

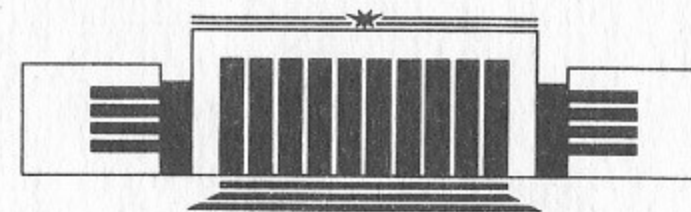


ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

А.В. Александров, Д.В. Пестриков

**УСТОЙЧИВОСТЬ КОГЕРЕНТНЫХ КОЛЕБАНИЙ
ВСТРЕЧНЫХ ПУЧКОВ
В АСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЛАЙДЕРАХ**

ПРЕПРИНТ 90-8



НОВОСИБИРСК

Устойчивость когерентных колебаний
встречных пучков
в асимметричных коллайдерах

А.В. Александров, Д.В. Пестриков

Институт ядерной физики
630090, Новосибирск 90, СССР

АННОТАЦИЯ

В работе изучается устойчивость когерентных колебаний встречных пучков, движущихся в кольцах с отличающимися периметрами. Обсуждаются спектры колебаний, возможности подавления неустойчивостей и ограничения светимости в таких установках.

АБСТРАКТ

In this paper we study specific properties of coherent beam-beam oscillations in asymmetric colliders. The spectra of eigenfrequencies as well as possible ways of damping of unstable modes and limitations of the luminosity are discussed.

1. В последнее время достаточно широко обсуждается создание так называемых *B*-фабрик — установок со встречными e^+e^- -пучками с суммарной энергией диапазона массы Υ -резонанса и светимостью диапазона $10^{33} - 10^{34} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$. По условиям регистрации определенными преимуществами [1] обладают так называемые асимметричные схемы, в которых энергии электронов и позитронов отличаются. В этой связи в ряде проектов [2] обсуждались схемы установок, в которых помимо энергий отличаются и периметры колец. Из-за различия частот обращения в таких случаях отдельный сгусток одного пучка встречается с различными сгустками встречного пучка. Последнее обстоятельство существенным образом влияет на развитие в пучках когерентных колебаний — неустойчивость становится многосгустковой (см., например, [3, 4]). Первоначальное исследование устойчивости когерентных колебаний встречных пучков в несимметричных кольцах было проведено в работе [5]. Однако в связи с тем, что полученные в [5] результаты аналитического и численных расчетов противоречат друг другу, а кроме того, противоречат ранее полученным результатам [4], вопрос требует дополнительного исследования.

В настоящей работе подробно вычисляются спектры дипольных когерентных колебаний встречных пучков в асимметричных кольцах и обсуждаются возможности демпфирования неустойчивостей в установках такой конфигурации.

Схема накопителя изображена на рис. 1. Пучок e^+ , состоящий из q_1 сгустков, и пучок e^- , состоящий из q_2 сгустков, движутся в разных по размеру кольцах в противоположных направлениях.

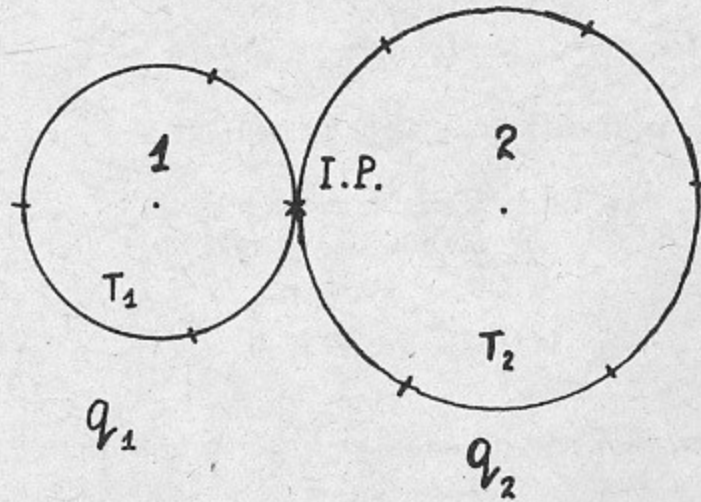


Рис. 1. Схема установки с асимметричными накопительными кольцами.

Отношение периодов обращения в кольцах определяется условием

$$q_2 T_1 = q_1 T_2.$$

Ниже будем использовать следующую нумерацию сгустков: 1, 2, 3, ..., n, ..., q₁ — в первом кольце; 1, 2, 3, ..., m, ..., q₂ — во втором кольце. Взаимодействие сгустков в месте встречи (IP) происходит с частотой $f = q_1/T_1 = q_2/T_2$, при этом взаимодействие определенной пары сгустков (n, m) между собой происходит с периодом $T_s = T_1 q_2 = T_2 q_1$. Назовем T_s суперпериодом.

Для описания эффектов встречи воспользуемся простой моделью жестких сгустков и будем рассматривать взаимодействие в линейном приближении.

2. Проанализируем сначала наиболее простую конфигурацию, когда в кольце малого периметра (1) движется один, а в кольце большого периметра (2) q сгустков. Если z_1 и $z_2^{(a)}$ ($a=1, \dots, q$) соответственно вертикальные смещения центров тяжести сгустков в пучках 1 и 2, а энергии частиц ультрарелятивистские ($\gamma_{1,2} = E_{1,2}/mc^2 \gg 1$), то в линейном приближении развитие когерентных колебаний встречных e^+e^- -пучков описывается уравнениями

$$\ddot{z}_1 + 2\Gamma_1 \dot{z}_1 + \omega_1^2 z_1 = -\frac{4\pi c \xi_1}{\beta} \sum_{a=0}^{q-1} \delta_T \left(t - T_2 \frac{a}{q} \right) [z_1 - z_2^{(a)}],$$

$$\ddot{z}_2^a + 2\Gamma_2 \dot{z}_2^a + \omega_2^2 z_2^a = \frac{4\pi c \xi_2}{\beta} \delta_T \left(t - T_2 \frac{a}{q} \right) [z_1 - z_2^{(a)}]. \quad (2.1)$$

