , сохраняет ее и в линзе, так что приращение эмиттанса в направлении меньшего из размеров определяется излучением в больших полях, соответствующих координатам частиц в направлении большего из размеров.

Для нахождения приращения эмиттанса пучка в финальной линзе удобно использовать полученное в [2] квазиклассическое уравнение, определяющее воздействие излучения на движение частиц. Для эмиттанса  $\epsilon_j$  это уравнение имеет вид

$$\frac{d\epsilon_j(\mathbf{p})}{dt} = \int [\epsilon_j(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}) - \epsilon_j(\mathbf{p})] dW,$$

где  $dW$  — вероятность излучения в элемент фазового объема  $d^3k$  в единицу времени. Подставив для  $\epsilon_j$  его выражение через координаты и углы,  $\epsilon_j = \beta_j x_j'^2 + 2\alpha_j x_j x_j' + \gamma_j x_j^2$ , где  $\alpha_j$ ,  $\beta_j$  и  $\gamma_j$  — элементы матрицы Твисса, и разложив значения  $x_j'$ ,  $\alpha_j$ ,  $\beta_j$  и  $\gamma_j$  после излучения:

$$x_j' = \frac{p_j - \hbar k_j}{|p - \hbar k|}, \quad \alpha_j(\mathcal{E} - \hbar\omega), \quad \beta_j(\mathcal{E} - \hbar\omega), \quad \gamma_j(\mathcal{E} - \hbar\omega)$$

в ряд по степеням  $\hbar k/\mathcal{E}$ , с точностью до квадратичных членов получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_j}{dt} = & - \left\{ x_j^2 \frac{d\gamma_j}{d\mathcal{E}} + 2x_j x_j' \frac{d\alpha_j}{d\mathcal{E}} + x_j'^2 \frac{d\beta_j}{d\mathcal{E}} \right\} I + \\ & + \left\{ x_j^2 \frac{d^2\gamma_j}{d\mathcal{E}^2} + 2x_j x_j' \frac{d^2\alpha_j}{d\mathcal{E}^2} + x_j'^2 \frac{d^2\beta_j}{d\mathcal{E}^2} \right\} \int \frac{\hbar^2 \omega^2}{2} dW + \\ & + \frac{c^2 \beta_j}{2\mathcal{E}^2} \int \hbar^2 k_{\perp}^2 dW \end{aligned} \quad (1)$$

с учетом того, что  $\int \hbar\omega dW$  равно интенсивности излучения  $I$ . Первый член в правой части (1) описывает классическое изменение эмиттанса, обусловленное хроматической aberrацией линзы, второй член представляет флуктуационную добавку к первому, и третий определяет приращение эмиттанса за счет флуктуации поперечного импульса излучения.

Усреднение в (1) проводится по фазовой траектории  $\varepsilon_j = \text{const}$  с учетом, в общем случае, зависимости от обеих поперечных координат величины магнитного поля  $H(x, y) = G \sqrt{x^2 + y^2}$ , содержащегося в выражениях для интенсивности излучения

$$I = \frac{2}{3} \alpha \hbar \omega_0^2 \gamma^4$$

и интегралов

$$\int \frac{\hbar^2 \omega^2}{2} dW = \frac{55 \hbar^2 \alpha \omega_0^3}{48 \sqrt{3}} \gamma^7 \quad \text{и} \quad \int \frac{\hbar^2 k_{\perp}^2}{2} dW = 2 \frac{13 \hbar^2 \alpha \omega_0^3}{c^2 48 \sqrt{3}} \gamma^5$$

в виде частоты  $\omega_0 = eHc/\mathcal{E}$ , однако при плоском пучке с соотношением размеров  $x \gg y$  зависимостью поля от  $y$  в области пучка можно пренебречь, приняв  $H \cong G|x|$ . Приращение эмиттанса в направлении меньшего из размеров на элементе длины линзы  $cdt$  после усреднения по фазовой траектории  $\varepsilon_y = \text{const}$  получаем равным

$$\frac{d\varepsilon_y}{cdt} \cong \frac{\varepsilon_y}{c\mathcal{E}^2} \left\{ \left[ \frac{1}{\beta_y} \frac{d\beta_y}{d\mathcal{E}} \right]^2 + \left[ \beta_y \frac{d}{d\mathcal{E}} \left( \frac{\alpha_y}{\beta_y} \right) \right]^2 \right\} \int \frac{\hbar^2 \omega^2}{2} dW +$$

$$+ \frac{c\beta_y}{2\mathcal{E}^2} \int \hbar^2 k_{\perp}^2 dW. \quad (2)$$

Классическая часть в приращении эмиттанса при этом оказывается равной нулю.\*)

