

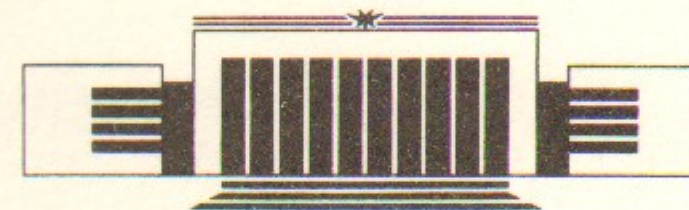


ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

И.М. Ланский, Г.В. Ступаков

**НЕЛИНЕЙНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ
ЖЕЛОБКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ
СИЛЬНЫМ ЭФФЕКТОМ КЛР
И ПРОВОДЯЩЕЙ СТЕНКОЙ**

ПРЕПРИНТ 89-145



НОВОСИБИРСК

Нелинейная стабилизация
желобковой неустойчивости
сильным эффектом КЛР и проводящей стенкой

И.М. Ланский, Г.В. Ступаков

Институт ядерной физики
630090, Новосибирск 90, СССР

АННОТАЦИЯ

Исследуется влияние проводящей границы на желобковую неустойчивость плазменного шнура в магнитном поле с учетом сильного эффекта конечного ларморовского радиуса (КЛР) ионов. Предполагается $\beta \ll 1$. Рассматривается эволюция моды $m=1$, соответствующей смещению шнура как целого. Получен критерий устойчивости в линейном приближении для широкого класса радиальных профилей давления. Описана стабилизация неустойчивости на нелинейной стадии ее развития в условиях слабой надкритичности. Показано, что стабилизирующее влияние границы связано с появлением гироскопической силы, действующей на шнур.

1. ВВЕДЕНИЕ

Эффекты конечного ларморовского радиуса ионов (КЛР), как известно, оказывают стабилизирующее влияние на желобковую неустойчивость в параксиальных магнитных ловушках [1]. Исследованию механизма стабилизации посвящено множество работ (см. [2, 3] и цитированную там литературу), большинство которых ограничено рамками линейного приближения. Цель настоящей статьи заключается в анализе нелинейной стадии желобковой неустойчивости в условиях сильного эффекта КЛР. Ранее в работе [4] мы рассмотрели задачу о нелинейном движении плазмы в пренебрежении влиянием ограничивающей ее боковой поверхности. В настоящей работе дано описание движения неустойчивого плазменного шнура, находящегося внутри проводящего кожуха.

Под сильным эффектом КЛР мы подразумеваем ситуацию, когда выполнено неравенство

$$(\rho_m/a)^2 \gg \kappa a, \quad (1)$$

где ρ_m — ларморовский радиус ионов; κ — кривизна силовых линий; a — характерный радиус плазмы. В этом случае стабилизируются все желобковые возмущения за исключением основной моды с азимутальным числом $m=1$, соответствующей смещению плазмы как целого.

Суть явлений, о которых пойдет речь ниже, заключается в следующем. Проводящая стенка, окружающая плазменный шнур, не позволяет плазме смещаться как целому. Однако, если радиус

стенки R велик, $R \gg a$, и выполнено условие (1), то при смещении шнура перетекание плазмы происходит в узком пристеночном слое, толщина Δ которого мала по сравнению с R , $\Delta \ll R$, тогда как вне этого слоя плазма по-прежнему смещается как целое. В линейном приближении деформация плазмы в слое является фактором, вносящим стабилизирующий вклад, который при определенных условиях может привести к полной стабилизации моды $m=1$. В случае, когда в линейном приближении плазма все же неустойчива, наличие пристеночного слоя, как оказывается, приводит на нелинейной стадии к насыщению неустойчивости и ограничению ее амплитуды на некотором уровне. Отметим, что экспериментальное наблюдение стабилизации моды $m=1$ отчетливо наблюдалось на амбиполярной ловушке TARA [5].

Формальным малым параметром нашей задачи является отношение

$$\varepsilon = \gamma_{\text{ж}} / \omega_*, \quad (2)$$

где $\gamma_{\text{ж}} \sim \sqrt{g/a}$ — характерный инкремент желобковой неустойчивости ($g \sim v_{Ti}^2 \kappa$ — эффективная сила тяжести, действующая на ионы вследствие кривизны силовых линий), а $\omega_* \sim cT/ea^2B$ — диамагнитная частота (T — температура плазмы, B — индукция магнитного поля). Легко видеть, что $\varepsilon \ll 1$ в силу неравенства (1).

Наш анализ основан на системе уравнений, полученных Ньюкомбом в работах [6, 7]. Эти уравнения и геометрия задачи сформулированы в разделе 2.

