



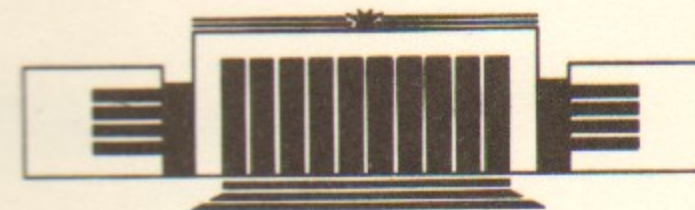
3  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Д.Л. Шепелянский

ТЕОРИЯ  
ДИФФУЗИОННОГО ФОТОЭФФЕКТА  
В АТОМЕ ВОДОРОДА.

4. Ионизация трехмерного атома  
в монохроматическом поле
5. Диффузионное возбуждение в двух-  
и трехчастотном поле

ПРЕПРИНТ 89-93



НОВОСИБИРСК



#### 4. ИОНИЗАЦИЯ ТРЕХМЕРНОГО АТОМА В МОНОХРОМАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

##### §4.1. ОТОБРАЖЕНИЕ КЕПЛера ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ КЛАССИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ

Рассмотрим теперь динамику классических траекторий с проекцией орбитального момента  $m=0$ . Поскольку поле линейно-поляризовано, то  $m$  является точным интегралом и движение электрона все время лежит в одной плоскости. Для того, чтобы понять, каким образом будет происходить возбуждение для таких двумерных траекторий, используем метод описания движения при помощи отображения за один оборот электрона, примененный ранее для одномерной модели. Полученное таким образом относительно простое отображение позволяет выявить использовать медленность изменения орбитального момента и сопряженной ему фазы и показать, что процесс возбуждения по энергии может быть приближенно описан эффективным отображением Кеплера (3.1.14). Как будет видно далее (§4.3), такое описание оказывается применимым не только в двумерном, но и в трехмерном случае с эллиптически-поляризованным полем. Результаты, полученные таким методом, опубликованы в [48] (см. I).

Для двумерных траекторий с  $m=0$  гамильтониан в невозмущенных переменных действия — фазы имеет вид

$$H = -\frac{1}{2n^2} + \epsilon n^2 \cos \omega t \left[ \frac{3}{2} e \cos \psi - 2 \sum_{s=1}^{\infty} (x_s \cos s \theta \cos \psi - y_s \sin s \theta \sin \psi) \right] + \frac{3}{2} \epsilon_s n^2 e \cos \psi. \quad (4.1.1)$$

Здесь  $e$  — эксцентриситет орбиты, связанный с орбитальным момен-



том  $l$  соотношением  $e = (1 - l^2/n^2)^{1/2}$ ,

$$x_s = \frac{J'_s(se)}{s}, \quad y_s = \frac{(1 - e^2)^{1/2} J_s(se)}{se}. \quad (4.1.2)$$

Последний член в (4.1.1) соответствует постоянному статическому полю  $\varepsilon_{st}$ , параллельному микроволновому полю. Фаза  $\theta$  сопряжена с действием  $n$ , а фаза  $\psi$ , равная углу между главной осью эллипса и направлением поля, сопряжена с  $l$ .

Искомое отображение должно описывать изменение числа квантов  $N$  (энергия, деленная на  $\omega$ ), сопряженной им фазы  $\Phi$ , которая есть просто произведение  $-\omega$  на время, и переменных  $l$ ,  $\psi$ . Получить его можно, как и в одномерной модели, путем приближенного интегрирования уравнений движения на одном обороте электрона вокруг ядра.

В основном будет рассматриваться случай с  $\omega n^3 \gg 1$ . Тогда резонансные члены в гамильтониане (4.1.1) соответствуют  $s \gg 1$  и можно использовать асимптотическое разложение для фурье-амплитуд  $x_s, y_s$ . Поскольку это разложение с точностью 20% дает значения амплитуд и при  $s \approx 1$ , то полученные таким образом результаты приближенно применимы вплоть до  $\omega n^3 = 1$ . Для вывода требуемого разложения воспользуемся следующим выражением для функции Бесселя (см. II, [10]):

$$J_s(se) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{s}\right)^{1/3} \Phi \left[ \left(\frac{s}{2}\right)^{2/3} (1 - e^2) \right], \quad (4.1.3)$$

где  $\Phi$  — функция Эйри.

При приближенном интегрировании уравнений движения основной вклад дают резонансные члены с  $s \approx \omega n^3$ . В этом случае

$$J_s(se) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{\omega n^3}\right)^{1/3} \Phi \left( \left(\frac{\omega}{2}\right)^{2/3} l^2 \right) \quad (4.1.4)$$

и, так как  $\Phi(x)$  экспоненциально затухает при  $x \rightarrow \infty$ , то эффективное возбуждение происходит только для состояний с

$$l < l_c \approx \left(\frac{2}{\omega}\right)^{1/3}. \quad (4.1.5)$$

Для  $l > l_c$  резонансные члены экспоненциально малы, резонансы не перекрываются и электрон испытывает только ограниченные колебания вблизи начального значения энергии (см. I, [43, 48]).

Если же  $l < l_c$  и  $\omega n^3 \gg 1$ , то  $l \ll n$ , так что эксцентриситет  $e$

близок к 1. Ввиду этого

$$y_s \approx \frac{2^{1/3}}{\sqrt{\pi}} \frac{l}{n} s^{-4/3} \Phi(0) \approx 0.447 \frac{l}{ns^{4/3}}, \quad (4.1.6)$$

где использовано значение  $\Phi(0) = 0.629$ . Для вычисления  $x_s$  воспользуемся соотношениями:

$$J'_s(se) \approx J'_s(s) + s(e-1)J''_s(s) = J'_s(s) \left(1 + \frac{l^2}{2n^2}\right) \quad (4.1.7)$$

и

$$J'_s(s) = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial e} J_s(se) \Big|_{e=1} \approx -\frac{2^{2/3}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Phi'(0)}{s^{2/3}}. \quad (4.1.8)$$

Тогда, используя значение  $\Phi'(0) = -0.4587$ , получаем окончательное выражение

$$x_s = \frac{0.411}{s^{5/3}} \left(1 + \frac{l^2}{2n^2}\right). \quad (4.1.9)$$

Теперь можно приступить к нахождению отображения в первом порядке по возмущению. Для этого в члены с полем подставим невозмущенное движение и проинтегрируем уравнения на одном невозмущенном периоде, сохраняя только резонансный член. В результате получим

$$\Delta n = - \int_0^{2\pi n^3} dt \frac{\partial H}{\partial \theta} \approx k \omega n^3 \left[ - \left(1 + \frac{l^2}{2n^2}\right) \sin \Phi \cos \psi - 1.09 \omega^{1/3} l \cos \Phi \sin \psi \right], \quad (4.1.10)$$

где фаза  $\Phi = -\omega t + s\theta$  равна значению  $-\omega t$  в момент прохождения перигелия ( $\theta = 0$ ), а  $k = 0.822\pi\varepsilon/\omega^{5/3}$ , как и в одномерном случае. Аналогичным образом находим

$$\Delta l = - \int_0^{2\pi n^3} dt \frac{\partial H}{\partial \psi} \approx k \left[ - \left(1 + \frac{l^2}{2n^2}\right) \cos \Phi \sin \psi - 1.09 \omega^{1/3} l \sin \Phi \cos \psi \right] + 3\pi\varepsilon_{st} n^3 (n^2 - l^2/2) \sin \psi, \quad (4.1.11)$$

$$\Delta \psi = \int_0^{2\pi n^3} dt \frac{\partial H}{\partial l} \approx k \left[ - \frac{l}{n^2} \cos \Phi \cos \psi + 1.09 \omega^{1/3} \sin \Phi \sin \psi \right] - 3\pi\varepsilon_{st} n^3 l \cos \psi, \quad (4.1.12)$$



$$\Delta\Phi \approx -2\pi\omega n^3. \quad (4.1.13)$$

Вводя новую переменную  $N = -1/2n^3\omega$ , легко находим выражение для изменений  $\Delta N$ ,  $\Delta l$ ,  $\Delta\Phi$ ,  $\Delta\psi$ , которые дают переход от значений переменных  $N$ ,  $l$ ,  $\Phi$ ,  $\psi$  в момент прохождения перигелия к их новым значениям  $\bar{N}$ ,  $\bar{l}$ ,  $\bar{\Phi}$ ,  $\bar{\psi}$  в момент следующего прохождения. Однако, как и в одномерном случае, получаемое при этом отображение не является каноническим. Для того, чтобы получить каноническое отображение, выпишем вначале выражение для производящей функции:

$$\begin{aligned} G(\bar{N}, \bar{l}; \Phi, \psi) = & \bar{N}\Phi + \bar{l}\psi - 2\pi(-2\omega\bar{N})^{-1/2} - \\ & - k[(1 - \omega\bar{N}\bar{l}^2) \cos\Phi \cos\psi + 1.09\omega^{1/3}\bar{l} \sin\Phi \sin\psi] + \\ & + 3\pi\epsilon_{st}(-2\omega\bar{N})^{-3/2}[(-2\omega\bar{N})^{-1} - \bar{l}^2/2] \cos\psi. \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

Из нее на основе обычных соотношений:

$$N = \frac{\partial G}{\partial \Phi}, \quad \bar{\Phi} = \frac{\partial G}{\partial \bar{N}}, \quad l = \frac{\partial G}{\partial \psi}, \quad \bar{\psi} = \frac{\partial G}{\partial \bar{l}} \quad (4.1.15)$$

получим отображение Кеплера для двумерных траекторий:

$$\begin{aligned} \bar{N} = & N - k[(1 - \omega\bar{N}\bar{l}^2) \sin\Phi \cos\psi + 1.09\omega^{1/3}\bar{l} \cos\Phi \sin\psi], \\ \bar{\Phi} = & \Phi - 2\pi\omega(-2\omega\bar{N})^{-3/2} + k\omega\bar{l}^2 \cos\Phi \cos\psi + \\ & + 3\pi\epsilon_{st} \cos\psi \left[ 5\omega(-2\omega\bar{N})^{-7/2} - \frac{3}{2} \omega\bar{l}^2(-2\omega\bar{N})^{-5/2} \right], \\ \bar{l} = & l - k[(1 - \omega\bar{N}\bar{l}^2) \cos\Phi \sin\psi + 1.09\omega^{1/3}\bar{l} \sin\Phi \cos\psi] + \\ & + 3\pi\epsilon_{st}(-2\omega\bar{N})^{-3/2}[(-2\omega\bar{N})^{-1} - \bar{l}^2/2] \sin\psi, \\ \bar{\psi} = & \psi + k[2\omega\bar{N}\bar{l} \cos\Phi \cos\psi + 1.09\omega^{1/3} \sin\Phi \sin\psi] - \\ & - 3\pi\epsilon_{st}(-2\omega\bar{N})^{-3/2}\bar{l} \cos\psi. \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

Это каноническое отображение сохраняет меру и поэтому дает значения  $\Delta N$ ,  $\Delta l$ ,  $\Delta\Phi$ ,  $\Delta\psi$ , немного отличающиеся от выражений (4.1.10) — (4.1.13).

Более простой вид этого отображения можно получить, переходя к новым каноническим переменным  $(N, \theta, J, \chi)$  при помощи канонического преобразования, использовавшегося в [2, 3] для описания движения в окрестности главного резонанса  $s=1$ . Преобразование к новым переменным имеет вид:

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{B}{A} \operatorname{tg}\psi, \quad \theta = \Phi + \chi,$$

$$J + N = \int_0^l dl' AB / (A^2 \sin^2\chi + B^2 \cos^2\chi), \quad (4.1.17)$$

$$A = 1 - Nl^2\omega, \quad B = 1.09\omega^{1/3}l.$$

Производящая функция в этих переменных равна

$$\begin{aligned} G(\bar{N}, \theta; \bar{J}, \chi) = & \bar{J}\chi + \bar{N}\theta - 2\pi(-2\omega\bar{N})^{-1/2} - kH(\bar{J} + \bar{N}, \bar{N}, \chi) \cos\theta + \\ & + 3\pi\epsilon_{st}(-2\omega\bar{N})^{-5/2}(1 + \omega\bar{N}\bar{l}^2) \cos\psi, \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

где в последнем члене  $\bar{l} = \bar{l}(\bar{N} + \bar{J}, \chi)$  и

$$H^2(N, J, \chi) = A^2 \cos^2\psi + B^2 \sin^2\psi. \quad (4.1.19)$$

Рассмотрим вначале случай без статического поля ( $\epsilon_{st}=0$ ). Тогда из производящей функции (4.1.18) получим отображение

$$\bar{N} = N - kH \sin\theta, \quad \bar{\theta} = \theta - 2\pi\omega(-2\omega\bar{N})^{-3/2} - k \frac{\partial H}{\partial \bar{N}} \cos\theta, \quad (4.1.20)$$

$$\bar{J} = J + k \cos\theta \frac{\partial H}{\partial \chi}, \quad \bar{\chi} = \chi - k \cos\theta \frac{\partial H}{\partial J}.$$

Как будет показано ниже, при определенных условиях можно пренебречь зависимостью  $H$  от  $N$ , а изменение  $\Delta J$ ,  $\Delta\chi$  после каждой итерации считать достаточно малым, так что нижнюю пару уравнений в (4.1.20) можно заменить дифференциальными уравнениями в непрерывном времени. В этих приближениях, условия применимости которых будут даны ниже, происходит, в некотором смысле, расщепление движения по  $(N, \theta)$  и по  $(J, \chi)$ , что приводит к существенному упрощению динамики. Для  $(J, \chi)$  в приближении непрерывного времени движение описывается уравнениями

$$\frac{dJ}{dt} = k \cos\theta \frac{\partial H}{\partial \chi}, \quad \frac{d\chi}{dt} = -k \cos\theta \frac{\partial H}{\partial J}, \quad (4.1.21)$$

где время  $t$  измеряется в числе итераций отображения.

Определяя новое время  $\sigma$  соотношением

$$\frac{d\sigma}{dt} = k \cos\theta, \quad (4.1.22)$$



запишем уравнения (4.1.21) в гамильтоновой форме:

$$\frac{dJ}{d\sigma} = \frac{\partial H}{\partial \chi}, \quad \frac{d\chi}{d\sigma} = -\frac{\partial H}{\partial J}. \quad (4.1.23)$$

Таким образом,  $H$  является интегралом для движения  $(J, \chi)$  и может меняться только благодаря изменению  $N$ . Если зависимостью  $H$  от  $N$  можно пренебречь, то отображение для  $(N, \theta)$  движения сводится к отображению Кеплера (см. II, 3.1.14) с заменой  $k$  на  $kH$ . Тогда движение  $(J, \chi)$  в новом времени  $\sigma$  не зависит от  $(N, \theta)$  динамики и может быть описано в переменных  $(l, \psi)$ . Согласно уравнениям (4.1.17), (4.1.19), имеем

$$H = \left[ \left( 1 + \frac{l^2}{2n^2} \right)^2 \cos^2 \psi + (1.09\omega^{1/3}l)^2 \sin^2 \psi \right]^{1/2}, \quad (4.1.24)$$

где, в соответствии со сделанными приближениями,  $n$  равно константе.

В зависимости от значения гамильтониана  $H$  динамика  $(l, \psi)$  имеет разное качественное поведение. При  $H < 1$  движение имеет вид фазовых колебаний вблизи фазы  $\psi = \pi/2$ , а для  $H > 1$  происходит вращение фазы  $\psi$ . Эти два типа движения отделяются сепаратрисой  $H = 1$ . Рассмотрим особенности движения для двух предельных случаев, соответствующих областям вблизи неустойчивой неподвижной точки ( $l=0, \psi=0$ ) и устойчивой точки ( $l=0, \psi=\pi/2$ ).

Первый случай отвечает почти одномерным орбитам, вытянутым вдоль направления поля, т. е.  $l \ll 1, \psi \ll 1$ . В этом случае гамильтониан (4.1.24) может быть приближенно представлен в виде

$$H \approx 1 + \frac{l^2}{2n^2} - \frac{\psi^2}{2}. \quad (4.1.25)$$

Этот гамильтониан описывает неустойчивое движение с экспоненциальным ростом переменных:

$$\psi = \psi_0 \operatorname{ch}(\sigma/\bar{\sigma}) + \frac{l_0}{n} \operatorname{sh}(\sigma/\bar{\sigma}), \quad (4.1.26)$$

$$l = n\psi_0 \operatorname{sh}(\sigma/\bar{\sigma}) + l_0 \operatorname{ch}(\sigma/\bar{\sigma}),$$

где  $l_0, \psi_0$  — начальные значения, а  $\bar{\sigma} = n$  — характерное время неустойчивости. Конечно, линейное решение (4.1.26) справедливо только вблизи неустойчивой точки  $l = \psi = 0$ . Для больших значений  $l$ ,

$\psi$  это линейное решение становится неприменимым и надо использовать точный гамильтониан (4.1.24). Период обращения вблизи сепаратрисы дается обычной оценкой (см., например, I, [17]):  $T \sim 4\bar{\sigma} \ln(1/\psi_0)$ . Вводя параболические числа  $n_1 \gg n_2$ , получим  $T \sim 2\bar{\sigma} \ln(n/n_2)$  (см. ниже).

В квантовом случае одномерные состояния соответствуют параболическому квантовому числу  $n_2 \ll n$ . Чтобы установить связь с начальным состоянием в квантовой системе, введем параболические действия и фазы  $(n_1, n_2, \eta_1, \eta_2)$ . Связь этих переменных с полярными переменными  $l, \psi$  устанавливается из соотношения

$$\frac{n_1 - n_2}{n} = \left( 1 - \frac{l^2}{n^2} \right)^{1/2} \cos \psi. \quad (4.1.27)$$

Кроме того,  $n = n_1 + n_2$ , так как было принято, что  $m = 0$ . Для  $n_2 \ll n$  из (4.1.27) получаем

$$n_2 \approx \frac{1}{4} \left( \frac{l^2}{n} + n\psi^2 \right), \quad (4.1.28)$$

так что можно написать

$$\begin{aligned} l_0 &= 2(n_{20}n)^{1/2} \cos \eta_0, \\ \psi_0 &= 2(n_{20}/n)^{1/2} \sin \eta_0. \end{aligned} \quad (4.1.29)$$

Тогда из (4.1.26) — (4.1.29) получаем

$$n_2 \approx n_{20} \left[ \operatorname{ch} \left( \frac{2\sigma}{n} \right) + \sin 2\eta_0 \operatorname{sh} \left( \frac{2\sigma}{n} \right) \right] \quad (4.1.30)$$

где  $n_{20}$  — начальное значение  $n_2$ .

Для сравнения аналитических результатов с данными классического и квантового численного моделирования надо учесть, что квантовое состояние с заданными квантовыми числами  $n_2, n$ , соответствует ансамблю классических траекторий с фиксированным значением  $n_2$  и фазами  $\eta_0$ , равномерно распределенными в интервале  $(0, 2\pi)$ . Тогда, проводя усреднение по фазе  $\eta_0$ , из (4.1.30) находим зависимость первых двух моментов распределения по  $n_2$ :

$$\mu_1 = \langle n_2 - n_{20} \rangle = n_{20} \left( \operatorname{ch} \left( \frac{2\sigma}{n} \right) - 1 \right), \quad (4.1.31)$$

$$\mu_2 = \langle (n_2 - \langle n_{20} \rangle)^2 \rangle = \frac{n_{20}^2}{2} \operatorname{sh}^2 \left( \frac{2\sigma}{n} \right),$$



Из этих формул, в частности, следует, что при  $2\sigma \ll n$

$$\mu_2/\mu_1 \approx n_{20}. \quad (4.1.32)$$

В обратном случае  $2\sigma \gg n$  получаем

$$\frac{\langle n_2^2 \rangle}{\langle n_2 \rangle^2} = \frac{3}{2}. \quad (4.1.33)$$

Результаты (4.1.30) — (4.1.33) были получены из гамильтоновой динамики  $(J, \chi)$  в новом времени  $\sigma$ . Для того, чтобы вернуться к обычному времени  $t$ , измеряемому в числе итераций отображения Кеплера, надо воспользоваться уравнением (4.1.22). Это уравнение показывает, что связь между  $\sigma$  и  $t$  зависит от временной эволюции фазы  $\theta$ , определяемой первой парой уравнений в (4.1.20). Это отображение для переменных  $(N, \theta)$  определяет динамику, которая подобна той, что была описана для одномерной модели. При увеличении возмущения  $kH$  выше критического значения ( $\varepsilon > \varepsilon_c/H$ ) движение  $(N, \theta)$  становится хаотическим.

