

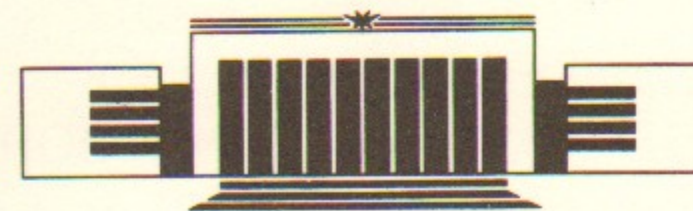


9
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

В.М. Малкин

**ДИНАМИКА ВОЛНОВОГО КОЛЛАПСА
В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ**

ПРЕПРИНТ 89-101



НОВОСИБИРСК

Динамика волнового коллапса
в критическом случае

В.М. Малкин

Институт ядерной физики
630090, Новосибирск 90, СССР

АННОТАЦИЯ

Получено компактное решение известной задачи о коллапсе солитона, описываемого двумерным уравнением Шредингера с кубической нелинейностью.

The Dynamics of Wave Collapse
in a Critical Case

V.M. Malkin

Institute of Nuclear Physics
630090, Novosibirsk 90, USSR

ABSTRACT

A well-known problem of collapse dynamics for soliton described by two-dimensional Schrödinger equation with cubic nonlinearity is solved analytically and strictly.

© Институт ядерной физики СО АН СССР

Нелинейное уравнение Шредингера

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{r^{d-1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{d-1} \frac{\partial}{\partial r} + |\psi|^{4/d} \right) \psi = 0 \quad (1)$$

с $d=2$ первоначально рассматривалось как математическая модель предсказанного в [1] явления самофокусировки мощных потоков излучения в среде [2—5] (см. также обзоры [6, 7]). Позже выяснилось, что эта модель приложима и к волнам на поверхности глубокой жидкости [8] (см. также обзор [9]). За истекшие годы по уравнению [1] накопилась обширная литература, содержащая ряд важных результатов (см., например, обзор [10]). Уже на ранней стадии исследований (1) была осознана возможность взрывного самосжатия — коллапса — волновых пакетов и сформулировано необходимое для развития этого процесса ограничение снизу на интеграл движения

$$N = \int_0^{\infty} dr r^{d-1} |\psi|^2.$$

Критическое значение N совпало с «числом квантов» N_c в стационарном солитоне

$$\psi(r, t) = a^{-d/2} R(r/a) \exp(it/a^2), \quad (2)$$

$$\left[-1 + \frac{1}{\xi^{d-1}} \frac{d}{d\xi} \xi^{d-1} \frac{d}{d\xi} + |R(\xi)|^{4/d} \right] R(\xi) = 0, \quad R(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0 \quad (3)$$

(это число не зависит от размера солитона a и при $d=2$ равно 1.86 (см. [2])). Существенную роль в дальнейших исследованиях сыграла нетривиальная симметрия уравнения (1), найденная в статье [11] (посвященной автомодельным решениям). Эта симметрия позволила построить коллапсирующий солитон, размер которого убывает со временем по закону $a \propto t_* - t$, а форма в точности совпадает с (3) [12]. Неустойчивость такого решения понятна уже из факта точного равенства числа квантов в солитоне критическому. В дальнейшем предпринимались многочисленные попытки отыскания устойчивых коллапсирующих решений, основанные на асимптотических обобщениях преобразования Таланова [11, 12]. На разных этапах исследований предлагались и проверялись численно формулы*)

$$a \propto (t_* - t)^{2/3} \quad [13-16], \quad a \propto (t_* - t)^{1/2} \quad [17, 18],$$

$$a \propto \left(\frac{t_* - t}{\ln \frac{1}{t_* - t}} \right)^{1/2} \quad [19-23], \quad a \propto \left(\frac{t_* - t}{\ln \ln \frac{1}{t_* - t}} \right)^{1/2} \quad [24-26].$$

Однако полная ясность так и не была достигнута, что стимулировало дальнейшие поиски решения проблемы [27]. Корректное ее решение приведено ниже.