Здесь $T_2 = 2\pi/\omega_0^{(2)}$ — период обращения в кольце 2; $\Gamma_{1,2}$ — декременты радиационного затухания; $\delta_T(t)$ — периодическая δ -функция с периодом T_2 ; β — значения β -функций в месте встречи;

$$\xi_1 = \frac{N_2 r_0 \beta}{4\pi \sigma_1^2 \gamma_1}, \quad \xi_2 = \frac{N_1 r_0 \beta}{4\pi \sigma_2^2 \gamma_2} \quad (2.2)$$

параметры взаимодействия сгустков; $r_0 = e^2/mc^2$, $\omega_{1,2}$ — частоты бетатронных колебаний частиц в кольцах 1, 2, $\omega_{1,2} = \omega_0^{(1,2)} v_{1,2}$. Для простоты предполагаем, что колебания частиц в кольцах можно описывать в приближении сглаженной фокусировки, сгустки имеют круглое сечение радиусов $\sigma_{1,2}$ и содержат, соответственно, $N_{1,2}$ частиц (вычисления, учитывающие модуляцию Флоке, приведены в Приложении). Переходя в (2.1) к независимой переменной $\theta = \omega_0^{(2)} t$, перепишем эти уравнения в виде

$$z_1'' + 2\lambda_1 z_1' + (qv_1)^2 z_1 = -4\pi q v_1 \xi_1 \sum_{a=0}^{q-1} \delta_T \left(\theta - \frac{2\pi a}{q} \right) [z_1 - z_2^{(a)}],$$

$$z_2^{(a)''} + 2\lambda_2 z_2^{(a)'} + v_2^2 z_2^{(a)} = 4\pi v_2 \xi_2 \delta_T \left(\theta - \frac{2\pi a}{q} \right) [z_1 - z_2^{(a)}], \quad (2.3)$$

$$\lambda_1 = \Gamma_1/\omega_0^{(2)}; \quad \lambda_2 = \Gamma_2/\omega_0^{(2)}.$$

Учитывая, что имеет место разложение

$$\delta_T(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \exp(-in\theta),$$

решения системы (2.3) ищем в виде

$$z_{1,2}(\theta) = e^{-iv\theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_{1,2}(n) e^{-in\theta}. \quad (2.4)$$

Тогда из (2.3) для амплитуд $z_{1,2}(n)$ получим

$$z_2^{(a)}(n) = \frac{2v_2 \xi_2}{v_2^2 - (v+n+i\lambda_2)^2} \exp\left(\frac{2\pi i a n}{q}\right) b_a,$$

$$z_1(n) = -\frac{2q v_1 \xi_1}{(qv_1)^2 - (v+n+i\lambda_1)^2} \sum_{a=0}^{q-1} \exp\left(\frac{2\pi i a n}{q}\right) b_a, \quad (2.5)$$

где

$$b_a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{2\pi i a n}{q}\right) [z_1(n) - z_2^{(a)}(n)]. \quad (2.6)$$

Из (2.5) получим систему уравнений для величин b_a :

$$\left\{ 1 + 2v_2 \xi_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{v_2^2 - (v+n+i\lambda_2)^2} \right\} b_a = \\ = -2q v_1 \xi_1 \sum_{a'=0}^{q-1} b_{a'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{2\pi i n}{q}(a-a')\right)}{(qv_1)^2 - (v+n+i\lambda_1)^2}. \quad (2.7)$$

Разбивая в последней сумме суммирование по n согласно

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^q \alpha_{lq+p} \quad (2.8)$$

и учитывая соотношение

$$\sum_{a=0}^{q-1} \exp\left(\frac{2\pi i a}{q}(p-p')\right) = q \delta_{p,p'},$$

находим собственные векторы задачи:

$$\chi_p = \sum_{a=0}^{q-1} b_a \exp\left(\frac{2\pi i p a}{q}\right), \quad p=0, \dots, q-1 \quad (2.9)$$

и дисперсионное уравнение для определения собственных частот:

$$1 + \xi_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2v_2}{v_2^2 - (v+n+i\lambda_2)^2} + \xi_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2q^2 v_1}{(qv_1)^2 - (v+nq+p+i\lambda_1)^2} = 0. \quad (2.10)$$

Как известно (см., например, [3, 4]), такие решения вообще характерны для задач об устойчивости многосгустковых пучков. Величина p определяет продольное волновое число собственного решения. Отметим также, что с использованием формулы суммиро-

вания

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x+n} = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2} = \pi \operatorname{ctg} \pi x,$$

уравнение (2.10) можно переписать в виде

$$1 + 4\pi \xi_1 \frac{\zeta_1 \sin \mu_1}{1 - 2\zeta_1 \cos \mu_1 + \zeta_1^2} + 4\pi \xi_2 \frac{\zeta_2^q \sin \mu_2}{1 - 2\zeta_2^q \cos \mu_2 + \zeta_2^{2q}} = 0, \quad (2.11)$$

$$\zeta_1 = \zeta \exp\left[-\frac{2\pi i}{q}(p+i\lambda_1)\right], \quad \zeta_2 = \zeta \exp\left(-\frac{2\pi \lambda_2}{q}\right),$$

$$\zeta = \exp\left(-\frac{2\pi i v}{q}\right), \quad \mu_{1,2} = 2\pi v_{1,2}.$$