Элементы матрицы Твисса в финальной линзе определяются через значение  $\beta$ -функции в месте встречи  $\beta_{0j}(\alpha_{0j}=0)$  и элементы  $a_{mn}$  матрицы фокусировки от точки излучения до места встречи:

$$\alpha_j = \beta_{0j} a_{21} a_{22} + \frac{a_{11} a_{12}}{\beta_{0j}},$$

$$\beta_j = \beta_{0j} a_{22}^2 + \frac{a_{12}^2}{\beta_{0j}}.$$

Знак усреднения над интегральными характеристиками излучения в (2) означает усреднение содержащегося в них значения  $|x|^3$ . При гауссовском распределении плотности частиц имеем

$$\overline{|x|^3} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( 2\sigma_{0x}^2 \frac{\beta_x}{\beta_{0x}} \right)^{3/2};$$

$\sigma_{0j}$  — среднеквадратичный размер пучка в месте встречи.

Рассмотрим вклад каждого из слагаемых в правой части (2) в предположении его малости по сравнению с исходным эмиттансом в интегральное по длине линзы приращение  $\Delta\varepsilon_y$  на примере одиночного квадрупольа длиной  $l$ , создающего четвертьволновую фокусировку по  $y$  в точку на расстоянии  $L$  от его выходного края. Будем при этом считать, что в обоих поперечных направлениях выполняется условие малости  $\beta$ -функции в месте встречи в виде  $\beta_{0j} a_{22}^2 \ll a_{12}^2 / \beta_{0j}$ .

Вклад первого члена  $(\Delta\varepsilon_y)_1$  с использованием условия малости  $\beta_{0j}$  получаем в виде

$$(\Delta\varepsilon_y)_1 = \frac{\varepsilon_y \varepsilon_x^{3/2}}{\mathcal{E}^2 \beta_{0y}^2 \beta_{0x}^{3/2}} \frac{55 \hbar^2 c^2 \alpha \gamma^7}{48 \sqrt{3} \pi} \times$$

\* Классический вклад в изменение эмиттанса  $\varepsilon_y$  обнаруживается при учете зависимости поля в линзе от  $y$ , что дает:

$$\left[ \frac{d\varepsilon_y}{dt} \right]_{\text{кл}} = \frac{2}{3} \alpha \hbar \gamma^4 \left( \frac{eGc}{\mathcal{E}} \right)^2 \frac{\varepsilon_y^2}{4\beta_y} \frac{d\beta_y}{d\mathcal{E}}.$$

$$\times \left\{ \frac{(1+\zeta^2)^2}{4} \int_0^{l\sqrt{\kappa}} \left[ \psi + \frac{\sin 2\chi - \sin 2(\psi+\chi)}{2} \right]^2 (\operatorname{sh} \psi + \zeta \operatorname{ch} \psi)^3 d\psi \right\}, \quad (3)$$

где  $\varepsilon_x = 2\sigma_{0x}^2/\beta_{0x}$ ,  $\zeta = L\sqrt{\kappa}$  и  $\chi = \operatorname{arctg} \zeta$ . При  $\mathcal{E} = 1 \text{ ТэВ}$  и  $\chi + l\sqrt{\kappa} = \pi/2$  — условие четвертьволновой фокусировки — это составляет

$$(\Delta\varepsilon_y)_1 = \varepsilon_y \left( \frac{\varepsilon_x}{\beta_{0x}} \right)^{3/2} \frac{1.4 \cdot 10^4 \text{ м}^2}{\beta_{0y}^2} F, \quad (4)$$

где  $F$  заменяет выражение в фигурных скобках в (3).