Рассмотрим вначале случай регулярного движения  $(N, \theta)$ . Тогда среднее  $\cos\theta = \lambda \neq 0$  и можно считать, что в среднем связь между  $\sigma$  и  $t$  дается соотношением  $\sigma = k\lambda t$ . Характерное время неустойчивости для  $(l, \psi)$  вблизи неподвижной точки  $l = \psi = 0$  будет равно

$$t_R = \frac{\bar{\sigma}}{k\lambda} = \frac{n}{k\lambda} \approx \frac{\omega_0^{5/3}}{2.6\varepsilon_0\lambda}, \quad (4.1.34)$$

которое согласуется с временем неустойчивости, полученным в [3].

В отличие от этого, для полностью хаотического движения  $(N, \theta)$  фаза  $\theta$  зависит от  $t$  случайным образом и поэтому  $\sigma$  является случайной функцией  $t$ . При этом  $\overline{\sigma(t)} = 0$ , а  $\overline{\sigma^2(t)} = \frac{k^2}{2}t$ . В этом случае средний квадрат аргумента гиперболических функций в (4.1.25) равен  $\left(\frac{\sigma}{n}\right)^2 = \frac{k^2 t}{2n^2}$  и характерное время неустойчивости можно оценить как

$$t_c = 2\left(\frac{n}{k}\right)^2 \approx \frac{\omega_0^{10/3}}{3.3\varepsilon_0^2}. \quad (4.1.35)$$

Отсюда видно, что  $t_c \gg t_R$  и даже  $t_c \gg t_I$ , где время ионизации дается формулой (3.2.3)

$$t_c/t_I \approx 4\omega_0^2 \gg 1. \quad (4.1.36)$$

Таким образом, неустойчивость  $(l, \psi)$ -движения развивается очень медленно, так что одномерность состояния не нарушается. Поэтому эта неустойчивость не сказывается на  $(N, \theta)$ -динамике.

Условие правомерности перехода от отображения к непрерывным уравнениям для  $(J, \chi)$  в (4.1.20) заключается в том, чтобы масштаб движения в регулярной области  $t_R \gg 1$ , что всегда имеет место, поскольку  $\omega_0 > 1$  и  $\varepsilon_0, \lambda < 1$ . В области хаоса это условие тем более выполняется, так как  $t_c \gg t_R$ .

Для того, чтобы показать, что второе принятое допущение тоже справедливо, заметим, что зависимость  $H$  от  $N$  (см. (4.1.19)) в основном определяется изменением  $Nl^2\omega$ . Так как  $\omega\delta N \sim 1/n^2$ , то для одномерных состояний  $\delta H \sim (l/n)^2 \ll 1$ . Поскольку в проведенных численных экспериментах параметр  $l/n$  был не слишком мал, то влияние  $(l, \psi)$ -динамики на  $(N, \theta)$  движение, видимо, мало и для других начальных состояний.

До этого обсуждались особенности  $(l, \psi)$ -движения вблизи сепаратрисы  $H \approx 1$ . Рассмотрим теперь случай  $H \ll 1$ . Из (4.1.17) получаем приближенные выражения для  $l, \psi$ :

$$l^2 \approx \frac{2L \sin^2 \chi}{1.09\omega^{1/3}}, \quad L = J + N, \quad (4.1.37)$$

$$\text{tg } \psi \approx 1 / [(2 \cdot 1.09\omega^{1/3}L)^{1/2} \cos \chi],$$

из которых следует, что

$$H^2 \approx 2 \cdot 1.09\omega^{1/3}L. \quad (4.1.38)$$

Ввиду того, что  $N$  считается постоянным, то  $L$  сопряжено с  $\chi$  и играет роль действия для гамильтониана  $H$ . При этом выражение (4.1.38) дает только первый член разложения по малому параметру  $L$ . Следующий член разложения добавляет только малую поправку  $-2(1.09\omega^{1/3}L)^2 \cos^2 \chi$ .

Согласно (4.1.38), период  $(l, \psi)$ -движения во времени  $\sigma$  равен

$$\sigma_T = 2\pi \left(\frac{\partial H}{\partial L}\right)^{-1} = \frac{2\pi H}{1.09\omega^{1/3}}, \quad (1.4.39)$$

откуда для регулярного движения получаем период в числе итераций:

$$t_R = \frac{\sigma_T}{k\lambda} \approx 2.2 \frac{\omega_0^{1/3}}{\varepsilon_0\lambda} H. \quad (4.1.40)$$

Если  $H$  не слишком мало, то  $t_R \gg 1$ , что позволяет использовать



непрерывные уравнения. Для хаотического движения, возникающего при  $\varepsilon_0 > 1/49\omega_0^{1/3}H$ , период осцилляций в числе оборотов приближенно равен

$$t_c = 2 \frac{\sigma_T^2}{k^2} \approx \frac{10 \omega_0^{8/3}}{\varepsilon_0^2} H^2. \quad (4.1.41)$$

Это значение также много больше единицы, если  $H$  не слишком мало. Отметим, что хаотический масштаб оказывается больше, чем время ионизации, равное  $t_i = 2N_l^2/(k^2 H^2)$ :

$$\frac{t_c}{t_i} \approx 130 \omega_0^{4/3} H^4. \quad (4.1.42)$$

Таким образом, практически для всех  $H$ , за исключением очень вытянутых орбит в направлении перпендикулярном полю, когда  $l \ll n$ ,  $\psi \approx \pi/2$ ,  $H \ll 1$ , движение  $(l, \psi)$  является очень медленным и не влияет на процесс возбуждения по энергии. Вследствие этого рост энергии довольно хорошо описывается одномерной моделью атома, обсуждавшейся в предыдущей главе. В том случае, когда  $m \neq 0$  (3-мерный атом), член с возмущением в гамильтониане (4.1.1) надо домножить на  $(1 - m^2/l^2)^{1/2}$ , (см. I, [43]), а в (4.1.19) заменить  $H^2$  на  $H^2(1 - m^2/l^2)$ . Поскольку  $m < l$ , то этот фактор не приведет к существенному изменению описанной выше картины движения.

В заключение этого параграфа обсудим кратко эффекты, связанные с присутствием статического поля  $\varepsilon_{st}$ . Пренебрегая опять зависимостью  $H$  и  $l$  от  $N$ , получим отображение для  $(N, \theta, J, \chi)$  в удобной форме. При этом в уравнениях для  $J, \chi$  заменим  $\cos \theta$  его средним значением  $\bar{\lambda}$ . Тогда из (4.1.18) получим отображение

$$\begin{aligned} \bar{N} &= N - kH \cos \theta, & \bar{\theta} &= \theta - 2\pi\omega(-2\omega\bar{N})^{-3/2}, \\ \bar{J} &= J + k\lambda \frac{\partial H}{\partial \chi} - \frac{\partial F}{\partial \chi}, & \bar{\chi} &= \chi - k\lambda \frac{\partial H}{\partial J} + \frac{\partial F}{\partial J}, \end{aligned} \quad (4.1.43)$$

где  $F$  дается последним членом в (4.1.18). Отсюда следует, что  $(J, \chi)$ -динамика описывается гамильтонианом  $H_1 = F - k\lambda H$ , который для одномерных состояний в переменных  $(l, \psi)$  имеет вид

$$H_1 = 3\pi\varepsilon_{st}n^5 \left[ 1 - \frac{l^2}{2n^2} - \frac{\psi^2}{2} \right] - k\lambda \left[ 1 + \frac{l^2}{2n^2} - \frac{\psi^2}{2} \right]. \quad (4.1.44)$$

Если использовать значение  $\lambda = 1$ , соответствующее центру основ-

ного резонанса в  $(N, \theta)$ -движении с  $\theta = \pi$ , то из (4.1.44) получаем условие устойчивости движения  $(l, \psi)$ :

$$|\varepsilon_s| = |\varepsilon_{st}n^4| > \frac{2}{3} \frac{0.411\varepsilon_0}{\omega_0^{5/3}} \quad (4.1.45)$$

в согласии с [4].

Если условие (4.1.45) выполнено, то  $H$  осциллирует в интервале  $\Delta H \sim \psi_0^2 \sim n_{20}/n$  вблизи  $H = 1$  с частотой

$$\omega_s = 2 \left[ (3\pi\varepsilon_s)^2 - \left( \frac{\lambda k}{n} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

При достаточно сильном поле эта частота определяется в основном только величиной  $\varepsilon_s$ . В этом случае можно пренебречь влиянием микроволнового поля на  $(l, \psi)$ -динамику, происходит расцепление движений  $(N, \theta)$  и  $(l, \psi)$  и приближение  $\cos \theta = \lambda$  становится необязательным. В этом случае  $H$  становится периодической функцией числа итераций:

$$H = 1 + \frac{2n_{20}}{n} \cos(\omega_s t - 2\eta_0); \quad \omega_s \approx 6\pi\varepsilon_s. \quad (4.1.46)$$

Тогда выше границы хаоса по энергии будет идти диффузионное возбуждение. При этом движение будет иметь в основном регулярный характер. Присутствующая в нем хаотическая компонента будет относительно мала, если  $\varepsilon_s \gg \lambda k/3\pi l$ . Временной масштаб регулярного движения  $\omega_s^{-1}$  в этом случае существенно меньше характерного диффузионного масштаба  $t_i$ , даваемого выражением (3.2.3).

#### § 4.2. КВАНТОВАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Квантование отображения Кеплера для двумерных траекторий представляет собой значительно более трудную задачу, чем в одномерном случае. Тем не менее, на основе полученных результатов можно понять основные особенности квантовой динамики в двумерном случае.

Действительно, из-за приближенного расцепления движения по двум степеням свободы динамика  $(N, \theta)$  происходит аналогично тому, как это было в одномерной модели, с заменой  $k$  на  $kH$ . Вследствие этого в квантовом случае происходит экспоненциальная локализация диффузии по энергии, с длиной локализации в числе фотонов, равной



$$l_{\Phi} \approx 3.33 \frac{\varepsilon^2 H^2}{\omega^{10/3}}. \quad (4.2.1)$$

Поскольку  $H$  является только приближенным интегралом движения, то возникает важный вопрос о влиянии малых изменений  $H$  на квантовую динамику  $(N, \theta)$  и о том, не могут ли они привести к делокализации. Ответ на этот вопрос можно дать на основе следующих оценок. Основной эффект  $(l, \psi)$ -динамики на квантовое  $(N, \theta)$  движение будет состоять в уширении дискретных линий в спектре этого движения на ширину, определяемую хаотическим масштабом  $\sim 1/t_c$ . Тогда для возникновения делокализации необходимо, но возможно вовсе не достаточно, чтобы это уширение стало больше, чем среднее расстояние между линиями дискретного спектра движения  $l_{\Phi}^{-1}$ . Отсюда получаем необходимое условие делокализации  $t_c^{-1} > l_{\Phi}^{-1}$ . Это условие, однако, не может быть выполнено ниже одномерной границы делокализации (3.5.1), что прямо следует из соотношения

$$\frac{t_c}{l_{\Phi}} \approx \begin{cases} 4\omega_0^2 \left(\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_0}\right)^4, & H \approx 1, \\ 100\omega_0^{4/3} \left(\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_0}\right)^4, & H < 1. \end{cases} \quad (4.2.2)$$

Здесь  $\varepsilon_q$  — одномерная граница делокализации (3.5.1). Выражение (4.2.2) показывает, что при  $\varepsilon < \varepsilon_q$  отношение  $t_c/l_{\Phi} > 1$ , и условие двумерной делокализации не выполняется.

Физическая причина отсутствия делокализации связана с тем, что  $(l, \psi)$ -динамику можно рассматривать как адиабатическое возмущение для  $(N, \theta)$ -движения которое не приводит к переходам между состояниями в системе  $(N, \theta)$ . Возникновение адиабатичности обусловлено кулоновским вырождением. Таким образом, в двумерном случае граница делокализации совпадает с одномерной (3.5.1) при  $H \approx 1$ , и оказывается в  $1/H$  раз больше при  $H < 1$ .

Возможный способ делокализации заключается во введении достаточно сильного статического поля  $\varepsilon_s$ , снимающего вырождение. Из (4.1.43), (4.1.46) следует, что возбуждение в этом случае приближенно описывается отображением

$$\begin{aligned} \bar{N} &= N - k \left( 1 + \frac{2n_{20}}{n_0} \cos \omega_s t \right) \sin \theta, \\ \bar{\theta} &= \theta - 2\pi\omega (-2\omega \bar{N})^{-3/2}. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Квантовая динамика для близкого отображения исследовалась при  $\omega_s \sim 1$  в [28] (см. I) (см. также § 5.1). Согласно полученным там результатам, условием делокализации является  $k^2 n_{20}/n_0 \geq 1$ , что дает

$$\varepsilon_0 \geq \frac{\omega_0^{5/3}}{\sqrt{6n_0 n_2}}. \quad (4.2.4)$$

Строго говоря, из-за приближенного характера отображения (4.2.3) делокализацию в этом случае надо понимать как резкое увеличение длины локализации, возможно вплоть до величины  $N_l$ , при превышении границы (4.2.4). В том случае, если  $\omega_s \ll 1$ , для определения границы делокализации требуются дополнительные исследования. Однако, предварительно можно заметить, что граница (4.2.4), по-видимому, будет иметь место до тех пор, пока диффузионный масштаб локализации превышает низкочастотный период  $2\pi/\omega_s < l_{\Phi}$ . Таким образом, в том случае, когда расщепление оболочки в статическом поле становится сравнимым с расстоянием между оболочками ( $\omega_s \sim 1$ ), граница делокализации понижается по сравнению с (3.5.1) (см. II) и дается соотношением (4.2.4). Отметим, что, хотя статическое поле и приводит к стабилизации прецессии одномерных орбит [4] (см. также (4.1.45)), тем не менее  $(l, \psi)$ -движение может приводить к понижению границы делокализации по  $(N, \theta)$  из-за возникновения периодических осцилляций в  $H$ .

Перейдем теперь к результатам численного моделирования квантовой двумерной динамики, методика которой была описана в § 2.2. Начальные состояния задавались как в параболическом базисе с изменением  $n_{20}$  в интервале  $0 \leq n_{20} \leq 30$ , так и в сферическом, когда возбуждалось состояние с заданным орбитальным моментом  $0 \leq l \leq 3$ , главное квантовое число было всегда равно  $n_0 = 66$ . Напряженность поля и частота менялись в интервалах  $0.03 \leq \varepsilon_0 \leq 0.06$ ,  $1 \leq \omega_0 \leq 2.5$ .

Основной результат заключается в том, что в двумерном случае наблюдается квантовая локализация возбуждения, длина которой удовлетворительно согласуется с одномерной оценкой (3.3.6). Причина того, что эта оценка работает и для состояний далеких от одномерных, обусловлена тем, что в них имеются разные значения  $H$ , а наиболее медленное убывание происходит для  $H \approx 1$ . Типичный пример сравнения квантового и классического моментов распределения  $f(n)$  представлен на рис. 1, а. В этом случае значения параметров равны:  $\omega_0 = 2.5$ ,  $\varepsilon_0 = 0.04$ ,  $n_{20} = 15$ , что



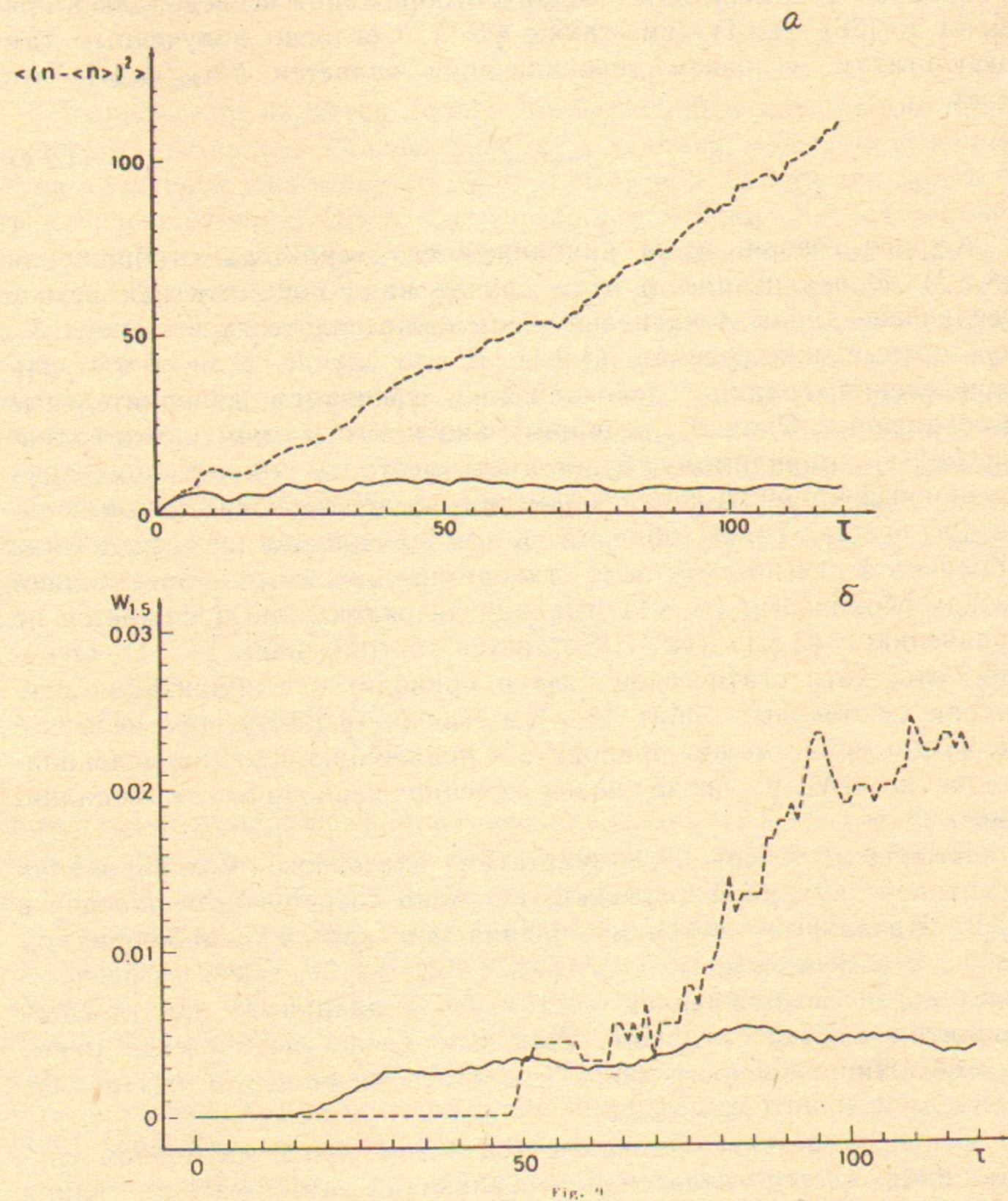


Рис. 1. а—Зависимость классического (штриховая линия) и квантового (сплошная линия) моментов распределения  $f(n)$  от числа периодов микроволнового поля  $\tau$ . б—Классическая (штриховая линия) и квантовая (сплошная линия) вероятности возбуждения  $W_{1.5}$ . На рисунке квантовая вероятность умножена на 100. Параметры равны  $n_0 = 66$ ,  $\omega_0 = 2.5$ ,  $\epsilon_0 = 0.04$ ,  $n_{20} = 15$ .