В частности, для столкновений двух одинаковых пучков ($q=1$, $p=0$, $\lambda_{1,2} \rightarrow 0$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, $\mu = 2\pi v$) (2.11) переходит в хорошо известное уравнение [6]:

$$\cos \mu = \cos \mu_0 - 4\pi \xi \sin \mu_0. \quad (2.12)$$

Как видно из (2.10), взаимодействие пучков оказывает существенное влияние на их когерентные колебания при приближении v_1 и v_2 к некоторым резонансным значениям. Рассмотрим сначала случай суммового резонанса

$$qv_1 + v_2 = n, \quad (2.13)$$

специфичный для данной задачи. Вводя расстройку $\Delta = = qv_1 + v_2 - n$ и учитывая в (2.10) лишь резонансные слагаемые, перепишем это уравнение в виде

$$1 = \frac{\xi_2}{x - \frac{\Delta}{2} + i\lambda_2} - \frac{q\xi_1}{x + \frac{\Delta}{2} + i\lambda_1}, \quad (2.14)$$

$$x = \Delta v + \frac{\Delta}{2}, \quad \Delta v = v - v_2.$$

Изучим сначала решения (2.14) в пренебрежении охлаждением пучков ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$). При этом корни (2.14) определяются выражением

$$x_{1,2} = -\frac{\xi_-}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\Delta + \xi_+)^2 - (\xi_+^2 - \xi_-^2)}, \quad (2.15)$$

$$\xi_{\pm} = q\xi_1 \pm \xi_2.$$

Отсюда следует, что колебания станут неустойчивыми, если истинная расстройка $\Delta + \xi_+ = q(\nu_1 + \xi_1) + \nu_2 + \xi_2 - n$ оказывается в диапазоне

$$-2\sqrt{q\xi_1\xi_2} \leq \Delta + \xi_+ \leq 2\sqrt{q\xi_1\xi_2}. \quad (2.16)$$

С учетом того, что n в (2.13) является комбинацией вида $n = lq + p$ ($p = 1, 2, \dots, q$), условие (2.16) определяет в плоскости (ν_1, ν_2) q запрещенных полос:

$$l + \frac{p - 2\sqrt{q\xi_1\xi_2}}{q} \leq \bar{\nu}_1 + \frac{\bar{\nu}_2}{q} \leq l + \frac{p + 2\sqrt{q\xi_1\xi_2}}{q}, \quad (2.17)$$

$$\bar{\nu}_{1,2} = \nu_{1,2} + \xi_{1,2},$$

или

$$l + \frac{p - (\sqrt{q\xi_1} + \sqrt{\xi_2})^2}{q} \leq \nu_1 + \frac{\nu_2}{q} \leq l + \frac{p - (\sqrt{q\xi_1} - \sqrt{\xi_2})^2}{q}. \quad (2.18)$$

В целом, положение запрещенных полос (2.16), (2.17) (см. рис. 2) характерно для неустойчивостей когерентных колебаний встречных пучков с отличающимися частотами [4]. Отметим еще, что ширины полос (2.16), а также величина максимального инкремента неустойчивости

$$\delta_{\max} = (-\text{Im } \Delta\nu)_{\max} = \sqrt{q\xi_1\xi_2} \quad (2.19)$$

растут как \sqrt{q} с увеличением числа сгустков в большем кольце. Поскольку расстояние между соседними полосами равно $1 - 4\sqrt{q\xi_1\xi_2}$, можно ожидать начала их перекрытия при

$$q \simeq q_{\max} = \frac{1}{16\xi_1\xi_2}, \quad (2.20)$$

что оценивает допустимое число сгустков в большем кольце. Так, при $\xi_1 = \xi_2 = 0.05$, $q_{\max} = 25$. В этих условиях задание допустимой ширины запрещенных полос $4\sqrt{q\xi_1\xi_2} \leq \Delta_0$ ограничивает светимость установки

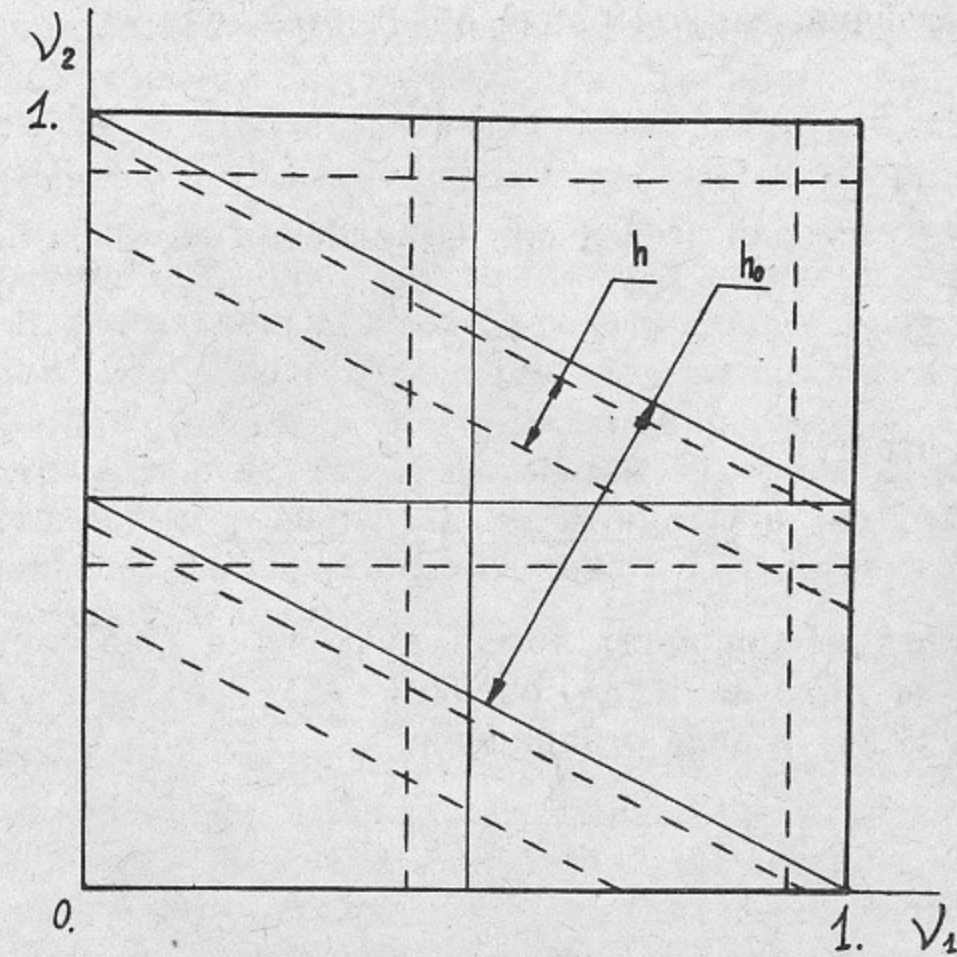


Рис. 2. Резонансные полосы когерентных дипольных поперечных колебаний, определяемые (2.18):

h — ширина запрещенной полосы, h_0 — расстояние между полосами.