На рисунке приведена зависимость  $F$  от величины параметра  $\zeta$  при четвертьволновой фокусировке по  $y$  и от  $l\sqrt{\kappa}$  при  $\zeta = 1$ . Минимальное значение  $F$  при  $\chi + l\sqrt{\kappa} = \pi/2$  равно 1.2 (при  $\zeta = 0$ ).

Зависимость  $F$  от  $\zeta$  отражает зависимость  $(\Delta\varepsilon_y)_1$  от градиента поля в линзе при фиксированном расстоянии от линзы до места встречи, когда  $\zeta$  меняется как  $\sqrt{G}$ . Эта зависимость проявляется слабо при малых  $\zeta$  ( $\zeta \leq 0.6$ ), что означает слабую зависимость приращения эмиттанса от градиента. Для  $L \leq 30 \text{ см}$ , например, при энергии 1 ТэВ слабая зависимость  $(\Delta\varepsilon_y)_1$  от  $G$  сохраняется вплоть до значений  $G \geq 0.1 \text{ Мэ/мм}$ .

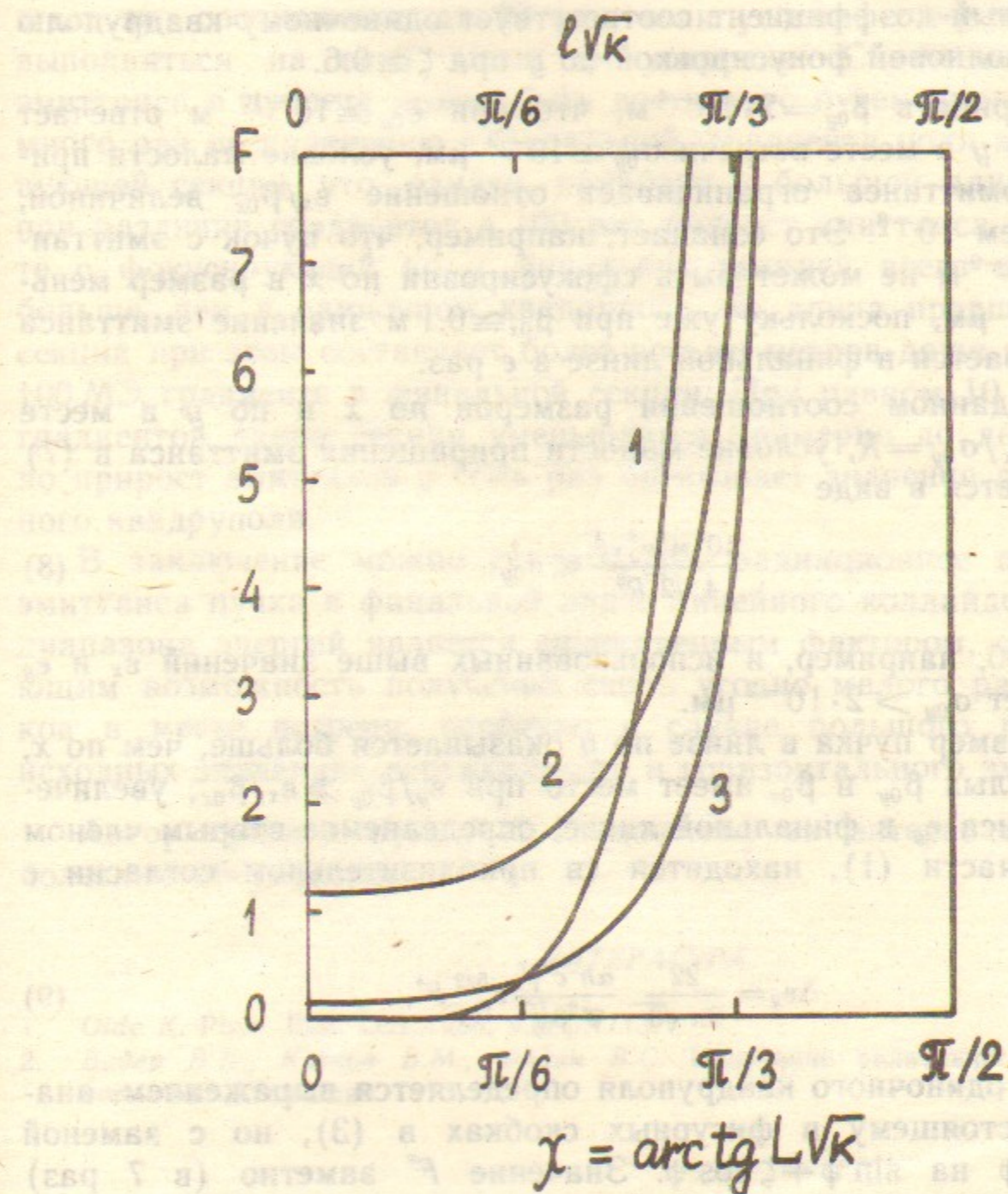
Вклад второго члена в правой части (2) в приращение эмиттанса равен