соответствует области классического хаоса (3.1.6). На рисунке четко видна локализация квантовой диффузии, в то время как классическая продолжается в течение всего времени счета. Зависимость вероятности возбуждения  $W_{1.5}$  от времени для квантового и классического случаев показана на рис.1,б. Квантовая вероятность оказывается приблизительно на три порядка меньше классической. Распределение вероятности по невозмущенным уровням представлено на рис. 2 как функция номера фотона

$$N_\Phi = \frac{1/2n_0^2 - 1/2n^2}{\omega}$$

В квантовом случае распределение экспоненциально локализовано и удовлетворительно согласуется с одномерной оценкой (3.3.6) (см. II). В противоположность этому, классическое распределение близко к решению диффузионного уравнения (3.2.8) (см. II). Значение  $\bar{n}$  в (3.2.8) бралось из численных данных для классической динамики.

В то время, как по энергии происходит локализация диффузии, по  $n_2$  наблюдается явная делокализация, так что в результате все уровни внутри оболочки с одним главным квантовым числом оказываются возбужденными. При этом квантовые моменты по  $n_2$  близки к классическим (рис. 3). Причина такого, на первый взгляд, неожиданного согласия, объясняется тем, что при данных значениях параметров хаотический масштаб движения, выраженный в числе периодов поля,  $\tau_c = \omega_0 t_c \sim 10^4$  очень велик и намного превышает время  $\tau = 120$  в численном эксперименте. Поэтому, несмотря на хаотичность  $(N, \theta)$ -движения, основной вклад в первый и второй моменты по  $n_2$  дает регулярная компонента движения, присутствие которой обусловлено тем, что параметр хаоса  $K \approx 2.66$  не слишком велик.

Для проверки теоретического соотношения (4.1.31) между первым и вторым моментами на рис. 3 отложено отношение  $\mu_2/\mu_1 n_{20}$ , которое, согласно (4.1.32), должно быть приблизительно равно 1, так как  $2\sigma/n \ll 1$ . Численные данные удовлетворительно согласуются с этим теоретическим предсказанием и позволяют определить регулярный масштаб движения. Действительно, из (4.1.31) имеем  $\mu_2 \approx 2n_{20}^2 \left(\frac{\tau}{\tau_R}\right)^2$  и из рис. 3 получаем  $\tau_R \approx 750$ . Отсюда находим величину  $\lambda = \cos \theta$ , которая согласно (4.1.34) равна  $\lambda = n\omega_0/k\tau_R \approx 0.14$ .



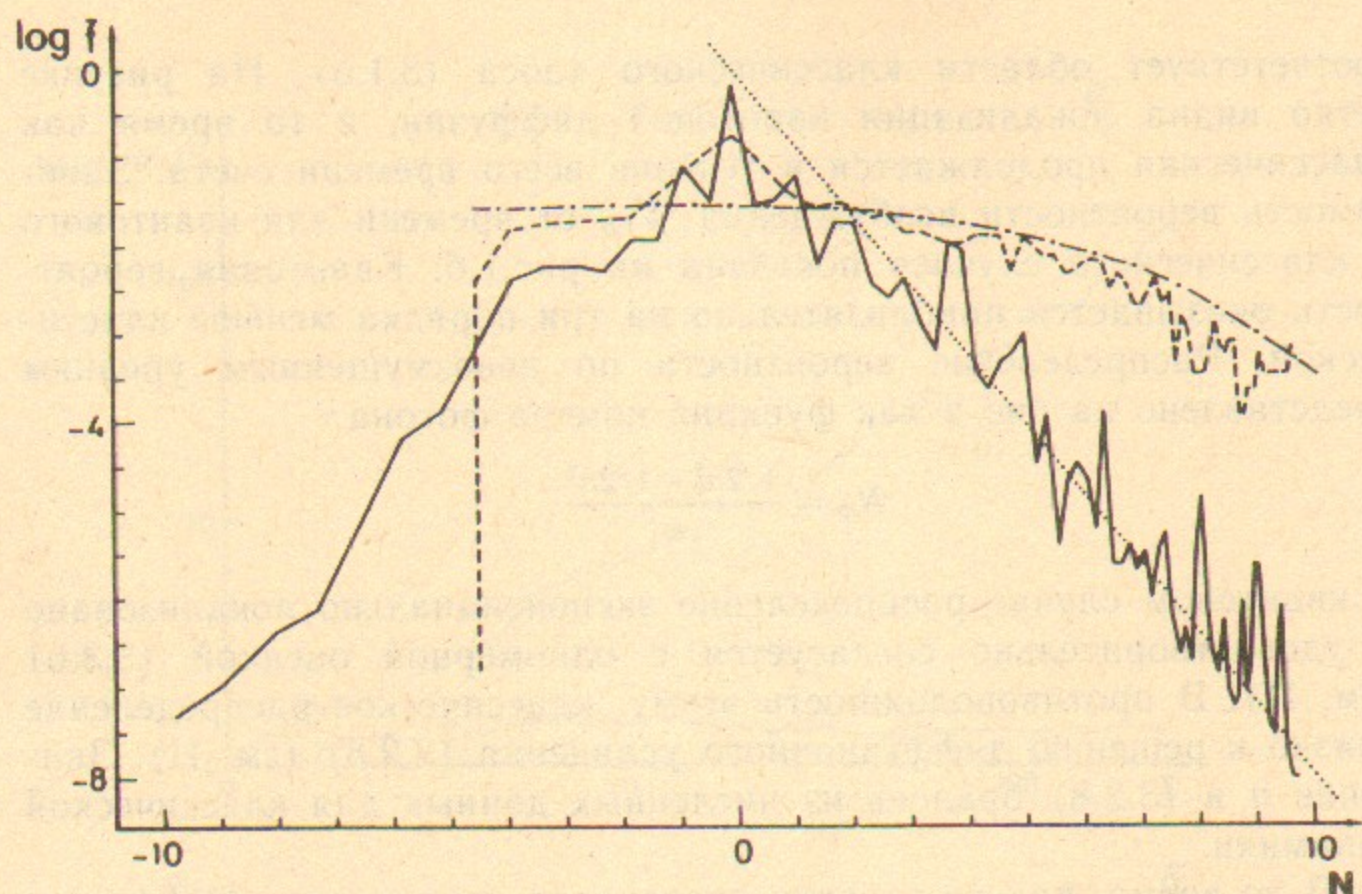


Рис. 2. Классическое (штриховая линия) и квантовое (сплошная линия) распределения, усредненные в интервале  $110 < \tau < 120$ , в зависимости от  $N = (1/2n_0^2 - 1/2n^2)/\omega$  для значений параметров с рис. 1. Пунктирная линия — теоретическая локализация для одномерной модели, штрих-пунктирная — аналитическое решение (3.2.8) уравнения ФПК.

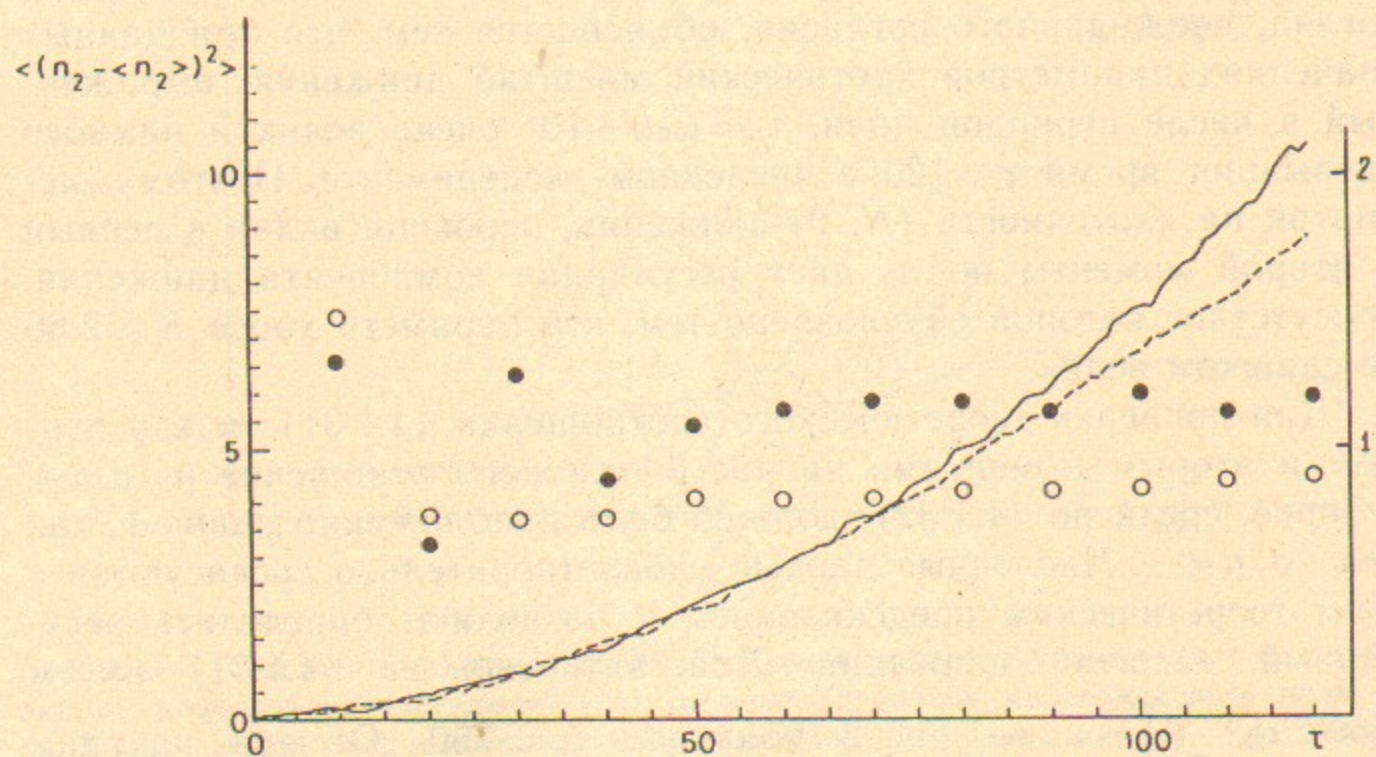


Рис. 3. Зависимость второго момента  $\mu_2$  по  $n_2$  для классического (штриховая линия) и квантового (сплошная линия) распределений для параметров рис. 1. Показано также отношение  $\mu_2/n_{20}$  к первому моменту  $\mu_1$  по  $n_2$  в классическом (O) и квантовом (●) случаях (правая шкала).

Относительно небольшое значение  $\lambda$ , по-видимому, связано с тем, что для  $\omega_0 = 2.5$  начальные условия лежат между двумя основными резонансами, где мера устойчивой компоненты относительно мала. Таким образом, регулярный масштаб  $t_R \approx 300$  оказывается намного больше, чем время локализации  $t_D \approx t_\Phi \approx 1$ , и даже больше, чем время ионизации  $t_I \approx 160$ . Для регулярного движения  $\sigma = k\lambda t$ , а динамика описывается линейным гамильтонианом (4.1.25) и поэтому квантовая динамика внутри оболочки близка к классической. Кроме того, различия можно ожидать только на временах, больших характерного масштаба времени, который для рис. 3 оказывается слишком велик.

Следует, однако, отметить, что в принципе локализация может иметь место и для  $(l, \psi)$ -движения. Действительно, в области развитого хаоса ( $K \gg 1$ )  $\cos \theta = 0$ , а поскольку  $\sigma = k \sum_j \cos \theta_j$ , то локализация по времени  $\sigma$  может иметь место так же, как и по числу фотонов  $N = -kH \sum_j \sin \theta_j$  (см. (4.1.20)).

На рис. 4 показана функция распределения вероятности  $F(n, n_2)$  по двум квантовым числам для значений параметров рис. 2. Для сравнения распределений для разных начальных значений  $n_{20}$  и одних и тех же  $\epsilon_0 = 0.04$ ,  $\omega_0 = 2.5$ ,  $n_0 = 66$  на рис. 5 показано распределение линий уровня  $F(n, n_1) = \text{const}$ . Интересно отметить, что наиболее сильно возбуждаются одномерные состояния. Причина этого связана с тем, что для таких состояний  $H \approx 1$  (см. (4.1.24), (4.1.25)), в то время как для состояний с  $n_2 \sim n$  величина  $H$  в среднем становится меньше, что приводит к уменьшению длины локализации (4.2.1).

Таким образом, полученные результаты показывают, что локализация в двумерном случае происходит фактически так же, как и в одномерном. При этом сильное возбуждение внутри оболочки не влияет на локализацию по энергии. Такое поведение системы связано с существованием приближенного интеграла движения и медленностью  $(l, \psi)$ -динамики, в основе которой лежит кулоновское вырождение.

Поэтому для получения двумерной делокализации в первую очередь надо разрушить вырождение. Один путь состоит во введении постоянного поля, как это было описано выше. Другой способ может заключаться в рассмотрении микроволновой ионизации, например, в щелочных атомах, в которых квантовый дефект приводит к снятию вырождения. Однако, из-за того, что для орби-



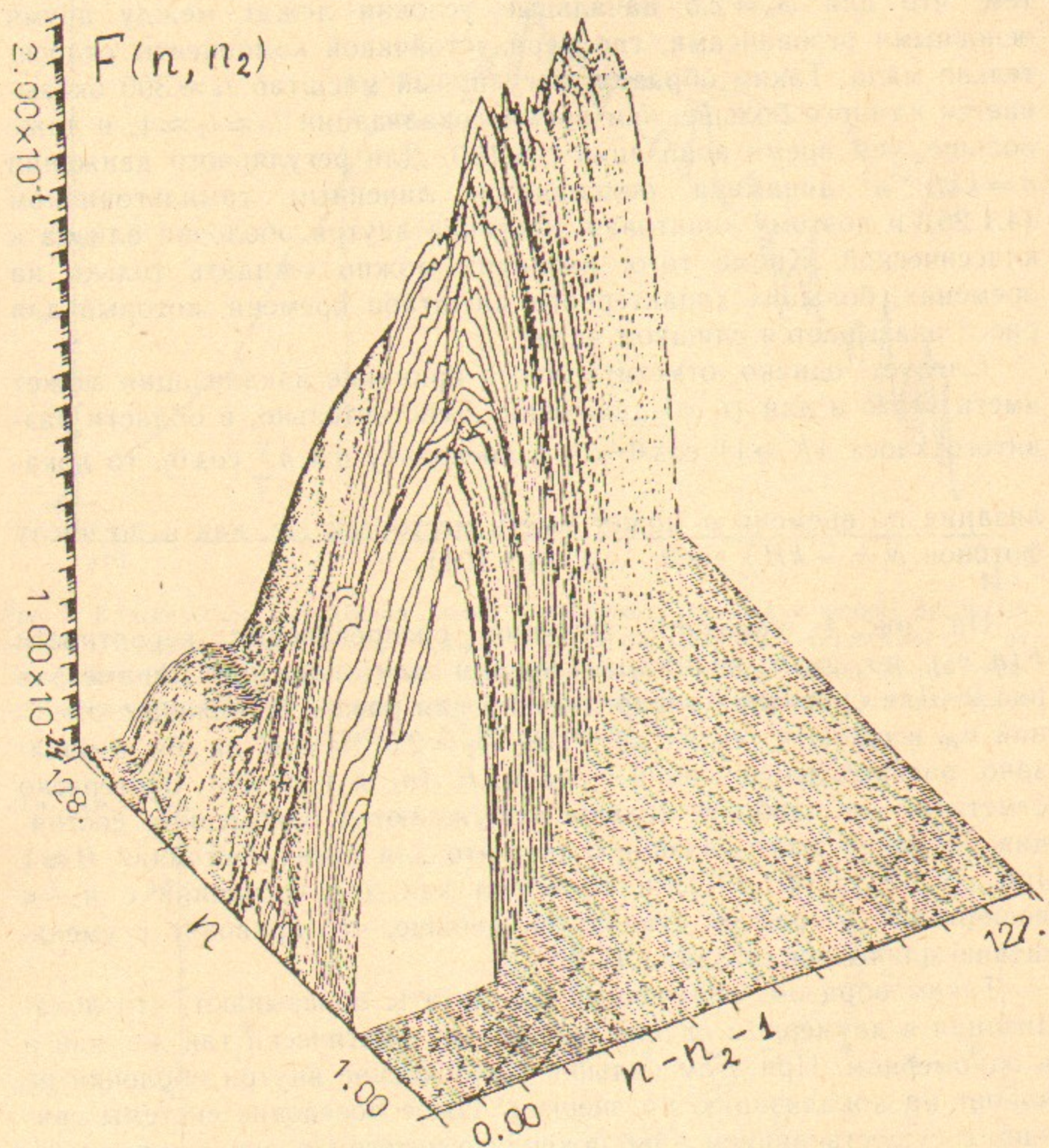


Рис. 4. Пример полного квантового распределения для параметров рис. 1.

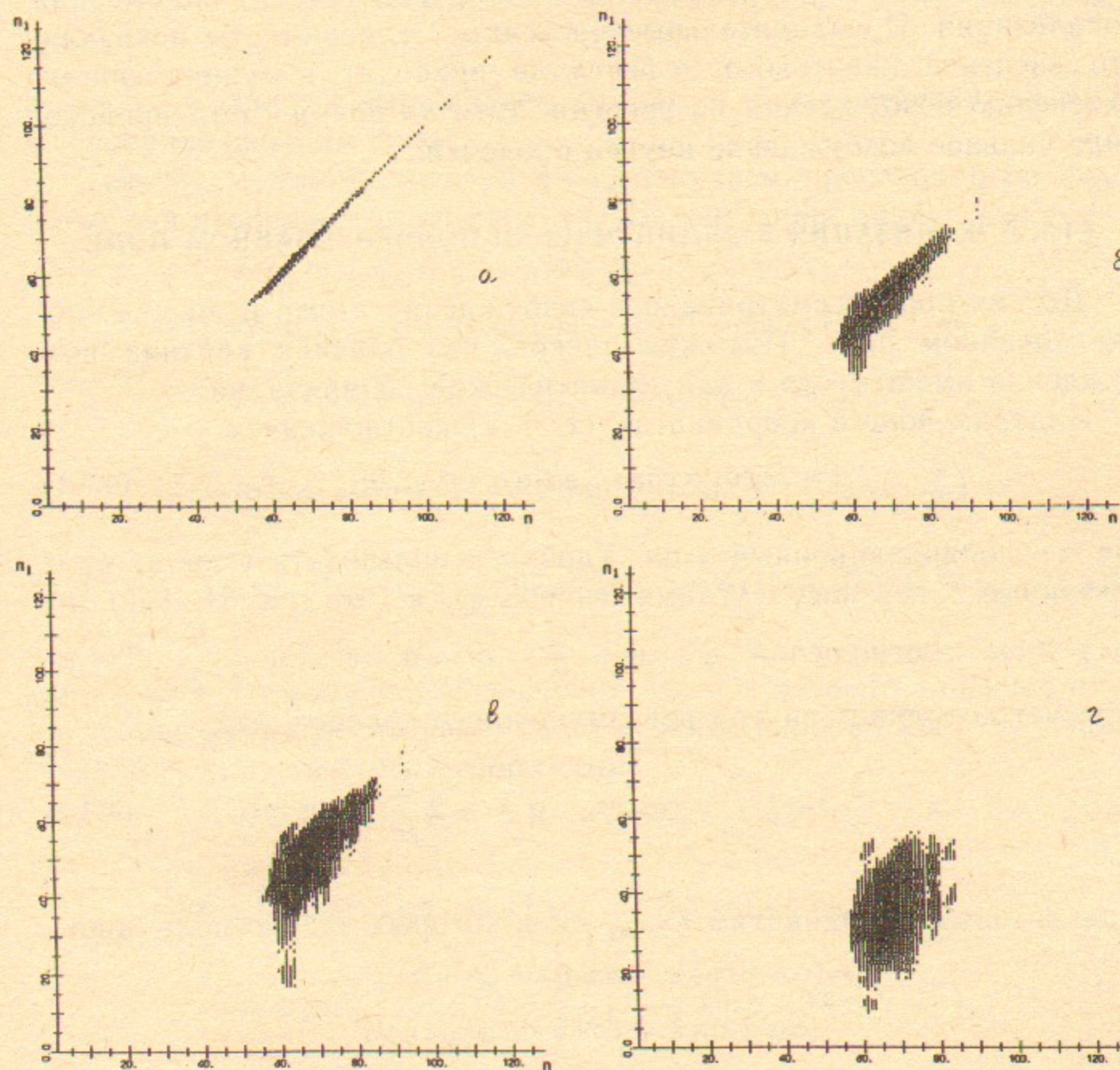


Fig. 13c

Fig. 13d

Рис. 5. Линии уровня для распределений  $F(n, n_1)$  усредненных по 10 периодам для  $\varepsilon_0=0.04$ ,  $\omega_0=2.5$ ,  $n_0=66$ :  $n_{20}=0$  (а);  $n_{20}=13$  (б);  $n_{20}=15$  (в) (ср. рис. 4);  $n_{20}=30$  (г). (◆)  $-10^{-1} < F < 1$ ; (■)  $-10^{-2} < F < 10^{-1}$ ; (×)  $-10^{-3} < F < 10^{-2}$ ; (○)  $-10^{-4} < F < 10^{-3}$ ; (+)  $-10^{-5} < F < 10^{-4}$ ;  $110 < \tau < 120$ .