$$\mathcal{L} = qf_0 \frac{N_1 N_2}{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}, \quad f_0 = \frac{\omega_0^{(2)}}{2\pi},$$

величиной

$$\mathcal{L} < \Delta_0^2 \frac{f_0 \gamma_1 \gamma_2}{r_0^2 \beta^2} \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}. \quad (2.21)$$

Обсудим возможность стабилизации описанной неустойчивости радиационным трением. Для этого случая из (2.14) получим декременты

$$-\text{Im}(\Delta\nu) = \delta = \frac{\Lambda_+}{2} \pm \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\sqrt{X^2 + Y^2} - X \right] \right\}^{1/2}, \quad (2.22)$$

$$X = (\Delta + \xi_+)^2 - 4q\xi_1\xi_2 - \Lambda_-^2, \quad Y = 2\Lambda_-(\Delta + \xi_+), \quad \Lambda_{\pm} = \lambda_1 - \lambda_2.$$

Условие устойчивости колебаний $\delta > 0$ имеет вид

$$(\Delta + \xi_+)^2 > \Lambda_+^2 \left(\frac{q\xi_1\xi_2}{\lambda_1\lambda_2} - 1 \right). \quad (2.23)$$

Оно выполняется для всех Δ при выполнении неравенства

$$q\xi_1\xi_2 \leq \lambda_1\lambda_2 = \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{(\omega_0^{(2)})^2}. \quad (2.24)$$

Учитывая, что [7]

$$\Gamma_1 \simeq \frac{P_1}{2N_1E_1}, \quad \Gamma_2 \simeq \frac{P_2}{2qN_2E_2},$$

где $P_{1,2}$ — средние мощности потерь пучков 1 и 2 на синхротронное излучение, и полагая (для оценки) $N_1\xi_1 = N_2\xi_2$, $P_1/E_1 \simeq P_2/E_2$, перепишем (2.24) в виде ограничения:

$$\mathcal{L} < \frac{\pi P}{r_0\beta m_0 c^2},$$

или

$$\mathcal{L} [\text{см}^{-2}\text{с}^{-1}] < 1.4 \cdot 10^{32} \frac{P(\text{МВт})}{\beta(\text{см})}. \quad (2.25)$$

Как видно из уравнения (2.10), помимо суммового резонанса (2.13) могут оказаться опасными резонансы

$$2\nu_2 = n, \quad 2\nu_1 = n. \quad (2.26)$$

Соответствующие собственные частоты равны:

$$\nu = \pm \sqrt{\Delta^2 + 2\xi_2\Delta}, \quad \Delta = \nu_2 - n/2, \quad (2.27)$$

$$\nu + p = \pm q\sqrt{\Delta^2 + 2\xi_1\Delta}, \quad \Delta = \nu_1 - n/2. \quad (2.28)$$

Требование устойчивости колебаний определяет положение запрещенных полос на диаграмме частот

$$-2\xi_2 \leq \Delta \leq 0, \quad -2\xi_1 \leq \Delta \leq 0.$$

Поскольку, однако, ширины и положение этих полос совпадают с ширинами и положением запрещенных полос для движения одной частицы, справедливость модели в этой области параметров нарушается, а анализ устойчивости когерентных колебаний требует

применения других методов. Вместе с тем следует отметить, что наряду с собственными частотами традиционного вида (2.27) появляются моды с большими величинами когерентных сдвигов (2.28). Демпфирование таких мод затуханием Ландау может быть затруднено.

Перечисленные источники неустойчивости когерентных колебаний в асимметричных кольцах вообще совпадают с найденными в работе [5] численным моделированием. Аналитические же оценки спектров в данной работе и в [5] вообще различны. Так, собственные частоты, определяемые формулой (4) работы [5], соответствуют устойчивым колебанием (величина Q в (4) работы [5] строго положительна). По-видимому, такой результат этой части работы [5] связан с недоразумением.

Более существенно различие параметров взаимодействия когерентных колебаний в данной работе и в [5]. Параметры взаимодействия работы [5] предполагают усреднение уравнений движения до их линеаризации и неявно учитывают нелинейные слагаемые (см., например, [8]). Параметры взаимодействия, использованные в данной работе, совпадают с теми, что появляются в расчете, основанном на уравнениях Власова [4]. Как представляется, такой способ является более последовательным при проведении вычислений в линейном приближении.

В заключение этого раздела отметим, что, в соответствии с общими результатами [4], неустойчивыми, кроме дипольных, могут оказаться мультипольные колебания вблизи резонанса связи

$$qm_1\nu_1 + m_2\nu_2 = n. \quad (2.29)$$

С увеличением номеров мультипольности ширины запрещенных полос вблизи этих резонансов убывают лишь степенным образом. Это обстоятельство может особенно затруднить выбор рабочей точки асимметричных колец, и его безусловно следует учитывать при разработке систем подавления в них когерентных колебаний.