Третий раздел работы посвящен исследованию линейной устойчивости моды $m=1$. В отличие от большинства работ на эту тему, авторы которых ограничиваются рассмотрением гауссовского радиального профиля плотности, мы выводим критерий устойчивости (в пределе $\varepsilon \ll 1$), справедливый для широкого класса радиальных профилей.

Относительно просто нелинейную эволюцию шнура удастся описать в приближении слабой нелинейности, которое выполняется вблизи порога неустойчивости. При этом можно воспользоваться разложениями искомых величин в ряд теории возмущений по амплитуде колебаний. Соответствующие вычисления проведены в разделе 4. С помощью выведенного там уравнения проанализировано движение шнура и показано, что на нелинейной стадии неустойчивость стабилизируется.

В последнем, пятом, разделе перечислены основные результаты работы.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Мы будем рассматривать плазму малого давления ($\beta \ll 1$), находящуюся в однородном магнитном поле, направленном вдоль оси z . Предположим, что течение плазмы происходит в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, так что все величины, входящие в задачу, зависят только от координат x и y . Уравнения, описывающие медленное дрейфовое движение плазмы при учете эффектов КЛР были сформулированы Ньюкомбом в работах [6, 7]:

$$\operatorname{div} \left\{ \rho \frac{d}{dt} [\vec{v}, \vec{e}_z] + \frac{1}{2} ([\nabla M, \vec{e}_z] \cdot \nabla) [\vec{v}, \vec{e}_z] - \rho [\vec{g}, \vec{e}_z] \right\} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \quad \frac{dM}{dt} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

где $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$, ρ — плотность, \vec{v} — скорость течения плазмы.

Величина M представляет собой плотность внутреннего момента импульса, связанного с ларморовским вращением ионов:

$$M = -ct_i p_{\perp i} / e_i B,$$

где m_i , e_i — масса и заряд ионов; $p_{\perp i}$ — их поперечная составляющая давления. Скорость \vec{v} является скоростью электрического дрейфа:

$$\vec{v} = [\nabla \psi, \vec{e}_z], \quad (4)$$

где функция ψ связана с потенциалом ϕ соотношением: $\psi = -c\phi/B$. Заметим, что использование (4) автоматически удовлетворяет уравнению $\operatorname{div} \vec{v} = 0$.

Система уравнений (3) обладает рядом интегралов движения, которые мы здесь не выписываем (см. [6, 7]).

Рассмотрим плазменный шнур с характерным радиусом a , находящийся в состоянии покоя ($\vec{v} = 0$) и окруженный проводящим кожухом радиуса R . Будем предполагать, что в равновесном состоянии шнур обладает аксиальной симметрией,

$$M = M_0(r), \quad \rho = \rho_0(r), \quad r \leq R,$$

причем плазма простирается вплоть до кожуха, находясь с ним в непосредственном контакте. Анализ устойчивости шнура (в том

числе и нелинейной) проводится на основе системы уравнений (3), дополненной граничным условием

$$\psi|_{r=R}=0, \quad (5)$$

означающим постоянство потенциала на проводящем кожухе.

Отметим, что из второго и третьего уравнений системы (3) совместно с условием (5) следует, что значения величин ρ и M на границе не меняются со временем, оставаясь равными своим начальным значениям.

3. ЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Линеаризуем систему уравнений (3), обозначив через ρ_1 , M_1 и ψ_1 малые возмущения соответствующих величин (напомним, что в начальный момент, когда шнур покоится, невозмущенный потенциал $\psi_0=0$)

$$\operatorname{div} \left\{ \rho_0 \frac{\partial \nabla \psi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} (|\nabla M_0, \vec{e}_z| \cdot \nabla) \nabla \psi_1 + \rho_1 [\vec{g}, \vec{e}_z] \right\} = 0, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + |\nabla \psi_1, \vec{e}_z| \cdot \nabla \rho_0 = 0, \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial t} + |\nabla \psi_1, \vec{e}_z| \cdot \nabla M_0 = 0. \quad (6.3)$$

В дальнейшем для удобства записи левую часть системы (6) будем представлять в виде дифференциального оператора \hat{H} , действующего на столбец переменных $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \rho_1 \\ M_1 \end{pmatrix}$, то есть

$$\hat{H} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \rho_1 \\ M_1 \end{pmatrix} = 0. \quad (7)$$

Известно, что в отсутствие кожуха ($R \rightarrow \infty$) при учете сильных эффектов КЛР ионов [1] единственно неустойчивой модой является мода $m=1$ ($\psi_1 \sim e^{im\theta}$), соответствующая смещению шнура как целого, в которой потенциал ψ_1 линейно зависит от радиуса:

$$\psi_1 = \omega(t) r e^{i\theta}, \quad (8)$$

где $\omega(t)$ — комплексная амплитуда, определяющая, согласно (4), скорость шнура $\vec{V}(t)$:

$$\vec{V}(t) = -\vec{e}_x \operatorname{Im} \omega(t) - \vec{e}_y \operatorname{Re} \omega(t).$$

В случае, когда проводящая граница существует, но находится на большом расстоянии, потенциал по-прежнему имеет радиальную зависимость (8) всюду за исключением тонкого пристеночного слоя, в котором он спадает до нуля. Найдем вид потенциала в этом слое.