тальных моментов с  $l \geq 3$  квантовый дефект очень мал, то в этом случае, по-видимому, будет по-прежнему иметь место одномерная локализация. Предварительные численные эксперименты показали, что введение квантового дефекта не приводит к существенному изменению возбуждения по энергии, хотя за время счета происходило сильное возбуждение внутри оболочки.

#### § 4.3. ЛОКАЛИЗАЦИЯ В ЭЛЛИПТИЧЕСКИ-ПОЛЯРИЗОВАННОМ ПОЛЕ

До сих пор рассматривалось возбуждение атома в линейно-поляризованном поле. Покажем теперь, что близкая картина возбуждения имеет место и для эллиптической поляризации.

Зададим поле в координатах  $(x, y, z)$  соотношением

$$\vec{e} = (\varepsilon \cos \alpha \cos \omega t, \varepsilon \sin \alpha \sin \omega t, 0), \quad (4.3.1)$$

где  $\alpha$  — поляризационный угол. Удобно использовать углы  $\varphi, \psi, \vartheta$ , связанные с обычными углами Эйлера  $\varphi', \psi', \vartheta'$  (см. II, [1]) посредством соотношений  $\varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2}$ ,  $\vartheta' = \vartheta$ ,  $\psi' = \psi - \frac{\pi}{2}$ . Тогда, пересчет координат внутри невозмущенного эллипса, где

$$x' = \frac{3}{2}e - 2 \sum_{s=1}^{\infty} x_s \cos s\vartheta, \quad y' = -2 \sum_{s=1}^{\infty} y_s \sin s\vartheta; \quad (4.3.2)$$

к декартовым координатам  $(x, y, z)$ , в которых задано поле, дает

$$\begin{aligned} x &= (\cos \varphi \cos \psi - \cos \vartheta \sin \varphi \sin \psi) x' - \\ &\quad - (\cos \varphi \sin \psi + \cos \vartheta \sin \varphi \cos \psi) y', \\ y &= (\sin \varphi \cos \psi + \cos \vartheta \cos \varphi \sin \psi) x' - \\ &\quad - (\sin \varphi \sin \psi - \cos \vartheta \cos \varphi \cos \psi) y'. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Учитывая, что  $\cos \vartheta = m/l$ , получаем гамильтониан

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2n^2} + \varepsilon n^2 \left\{ \cos \alpha \cos \omega t \left[ \left( \cos \varphi \cos \psi - \frac{m}{l} \sin \varphi \sin \psi \right) x' - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left( \cos \varphi \sin \psi + \frac{m}{l} \sin \varphi \cos \psi \right) y' \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sin \alpha \sin \omega t \left[ \left( \sin \varphi \cos \psi + \frac{m}{l} \cos \varphi \sin \psi \right) x' - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left. - \left( \sin \varphi \sin \psi - \frac{m}{l} \cos \varphi \cos \psi \right) y' \right\}. \quad (4.3.4)$$

Здесь  $x_s, y_s$  даются выражением (4.1.2);  $n, l, m$  — действия, а  $\theta, \psi, \varphi$  — сопряженные им фазы.

Тем же методом, что и в § 4.1, получаем производящую функцию для отображения за один оборот электрона вокруг ядра:

$$\begin{aligned} G(\bar{N}, \Phi; \bar{l}, \psi; \bar{m}, \varphi) &= \bar{N}\Phi + \bar{l}\psi - 2\pi(-2\omega\bar{N})^{-1/2} - \\ &- k \left\{ \cos \Phi \left[ \cos \varphi \cos \psi (\cos \alpha (1 - \omega\bar{N}\bar{l}^2) + \sin \alpha 1.09\omega^{1/3}\bar{m}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sin \varphi \sin \psi \left( \cos \alpha (1 - \omega\bar{N}\bar{l}^2) \frac{\bar{m}}{\bar{l}} + \sin \alpha 1.09\omega^{1/3}\bar{l} \right) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \sin \Phi \left[ \cos \varphi \sin \psi \left( \cos \alpha 1.09\omega^{1/3}\bar{l} + \sin \alpha (1 - \omega\bar{N}\bar{l}^2) \frac{\bar{m}}{\bar{l}} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin \varphi \cos \psi (\cos \alpha 1.09\omega^{1/3}\bar{m} + \sin \alpha (1 - \omega\bar{N}\bar{l}^2)) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

где  $N, \Phi$  и  $k$  имеют те же значения что и в § 4.3. Аналогично случаю двумерных траекторий можно перейти к новой фазе  $\theta$ , сопряженной с  $N$ , и получить отображение

$$\bar{N} = N - kH \sin \theta, \quad \bar{\theta} = \theta - 2\pi\omega(-2\omega\bar{N})^{-3/2}, \quad (4.3.6)$$

где

$$\begin{aligned} H^2 &= \left[ \cos \varphi \cos \psi \left( \cos \alpha \left( 1 + \frac{l^2}{2n^2} \right) + \sin \alpha 1.09\omega^{1/3}m \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sin \varphi \sin \psi \left( \cos \alpha \left( 1 + \frac{l^2}{2n^2} \right) \frac{m}{l} + \sin \alpha 1.09\omega^{1/3}l \right) \right]^2 + \\ &\quad + \left[ \cos \varphi \sin \psi \left( \cos \alpha 1.09\omega^{1/3}l + \sin \alpha \left( 1 + \frac{l^2}{2n^2} \right) \frac{m}{l} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sin \varphi \cos \psi \left( \cos \alpha 1.09\omega^{1/3}m + \sin \alpha \left( 1 + \frac{l^2}{2n^2} \right) \right) \right]^2. \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Уравнения (4.3.6) получаются из гораздо более сложного отображения, даваемого производящей функцией (4.3.5), в приближении, при котором пренебрегается зависимостью  $H$  от  $N$ . При этом происходит расщепление  $(N, \theta)$ -движения и медленной динамики  $(l, \psi; m, \varphi)$ , которая в новом времени  $\sigma = k \int \cos \theta dt$  описывается гамильтонианом  $H$ . В принципе эта динамика может быть хаотической. Отметим, что одномерная модель соответствует  $\varphi = \alpha = 0$ ,



$m=l$ . Если начально плоскость движения совпадает с плоскостью поляризации ( $m=l$ ,  $\varphi=0$ ), то движение уже не выходит из этой плоскости. При этом для циркулярной поляризации ( $\alpha=\pi/4$ ) выражение (4.3.7) принимает простой вид:

$$H^2 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{l^2}{2n^2} + 1.09\omega^{1/3}l \right]^2 \quad (4.3.8)$$

Поскольку (4.3.8) не зависит от фаз, то орбитальный момент оказывается приближенным интегралом движения.

Из полученных результатов так же, как и для двумерных траекторий, следует, что и для эллиптической поляризации возбуждение описывается одномерной моделью, а длина локализации дается выражением (4.2.1).

Интересно отметить, что классическая модель атома водорода в циркулярно-поляризованном поле оказывается формально очень близкой к движению кометы в солнечной системе, когда учитывается влияние только Солнца и Юпитера. Действительно, в том случае, когда плоскость кометы совпадает с плоскостью Юпитера, а ее перигелий лежит за его орбитой, ее динамика описывается отображением вида (4.3.6) [5]. И даже динамика кометы Галлея, как было показано в [6], описывается отображением, близким к (4.3.6) (в этом случае  $\sin \theta$  заменяется пилообразной функцией  $\theta$ ).

#### § 4.4. ОБСУЖДЕНИЕ ЛАБОРАТОРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Современная экспериментальная техника позволяет эффективно возбуждать атомы в состояния с главным квантовым числом  $n \sim 100$ . Один способ создания таких атомов состоит в том, что пучок протонов с энергией порядка 10 кэВ пропускается через благородный газ. В результате перезарядки образуется пучок атомов с  $n \approx 10$ . Более высокие состояния  $n \sim 100$  получают последующим возбуждением при помощи  $\text{CO}_2$ -лазера. Такая методика использовалась в экспериментах Байфильда и Коча (см. I, [1, 12, 18, 19, 49—53]). Другой способ основан на двух- и трехступенчатых схемах возбуждения щелочных атомов перестраиваемыми лазерами (см., например, I, [2, 3, 7]). При этом обычно используется тепловой пучок атомов. Таким образом, в лаборатории были созданы атомы с максимальным  $n \approx 520$  (см. I, [7]).

Введение постоянного электрического поля приводит к шарковскому расщеплению уровней и позволяет путем настройки в

резонанс возбуждать состояния с заданными параболическими квантовыми числами. Так в работах [50—53] эксперименты проводились с атомами водорода в состояниях с  $n \approx 63$ ,  $n_1 = m = 0$ . В этих экспериментах исследовался процесс возбуждения таких атомов в волноводе с линейно-поляризованным монохроматическим электрическим полем с частотой  $\omega/2\pi \approx 8$  ГГц. Экспериментальная техника позволяла находить не только вероятность ионизации, но и определять населенности на уровнях вблизи начально-возбужденного:  $58 \leq n \leq 73$ . В результате было показано, что за время взаимодействия с полем ( $\tau \approx 3000$ ) одномерность состояний не нарушается. Экспериментально была найдена зависимость вероятности ионизации от напряженности поля, которая имела пороговый характер.

В этой серии экспериментов частота поля была значительно меньше кеплеровской частоты ( $\omega_0 \approx 1/4$ ) и поэтому процесс ионизации происходил не диффузионным образом. Экспериментальное значение порога ионизации по полю оказалось в 1.5—2 раза меньше границы хаоса в классической системе [7]. Причина более ранней ионизации в квантовом случае пока остается неясной. Возможно, что усиление ионизации обусловлено многофотонными переходами из начального состояния в область хаоса. Вместе с тем имеются опасения, что в экспериментах присутствовало шумовое микроволновое излучение, которое могло усиливать ионизацию.

В экспериментах [49] (см. I) частота поля  $\omega/2\pi \approx 10$  ГГц также была намного ниже кеплеровской ( $\omega_0 \approx 0.15$ ), поскольку начально возбуждались уровни с  $n \approx 45$ . Для таких низких частот ионизация наблюдалась только при достаточно сильных полях, которые уже были близки к границе статической ионизации ( $\epsilon_0 \sim 1$ ). То, что ионизация идет все же при поле, меньшем статической границы, связано, видимо, с усилением возбуждения за счет многофотонных резонансных переходов, которые отчетливо наблюдались в эксперименте. Кроме того, и в классической системе для  $\omega_0 \approx 0.15$  ионизация происходит при  $\epsilon_0$ , несколько меньшем  $\epsilon_s = 0.13$ .

Систематическое исследование ионизации в области  $0 \leq \omega_0 \leq 1$  было проведено в экспериментах [18, 19] (см. I). При этом частота поля была фиксирована ( $\omega/2\pi = 9.9$  ГГц), а изменение  $\omega_0$  достигалось путем возбуждения разных начальных уровней в интервале  $n = 32 \div 90$ . Путем воздействия статических электрических полей, направленных под разными углами, создавалось микроканоническое распределение вероятности внутри оболочки с данным  $n_0$ .



Однако, вопрос о том, насколько близко получаемое распределение к микроканоническому, остается неясным, хотя авторы и проводили косвенную проверку по ионизации в статическом поле. Поэтому возбуждение атома в состояние с определенными квантовыми числами, как это делалось в экспериментах [50—53] (см. I), представляется более предпочтительным и более удобным для проведения сравнений с численным моделированием. Использование резонатора позволило довольно точно определить напряженность поля, воздействующего на атомы ( $\Delta\varepsilon/\varepsilon \approx 5\%$ ). Кроме того, из-за малого размера резонатора (около 3 см) время взаимодействия с полем сократилось до  $\tau \approx 320$ . Такое время взаимодействия близко к оптимальному, поскольку, с одной стороны, оно больше, чем время ионизации в классической системе, а с другой, оно не слишком велико для того, чтобы проявилось влияние различных шумов (в частности, черное излучение при комнатной температуре). Такой интервал времени также более удобен для численных экспериментов.

Сравнение экспериментальных данных с численным моделированием классической динамики привело авторов [18, 19] к выводу о том, что последняя прекрасно описывает эксперимент, а квантовые эффекты несущественны. Действительно, экспериментальная полевая граница, при которой наблюдается 10%-ная ионизация, вполне удовлетворительно согласуется с численными данными и с теоретической оценкой для границы хаоса при  $\omega_0 \approx 0.5 \div 1$ . На этом фоне небольшие отклонения, такие, например, как появление немонотонной зависимости вероятности ионизации от поля для  $n_0 \approx 37$  ( $\omega_0 \approx 0.08$ ), выглядели только как исключения, подтверждающие правило. Кроме того, анализ этого эффекта показал [8], что он связан со значительным сближением квазиэнергетических уровней при некоторых значениях  $\varepsilon$ , что, вообще говоря, не является типичной ситуацией.

Причина такого согласия эксперимента с классической динамикой заключается в том, что в той области, где имеет место диффузионная ионизация ( $\omega_0 \approx 0.5 \div 1$ ), классическая граница хаоса  $\varepsilon_c$  (3.1.16) лежит выше квантовой границы делокализации  $\varepsilon_q$  (3.5.1). Сравнение экспериментальных данных для напряженности поля, при которой ионизируется 10% атомов, с этими двумя теоретическими границами представлено на рис. 6 (из-за достаточно большого времени взаимодействия эту 10%-ную границу можно рассматривать как границу ионизации). Так как в эксперименте частота была фиксирована, а менялся номер уровня  $n_0$ , то граница кванто-

вой делокализации (3.5.1) на этом рисунке дается прямой линией

$$\varepsilon_q \approx \frac{\omega^{1/6}}{\sqrt{6.6}} \omega_0 \approx 0.042 \omega_0. \quad (4.4.1)$$

Классическая граница для  $\omega_0 > 0.5$  определяется формулой (3.1.16), а для  $\omega_0 < 0.5$  проводилась экстраполяция к границе ионизации в статическом поле (штриховая линия). Реальная граница определяется большей из двух границ:  $\varepsilon_c$  и  $\varepsilon_q$ . Как это на первый взгляд ни парадоксально, но с ростом  $n_0$  определяющей становится граница квантовой делокализации  $\varepsilon_q$  (4.4.1). И наоборот, с понижением  $n_0$  граница ионизации дается классической формулой (3.1.16).

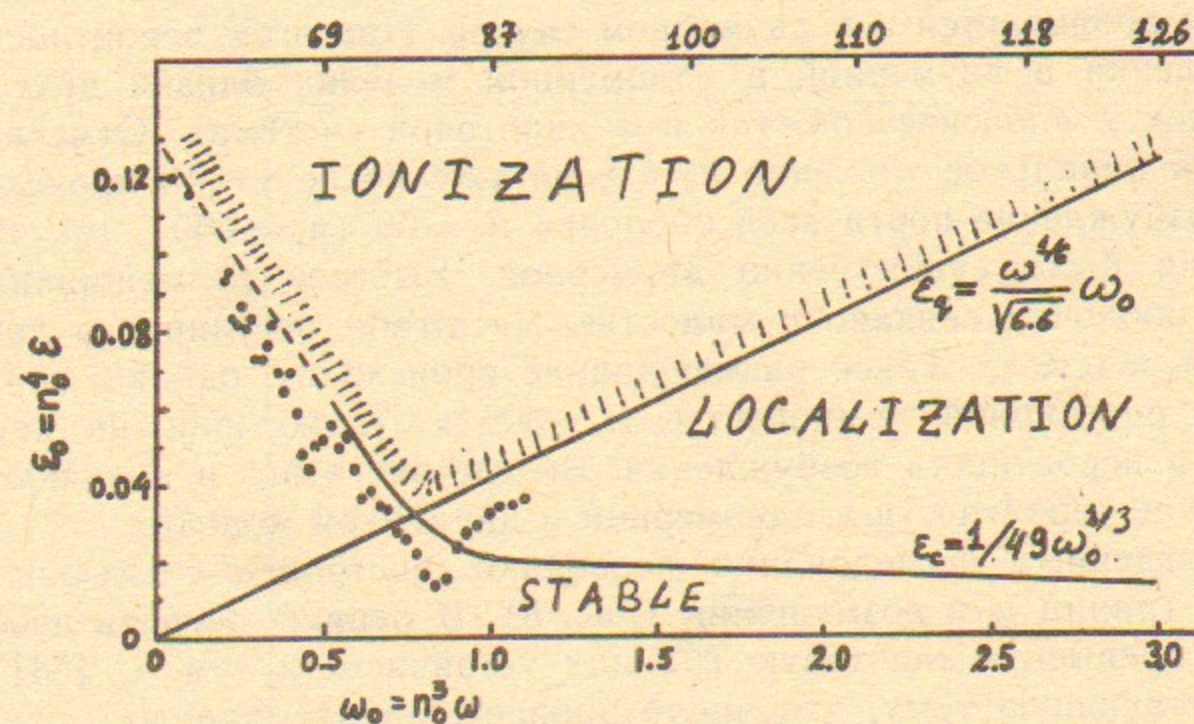


Рис. 6. 10%-ная граница ионизации: точки — экспериментальные данные из [18, 19] (см. I), штриховая линия — экстраполяция классической границы хаоса к границе ионизации в статическом поле, сплошная кривая — классическая граница хаоса (3.1.16), сплошная прямая — граница делокализации (3.5.1).

Из рис. 6 видно, что уже относительно небольшое увеличение  $n_0$  (до  $n_0 \approx 120$ ) должно привести к существенному отклонению от классической границы. Однако, более прямой путь к наблюдению локализации заключается в повышении микроволновой частоты до  $30 \div 50$  ГГц, когда локализация проявляется уже для  $n_0 \approx 66$  ( $\omega_0 \approx 2$ ).