3. В приведенном выше аналитическом расчете рассмотрен случай, когда число частиц в первом кольце $q_1 = 1$. Кроме того, отбрасывание нерезонансных членов при исследовании корней дисперсионного уравнения (2.10) не приводит к заметной ошибке в определении ширины полос неустойчивости лишь при малой расстройке от резонанса, т. е. при малом ξ . Для более подробного исследования области устойчивости во всей рабочей клетке при произвольных ξ_1, ξ_2, q_1, q_2 было проведено численное моделирование.

Будем задавать положение n -го сгустка с помощью вектора $V_i^{(n)} = \begin{pmatrix} X_i^{(n)} \\ Y_i^{(n)} \end{pmatrix}$:

$$X_i^{(n)} = \frac{z_i^{(n)}}{\sqrt{\beta}}, \quad Y_i^{(n)} = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} z_i^{(n)} + \sqrt{\beta} z_i^{(n)}.$$

Здесь i — номер кольца. В этих переменных матрица перехода для одного оборота имеет наиболее простой вид:

$$M_{1,2} = \begin{pmatrix} \cos \mu_{1,2} & \sin \mu_{1,2} \\ -\sin \mu_{1,2} & \cos \mu_{1,2} \end{pmatrix}, \quad \mu = 2\pi\nu.$$

Взаимодействие со встречным сгустком описывается выражением

$$V_1 = M_I V_1 - M_I V_2, \quad M_I = \begin{pmatrix} 1; & 0 \\ -4\pi\xi_1; & 1 \end{pmatrix}, \quad M_I = \begin{pmatrix} 0; & 0 \\ -4\pi\xi_2; & 0 \end{pmatrix}.$$

Положение всех сгустков после каждого оборота вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} V_{1(p+1)}^{(n)} &= M_1 (M_I V_{1(p)}^{(n)} - M_I V_{2(p)}^{(m)}), \\ V_{2(p+1)}^{(m)} &= M_2 (M_I V_{2(p)}^{(m)} - M_I V_{1(p)}^{(n)}), \end{aligned}$$

где p — номер оборота; n пробегает периодическую последовательность $(1, 2, 3, \dots, q_1)$; m пробегает периодическую последовательность $(1, 2, 3, \dots, q_2)$. Если после заданного числа оборотов $|V|^2 = X^2 + Y^2$ меньше заданного числа R , то движение считается устойчивым. Программа осуществляет автоматическое сканирование рабочей клетки в пределах $\nu_1 \in [0, 1]$, $\nu_2 \in [0, 1]$.

Результаты для некоторых значений q_1, q_2 приведены на рис. 3. Ясно видны внешний и параметрический резонансы для каждого пучка, а также суммовые резонансы связи, определяемые условием

$$q_2\nu_1 + q_1\nu_2 \leq l.$$

Это условие является обобщением (2.13) для произвольных q_1, q_2 .

На рис. 4 приведена зависимость ширины резонансных полос h от ξ для разных q_1, q_2 . При $q_2 = 1$ наблюдается линейный рост h в согласии с (2.16) до половины расстояния между соседними полосами. Дальше наблюдается более быстрый рост, вызванный влиянием соседнего резонанса. Это означает, что максимально допустимое число сгустков примерно вдвое меньше полученного из (2.20),