Большая величина эффектов КЛР означает, что главным в уравнении (6.1) является второе слагаемое. Оценка параметра ϵ , при котором справедливо это утверждение (и анализ случая, когда оно нарушается), приведены в Приложении 1. Удерживая в (6.1) лишь этот главный член, получим

$$\operatorname{div} \{ (|\nabla M_0, \vec{e}_z|) \cdot \nabla \psi_1 \} = 0. \quad (9)$$

Для моды $m=1$ это уравнение принимает вид

$$\eta'' M_0' + \eta' M_0'' - \eta \frac{M_0''}{r} = 0. \quad (10)$$

Штрих здесь и далее означает дифференцирование по радиусу, а функция $\eta(r, t)$ определяется соотношением

$$\psi_1 = \eta e^{i\theta}.$$

Пусть Δ — характерный размер пристеночного слоя. Внутри слоя $|\eta'| \sim |\eta|/\Delta$, $|\eta|/r \sim |\eta|/R$, и, в силу условия $\Delta \ll R$, последним слагаемым в (10) можно пренебречь. Интегрируя получившееся уравнение с учетом граничного условия $\eta(R)=0$, получим

$$\eta = A(t) \int_0^{\xi} \frac{ds}{M_0'(R-s)}, \quad (11)$$

где $\xi = R - r$, а $A(t)$ — неопределенная пока произвольная функция.

Для нахождения $A(t)$ заметим, что в области $R \gg \xi \gg \Delta$ решение (11) должно сшиваться с линейным профилем (8). Предполагая, что интеграл (11) быстро сходится, при определении $A(t)$ можно положить в нем верхний предел равным бесконечности:

$$A(t) = \omega(t) R \left[\int_0^{\infty} \frac{ds}{M_0'(R-s)} \right]^{-1}$$

Заметим, что как следует из (11), размер слоя Δ совпадает с характерным масштабом изменения M_0 на границе. Например, в случае гауссовского профиля $M_0 \sim \exp(-r^2/a^2)$:

$$\Delta \sim \left| \frac{M_0(R)}{M_0'|_{r=R}} \right| = \frac{a^2}{R}$$

Разумеется, предполагаемый тонким пристеночный слой, в котором происходит перепад потенциала до нуля, существует не при всяком распределении $M_0(r)$. Так, если при $r \gg a$ $M_0 \sim r^{-k}$, то $\Delta \sim R/k$, и условие $\Delta \ll R$ выполняется только при достаточно большом k .

Получим теперь уравнение движение шнура. Для этого проинтегрируем (6.1) по сечению плазмы, ограниченному стенкой, $0 \leq r \leq R$, с весом $\vec{b} \cdot \vec{r}$, где \vec{b} — произвольный постоянный вектор. Преимущественный вклад в интегралы от первого и третьего слагаемых в (6.1) вносит внутренняя область, $r \sim a$, где сосредоточена основная масса плазмы, а потенциал линейно изменяется с радиусом. Интеграл от второго слагаемого в (6.1) интегрированием по частям сводится к поверхностному. В результате найдем:

$$\mathcal{M} \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_r, \quad (12)$$

где \mathcal{M} — масса шнура; \vec{F} — усредненная сила тяжести, действующая на шнур,

$$\mathcal{M} = \int \rho_0 d^2r, \quad \vec{F} = \int \vec{g} \rho_0 d^2r,$$

а \vec{F}_r представляет собой гироскопическую силу,

$$\vec{F}_r = \alpha [\vec{V}(t), \vec{e}_z],$$

возникающую вследствие взаимодействия шнура с проводящим кожухом. Коэффициент α определяется соотношением

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} R M_0'(R) \left. \frac{1}{\omega} \frac{\partial \eta}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{\pi}{2} R^2 \left[\int_0^{\infty} \frac{ds}{M_0'(R-s)} \right]^{-1} \quad (13)$$

Уравнение (12) является по существу уравнением Ньютона: слева стоит инерционный член, а справа — силы, действующие на шнур. Ранее подобное уравнение (с $\alpha=0$) было получено нами для случая, когда влиянием границы можно пренебречь [4]. Наличие границы приводит к появлению дополнительной силы \vec{F}_r , оказывающей стабилизирующее действие.