Вместе с тем отличие квантового возбуждения от классического можно наблюдать и при не очень больших значениях  $\omega_0$ . В качест-



ве примера, на рис. 7,а для одномерной модели показана зависимость вероятности возбуждения от числа периодов поля при  $\omega_0=1$ ,  $\varepsilon_c=0.03$ ,  $n_0=63$  и  $n_0=66$ . Для  $n_0=66$  квантовая вероятность намного меньше классической. Для  $n_0=63$  разница не столь велика, но по-прежнему квантовая вероятность меньше. Отметим, что данные рис. 7,а, не противоречат численным результатам работы [5] (см. II), в которой были получены близкие значения 10%-ной границы в классической и квантовой системах. Причина этого заключается в том, что вблизи границы хаоса вероятность возбуждения является резкой функцией поля, и поэтому малое изменение  $\varepsilon_0$  приводит к сильному изменению вероятности.

Из рис. 7,б также видно, что для выбранных параметров локализация проявляется и в двумерном случае. При этом вероятности возбуждения в двумерной и одномерной моделях близки друг к другу как в классической, так и в квантовой системах. Отметим, что хотя начальное значение  $n_2=0$ , но уже после  $\tau=40$  происходило возбуждение почти всей оболочки  $n_0=66$  ( $\mu_2 \approx 100$ ), так что динамика была существенно двумерной. Быстрое размешивание внутри оболочки связано с малостью масштаба регулярного движения  $\tau_R \approx t_R \approx 13$ . Такое размешивание происходит, однако, только для регулярной компоненты ( $t_c \sim 300 \gg t_R$ ), которая не дает вклада в вероятность возбуждения. Вследствие этого и получаются близкие вероятности в одномерной и двумерной моделях.

Проведенные исследования позволяют построить следующую систему границ для возмущения (рис. 8). В первую очередь необходимо превысить квантовую границу устойчивости (см. I, [54]), соответствующую тому, что число уровней, захватываемых одним толчком (изменение действия в (3.4.2)), должно быть больше единицы:

$$k = \frac{2.6\varepsilon_0 n_0}{\omega_0^{5/3}} > 1 (\omega_0 > 1).$$

Превышение этой границы, однако, вовсе не означает, как это считалось в [9], что в области хаоса  $\varepsilon_0 > \varepsilon_c$  будет происходить диффузионная ионизация. На самом деле, при  $k > 1$  квантовые эффекты приводят к локализации диффузии и экспоненциально малой вероятности ионизации. Для возникновения диффузионной ионизации необходимо превысить границу делокализации  $\varepsilon_q \gg \omega_0^{5/3} / 2.6n_0$  (3.5.1).

Для частот, меньших кеплеровской ( $\omega_0 < 1$ ), граница ионизации определяется фактически классической границей хаоса, кото-

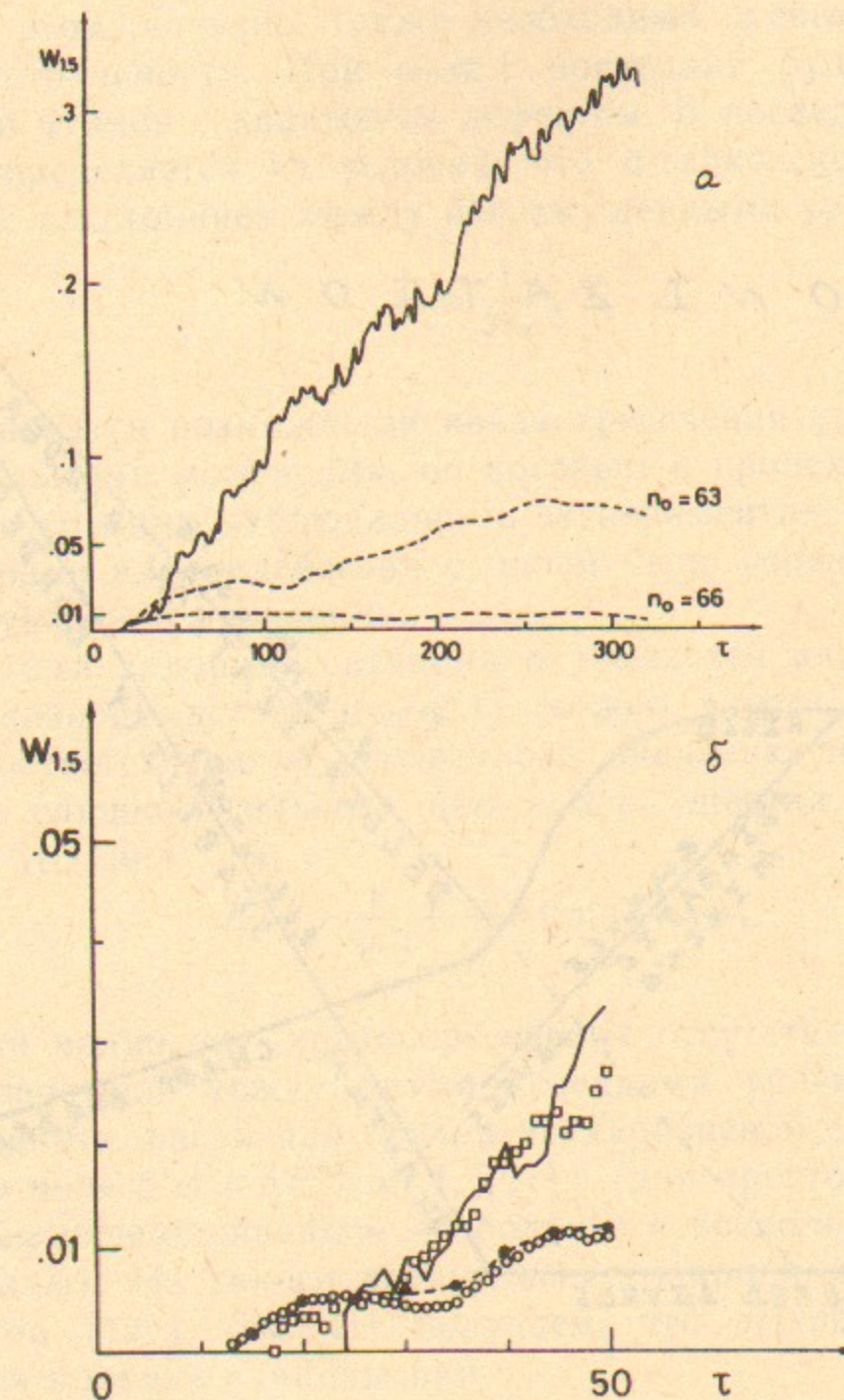


Рис. 7. Зависимость вероятности возбуждения от времени. а—Одномерный случай с  $\varepsilon_0=0.03$ ,  $\omega_0=1$ , штриховая линия — квантовые данные для  $n_0=63$  и  $n_0=66$ ; сплошная линия — классические данные. б—Сравнение между одномерными и двумерными квантовыми вычислениями с  $\varepsilon_0=0.03$ ,  $\omega_0=1$ ,  $n_0=66$ , начально  $n_2=0$ :  $\square$  — одномерная классическая модель; сплошная линия — двумерная классическая модель; штриховая линия — одномерная квантовая модель;  $\circ$  — двумерная квантовая модель.



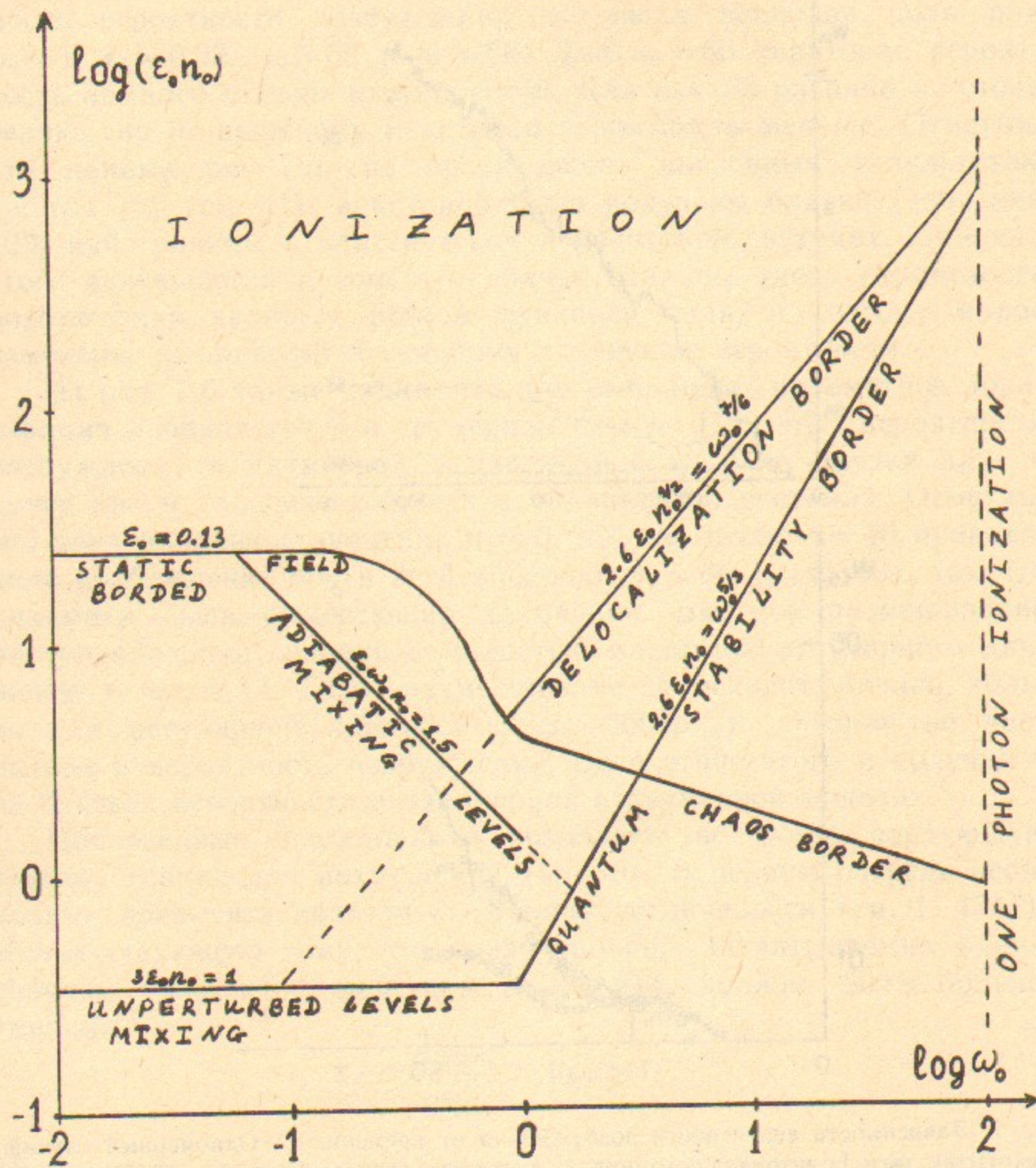


Рис. 8. Квантовая граница устойчивости, граница хаоса и граница делокализации для  $n_0 = 200$ .

рая при  $\omega_0 \rightarrow 0$  приближается к границе ионизации в статическом поле. При этом, конечно, также необходимо превысить квантовую границу устойчивости. При  $\omega_0 \ll 1$  последняя будет разной для водорода и атомов с квантовым дефектом. В последнем случае эта граница определяется из условия, что штарковское расщепление сравнимо с расстоянием между невозмущенными уровнями [10]:

$$\epsilon_0 \approx \frac{1}{3n_0}. \quad (4.4.2)$$

Тогда становятся возможными квазипересечения уровней с разными орбитальными моментами, по которым и происходит ионизация атома. Эта граница наблюдалась в экспериментах [10]. При этом, правда, время взаимодействия с полем было гораздо больше, чем при диффузионной ионизации.

Для атома водорода ситуация оказывается иной. В этом случае для низкой частоты ( $\omega_0 \ll 1$ ) можно ввести адиабатические уровни, соответствующие мгновенному значению поля. Для постоянного, не слишком сильного поля  $\epsilon_0 \ll \epsilon_s$ , энергии уровней даются формулой Штарка

$$E = -\frac{1}{2n^2} + \frac{3}{2}\epsilon(t)n(n_1 - n_2),$$

из которой видно, что квазипересечения отсутствуют. Тогда вероятность перехода между двумя соседними уровнями  $n$  и  $n+1$  можно оценить, как и для случая двухуровневой системы в низкочастотном поле с  $\omega \ll \Delta E$  (см. I, [21]) (для простоты пренебрежем возможным перемешиванием в оболочке и воспользуемся одномерной моделью). Из такого двухуровневого приближения на основе результатов [126] (см. II) получаем, что вероятность перехода становится порядка единицы при

$$V_{nn+1} \sim \frac{\Delta E}{\omega}; \quad \epsilon_0 \sim \epsilon_a \approx \frac{3}{2\omega_0 n_0}. \quad (4.4.3)$$

Эта граница имеет смысл квантовой границы устойчивости для адиабатических уровней. При не слишком низких частотах она лежит, вообще говоря, ниже классической границы ( $\epsilon_c > \epsilon_a$ ), которая и определяет границу ионизации. В связи с этим заметим, что интерпретация [8] формулы (4.4.3) как границы ионизации неправильна. Кроме того, в [8] выражение, близкое к (4.4.3), рассматривалось как смешивание невозмущенных уровней, которое на



самом деле определяется выражением (4.4.2). Сравнение [8] границы (4.4.3) с экспериментальными данными [18, 19] (см. I) неправомерно также и по той причине, что в области сравнения второй порядок теории возмущений оказывается больше первого (формула (6.11) в [8]). Ввиду того, что выражение (4.4.3) получено при условии  $\varepsilon_a < \varepsilon_s$ , то при  $\varepsilon_a \geq 0.13$  (4.4.3) становится несправедливым. Ионизация при этом определяется классической границей.

Дадим теперь оценки для различных физических эффектов, которые могут повлиять на процесс возбуждения в реальном эксперименте. Одним из таких эффектов является черное излучение при комнатной температуре, которое может приводить к существенному изменению населенностей (см., например, I, [1, 3]). Поэтому возникает вопрос о том, не приведет ли оно к разрушению локализации. Для ответа на него воспользуемся выражением для скорости убывания вероятности на исходном уровне под действием излучения с температурой  $T$  (см. I, [1], стр. 200):

$$\Gamma_T \approx \frac{4T}{3c^3 n^2}. \quad (4.4.4)$$

Здесь принято, что  $n^{-3} \ll T$ ,  $c$  — скорость света, используются атомные единицы. Из (4.4.4) определяем характерный масштаб времени  $t_T$ , на котором проявляются случайные флуктуации излучения. В числе оборотов  $t_T = (2\pi n_0^3 \Gamma_T)^{-1}$ . Согласно [11], для того, чтобы скорость диффузии стала такой же, как в классической системе, время  $t_T$  должно быть меньше времени локализации  $t_D$  (уширение спектра больше расстояния между линиями, см. §4.2). Отсюда следует, что оценка для требуемой температуры ( $t_T < t_D \approx l_\Phi$ ):

$$T \geq \frac{c^3 \omega_0^{10/3}}{30 \varepsilon_0^2 n_0^3}. \quad (4.4.5)$$

Из нее видно, что для типичных условий  $\omega_0 = 1$ ,  $\varepsilon_0 = 0.05$ ,  $n_0 = 50$  требуется аномально высокая температура ( $T \sim 10^8$  К) и поэтому при комнатных температурах вполне возможно наблюдать эффект локализации. При этом, однако, требуется, чтобы время взаимодействия атомов с полем было бы меньше, чем время ионизации под действием излучения. Последнее можно оценить как  $\Delta t_B \sim n^2 / \Gamma_T \sim 1$  с (при  $T \sim 300$  К и  $n_0 = 50$ ). На самом деле время взаимодействия может быть даже значительно меньше, чем время

перехода на соседний уровень  $\Gamma_T^{-1} \sim 10^{-4}$  с, как это было в [18, 19] (см. I) с  $\Delta t_{int} \approx 3 \cdot 10^{-8}$  с.

Другой физический эффект заключается в конечном времени жизни атома из-за спонтанного излучения. Однако, диффузионная ионизация идет значительно быстрее. Действительно, при  $l \sim 1$  скорость спонтанного излучения дается оценкой  $\Gamma_s \sim (c^3 n_0^3 l^2)^{-1} \ll c^{-3} n_0^{-3}$  (см. II, [6]). В то же время скорость диффузионной ионизации

$$\Gamma_D \sim \frac{\omega}{2\pi l} \sim \frac{\varepsilon_0^2}{6n_0^3 \omega_0^{4/3}},$$

(3.2.4), откуда получаем:

$$\frac{\Gamma_s}{\Gamma_D} \sim 6 \frac{\omega_0^{4/3}}{c^3 \varepsilon_0^2} \sim 10^{-3}, \quad (4.4.6)$$

где численное значение получено для типичных значений параметров  $\omega_0 = 1$ ,  $\varepsilon_0 = 0.05$ .

Покажем теперь, что поле в резонаторе можно считать классическим. Действительно, число фотонов в резонаторе объемом  $V$  равно

$$N = \frac{V \varepsilon^2}{8\pi h \omega} \sim 10^{23} \frac{\varepsilon_0^2}{\omega_0 n_0^3} \quad (4.4.7)$$

и оказывается достаточно большим. Для типичных значений  $\omega_0 = 1$ ,  $\varepsilon_0 = 0.05$ ,  $n_0 = 100$ ,  $V = 1$  см<sup>3</sup> получаем  $N \sim 10^{11}$ . Кроме того, поле в резонаторе можно считать заданным, поскольку энергия ионизации атомов много меньше энергии поля. Для того, чтобы они стали сравнимы, требуется удовлетворить условию  $\rho / 2n^2 \sim \varepsilon^2 / 8\pi$ , что требует для указанных выше параметров аномально больших плотностей  $\rho \sim 10^{11}$  см<sup>3</sup>.

Проведенное рассмотрение показывает, что эффект квантовой локализации динамического хаоса можно наблюдать в лабораторных экспериментах.

#### §4.5. НИЗКОЧАСТОТНЫЙ ХАОС

Рассмотрим теперь более подробно случай низкочастотного линейно-поляризованного поля с  $\omega n^3 \ll 1$ . В этом случае оказывается, что из-за наличия кулоновского вырождения при достаточно низких  $\omega$  движение классического электрона становится хаотическим (этот эффект был прпущен в [12], где исследовалась та же



задача). В классическом пределе это приводит к непрерывному спектру мощности излучения, существенно отличающемуся от дискретного спектра, полученного в [12]. Возникающий хаос является низкочастотным, по сравнению с кеплеровской частотой, и поэтому не вызывает значительного возбуждения по энергии. Он, однако, приводит к хаотической прецессии орбиты электрона, а в квантовом случае к эргодическим СФКЭ внутри одной оболочки (см. I, [55]). Обычная квантовомеханическая теория [12, 13] в этом случае оказывается неприменимой.