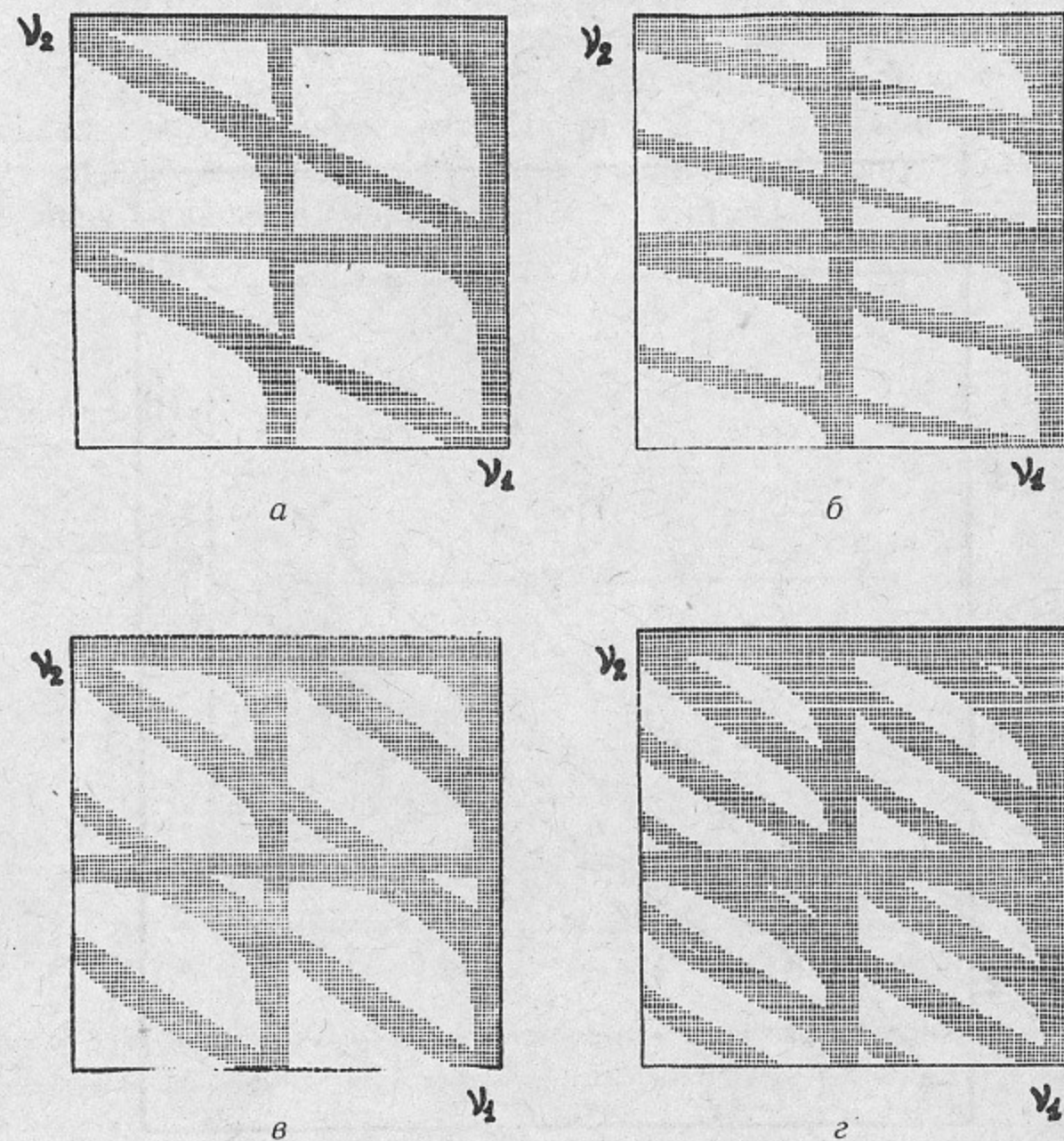


Рис. 3. Результаты численного моделирования для разных чисел сгустков. Области неустойчивости заштрихованы:

а: $q_1 = 2, q_2 = 1, \xi_1 = \xi_2 = 0.03$; б: $q_1 = 4, q_2 = 1, \xi_1 = \xi_2 = 0.03$;
в: $q_1 = 3, q_2 = 1, \xi_1 = \xi_2 = 0.03$; г: $q_1 = 5, q_2 = 3, \xi_1 = \xi_2 = 0.03$.

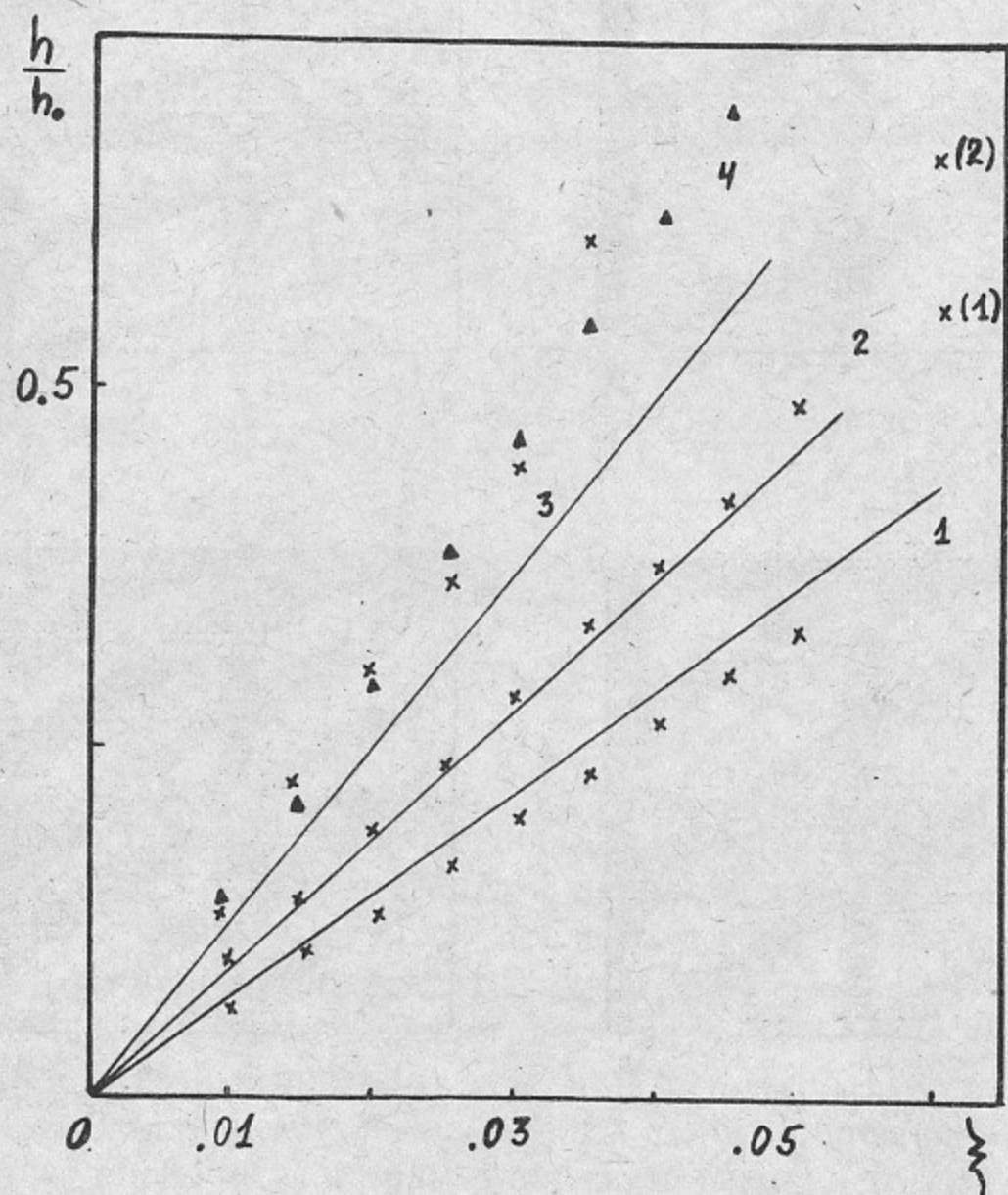


Рис. 4. Зависимость ширины полосы неустойчивости от параметра ξ для разных чисел сгустков:

\times , \blacktriangle — результат численного моделирования, сплошная линия — теоретическая зависимость (2.18). 1: $q_1=3, q_2=1$; 2: $q_1=5, q_2=1$; 3: $q_1=10, q_2=1$; 4: $q_1=5, q_2=3$.

т. е. при $\xi=0.05$ $q_{\max} \approx 15$. Результаты счета показывают, что эта оценка остается верной и для произвольного соотношения q_1, q_2 .