Для того, чтобы проиллюстрировать последнее утверждение, рассмотрим случай, когда \vec{g} является линейной функцией радиуса, $\vec{g} = g_0 \vec{r}/a$. Обозначим через $\vec{X}(t)$ смещение шнура, так что $\dot{\vec{X}} = \vec{V}$. Используя осевую симметрию шнура, легко убедиться, что $\vec{F} = g_0 \mathcal{M} \vec{X}/a$ и записать уравнение (12) в следующем виде:

$$\ddot{\vec{X}} = \gamma_*^2 \vec{X} + 2\gamma_1 [\dot{\vec{X}}, \vec{e}_z], \quad (14)$$

$$\gamma_*^2 = g_0/a, \quad \gamma_1 = \frac{\pi}{4} \frac{R^2}{\mathcal{M}} \left[\int_0^{\infty} \frac{ds}{M_0'(R-s)} \right]^{-1}$$

Из решения этого уравнения следует, что неустойчивость стабилизируется, если

$$\gamma_*^2 < \gamma_1^2. \quad (15)$$

Рассмотрим теперь более подробно пример гауссовского профиля, поскольку эти результаты потребуются нам в дальнейшем. Пусть

$$\rho_0 = \rho_* e^{-r^2/a^2}, \quad M_0 = M_* e^{-r^2/a^2} \quad (16)$$

(одинаковые зависимости ρ_0 и M_0 от r означают, что температура плазмы постоянна до самой стенки). В этом случае из (11) следует, что в пристеночном слое

$$\psi_1 = \omega R (1 - e^{-2R^2/a^2}) e^{i\theta}. \quad (17)$$

Комплексная скорость ω в линейном приближении гармонически зависит от времени, $\omega(t) = \omega_0 \exp(-i\omega t)$, где ω_0 — постоянная комплексная амплитуда, а частота ω определяется из уравнения движения (14):

$$\begin{aligned} \omega &= \pm \gamma_1 \pm i\gamma_* \sqrt{1 - \gamma_1^2/\gamma_*^2}, \\ \gamma_1 &= (R/a)^4 \exp(-R^2/a^2) \omega_*. \end{aligned} \quad (18)$$

Критерий устойчивости (15) запишется как

$$\left(\frac{R}{a}\right)^4 e^{-(R/a)^2} > \gamma_{ж}/\omega_*, \quad (19)$$

где $\omega_* = |M_*|/\rho_* a^2$. Отсюда можно найти зависимость радиуса кожуха $R_{\text{крит}}$, при котором происходит стабилизация, от параметра $\varepsilon = \gamma_{ж}/\omega_*$, определяющего эффект КЛР:

$$\left(\frac{R_{\text{крит}}}{a}\right)^2 \sim \ln \frac{1}{\varepsilon}.$$

Заметим, что при малых ε величина плотности вблизи стенки, необходимая для стабилизации неустойчивости, мала и примерно пропорциональна ε . Это обстоятельство отмечалось в работе [8].

Рассмотрим теперь ситуацию, когда порог неустойчивости слегка превышен, т. е. $\omega = \pm \gamma_{ж} \pm i\Gamma$, где $\Gamma \ll \gamma_{ж}$. Оставляя в общем решении уравнения (14) только экспоненциально растущие члены, найдем

$$\bar{X} = A e^{\Gamma t} [\bar{e}_x \cos(\gamma_{ж} t + \delta) - \bar{e}_y \sin(\gamma_{ж} t + \delta)], \quad (20)$$

где A и δ — константы. Траектория шнура представляет собой медленно раскручивающуюся спираль, радиус которой экспоненциально возрастает со временем. Потенциал внутри пристеночного слоя, соответствующий такому движению, согласно (17), имеет вид

$$\psi_1 = \omega(t) R (1 - e^{-2R\xi/a^2}) \cos(\theta + \gamma_{ж} t + \delta), \quad (21)$$

где $\omega(t) = A \gamma_{ж} \exp(\Gamma t)$ — медленно растущая действительная амплитуда. Интегрируя по времени уравнения непрерывности (6.2), (6.3), с помощью (21) можно найти также возмущения ρ_1 и M_1 внутри пристеночного слоя:

$$\begin{pmatrix} \rho_1 \\ M_1 \end{pmatrix} = -2 \frac{\omega(t) R}{\gamma_{ж} a^2} e^{-R^2/a^2} \begin{pmatrix} \rho_* \\ M_* \end{pmatrix} (1 - e^{-2R\xi/a^2}) \cos(\theta + \gamma_{ж} t + \delta). \quad (22)$$

Отметим, что при интегрировании в этих выражениях отброшены не зависящие от времени начальные возмущения $\rho_1|_{t=0}$, $M_1|_{t=0}$, что справедливо на больших временах в силу экспоненциального роста $\omega(t)$.

4. НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ

Развитие неустойчивой моды $m=1$ приводит в конце концов к необходимости учета нелинейных эффектов. В этом разделе мы выведем уравнение, описывающее нелинейную эволюцию шнура в предположении, что система находится вблизи порога неустойчивости, т. е. $\gamma_{ж} - \gamma_1 \ll \gamma_{ж}$. Ради простоты мы ограничимся рассмотрением только гауссовского профиля, хотя наш вывод может быть обобщен и на более широкий класс радиальных профилей.

Будем искать решение системы уравнений (3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \psi &= \tau \psi_1 + \tau^2 \psi_2 + \dots \\ \rho &= \rho_0 + \tau \rho_1 + \dots \\ M &= M_0 + \tau M_1 + \dots, \end{aligned} \quad (23)$$

где τ — формальный параметр, учитывающий малость возмущения. Величины линейного приближения ψ_1 , ρ_1 , M_1 описывают первую моду $m=1$. Они задаются выражениями (21), (22), в которых фаза δ постоянна, а амплитуда ω экспоненциально нарастает со временем. На нелинейной стадии обе величины δ и ω нужно считать медленно меняющимися функциями времени, поведение которых определяется еще и нелинейными членами в уравнениях (3). Как будет видно из результата: $\delta, \dot{\omega} \sim \tau^2$.

Прежде чем находить нелинейные поправки в разложениях (23), заметим, что вывод уравнения движения шнура (12) был основан на единственном предположении, которое заключается в том, что во внутренней области плазмы (там, где сосредоточена основная масса) потенциал линейно изменяется с радиусом. Как показано в Приложении 2, это утверждение с нужной точностью выполняется и на нелинейной стадии. Учитывая это обстоятельство и повторяя вывод (12), можно убедиться, что нелинейное уравнение движения будет иметь тот же вид (12) с единственным отличием, заключающимся в выражении для силы \bar{F}_r :

$$\bar{F}_r = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta [\bar{e}_z \bar{R}] \left(M' \frac{\partial \psi'}{\partial \theta} \right) \Big|_{r=R}, \quad (24)$$

где \bar{R} — радиус-вектор, проведенный из центра системы к границе плазмы. Легко видеть, что если подставить в правую часть (24)

результат линейного приближения, $\psi = \tau\psi_1$, $M = M_0 + \tau M_1$, то слагаемые обратятся в нуль в силу того, что M_1 и ψ_1 пропорциональны $\cos(\theta + \theta_0)$. По этой причине вычисление нелинейной части силы \vec{F}_r требует нахождения членов $\sim \tau^2$ в разложении (23).

Выпишем уравнения (3) с точностью до членов $\sim \tau^2$

$$\hat{H} \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \rho_2 \\ M_2 \end{pmatrix} = -\text{div}\{([\nabla M_1, \vec{e}_z] \cdot \nabla) \nabla \psi_1\} / 2, \quad (25.1)$$

$$= -[\nabla \psi_1, \vec{e}_z] \cdot \nabla \rho_1, \quad (25.2)$$

$$-[\nabla \psi_1, \vec{e}_z] \cdot \nabla M_1, \quad (25.3)$$

где \hat{H} — линейный оператор, определенный соотношением (7). В правой части (25.1) сохранено только самое большое по параметру ε^{-1} слагаемое, содержащее M_1 . Как показано в Приложении 2, вдали от пристеночного слоя, где потенциал линейно зависит от радиуса, величина ψ_2 мала по сравнению со значениями, которые она принимает внутри пристеночного слоя. Поэтому ψ_2 удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\psi_2|_{\xi=0} = 0, \quad \psi_2|_{\xi \rightarrow \infty} = 0. \quad (26)$$

Оставляя в левой части уравнения (25.1) только главное слагаемое (см. вывод уравнения (9)) и подставляя в правую часть (21), (22), получим

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} + \frac{2R}{a^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} = -\frac{4\omega^2 R^4}{\gamma_{ж} a^6} e^{-4R\xi/a} \sin(2(\theta + \gamma_{ж} t + \delta)). \quad (27)$$

Легко найти решение этого уравнения, удовлетворяющее условию (26):

$$\psi_2 = -\frac{\omega^2 R^2}{4\gamma_{ж} a^2} e^{-2R\xi/a^2} (1 - e^{-2R\xi/a^2}) \cos(2(\theta + \gamma_{ж} t + \delta)), \quad (28)$$

после чего с помощью уравнения (25.3) можно определить M_2 :

$$M_2 = \frac{M_1 \omega^2 R^2}{2\gamma_{ж} a^4} e^{-R^2/a^2} (5 - 2e^{2R\xi/a^2} - 3e^{-2R\xi/a^2}) \cos(2(\theta + \gamma_{ж} t + \delta)). \quad (29)$$

Аналогичное выражение (с заменой M_1 на ρ_1) имеет место и для ρ_2 . Причины, по которым в последнем выражении при интегрировании отброшены члены, не зависящие от времени, те же, что и при получении (22): мы предполагаем, что на больших временах возмущения (28), (29) нарастают до уровней, которые существенно превышают их начальные значения.