Перейдем к анализу классической динамики. Ввиду медленности изменения электрического поля  $\varepsilon(t) = \varepsilon \cos \omega t$  удобно записать классический гамильтониан в переменных действие — фаза, определяемых по движению в параболических координатах (действие — фаза для мгновенного значения поля, см. § 2.1). Производящей функцией при этом является действие  $S(\xi, \eta, \varphi, n_1, n_2, m, \varepsilon(t))$  (см. I, [4]), зависящее от поля как от параметра. В этих переменных гамильтониан системы имеет вид

$$H \approx -\frac{1}{2n^2} + \frac{3}{2} \varepsilon \cos \omega t n(n_1 - n_2) - \frac{1}{16} \varepsilon^2 \cos^2 \omega t n^4 [17n^2 - 3(n_1 - n_2)^2 - 9m^2] + \omega n^5 \varepsilon \sin \omega t \mu_1 \mu_2 \sin(\lambda_1 - \lambda_2) + \omega n^5 \varepsilon \sin \omega t \sum_{\substack{k_1, k_2 = -\infty \\ k_1 + k_2 \neq 0}}^{\infty} A_{k_1 k_2} \exp\{i(k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2)\}, \quad (4.5.1)$$

где использованы обозначения § 2.1, а

$$A_{k_1 k_2} = \frac{-i}{(k_1 + k_2)^2} [\mu_1 J'_{k_1}(\mu_1(k_1 + k_2)) J_{k_2}(\mu_2(k_1 + k_2)) - \mu_2 J_{k_1}(\mu_1(k_1 + k_2)) J'_{k_2}(\mu_2(k_1 + k_2))]. \quad (4.5.2)$$

Второй и третий члены в (4.5.1) соответствуют линейному и квадратичному эффекту Штарка (см. II, [2]), а четвертый учитывает нестационарность поля и появляется из-за явной зависимости  $S$  от времени ( $\frac{\partial S}{\partial t} \sim \dot{\varepsilon} \int z dt$ ). В (4.5.1) отброшены члены  $\sim \omega n^3 \varepsilon^2 n^8$  в  $\partial S / \partial t$  и кубическое штарковское расщепление. В последней сумме в (4.5.1) фурье-компоненты  $A_{k_1 k_2}$  имеют смысл матричных эле-

ментов переходов между адиабатическими уровнями. Отметим, что в таком представлении применимость теории возмущений определяется обычным условием  $V_{k_1 k_2} \sim n^{-3}$ , которое сводится к границе (4.4.3). Однако, даже при превышении этой границы всей этой суммой можно пренебречь, поскольку она содержит быстро осциллирующие члены с частотами  $\omega \gg n^{-3}$  (как будет видно, в области хаоса эти члены приводят к экспоненциально медленной диффузии по  $n$ ).

Из (4.5.1) следует, что наряду с точным интегралом  $m$  в используемом приближении сохраняется также значение главного квантового числа  $n$ . При этом движение удобно описывать в сопряженных переменных:

$$n_e = \frac{n_1 - n_2}{2}, \quad \psi = \lambda_1 - \lambda_2 - \frac{3\varepsilon n}{\omega} \sin \omega t.$$

Из-за переменного линейного эффекта Штарка сетка резонансов с уменьшением  $\omega$  становится все гуще (расстояние между резонансами равно  $\omega$ ) и поэтому даже при малых амплитудах поля  $\varepsilon$  для достаточно малых частот  $\omega$  происходит перекрытие нелинейных резонансов (см. I, [17]), приводящее к хаотическому движению внутри оболочки. Критерий перекрытия резонансов выполнен для

$$\varepsilon \geq \varepsilon_{sc} \approx \frac{\omega^{1/3}}{n^3} \left[ 30 \mu_1 \mu_2 J_1 \left( \frac{3\varepsilon_{sc} n}{\omega} \right) \right]^{-1/3}. \quad (4.5.3)$$

Используя асимптотику функции Бесселя при большом аргументе, получаем условие возникновения хаоса:

$$\varepsilon > \varepsilon_{sc} \approx \frac{(\omega n^3)^{1/5}}{2n^4}. \quad (4.5.4)$$

Здесь принято, что  $m \ll n$ , а  $\mu_1 \mu_2 \approx 1/4$ .

При превышении границы хаоса (4.5.4) проекция  $A_z$  вектора Рунге — Ленца меняется случайным образом в интервале  $-\left(1 - \frac{m}{n}\right) \leq A_z \leq 1 - \frac{m}{n}$ , а орбита хаотически прецессирует вокруг направления поля. Из (4.5.1) и выражения для  $\mu_1 \mu_2$  (§ 3.1) следует, что  $|\dot{\psi}| \leq \Delta \omega \approx \frac{3}{8} \varepsilon^2 n^5$ , где  $\Delta \omega$  имеет смысл полуширины образовавшегося хаотического слоя по частоте,  $|n_e| \leq n/2$ .

Рассмотрим к каким наблюдаемым эффектам приводит возникновение хаоса. Пусть в начальный момент времени электрон нахо-



дился на  $n$ -м уровне и имел параболические квантовые числа  $n_1, n_2$ . При включении слабого поля  $\varepsilon < \varepsilon_{sc}$  значения  $n_1$  и  $n_2$  оказываются приближенными интегралами движения [13]. Поэтому спонтанные радиационные переходы будут происходить только из этого состояния  $(n, n_1, n_2)$  в какие-то нижележащие атомные состояния. Совершенно другая картина возникает при  $\varepsilon > \varepsilon_{sc}$ . В этом случае происходит перекрытие резонансов и значения  $n_1, n_2$  уже не являются интегралами движения. Через некоторое время после включения поля электрон с равной вероятностью будет иметь все наборы параболических квантовых чисел, удовлетворяющих условию  $n_1 + n_2 = n - |m|$ . Соответственно изменяются вероятности спонтанных переходов, что можно зарегистрировать.

Спектр мощности движения приблизительно постоянен в области частот  $\nu$ , лежащих в интервале модуляции фазы  $\psi$ :  $|\nu| \lesssim 3\varepsilon n$ . Вне этого интервала спектр убывает экспоненциально быстро. Скорость этого убывания определяется полушириной хаотического слоя по частоте  $\Delta\omega$ :  $P(\nu) \propto e^{-\nu/\Delta\omega}$  [14] (см. также I, [27]). Так как скорость диффузии пропорциональна  $D \sim P(n^{-3})$ , то отсюда видно, что учет высокочастотных членов в (4.5.1) приведет к экспоненциально малой диффузии по энергии:  $D \propto e^{-1/(n^3 \Delta\omega)}$ . В строго математическом смысле эта диффузия приводит к ионизации в классической системе. Однако, из-за медленности этого процесса в реальной ситуации им можно пренебречь.

Отметим также, что для перекрытия многих резонансов необходимо, чтобы размер одного резонанса  $\Delta n_e \sim \left(\frac{\omega n^5 \varepsilon}{\varepsilon^2 n^4}\right)^{1/2}$  был меньше допустимой области  $n/2$ . Это дает ограничение  $\omega/n < \varepsilon$ , которое выполняется при превышении границы хаоса.

Движение внутри оболочки можно характеризовать скоростью диффузии по  $n_e$ , как и при многократном прохождении резонанса (см. II, [16]). В данном случае для диффузии получаем оценку

$$D_e = \frac{(\Delta n_e)^2}{\Delta t} \sim \left(\frac{\varepsilon \omega n^5}{4}\right)^2 \frac{\omega}{3\varepsilon n \omega} \sim \frac{\varepsilon \omega n^9}{50}$$

( $\Delta t$  измеряем в числе прохождений). Тогда длина локализации дается оценкой  $l_e \approx D_e$ . При  $l_e \gtrsim n/2$  можно ожидать, что статистика уровней квазиэнергий будет описываться распределением Вигнера — Дайсона (подробнее о статистике квазиэнергий в области хаоса см., например, в [15]). Условие применимости квазиклассического рассмотрения является  $D_e \gg 1$ .

Таким образом, с уменьшением  $\omega$ , т. е. при стремлении к статическому пределу, критическое поле для возникновения хаоса внутри оболочки также уменьшается (4.5.4). В этом результате, однако, нет никакого противоречия, поскольку время развития хаоса становится при этом все больше и больше ( $\sim \omega^{-1}$ ).

## 5. ДИФФУЗИОННОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ В ДВУХ- И ТРЕХЧАСТОТНОМ ПОЛЕ

### § 5.1. КВАНТОВЫЙ РОТАТОР С ДВУМЯ НЕСОРАЗМЕРНЫМИ ЧАСТОТАМИ

До сих пор исследовалась динамика возбуждения под действием периодического во времени возмущения. При этом в случае однородной диффузии квантовые эффекты приводили к локализации и возбуждению конечного числа уровней  $\Delta n \sim D$ . Численные эксперименты с простой моделью (см. I, [28]), показали, что эффективность возбуждения может быть резко увеличена путем введения дополнительного возмущения с несоизмеримой частотой. В дальнейшем эти результаты были подтверждены в [16].

В качестве модели для исследования этого эффекта удобно выбрать модель квантового ротатора с двумя несоизмеримыми частотами:

$$H = \frac{n_1^2}{2} + \left[ k + \varepsilon \cos\left(\frac{\omega t}{T}\right) \right] \cos \theta_1 \delta_T(\tilde{t}). \quad (5.1.1)$$

При этом амплитуда толчка становится модулированной функцией его номера  $t = \tilde{t}/T$ :  $k(t) = k + \varepsilon \cos \omega t$ . В классической системе хаос возникает при  $(k + \varepsilon)T \gtrsim 1$ . В области развитого хаоса скорость диффузии дается квазиклассическим выражением

$$D = \frac{(\Delta n_1)^2}{t} = \frac{k^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4} = \frac{k_{cl}^2}{2} = \frac{2E}{t}. \quad (5.1.2)$$

Таким образом, динамика классических систем с постоянным и переменным  $k$  не имеет принципиальных отличий. Вместе с тем динамика возбуждения квантового ротатора в двух этих случаях оказывается различной.

Так для постоянного  $k$  происходит локализация возбуждения и при  $t \gg t^* \sim D$  (см. (1.2.3)) рост энергии  $E = \langle n_1^2 \rangle / 2$  прекращается. При  $k(t) = k + \varepsilon \cos \omega t$  численные эксперименты с моделью (5.1.1) показали, что в случае несоизмеримости частот  $\omega$  и  $2\pi$  и при  $\varepsilon \gtrsim 1$  энергия ротатора растет диффузионно со временем с коэффициентом



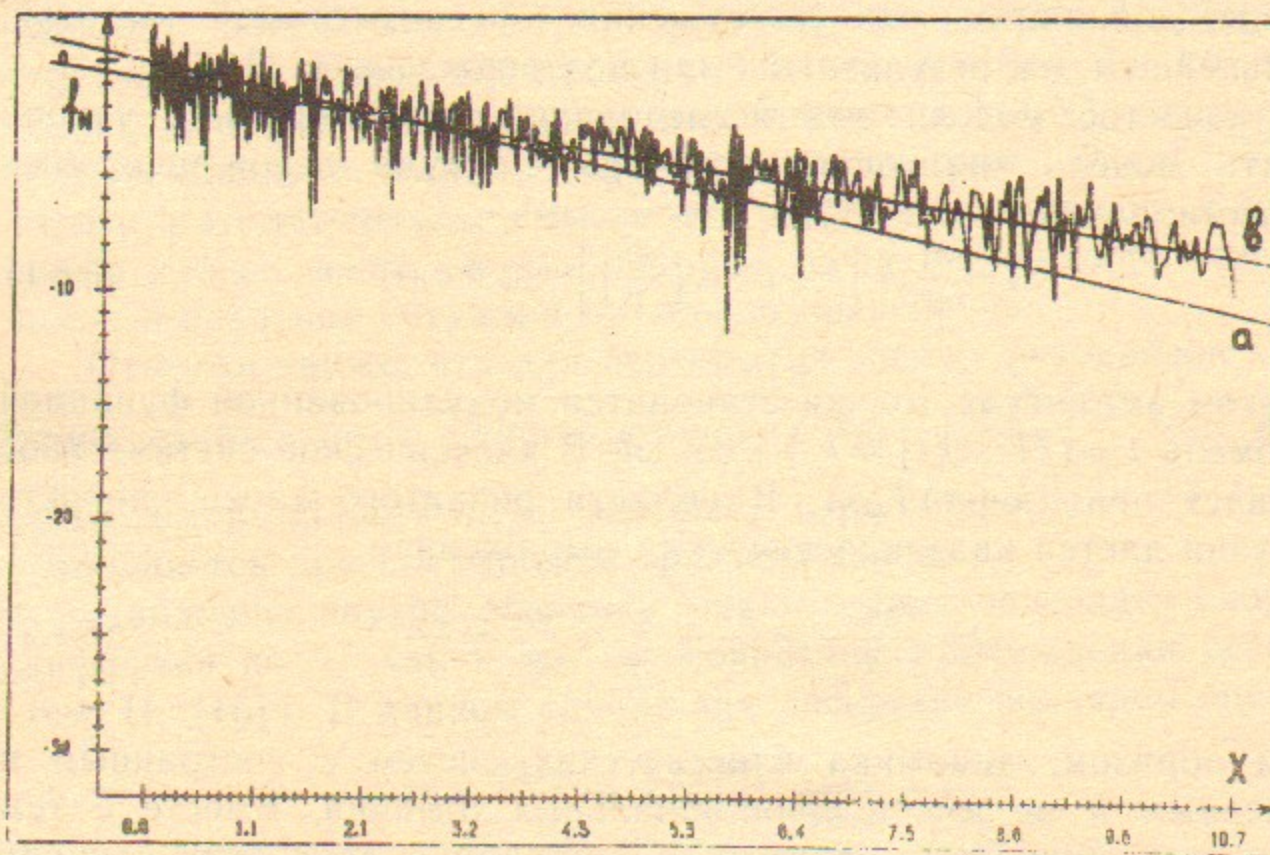
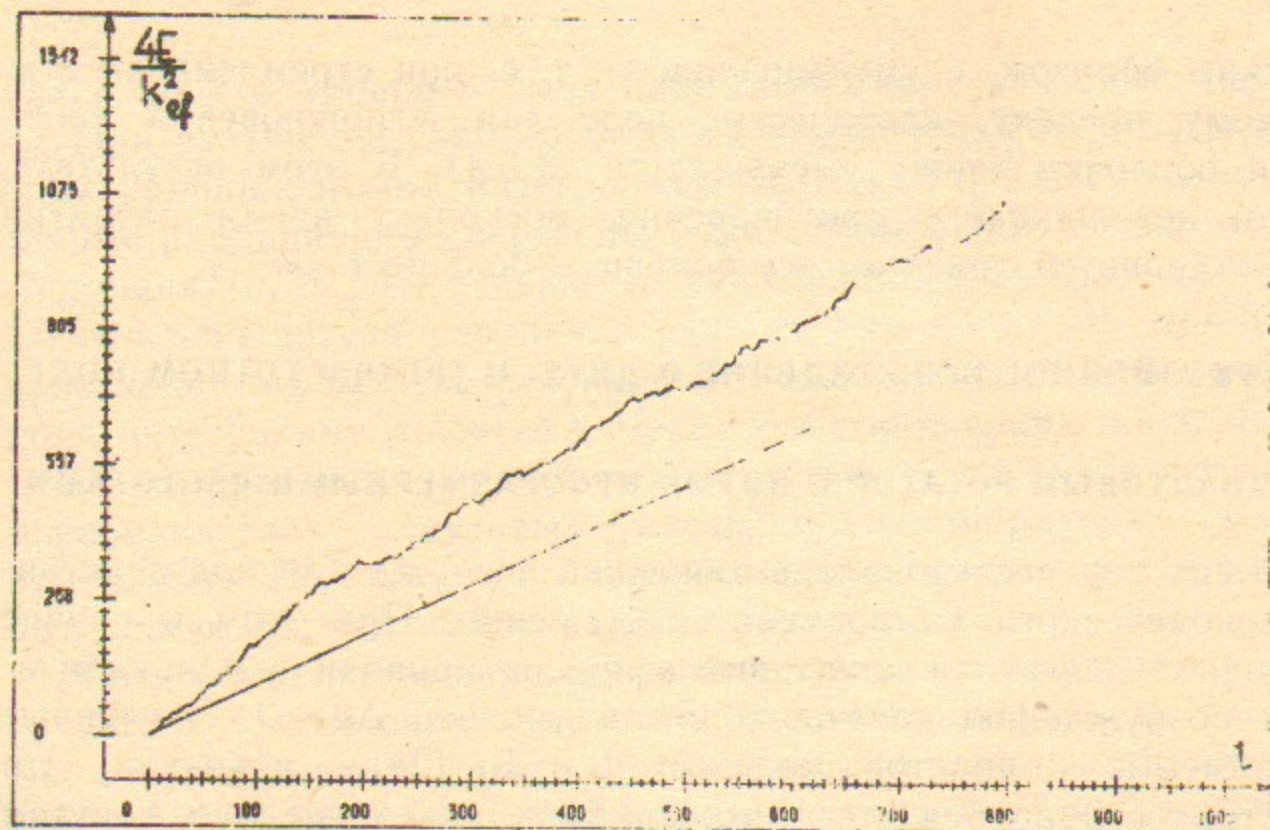


Рис. 9. а—Зависимость энергии ротатора от времени для системы (5.1.1) с  $k=0$ ,  $\varepsilon=7$ ,  $T=1$ ,  $\omega=2$ . Прямая соответствует классической диффузии (5.1.2). б—Функция распределения в нормированных координатах  $f_N = (f(n) \sqrt{\pi t k_{ef}})$ ;  $x = n^2/k_{ef}^2 t$  после 1000 периодов: а—классическое диффузионное распределение с  $D = k_{ef}^2/2$ ; б—линейная интерполяция.

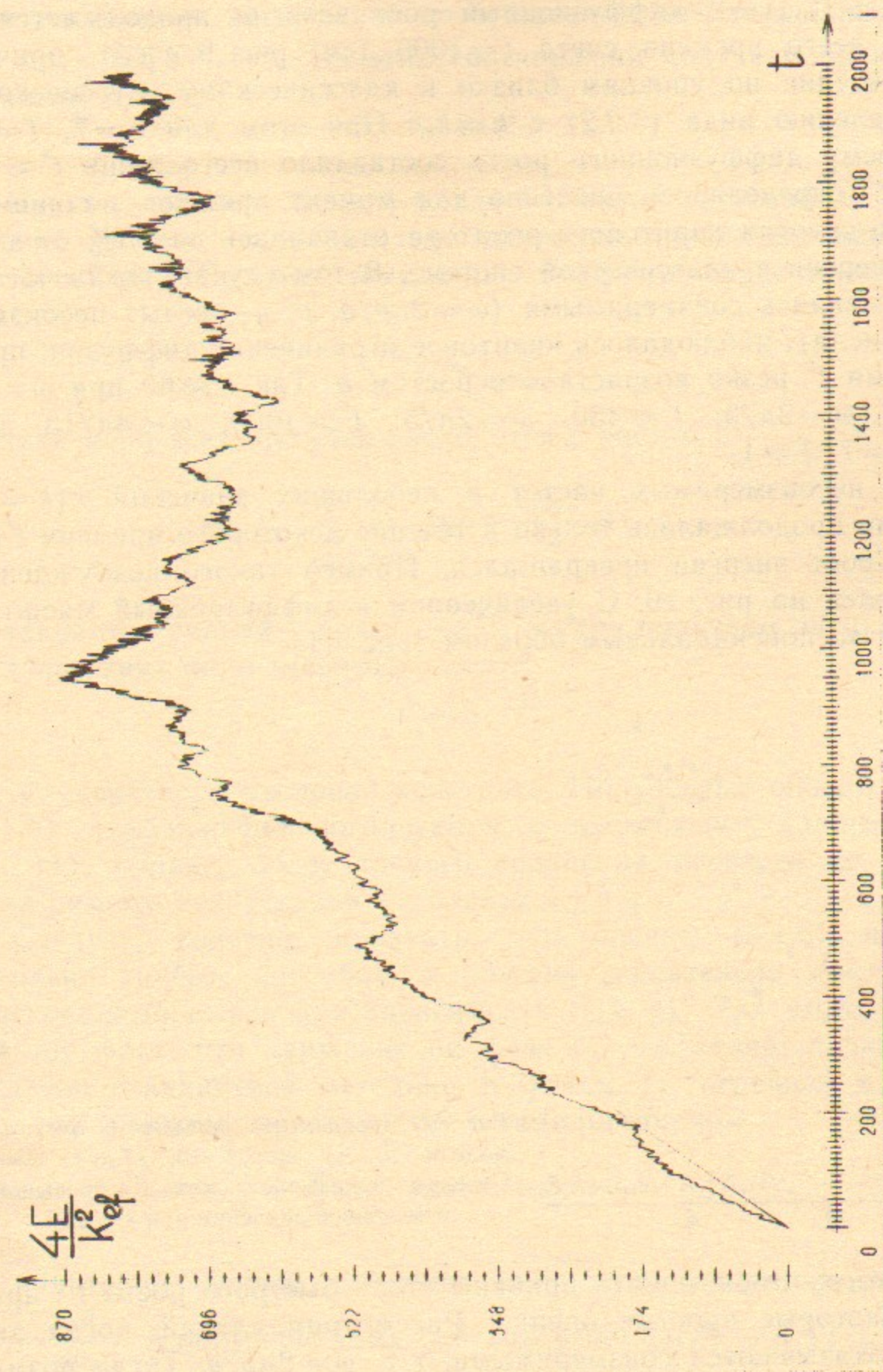


Рис. 10. То же, что и на рис. 9, а для  $k=0$ ,  $\varepsilon=3.5$ ,  $\varepsilon T=2$ ,  $\omega=2$ .