Для вычисления инкремента неустойчивости в матрицу перехода вводилось затухание с декрементом λ . Затем λ увеличивалось до исчезновения неустойчивости. Полученное значение λ принималось за искомый инкремент. На рис. 5 представлена зависимость инкремента от параметра ξ при различных q_1, q_2 . Наблюдается хорошее согласие с оценкой (2.19) при $q_2=1$.

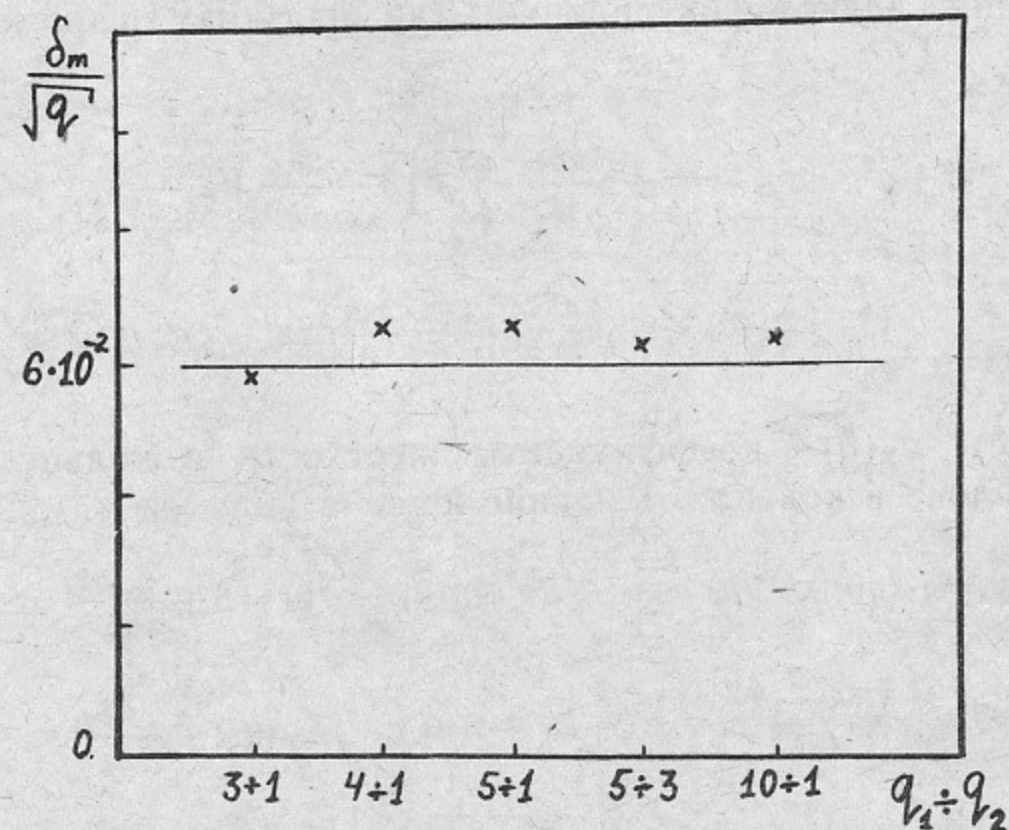


Рис. 5. Зависимость максимального инкремента δ_m от числа сгустков $\xi_1 = \xi_2 = 0.06$: \times — результат численного моделирования, сплошная линия — теоретическая зависимость (2.19).

4. Полученные результаты определенно указывают на трудности получения больших значений светимости в установках с накопительными кольцами с большим отличием периметров. Основная трудность состоит в появлении на диаграмме частот ν_1, ν_2 зон неустойчивости общим числом $q_1 + q_2$. При увеличении чисел сгустков в кольцах зоны неустойчивости сближаются, что ограничивает достижимое значение светимости установки. Инкременты неустойчивости зависят от положения рабочей точки и, вообще, велики. Трудно ожидать, что описанная неустойчивость может быть подавлена сколько-нибудь разумной системой обратной связи. Это утверждение усиливается необходимостью подавления не

только дипольных, но хотя бы нескольких первых мультипольных мод.

Авторы благодарны Н.С. Диканскому, В.А. Лебедеву, А.Н. Скринскому за многочисленные полезные обсуждения.

Приложение

Перепишем уравнение движения сгустка (2.3), не используя приближения гладкой фокусировки. Для простоты трением пренебрегаем:

$$z_1' + q^2 g_1(q\theta) z_1 = -\frac{4\pi q \xi_1}{f_1^2} \sum_{a=0}^{q-1} \delta\left(\theta - \frac{2\pi a}{q}\right) (z_1 - z_2^a),$$

$$z_2^{a'} + g_2(\theta) z_2^a = \frac{4\pi \xi_2}{f_2^2} \delta\left(\theta - \frac{2\pi a}{q}\right) (z_1 - z_2^a). \quad (\text{П.1})$$

Здесь $g_1(\theta)$, $g_2(\theta)$ — коэффициенты жесткости в кольцах, $f_{1,2}$ — функции Флоке в кольцах. Решение ищем в виде

$$z_1 = f_1(q\theta) \sum_n z_1(n) \exp(-i(v+n)\hat{\theta}_1), \quad \hat{\theta}_1 = \theta + \frac{\chi_1(q\theta)}{qv_1},$$

$$z_2^a = f_2(\theta) \sum_n z_2^a(n) \exp(-i(v+n)\hat{\theta}_2), \quad \hat{\theta}_2 = \theta + \frac{\chi_2(\theta)}{v_2}. \quad (\text{П.2})$$

Подставляя (П.2) в (П.1) и используя условия

$$\chi_1'(q\theta) = \frac{q}{f_1^2(q\theta)} - qv_1, \quad f_1' + g_1 f_1 = \frac{1}{f_1^3},$$

$$\chi_2'(\theta) = \frac{1}{f_2^2} - v_2, \quad f_2' + g_2 f_2 = \frac{1}{f_2^3},$$