Замена

$$\psi(r, t) = f(\rho, \tau) \exp \left[\frac{d}{4} \tau + i \int d\tau_1 \kappa(\tau_1) \right],$$

$$\arg f(0, \tau) = 0, \quad \tau = -\ln(t_* - t), \quad \rho = r e^{\tau/2} \quad (4)$$

приводит уравнение (1) к виду

$$\left[i \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{d}{4} + i\kappa + \frac{1}{2} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^{d-1}} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^{d-1} \frac{\partial}{\partial \rho} + |f|^{4/d} \right] f = 0. \quad (5)$$

Далее выяснится, что при $\tau \rightarrow \infty$ величина κ также стремится к бесконечности, хотя и гораздо медленнее, чем τ (как $\ln \tau$). Поэтому, интересуясь асимптотикой решения при $t \rightarrow t_*$, можно полагать $\kappa \gg 1$. В области $\rho \gg \kappa^{1/2}$ все члены уравнения (5) малы по сравнению с первым и общее решение дается формулой

$$f(\rho, \tau) = F(\tau - 2 \ln \rho) \exp \left[-\frac{d}{2} \ln \rho - i \int_{\tau - 2 \ln \rho}^{\tau} d\tau_1 \kappa(\tau_1) \right], \quad (6)$$

соответствующей «замерзшему» вне солитона полю:

$$\psi(r, t) = F(-2 \ln r) \exp \left[-\frac{d}{2} \ln r + i \int^{-2 \ln r} d\tau \kappa(\tau) \right]. \quad (7)$$

При не слишком больших значениях ρ формула (6) заметно упрощается:

$$f(\rho, \tau) = F(\tau) \rho^{-\left[\frac{d}{2} + 2i\kappa(\tau) \right]}, \quad \ln \kappa \ll \ln \rho \ll \tau. \quad (8)$$

Приступая к решению уравнения (5) во внутренней области $\rho \lesssim \kappa^{1/2}$, надо выделить из функции $f(\rho, \tau)$ имеющиеся здесь пространственные осцилляции:

$$\bar{f}(\rho, \tau) = \tilde{f}(\rho, \tau) \exp(-i\rho^2/8), \quad (9)$$

$$\left(i \frac{\partial}{\partial \tau} - \kappa + \frac{1}{\rho^{d-1}} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^{d-1} \frac{\partial}{\partial \rho} + |\bar{f}|^{4/d} + \frac{\rho^2}{16} \right) \bar{f} = 0. \quad (10)$$

В области $\rho \ll \kappa^{1/2}$ решение уравнения (10) с точностью до малых по параметру κ^{-1} поправок совпадает со стационарным солитоном (3):

$$\bar{f}(\rho, \tau) \approx \kappa^{d/4} R(\kappa^{1/2} \rho). \quad (11)$$

В области $\rho \gg \kappa^{-1/2}$ функция $|\bar{f}|$ уже мала и в (10) можно пренебречь нелинейным членом. При $\ln \rho \ll \tau$ можно не учитывать и член с $\partial/\partial \tau$. Линейное стационарное уравнение удается решить аналитически. Решение экспоненциально убывает при $\kappa^{-1/2} \ll \rho \ll \kappa^{1/2}$, протягивается через окрестность точки остановки и выходит при $\rho \gg \kappa^{1/2}$ на асимптотику $\bar{f} \propto \exp(i\rho^2/8)$, соответствующую формулам (8), (9). Стандартный квазиклассический расчет (см., например, [25]) дает

$$\kappa(\tau) = -\frac{1}{2\pi} \ln |F(\tau)|^2, \quad \arg F(\tau) = \kappa(\tau) [\ln \kappa(\tau) + 2 \ln 2 - 1] + \frac{\pi}{4}. \quad (12)$$

Временные зависимости вычисляются с помощью точного соотношения

*) Наличие в итоговой формуле статьи [24] простого, а не двойного логарифма связано с опечаткой или арифметической ошибкой Г.М. Фраймана.

$$\frac{d}{d\tau} \int_0^{\rho} d\rho_1 \rho_1^{d-1} |\bar{f}|^2 = -2\rho^{d-1} |\bar{f}|^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \arg \bar{f}. \quad (13)$$

В области $\ln \kappa \ll \ln \rho \ll \tau$ интеграл в левой части (13) не зависит от ρ и с точностью до экспоненциально малой по параметру κ поправки равен числу квантов $N(\kappa)$ в модифицированном стационарном солитоне $S(\xi, \kappa)$, который возникает при разумном «обрезании» потенциала — $\rho^2/16$ в (10). Приемлемо, например, такое определение $S(\xi, \kappa)$:

$$\left[-1 + \frac{1}{\xi^{d-1}} \frac{d}{d\xi} \xi^{d-1} \frac{d}{d\xi} + |S(\xi, \kappa)|^{4/d} + \frac{\xi^2}{16\kappa^2} \Theta(\kappa - \xi) \right] S(\xi, \kappa) = 0, \quad (14)$$

$$S(\xi, \kappa) \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0; \quad \Theta(x) = 0, \quad x < 0; \quad \Theta(x) = 1, \quad x > 0.$$

Поскольку $S(\xi, \infty) = R(\xi)$, число квантов $N(\kappa)$ при $\kappa \gg 1$ можно вычислить по теории возмущений:

$$N(\kappa) = N_c + \frac{M}{\kappa^2}, \quad M = \frac{1}{16} \int_0^{\infty} d\xi \xi^{d+1} |R(\xi)|^2. \quad (15)$$