том диффузии, близким к классическому. Так, например, при  $k=0$ ,  $\varepsilon=7$ ,  $T=1$ ,  $\omega=2$  диффузионный рост энергии продолжается в течение всего времени счета  $t=1000$  (см. рис. 9, а и б), причем распределение по уровням близко к классическому гауссовскому распределению вида (3.2.2) с  $k=k_{ef}$ . При этом для  $k=7$ ,  $T=1$ ,  $\varepsilon=0$  время диффузионного роста составляло всего лишь  $t^* \approx 10$ . Время  $t^*$  определялось численно как момент времени, начиная с которого энергия квантового ротатора отличалась на 25% от значения энергии в классической системе. В том случае, когда частоты оказывались соизмеримыми ( $\omega=2\pi p/q$ ,  $p, q$  — целые несоизмеримые числа), наблюдалось квантовое ограничение диффузии, причем время  $t^*$  резко возрастало с ростом  $q$ . Так  $t^* \approx 60$  при  $\omega=\pi$ ;  $t^* \approx 400$ ,  $\omega=2\pi/3$ ;  $t^* \approx 450$ ,  $\omega=2\pi/5$ ;  $t^* > 1000$ ,  $\omega=8\pi/13$  для  $k=0$ ,  $\varepsilon=7$ ,  $T=1$ .

Для несоизмеримых частот и небольших значений  $\varepsilon$  ( $k=0$ ) диффузия продолжалась только в течение некоторого времени  $t^*$ , а дальше рост энергии прекращался. Пример такого возбуждения представлен на рис. 10. С увеличением  $\varepsilon$  диффузионный масштаб  $t^*$  растет экспоненциальным образом (рис. 11).

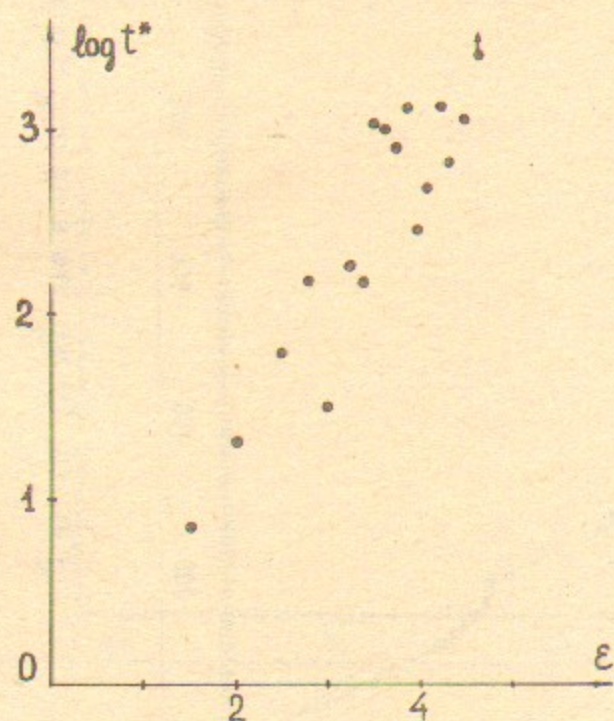


Рис. 11. Зависимость времени  $t^*$  от  $\varepsilon$  для модели (5.1.1) при  $k=0$ ,  $\varepsilon T=7$ ,  $\omega=2$ . Стрелка показывает, что  $t^*$  превышает отмеченное значение при  $\varepsilon=4.65$ .

Для того, чтобы понять причины столь быстрого роста  $t^*$ , приведем некоторые простые оценки. Рассмотрим случай, когда две частоты оказываются соизмеримыми, т. е.  $\omega=2\pi p/q$ . Тогда возмущение является периодическим с периодом в  $q$  толчков, а время  $\tau^*=t^*/q$  будет определяться расстоянием между дискретными

линиями квазиэнергии (см. § 1.2).  $\tau^*=t^*/q \sim 1/\Delta$ . Величина  $\Delta$  определяется числом эффективно возбужденных невозмущенных уровней  $\Delta n_1 \sim k_{ef} \sqrt{t^*} \sim 1/\Delta$ . Из этих соотношений получаем оценку для  $t^*$ , считая  $\varepsilon \sim k$ :

$$t^* \sim k_{ef}^2 q^2. \quad (5.1.3)$$

Пусть теперь  $\omega=2\pi p/q + \delta$ , где  $\delta$  — малая расстройка. Тогда в течение времени  $t \leq 1/\delta$  система движется приблизительно как и при  $\omega=2\pi p/q$ . Поэтому замедление диффузии будет иметь место для

$$\delta(q) \leq \frac{1}{q^2 k_{ef}^2}. \quad (5.1.4)$$

Полная мера всех отстроек расходится с ростом  $q$ :

$$\sum_{q=1}^{q_{cr}} \sum_{p=1}^q \delta(q) \sim \frac{\ln 2 q_{cr}}{k_{ef}^2} \sim 1 \quad (5.1.5)$$

и становится равной 1 при  $q_{cr} \sim e^{ck_{ef}^2}$ , откуда получаем оценку для  $t^*$  в случае двух несоизмеримых частот:

$$t^* \sim k_{ef}^2 e^{2ck_{ef}^2}, \quad (5.1.6)$$

где  $c$  — некоторая числовая константа. Полученные оценки (5.1.3), (5.1.6) приблизительно согласуются с численными данными (см. рис. 11), однако, более точного сравнения провести не удастся из-за резкого возрастания  $t^*$  с ростом  $k_{ef}$  и  $q$ .

Следует, конечно, признать, что оценка (5.1.6) получена довольно грубым способом и поэтому желательно иметь более обоснованный вывод для зависимости  $t^*(k, \varepsilon)$ . Для этого, используя тот факт, что движение по фазе  $\theta_1 = \omega t$  является заданным, согласно стандартной методике [63] (см. I), перейдем к расширенному фазовому пространству с гамильтонианом

$$H = \frac{n_1^2}{2} + \frac{\omega}{T} n_2 + (k \cos \theta_1 + \varepsilon \cos \theta_1 \cos \theta_2) \delta_T(\tilde{t}). \quad (5.1.7)$$

В квантовом случае действия становятся операторами  $\hat{n}_{1,2} = -i \frac{\partial}{\partial \theta_{1,2}}$ . Аналогично тому, как это было сделано в § 1.5, уравнения для СФКЭ в (5.1.7) можно свести к эффективному твердотельному гамильтониану (1.5.3) с



$$\chi_{l, n_2} = \frac{v}{2} - \frac{Tn_1^2}{4} - \frac{\omega n_2}{2}$$

и размерностью пространства  $d=2$ . Таким образом, возбуждение одномерной системы в двухчастотном поле оказывается связанным со свойствами собственных функций в двумерном потенциале.

Отличие рассматриваемой модели от твердотельных задач состоит в том, что в (5.1.1), (5.1.7) и (1.5.3) нет никаких случайных параметров и в том, что модели с временным возмущением описывают совсем другие физические явления, чем задачи о проводимости в металле. Вместе с тем, как и в твердом теле, в квазиклассической области ( $D \gg 1$ ) процесс возбуждения в (5.1.1) происходит диффузионным образом. Только возникновение диффузии связано не с рассеянием на случайных примесях, а с возникновением хаоса в классической системе. Отметим, что, как и в одномерном случае, номера уровней  $n_1, n_2$  соответствуют номерам соседей по одной и другой координатам.

Согласно результатам, полученным в твердом теле на основе теории ренормгруппы (см. I, [56—58]), в двумерном случае все состояния локализованы, а длина локализации определяется скоростью диффузии по каждому направлению:

$$\ln l \sim \ln t^* \sim (D_1 D_2)^{1/2}, \quad D_1 = \frac{k^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4}, \quad D_2 = \frac{\varepsilon^2}{4}. \quad (5.1.8)$$

Характерный масштаб  $(D_1 D_2)^{1/2}$  явно виден и из соотношения (1.2.4). Однако, для того, чтобы получить оценку (5.1.8) надо дополнительно учесть, что возвраты в одно и то же состояние приводят к подавлению диффузии из-за интерференционных поправок при рассеянии на одном и том же потенциале. Изменение  $\Delta D/D$  пропорционально вероятности возврата  $\int dt (D_1 D_2 t^2)^{-1/2}$ , так что диффузия прекращается через время  $\Delta D/D \sim \frac{\ln t^*}{\sqrt{D_1 D_2}} \sim 1$ , что и

приводит к формуле (5.1.8), которая при  $k \sim \varepsilon$  согласуется с (5.1.6). Вывод оценки (5.1.8) совершенно аналогичен тому, который используется в твердом теле (см., например, [19]).

Отметим, что для модели (5.1.7) с нелинейным по  $n_2$  невозмущенным гамильтонианом (например, с  $H_0 = \frac{n_1^2}{2} + \frac{n_2^2}{2}$ ) длина локализации должна даваться той же оценкой (5.1.8). Действительно, при ее выводе используется только диффузионный характер про-

цесса возбуждения, для возникновения которого надо только превысить границу классического хаоса. Численные исследования локализации в такой системе проводились в работе [18] с  $k=0$ . Полученные результаты указывают на то, что  $\ln l \sim \varepsilon$ . Однако, интервал изменения  $\varepsilon$  был довольно небольшим (приблизительно как на рис. 11) и поэтому эти данные, так же, как и данные рис. 11, не позволяют сделать вывод о том является ли показатель экспоненты в (5.1.8) линейной или квадратичной функцией  $\varepsilon$ . Возможно, что наблюдаемая приблизительно линейная зависимость связана с тем, что в рассматриваемой модели имеется растянутый переходной интервал к теоретической зависимости (5.1.8). Похожий затяжной переход наблюдается также в двумерной модели Андерсона. Авторы [18], однако, ошибочно считают, что теоретическое предсказание дает линейную зависимость в экспоненте. Ошибка основана на неправильном вычислении длины свободного пробега в соответствующей твердотельной модели. Из того факта, что длина свободного пробега пропорциональна проводимости и, следовательно, скорости диффузии (см. например, [19] и I, [80, 81]), согласно (5.1.2), сразу следует, что зависимость должна быть квадратичной. Проверка соотношения (5.1.8) будет проведена в следующем параграфе для двумерной модели Ллойда на основе метода ПЛ.

В том случае, когда частота  $\omega$  в (5.1.1) является очень малой, а параметры возмущения  $k, \varepsilon > 1$  система (5.1.1) может рассматриваться как грубая модель возбуждения атома в присутствии слабого статического поля (см. (4.2.3)). При этом возникает интересный вопрос о том, каким образом адиабатическое возмущение будет разрушать локализацию при  $k \gg 1, \varepsilon \sim k$ . Можно ожидать, что если частота  $\omega$  больше, чем среднее расстояние между квазиэнергиями  $k^{-2} \ll \omega$ , то скорость диффузии по-прежнему порядка (5.1.2) (так как  $k \gg 1$ , то двумерной локализацией можно пренебречь). Если же  $\omega k^2 \ll 1$ , то скорость диффузии можно оценить как

$$D = \frac{(\Delta n_1)^2}{l} \sim l^2 \omega, \quad l \approx \frac{k_{el}^2}{2} \quad (5.1.9)$$

(скачок на одну длину  $l$  за один период  $2\pi/\omega$ ). Данные предварительных численных экспериментов согласуются с этой оценкой (рис. 12) и показывают, что численный коэффициент в (5.1.9) близок к единице. Желательна, однако, проверка соотношения (5.1.9) в более широком диапазоне по  $\omega$ , поскольку данные



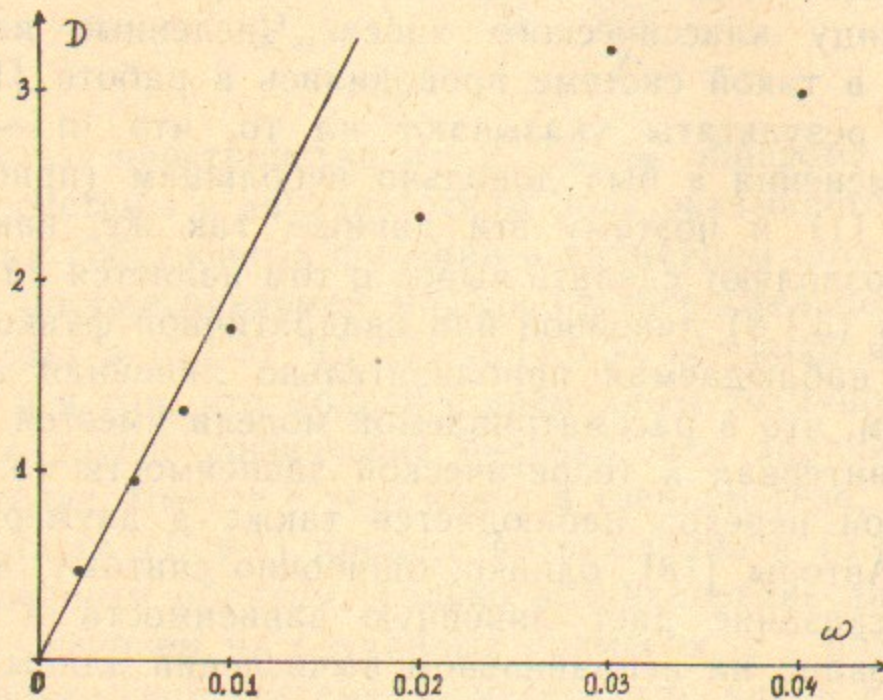


Рис. 12. Зависимость скорости диффузии  $D$  от частоты  $\omega$  в модели (5.1.1) при  $k=5$ ,  $\varepsilon=2.5$ ,  $T=0.7$ . Прямая — оценка (5.1.9).

рис. 12 также удовлетворительно описываются эмпирической зависимостью  $D \propto \omega^\gamma$  с  $\gamma \approx 0.6$ .

Интересно, что исследование системы (5.1.7) при очень малых  $\varepsilon$  дает информацию о спектре корреляций (1.4.1) в системе (1.1.4). Действительно, из уравнений для гейзенберговских операторов имеем

$$\hat{n}_2(t) = \hat{n}_2(0) + \varepsilon \sum_{t_1=0}^{t-1} \cos \hat{\theta}_1(t_1) \sin(\hat{\theta}_2 + \omega t_1). \quad (5.1.10)$$

Откуда получаем число возбужденных уровней

$$\langle n_2^2 \rangle = \frac{\varepsilon^2}{2} \left[ \sum_{t_1=0}^t \left( \sum_{\tau=0}^{t-t_1} R_{t_1}(\tau) \cos \omega \tau - \frac{1}{2} R_{t_1}(0) \right) \right]. \quad (5.1.11)$$

В классическом случае из-за быстрого затухания корреляций в суммах в (5.1.11) основной вклад давали члены с  $\tau=0$  и поэтому происходило диффузионное возбуждение как по первой (1.1.4), так и по второй степени свободы:

$$\langle n_2^2 \rangle = \frac{\varepsilon^2}{4} t. \quad (5.1.12)$$

В квантовой системе по первой степени свободы происходит локализация диффузии, но вопрос о том, в течение какого времени будет продолжаться возбуждение по второй степени свободы, вообще говоря, не так очевиден. Для его исследования были проведены численные эксперименты. При этом параметр  $\varepsilon$  выбирался равным  $10^{-5}$  (изменение  $\varepsilon$  в интервале  $10^{-3} - 10^{-5}$  оставляло неизменной величину  $4 \langle n_2^2 \rangle / \varepsilon^2$  с точностью до 0.1%). В счете использовалось конечное число уровней  $-400 \leq n_1 \leq 400$ ,  $-2 \leq n_2 \leq 2$ . Ввиду малости  $\varepsilon$  среднее  $\langle n_2^2 \rangle$  определялось только вероятностью  $W_{n_2}$  нахождения на уровнях  $n_2 = \pm 1$ . В течение всего времени счета  $W_{n_2=\pm 2} < 10^{-14}$  (эти уровни использовались для контроля точности счета). Точность счета контролировалась также по сохранению вероятности

$$W = \sum_{n_1, n_2} |A_{n_1, n_2}|^2 = 1.$$

Во всех случаях ее отличие от 1 не превышало  $10^{-3}$ , а динамика возбуждения первой степени свободы, например  $\langle n_1^2 \rangle$ , совпадала со случаем  $\varepsilon=0$  с точностью до 0.1%.

Проведенные численные эксперименты показали, что возбуждение по второй степени свободы существенно зависит от параметра  $\omega$ . При этом можно выделить три различных ситуации:

1. По второй степени свободы так же, как и по первой, наблюдается квантовое ограничение диффузии. Так при  $k=5$ ,  $T=1$  это имело место, например, для  $\omega=1, 1.5, 1.87, 2.42, 2.37$ .

2. Для некоторых значений  $\omega$  наблюдалось резонансное возбуждение  $\langle n_2^2 \rangle \propto t^2$  (при  $k=5$ ,  $T=1$ , например, для  $\omega=0, 0.5, 1.27, 1.71$ ).

3. В некоторых случаях ( $k=5$ ,  $T=1$ ;  $\omega=2.4, 2.5, 2.52$ ) наблюдался линейный рост  $\langle n_2^2 \rangle = D_q$ , причем такой рост продолжался в течение всего времени счета, составлявшего 750—2000 итераций с  $D_q \approx \varepsilon^2/4$ . В то же время для первой степени свободы ограничение диффузии происходило всего через несколько толчков ( $t^* = 5$ ). При изменении начальных условий резонансы наблюдались при тех же значениях  $\omega$ , но изменение  $k, T$  (даже при постоянном  $K=kT$ ) полностью меняло зависимость от  $\omega$ .

Качественное объяснение этих результатов состоит в следующем. Из-за локализации спектр квазиэнергий является дискретным. Для данного начального состояния среднее расстояние между возбужденными СФКЭ  $\Delta v \sim 1/l$ . Из-за этой дискретности проис-



ходит локализация по  $n_2$ , или резонансный рост, если  $\omega$  оказалось точно равно разности между двумя квазиэнергиями. Оценка среднего расстояния  $\Delta v$ , однако ничего не говорит о распределении расстояний между соседними квазиэнергиями для СФКЭ локализованных вблизи начального уровня. Наблюдавшийся диффузионный рост по  $n_2$  указывает на то, что в спектре  $v_i$ , соответствующем возбужденным СФКЭ, имеются группы близких уровней. Исследование статистики уровней квазиэнергии [19] действительно показывает, что их расталкивание существенно зависит от того насколько близко друг от друга находятся рассматриваемые СФКЭ. Однако, для более точного выяснения свойств этой статистики и ее связи со спектром корреляций требуются дальнейшие исследования.