Подставляя теперь в правую часть (24) разложения (23), най-

дем, что нелинейная часть \vec{F}_r имеет порядок τ^3 . Ее учет приводит к следующему уравнению движения шнура:

$$\ddot{\vec{X}} = \gamma_{ж}^2 \vec{X} + 2\gamma_1 [\dot{\vec{X}}, \vec{e}_z] + 2\gamma_3 \dot{\vec{X}}^2 [\dot{\vec{X}}, \vec{e}_z], \quad (30)$$

$$\gamma_{ж} = \sqrt{g_0/a}, \quad \gamma_1 = \left(\frac{R}{a}\right)^4 e^{-R^2/a^2} \omega_*, \quad \gamma_3 = \frac{3}{4} \frac{\omega_*}{\gamma_{ж}^2} \frac{R^6}{a^8} e^{-R^2/a^2}.$$

Это уравнение отличается от своего линейного приближения (14) наличием последнего слагаемого в правой части, которое описывает эффект увеличения вращения шнура при его удалении от оси.

Уравнение (30) имеет два интеграла движения — энергию E и обобщенный момент импульса L :

$$E = \frac{1}{2} \dot{\vec{X}}^2 - \frac{1}{2} \gamma_{ж}^2 \vec{X}^2 = \text{const}, \quad (31)$$

$$L = \mathcal{R}^2 \dot{\Theta} + (\gamma_1 + 2E\gamma_3) \mathcal{R}^2 + \frac{1}{2} \gamma_{ж}^2 \gamma_3 \mathcal{R}^4 = \text{const}, \quad (32)$$

где \mathcal{R} , Θ — цилиндрические координаты центра шнура. С помощью этих интегралов уравнение (30) можно проинтегрировать в квадратурах. Мы однако не будем выписывать здесь общее решение (30), а ограничимся качественным анализом движения шнура. Для этого необходимо выразить $\dot{\Theta}$ из уравнения (32) и подставить в (31). В результате полная энергия E представится в виде суммы кинетической энергии радиального движения $\frac{1}{2} \dot{\mathcal{R}}^2$ и эффективной потенциальной энергии $U(\mathcal{R})$, где

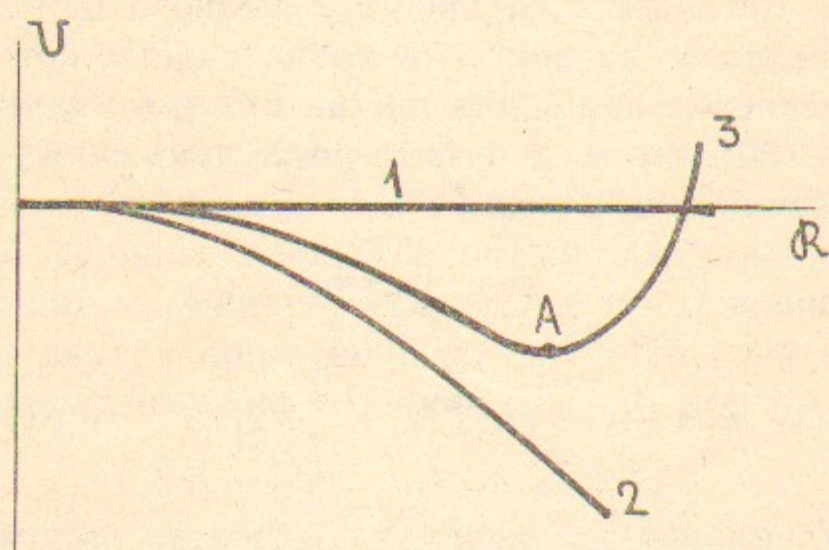
$$U(\mathcal{R}) = -\frac{1}{2} \gamma_{ж}^2 \mathcal{R}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\mathcal{R}^2} \left[L - (\gamma_1 + 2E\gamma_3) \mathcal{R}^2 - \frac{1}{2} \gamma_{ж}^2 \gamma_3 \mathcal{R}^4 \right]^2. \quad (33)$$