$$(\Delta\varepsilon_y)_2 = 2 \frac{13 \hbar^2 c^2 \alpha \gamma^5}{48 \sqrt{3\pi} \beta_{0y} \mathcal{E}^2} \left( \frac{\varepsilon_x}{\beta_{0x}} \right)^{3/2} \int_0^{l\sqrt{\kappa}} (\sin \psi + \zeta \cos \psi) (\operatorname{sh} \psi + \zeta \operatorname{ch} \psi)^3 d\psi. \quad (5)$$

Значение интеграла в (5) составляет  $\sim 3$  при  $l\sqrt{\kappa} + \chi = \pi/2$  и  $\zeta < 0.6$ . При  $\mathcal{E} = 1 \text{ ТэВ}$  в этой области значений  $\zeta$  получаем

$$(\Delta\varepsilon_y)_2 \cong 0.5 \text{ м}^2 \left( \frac{\varepsilon_x}{\beta_{0x}} \right)^{3/2} \frac{1}{\beta_{0y}}. \quad (6)$$

Сопоставление значений  $(\Delta\varepsilon_y)_i$  показывает, что наибольшего внимания заслуживает первое слагаемое в правой части (2). Отношение его к  $(\Delta\varepsilon_y)_2$  ( $\sim \gamma^2 \varepsilon_y / \beta_{0y}$ ) существенно больше единицы в рассматриваемой области параметров. С учетом только первого члена в правой части (2) эмиттанс  $\varepsilon_y$  после финальной линзы при его исходном значении, равном  $\varepsilon_{0y}$  для ленточного пучка с размерами  $x^2 \gg y^2$  получаем в виде



Коэффициенты  $F$  в (4) и  $F^*$  в (9) для одиночного квадруполя:  
 1 — зависимость  $F$  от  $l\sqrt{\kappa}$  при  $\zeta = 1$ , 2 — зависимость  $F$  от  $\zeta$  при четвертьволновой фокусировке по  $y$ , 3 — то же для  $F^*$ .

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{0y} \exp \left\{ \frac{2 \cdot 10^4 \text{ м}^2}{\beta_{0y}^2} \left( \frac{\varepsilon_x}{\beta_{0x}} \right)^{3/2} \right\}, \quad (7)$$

где численный коэффициент соответствует одиночному квадруполю с четвертьволновой фокусировкой по  $y$  при  $\zeta \cong 0.6$ .

Если принять  $\beta_{0y} = 2 \cdot 10^{-4}$  м, что при  $\varepsilon_{0y} \cong 10^{-12}$  м отвечает размеру по  $y$  в месте встречи  $\sigma_{0y} \cong 10^{-2}$  мкм, условие малости приращения эмиттанса ограничивает отношение  $\varepsilon_x/\beta_{0x}$  величиной, меньшей чем  $10^{-8}$ . Это означает, например, что пучок с эмиттансом  $\varepsilon_x \cong 10^{-9}$  м не может быть сфокусирован по  $x$  в размер меньше  $\sigma_{0x} \sim 10$  мкм, поскольку уже при  $\beta_{0x} \cong 0.1$  м значение эмиттанса  $\varepsilon_y$  увеличивается в финальной линзе в  $e$  раз.