получим

$$\sum_n z_1(n) \cdot \exp[-in\hat{\theta}_1] \frac{(qv_1)^2 - (v+n)^2}{v_1^2 f_1^3} =$$

$$= -\frac{4\pi q \xi_1}{f_1^2} \sum_{a=0}^{q-1} \sum_n (f_1 z_1(n) \exp[-in\hat{\theta}_1] - f_2 z_2^a(n)) \times$$

$$\times \exp[-in\hat{\theta}_2] \exp[-iv(\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1)] \delta\left(\theta - \frac{2\pi a}{q}\right), \quad (\text{П.3})$$

$$\sum_n z_2^a(n) \exp[-in\hat{\theta}_2] \frac{v_2^2 - (v+n)^2}{v_2^2 f_2^3} =$$

$$= \frac{4\pi \xi_2}{f_2^2} \sum_n (f_1 z_1(n) \exp[-in\hat{\theta}_1] \exp[-iv(\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1)] -$$

$$- f_2 z_2^a(n) \exp[-in\hat{\theta}_2]) \delta\left(\theta - \frac{2\pi a}{q}\right).$$

Выделив в (П.3) гармоники $z_1(n)$, $z_2^a(n)$ с помощью

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{v_1 f_1^2} \exp[-i(n-n')\hat{\theta}_1] = \int_0^{2\pi} d\hat{\theta}_1 \exp[-i(n-n')\hat{\theta}_1] = 2\pi \delta_{nn'},$$

получим

$$z_1(n) = -\frac{2q \xi_1 v_1}{(qv_1)^2 - (v+n)^2} \sum_{a=0}^{q-1} \sum_{n'} \left(z_1(n') \exp\left[i(n-n') \frac{2\pi a}{q}\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{f_2}{f_1} z_2^a(n') \exp\left[i(n-n') \frac{2\pi a}{q}\right] \exp\left[-\frac{i(n'+v)}{v_2} \chi_2^a\right] \right), \quad (\text{П.4})$$

$$z_2^a(n) = \frac{2\xi_2 v_2}{v_2^2 - (v+n)^2} \frac{f_1}{f_2} \times$$

$$\times \sum_{n'} \left(z_1(n') - \frac{f_2}{f_1} z_2^a(n') \exp\left[-\frac{i(n'+v)}{v_2} \chi_2^a\right] \right) \exp\left[-in' \frac{2\pi a}{q}\right].$$

Здесь $\chi_2^a = \chi_2\left(\frac{2\pi a}{q}\right)$. Для величины

$$b_a = \sum_{n'} \left(z_1(n') - \frac{f_2}{f_1} z_2^a(n') \exp\left[-\frac{i(n'+v)}{v_2} \chi_2^a\right] \right) \exp\left[-in' \frac{2\pi a}{q}\right]$$

из (П.4) можно получить уравнение

$$b_a \left(1 + \sum_n \frac{2\xi_2 v_2}{v_2^2 - (v+n)^2} \right) =$$

$$= - \sum_n \frac{2\xi_1 q v_1}{(q v_1)^2 - (v+n)^2} \sum_{a'=0}^{q-1} b_{a'} \exp \left[-i n \frac{(a-a')2\pi}{q} \right].$$

Разбивая в последней сумме суммирование по n согласно (2.8) и учитывая соотношение

$$\sum_{a=0}^{q-1} \exp \left[\frac{2\pi i a}{q} (p-p') \right] = q \delta_{pp'},$$

находим, что собственные векторы задачи совпадают с (2.9):

$$\chi_p = \sum_{a'=0}^{q-1} b_{a'} \exp \left[i \frac{2\pi a' p}{q} \right].$$

Дисперсионное уравнение для собственных частот:

$$1 + q\xi_1 \sum_n \frac{2q v_1}{(q v_1)^2 - (v+p+p q)^2} + \xi_2 \sum_n \frac{2v_2}{v_2^2 - (v+n)^2} = 0,$$

$$p = 0, 1, \dots, q-1,$$

совпадает с (2.10).

ЛИТЕРАТУРА

1. Блинов А.Е., Чилингаров А.Г., Эйдельман С.И. Физические эксперименты на В-фабриках. — Препринт ИЯФ СО АН СССР 88-123. Новосибирск, 1988, 41 с.
2. Proc of the 5-th Meeting of the Southern California BB Factory Consortium. UCSD March 24, 1989.
3. Pellegrini C. Coherent Instabilities in Electron-Positron Storage Rings. — Physics with Intersecting Storage Rings. New York, Acad. Press, 1971, p.221—243.
4. Диканский Н.С., Пестриков Д.В. Физика интенсивных пучков в накопителях. — Новосибирск: Наука, 1989, 333 с.
5. Hirata K., Keil E. Coherent Beam-Beam Interaction Limit in Asymmetric Ring Colliders. — CERN/LEP-TH/89-54, Geneva 1989, 7 p.
6. Piwinski A. Proc of the 8-th Intern. Conf. on High. Energy Accel. CERN, 1971, p.357.
7. Коломенский А.А., Лебедев А.Н. Теория циклических ускорителей. — М.: Физматгиз, 1962, 352 с.
8. Dikansky N., Pestrikov D. Collective Beam-Beam Phenomena. — Proc of the 3d ICFA Beam Dynamics Workshop «Beam-Beam effects in circular colliders». Novosibirsk, 29 May—3 June, 1989.

А.В. Александров, Д.В. Пестриков

Устойчивость когерентных колебаний встречных пучков в асимметричных коллайдерах

Ответственный за выпуск С.Г. Попов

Работа поступила 21 декабря 1989 г.
Подписано в печать 15.01 1990 г. МН 08047
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1,5 печ.л., 1,2 уч.-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ № 8

Набрано в автоматизированной системе на базе фото-
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и
отпечатано на ротапринтере Института ядерной физики
СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.