Подстановка $N(\kappa)$ в левую часть уравнения (13) и формул (8), (9) в его правую часть с последующим учетом (12) дает

$$|F(\tau)|^2 = \frac{2M}{\kappa^3(\tau)\tau}, \quad \kappa(\tau) = \frac{1}{2\pi} \ln \tau. \quad (16)$$

Возвращаясь к исходным переменным, нетрудно найти размер коллапсирующего солитона (3):

$$a(t) = \left[2\pi \frac{t_* - t}{\ln \ln(t_* - t)} \right]^{1/2}. \quad (17)$$

Поле $\psi(r, t_*)$ в окрестности особенности в момент коллапса вычисляется по формулам (7), (16). Как и должно быть, особенность плотности квантов при $r \rightarrow 0$ является интегрируемой:

$$|\psi(r, t_*)|^2 = \frac{8\pi^2 M}{r^d} \left(\ln \frac{1}{r} \right)^{-1} \left(\ln \ln \frac{1}{r} \right)^{-3}. \quad (18)$$

Анализ показывает, что малое шевеление начальных условий приводит лишь к сдвигу момента образования особенности t_* , но не меняет полученных формул.

Автор благодарен обратившему его внимание на статьи [25—27] В.Ф. Швецу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аскарьян Г.А. ЖЭТФ, 1962, т.42, с.1567.
2. Chiao R.Y., Garmire E., Townes C.H. Phys. Rev. Lett., 1964, v.13, p.479.
3. Таланов В.И. Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1964, т.7, с.564.
4. Таланов В.И. Письма в ЖЭТФ, 1965, т.2, с.218.
5. Kelley P.L. Phys. Rev. Lett., 1965, v.15, p.1005.
6. Луговой В.Н., Прохоров А.М. УФН, 1973, т.111, с.203.
7. Аскарьян Г.А. УФН, 1973, т.111, с.249.
8. Захаров В.Е. ПМТФ, 1968, № 2, с.86.
9. Юэн Г., Лэйк Б. В кн: Солитоны в действии. — М.: Мир, 1981, гл.5.
10. Rasmussen J.J., Rypdal K. Physica Scripta, 1986, v.33, p.481.
11. Таланов В.И. Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1966, т.9, с.410.
12. Таланов В.И. Письма в ЖЭТФ, 1970, т.11, с.303.
13. Захаров В.Е., Соболев В.В., Сынах В.С. Письма в ЖЭТФ, 1971, т.14, с.564.
14. Захаров В.Е., Сынах В.С. ЖЭТФ, 1975, т.68, с.940.
15. Konno K., Suzuki H. Physica Scripta, 1979, v.20, p.382.
16. Sulem P.L., Sulem S., Patenaer A. Commun. Pure Appl. Math., 1984, v.37, p.755.
17. Дегтярев Л.М., Крылов В.И. ЖВМ и МФ, 1977, т.17, с.523; ДАН СССР, 1978, т.241, с.64.
18. Rypdal K., Rasmussen J.J., Thomsen K. Physica, 1985, v.16D, p.339.
19. Власов С.Н., Пискунова Л.В., Таланов В.И. ЖЭТФ, 1978, т.75, с.1602.
20. Wood D. Stud. Appl. Math., 1984, v.71, p.103.
21. Rypdal K., Rasmussen J.J. Physica Scripta, 1986, v.33, p.498.
22. McLaughlin D.W., Papanicolaou G.C., Sulem C., Sulem P.L. Phys. Rev., 1986, v.34A, p.1200.
23. Захаров В.Е., Швец В.Ф. Письма в ЖЭТФ, 1988, т.47, с.227.
24. Фрайман Г.М. ЖЭТФ, 1985, т.88, с.390.
25. Le Mesurier B.J., Papanicolaou G.C., Sulem C., Sulem P.L. Physica D, 1988, v.31, p.78; 1988, v.32, p.210.
26. Landman M.G., Papanicolaou G.C., Sulem C., Sulem P.L. Phys. Rev., 1988, v.A38, p.3837.
27. Zakharov V.E., Shwets V.F. To the Theory of Critical Wave Collapse (to be published).
28. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. — М.: Наука, 1974, § 50.

В.М. Малкин

**Динамика волнового коллапса
в критическом случае**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 29 июня 1989 г.
Подписано в печать 10.07 1989 г. МН 12085
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 0,5 печ.л., 0,4 уч.-изд.л.
Тираж 220 экз. Бесплатно. Заказ № 101.

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и
отпечатано на ротапинтере Института ядерной физики
СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*