При заданном соотношении размеров по  $x$  и по  $y$  в месте встречи,  $\sigma_{0x}/\sigma_{0y} = R$ , условие малости приращения эмиттанса в (7) представляется в виде

$$\frac{10^4 \text{ м}^2 \varepsilon_y^2 \varepsilon_x^3}{4 \sqrt{2} R^3} \ll \sigma_{0y}^7. \quad (8)$$

Для  $R = 100$ , например, и использованных выше значений  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_y$  это означает  $\sigma_{0y} > 2 \cdot 10^{-2}$  мкм.

Если размер пучка в линзе по  $y$  оказывается больше, чем по  $x$ , что для малых  $\beta_{0y}$  и  $\beta_{0x}$  имеет место при  $\varepsilon_y/\beta_{0y} \gg \varepsilon_x/\beta_{0x}$ , увеличение эмиттанса  $\varepsilon_y$  в финальной линзе, определяемое вторым членом в правой части (1), находится (в приближенном согласии с [1]) как

$$\Delta \varepsilon_y = \frac{22}{9\pi \sqrt{3}} \frac{\alpha \hbar^2 c^2 \gamma^7}{\beta_{0y}^2} \varepsilon_y^{5/2} F^*, \quad (9)$$

где  $F^*$  для одиночного квадруполя определяется выражением, аналогичным стоящему в фигурных скобках в (3), но с заменой  $\text{sh } \psi + \zeta \text{ ch } \psi$  на  $\sin \psi + \zeta \cos \psi$ . Значение  $F^*$  заметно (в 7 раз) меньше  $F$  при  $\zeta \ll 1$ , но приближается к  $F$  при больших  $\zeta$  (см. рис. 1.).

Четвертьволновая фокусировка только в одном из поперечных направлений, рассмотренная выше в качестве примера, разумеется, не решает всей задачи фокусировки к месту встречи и должна быть дополнена фокусировкой в направлении  $x$ . При этом происходит дальнейшее увеличение прироста эмиттанса, особенно существенное при  $x \gg y$ . Так, дублет квадруполей с одинаковыми градиентами, обеспечивающий четвертьволновую фокусировку по обоим

поперечным направлениям, с фокусирующей по  $y$  финальной секцией, характеризуется в 150 раз большим приростом  $\varepsilon_y$ , чем одиночный квадруполь при том же  $\zeta$  и четвертьволновой фокусировке по  $y$ . Изменение полярности дублета на противоположную уменьшает это соотношение до 20 раз, если условие  $x \gg y$  продолжает выполняться на всей длине фокусировки. Снижение прироста эмиттанса в дублете может быть достигнуто путем уменьшения, во много раз по сравнению с финальной, градиента поля в предшествующей секции, что, однако, приводит к большой длине ее. Так, при различии градиентов в 100 раз прирост эмиттанса  $\varepsilon_y$  в дублете с фокусирующей по  $y$  финальной секцией всего в два раза больше, чем в одиночном квадруполе, но длина предшествующей секции при этом составляет более восьми метров даже при равном 100 Мэ градиенте в финальной секции. При равном 10 отношении градиентов длина секции уменьшается примерно до двух метров, но прирост эмиттанса в семь раз превышает значение для одиночного квадруполя.

В заключение можно сказать, что радиационное приращение эмиттанса пучка в финальной линзе линейного коллайдера тэвного диапазона энергий является существенным фактором, ограничивающим возможность получения сколь угодно малого размера пучков в месте встречи, особенно в случае большого различия в исходных значениях вертикального и горизонтального эмиттансов.

Автор признателен А.Н. Скринскому за интерес к работе и полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Oide K. Phys. Rev. Lett., 1988, v.1, p.1713.
2. Байер В.Н., Катков В.М., Фадин В.С. Излучение релятивистских электронов. — М.: Атомиздат, 1973.

*Т.А. Всеволожская*

**Радиационное приращение  
эммитанса пучка в финальной линзе  
линейного коллайдера**

Ответственный за выпуск С.Г. Попов

Работа поступила 20 марта 1990 г.  
Подписано в печать 28.03.90 г. МН 08481  
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 0,9 печ.л., 0,8 уч.-изд.л.  
Тираж 150 экз. Бесплатно. Заказ № 41

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-  
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и  
отпечатано на ротапринте Института ядерной физики  
СО АН СССР,  
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*