Пусть шнур в начальный момент имеет нулевую энергию ($E=0$) и стартует из начала координат ($L=0$). В линейном приближении ($\gamma_3=0$) на пороге устойчивости ($\gamma_1=\gamma_{ж}$) эффективный потенциал $U(\mathcal{R})$, согласно (33), тождественно равен нулю (см. рисунок, кривая 1). В условиях слабой надкритичности, $\gamma_{ж} - \gamma_1 \ll \gamma_{ж}$ (но, по-прежнему, $\gamma_3=0$), потенциал принимает форму параболического горба, изображенного на рисунке кривой 2. Наконец, учет нелинейной добавки, $\gamma_3 \neq 0$, приводит к профилю $U(\mathcal{R})$, показанному на рисунке кривой 3. Как видно из этого рисунка, нелинейные эффекты ограничивают рост величины смещения шну-

ра. По порядку величины амплитуду максимального смещения можно оценить как

$$\mathcal{R} \sim \frac{(\gamma_{ж} - \gamma_l)^{1/2}}{\gamma_{ж} \gamma_l^{1/2}} \sim \left(\frac{\gamma_{ж} - \gamma_l}{\gamma_{ж}} \right)^{1/2} \frac{a^2}{R}.$$

Отметим также, что для потенциала 3 на рисунке существует решение, соответствующее минимуму потенциальной энергии U



Зависимость эффективного потенциала от радиуса.

(точка A на кривой 3). Это решение описывает шнур, центр которого сместился из исходного положения равновесия и вращается вокруг оси ловушки. Именно такой характер движения наблюдался в эксперименте [5].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечислим основные результаты настоящей работы.

Мы рассмотрели задачу об устойчивости плазменного шнура, окруженного хорошо проводящим кожухом в условиях, когда эффекты КЛР оказывают преобладающее влияние на его динамику. В этом случае поведение шнура удастся относительно просто описать, основываясь на том, что он движется как целое, сохраняя начальные профили давления и температуры везде за исключением узкого пристеночного слоя. Уравнение движения формулируется для вектора, задающего положение центра шнура в плоскости, перпендикулярной его оси. Наличие проводящего кожуха приводит к появлению в этом уравнении гироскопической силы, которая оказывает стабилизирующее влияние на устойчивость шнура.

Описанные выше представления удастся развить не только в линейной теории, но также и в слабонелинейном случае, когда плазма находится вблизи порога устойчивости по отношению к основной моде $m=1$. Как оказывается, приближение шнура к стенке в ходе неустойчивости приводит к возрастанию гироскопической силы и, как следствие, прекращению роста величины смещения. В конечном состоянии шнур вращается вокруг оси ловушки, совершая при этом, вообще говоря, радиальные колебания. Впрочем, можно ожидать, что вследствие тех или иных диссипативных механизмов эти радиальные колебания затухают, и тогда остается чистое вращение по круговой орбите, что и наблюдалось в экспериментах.

Приложение 1

Оценим прежде всего слагаемые в (6.1). Характерным временем задачи является обратный инкремент желобковой неустойчивости $\gamma_{ж}^{-1}$, поэтому $\partial/\partial t \sim \gamma_{ж}$. Кроме того, поскольку вблизи стенки

$$\frac{\partial}{\partial r} \sim \frac{1}{\Delta}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \sim \frac{1}{R},$$

то

$$\left| \frac{\partial}{\partial r} \right| \gg \left| \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right| \quad (\Delta \ll R).$$

Из (6.2) получим

$$\rho_1 \sim \frac{1}{\gamma_{ж}} \frac{\psi_1 \rho_0}{R \Delta}.$$

С помощью этих соотношений находим, что внутри слоя

$$\operatorname{div} \left\{ \rho_0 \frac{\partial \nabla \psi_1}{\partial t} \right\} \sim \frac{\gamma_{ж} \rho_0 \psi_1}{\Delta^2}, \quad (\text{П1.1})$$

$$\operatorname{div} \{ ([\nabla M_0, \vec{e}_z] \cdot \nabla) \nabla \psi_1 \} \sim \frac{M_0 \psi_1}{R \Delta^3} \sim \frac{1}{\varepsilon} \frac{a^2}{R \Delta} \frac{\gamma_{ж} \rho_0 \psi_1}{\Delta^2}, \quad (\text{П1.2})$$

$$\operatorname{div} \{ \rho_1 [\vec{g}, \vec{e}_z] \} \sim \frac{\gamma_{ж} \rho_0 \psi_1}{R \Delta}. \quad (\text{П1.3})$$

Так как (П1.3) мало по сравнению с (П1.1), то, если выполняется условие

$$\varepsilon \ll \frac{a^2}{R \Delta}, \quad (\text{П1.4}),$$

главным в (6.1) будет второй член. Для гауссовского профиля (П1.4) выполняется автоматически, поскольку переходит в $\varepsilon \ll 1$.

Рассмотрим теперь обратный случай, когда

$$\varepsilon \gg \frac{a^2}{R\Delta}$$

(но, по-прежнему, $\varepsilon \ll 1$). Вблизи стенки основным в (6.1) будет уже первое слагаемое, и это уравнение принимает вид

$$\operatorname{div} \left\{ \rho_0 \frac{\partial \nabla \psi_1}{\partial t} \right\} = 0.$$

Пренебрегая внутри слоя малыми величинами, получаем

$$\dot{\psi}'_1 / \dot{\psi}_1 = -\rho'_0 / \rho_0. \quad (\text{П1.5})$$

Уравнение (П1.5) по виду совпадает с (10) (в котором надо отбросить последнее слагаемое), и все полученные в разделе 3 результаты легко переносятся на рассматриваемый случай. Характерный размер пристеночного слоя совпадает теперь с масштабом изменения ρ_0 на границе, и вблизи стенки

$$\eta = A(t) \int_0^\varepsilon \frac{ds}{\rho_0(R-s)},$$

$$A(t) = \omega(t) \left[\int_0^\infty \frac{ds}{\rho_0(R-s)} \right]^{-1}.$$

С учетом этих замен вид уравнения движения (12) остается прежним.

Приложение 2

Во внутренней области плазмы, где влияние границы пренебрежимо мало, можно воспользоваться результатом работы [4], в которой показано, что в отсутствие границы потенциал следующим образом зависит от координат и времени:

$$\psi = \omega(t) |\vec{r} - \vec{X}(t)| e^{i\theta},$$

где $\vec{X}(t)$ — смещение шнура как целого, а его скорость связана с потенциалом согласно (4):

$$|\dot{\vec{X}}| = |[\nabla \psi, \vec{e}_z]| \sim |\omega|.$$

Так как характерное время задачи $\gamma_{ж}^{-1}$, то $|\dot{\vec{X}}| \sim \gamma_{ж}^{-1} |\omega|$. В случае малых смещений

$$\psi = \omega r e^{i\theta} - \omega \frac{\vec{r} \cdot \vec{X}}{r} e^{i\theta} + \dots \quad (\text{П2.1})$$

Главный член в этом разложении пропорционален ω и линейно зависит от r . Это и есть потенциал (8). Второе слагаемое квадратично по амплитуде ω и, следовательно, представляет собой ψ_2 . Таким образом, во внутренней области плазмы

$$\psi_2 \sim \omega^2 / \gamma_{ж}. \quad (\text{П2.2})$$

Оставляя в левой части (25.1) только главный член, содержащий M_0 , выпишем уравнение, определяющее ψ_2 :

$$\operatorname{div} \{ ([\nabla M_0, \vec{e}_z] \cdot \nabla) \nabla \psi_2 \} = -\operatorname{div} \{ ([\nabla M_1, \vec{e}_z] \cdot \nabla) \nabla \psi_1 \}. \quad (\text{П2.3})$$

Из (П2.3), используя (21) и (22), получим оценку для ψ_2 в пристеночном слое:

$$\psi_2 \sim \frac{\omega^2}{\gamma_{ж}} \left(\frac{R}{a} \right)^2. \quad (\text{П2.4})$$

Поскольку мы считаем, что $R/a \gg 1$, то (П2.2) пренебрежимо мало по сравнению с (П2.4). Это позволяет пренебречь вторым слагаемым в (П2.1) и считать, что на линейной стадии потенциал во внутренней области шнура линейно зависит от r .

ЛИТЕРАТУРА

1. Rosenbluth M.N., Krall N.M., Rostoker N. Nucl. Fus., 1962, Supplement, part 1, p.143.
2. Михайловский А.Б. Теория плазменных неустойчивостей. — М.: Атомиздат, 1977, т.2, §9.2.
3. Cohen B.I., Freis R.P., Newcomb W.A. Phys. Fluids, 1986, v.29, p.1558.
4. Ланский И.М., Ступаков Г.В. Физика плазмы, 1989, т.15, с.871.
5. Irby J.H., Lane B.G., Casey J.A. et al. Phys. Fluids, 1988, v.31, p.902.
6. Newcomb W.A. Ann. Phys., 1972, v.71, p.29.
7. Newcomb W.A. Ann. Phys., 1973, v.81, p.231.
8. Caponi M.Z., Cohen B.I., Freis R.P. Phys. Fluids, 1987, v.30, p.1410.

И.М. Ланский, Г.В. Ступаков

**Нелинейная стабилизация желобковой неустойчивости
сильным эффектом КЛР и проводящей стенкой**

Ответственный за выпуск С.Г. Попов

Работа поступила 15 сентября 1989 г.
Подписано в печать 15.XI 1989 г. МН 12192
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1,5 печ.л., 1,2 уч.-изд.л.
Тираж 220 экз. Бесплатно. Заказ № 145

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и
отпечатано на ротаприте Института ядерной физики
СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*