### § 5.2. ЛОКАЛИЗАЦИЯ АНДЕРСОНА И СПЕКТР ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА

Для исследования локализации в двумерном и трехмерном случаях также можно эффективно использовать метод ПЛ. Действительно, для двумерного ротатора с невозмущенным спектром  $H_0(n_1, n_2)$  и потенциалом возмущения  $V = 2 \arctg (E - 2k \cos \theta_1 - 2k \cos \theta_2)$  уравнение для СФКЭ имеет вид (см. § 1.5)

$$E_{n_1 n_2} u_{n_1 n_2} + k(u_{n_1+1, n_2} + u_{n_1-1, n_2} + u_{n_1, n_2+1} + u_{n_1, n_2-1}) = E u_{n_1, n_2}, \quad (5.2.1)$$

$$E_{n_1 n_2} = \text{tg}(\chi_{n_1 n_2}).$$

В том случае, когда фаза  $\chi_{n_1 n_2} = (v - H_0(n_1, n_2))/2$  является случайной функцией  $n_1, n_2$  модель (5.2.1) представляет двумерную модель Ллойда. При этом величину  $E$  можно рассматривать как собственное значение энергии, а квазиэнергию  $v$  как параметр потенциала. В твердом теле параметр  $k = V/W$  представляет собой отношение интеграла перекрытия между соседними атомами  $V$  к характерному интервалу энергий  $W$ , в котором распределены энергии атомов с вероятностью

$$P(E_{n_1 n_2}) = \frac{1}{\pi(1 + E_{n_1 n_2}^2/W^2)}.$$

Для численного определения длины локализации воспользуемся подходом предложенным в [97, 98] (см. I). Будем считать, что по одному направлению  $n_2$  число соседей конечно и равно  $M$ , а граничные условия по  $n_2$  периодические. Тогда два слоя по  $n_1$  соглас-

но (5.2.1) определяют значения  $u_{n_1 n_2}$  на третьем слое и т. д. Такая динамика по  $n_1$  задается симплектической матрицей переноса размерностью  $2M \times 2M$ . Экспоненциальный рост собственных функций с  $n_1$  определяется спектром ПЛ  $\gamma_i(V/W)$ . Минимальный положительный ПЛ  $\gamma_1$  определяет асимптотическую скорость убывания собственных функций и их длину локализации  $l_M = 1/\gamma_1$ . Если с увеличением  $M$  эта длина  $l_M$  стремится к некоторому постоянному значению, то это значение и дает длину локализации в неограниченной системе (5.2.1).

Значения  $l_M$  находились численно на основе метода ПЛ. Величина  $M$  менялась в интервале  $M = 8 - 120$ , который был значительно больше, чем в [97] (см. I), где исследовалась локализация в двумерной модели Андерсона ( $-W/2 \leq E_{n_1 n_2} \leq W/2$ ) с  $M = 8, 16, 32$ . Энергия  $E$  выбиралась в центре зоны:  $E = 0$ . Пример зависимости  $l_M$  от  $M$  при разных значениях  $V/W$  представлен на рис. 13. Из него видно, что с ростом  $M$  длина локализации приближается к постоянному значению. Однако, уже при  $V/W = 1$  величина  $l_M$  становится больше или сравнима с  $M$ , что затрудняет ее определение. В этом случае, следуя [97] (см. I), можно предположить, что отношение  $l_M/M$  дается некоторой универсальной функцией, зависящей только от  $l(V/W)$ , где  $l(V/W)$  — длина локализации в неограниченной системе (5.2.1):

$$\frac{l_M}{M} = f_d\left(\frac{l(V/W)}{M}\right). \quad (5.2.2)$$

Фактически это предположение эквивалентно предположению о существовании ренормгруппы [56] (см. I). Однако, численные эксперименты [97] (см. I) позволяют провести его проверку. Действительно, зная значения  $l_M$  при разных  $M$  и  $V/W$ , можно показать, что функция  $f_d$  существует (во всяком случае для имеющегося интервала параметров [97], см. рис. 14,а). Численные данные для модели Ллойда также позволяют найти функцию  $f_d$  (рис. 14,б) и показать, что она оказывается такой же, как и в модели Андерсона. Это указывает на модельную независимость соотношения (5.2.2).

Зная функцию  $f_d$  можно исследовать зависимость  $l(V/W)$  в более широком интервале по  $V/W$ . Численные данные показывают, что при больших  $k = V/W$  длина локализации экспоненциально растет с  $k$  (рис. 15). Поскольку квазилинейная скорость диффузии



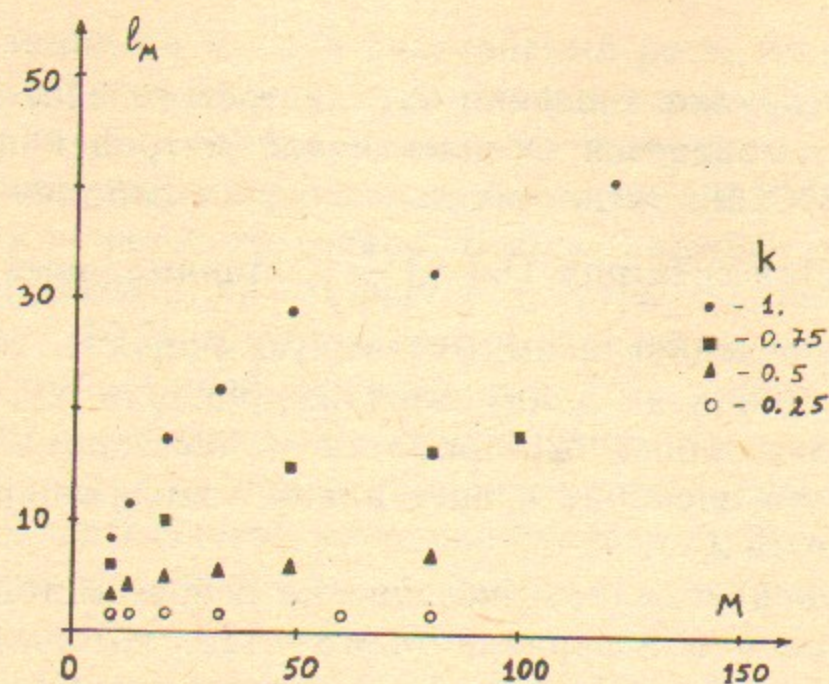


Рис. 13. Зависимость длины локализации  $l_M$  от  $M$  в двумерной модели Ллойда при разных значениях  $k=V/W$ .

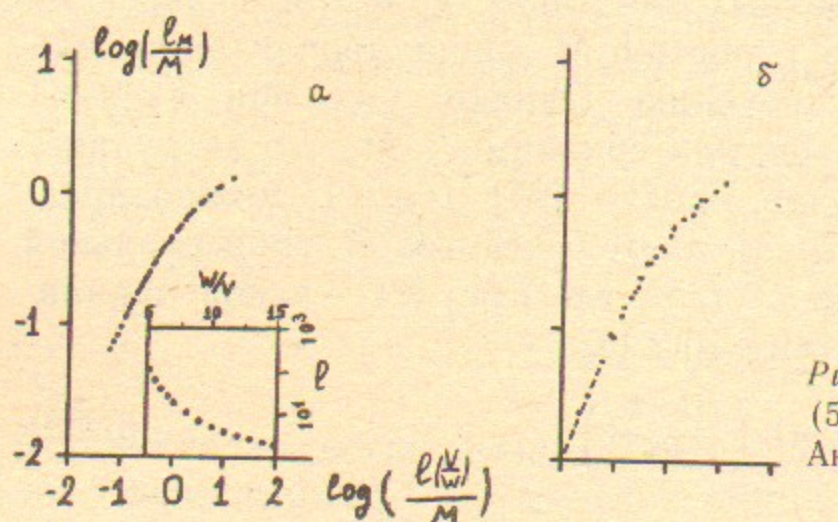


Рис. 14. Скэйлинговая функция  $f_d$  (5.2.2) в двумерных моделях Андерсона (а, данные [97] (см. 1)) и Ллойда (б).

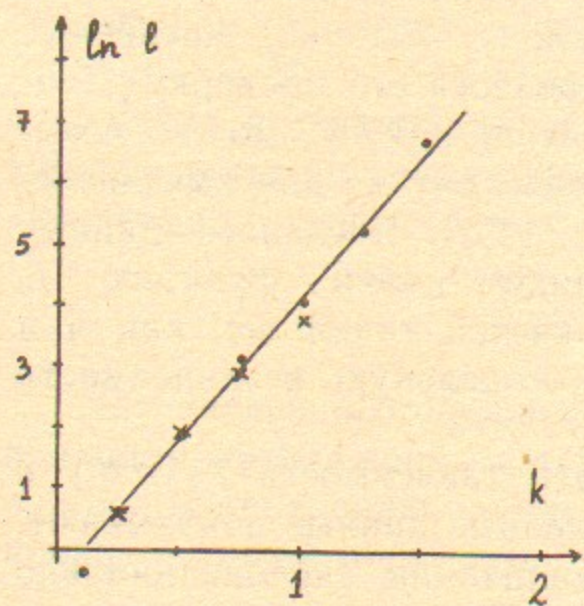


Рис. 15. Зависимость длины локализации в двумерной модели Ллойда от параметра возмущения  $k=V/W$ . Прямая — линейная интерполяция численных данных,  $\times$  — данные рис. 13,  $\bullet$  — пересчет по скэйлинговой функции  $f_d$ .

(1.1.3) приближенно равна

$$D = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_1 d\theta_2 \left( \frac{\partial V}{\partial \theta_1} \right)^2 \sim \approx \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_2 \sqrt{4k^2 - (E - 2k \cos \theta_2)^2} = \frac{8}{\pi} k \quad (E=0), \quad (5.2.3)$$

то из линейной интерполяции на рис. 15 получаем

$$\ln l \approx 1.8 D - 0.5. \quad (5.2.4)$$

Этот результат согласуется с предсказанием ренормгруппы (см. (5.1.8)). Отметим, что приближенно линейная зависимость получается и без использования скэйлинговой функции (5.2.2) из данных рис. 13 (крестики на рис. 15), но при этом интервал изменения  $V/W$  существенно уменьшается. Следует отметить, что для модели Андерсона не удается показать, что  $\ln l \sim (V/W)^2 \sim D$  [97] (см. 1). Это, по-видимому, связано с более быстрым выходом  $D$  и  $l$  на асимптотическую зависимость (5.2.3) и (5.2.4) в модели Ллойда, чем в модели Андерсона, что возможно обусловлено более плавным распределением флуктуаций  $P(E_{n_1, n_2})$  в первом случае.

Метод ПЛ позволяет найти также весь спектр показателей  $\gamma_i$  (для определенности энергия по-прежнему равна нулю). Пример спектра ПЛ для двумерной модели Андерсона показан на рис. 16, а. Из него видно, что с увеличением поперечного размера  $M$  спектр  $\gamma_i$  не меняется, и поэтому в пределе  $M \rightarrow \infty$  он становится функцией непрерывной переменной  $i/M$ . При увеличении интеграла перекрытия  $V$  максимальный показатель стремится к нулю и приближенно описывается формулой

$$\gamma_{\max} \approx \frac{W}{8V} \sim D^{-1/2}. \quad (5.2.5)$$

Последнее соотношение следует из того факта, что в модели Андерсона длина свободного пробега  $l_f$ , а следовательно и скорость диффузии по уровням  $D$ , пропорциональна  $l_f \sim D \sim (V/W)^2$  (см., например, 1, [81]). Этот же закон пропорциональности имеет место и для двумерной модели Ллойда:  $\gamma_{\max} \sim k^{-1/2} \sim D^{-1/2}$ . Физическая причина возникновения такого соотношения между  $\gamma_{\max}$  и  $D$  остается пока неясной. Отметим, что этот закон отличается от скэйлинга для максимального ПЛ при перемножении случайных



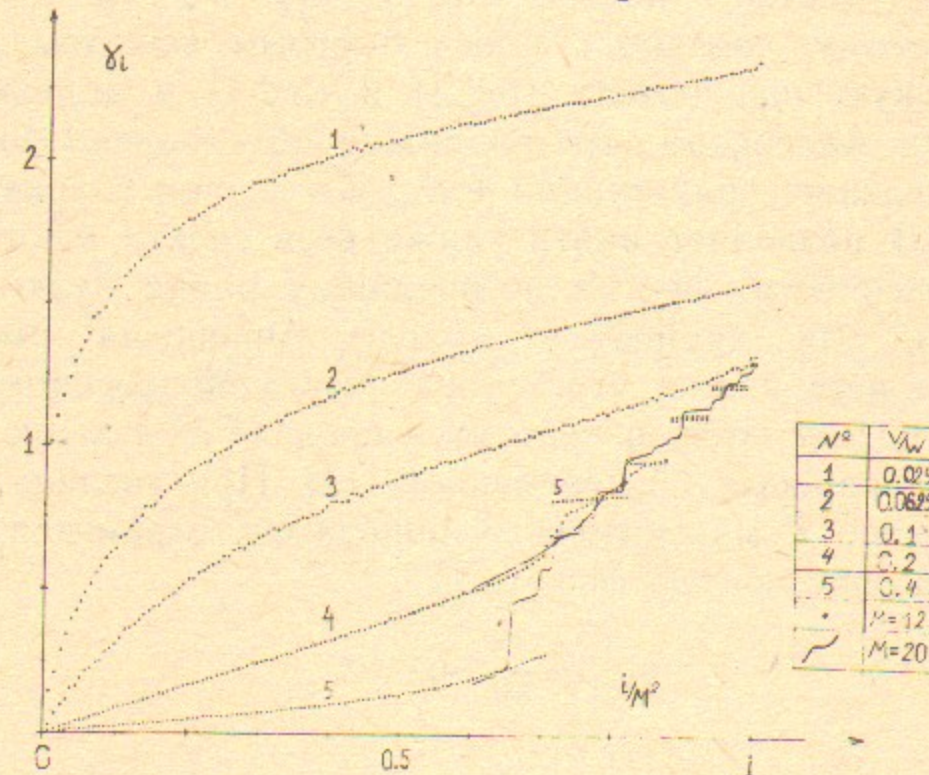
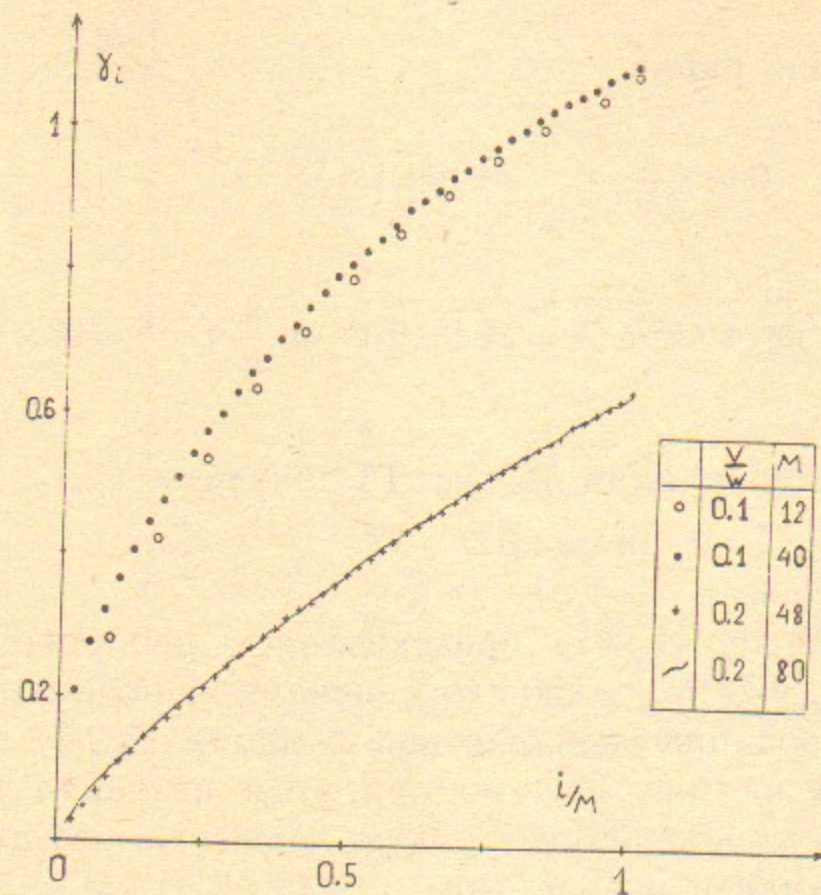


Рис. 16. Спектр показателей Ляпунова в двумерной (а) и трехмерной (б) моделях Андерсона,  $\frac{V}{W} = \frac{1}{40}$  (1),  $\frac{1}{16}$  (2), 0.1 (3), 0.2 (4), 0.4 (5).

симплектических матриц, описывающих динамику гамильтоновых систем с малым случайным возмущением  $\varepsilon$  [20, 21]. В этом случае, если среднее от возмущения  $\varepsilon$  равно нулю, то  $\gamma_{\max} \sim \varepsilon^{2/3}$ , где роль  $\varepsilon$  играет отношение  $W/V$ . Эта степенная зависимость соответствует перенормированной частоте фазовых колебаний, возникающей при перекрытии многих нелинейных резонансов и определяющей максимальный ПЛ (КС-энтропию) [20, 22] (см. также I, [67, 27]).

Совсем другим оказывается спектр ПЛ в трехмерном случае (рис. 16, б). Здесь при малом возмущении  $k=V/W$  все собственные функции локализованы и минимальный ПЛ  $\gamma$  больше нуля. В этом случае система находится ниже перехода Андерсона [79] (см. I). В момент появления нулевого ПЛ ( $V/W \approx 1/16$  [97, 98] (см. I)) происходит переход от локализованных состояний к делокализованным и в системе возникает диффузионное возбуждение. Таким образом, значения параметров модели, при которых происходит переход, могут быть найдены с помощью метода ПЛ. В области значительно выше перехода ( $V/W \gg 1/16$ ) спектр  $\gamma_i(i/M^2)$  является приблизительно линейной функцией  $i/M^2$  вплоть до  $i/M^2 \approx 0.65$ . При  $i/M^2 > 0.65$  в спектре появляются на первый взгляд необычные ступеньки.

Линейная зависимость  $\gamma_i = \alpha i/M^2$  согласуется с теоретическим предсказанием [59, 60] (см. I). Более того, согласно [59, 60], коэффициент пропорциональности определяется длиной свободного пробега  $\alpha = 2/l_F \sim (W/V)^2$ . Эта квадратичная зависимость действительно получается из численных данных:  $\alpha \approx (W/V)^2/32$  (рис. 17).

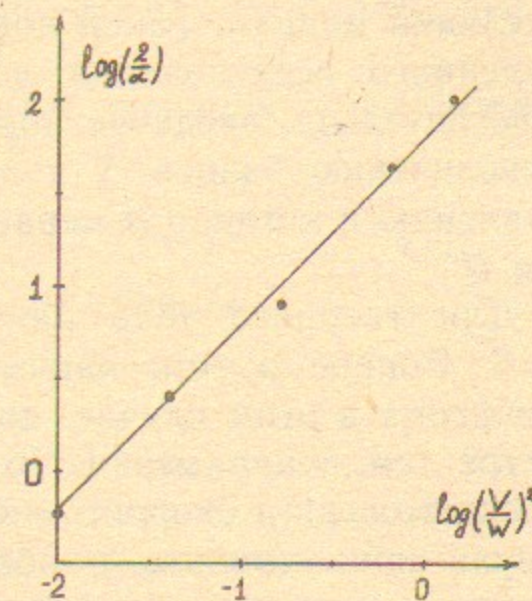


Рис. 17. Зависимость коэффициента  $\alpha$ , характеризующего спектр ПЛ, от интеграла перекрытия  $k=V/W$ . Прямая — теоретическая квадратичная зависимость с эмпирическим численным коэффициентом.



К сожалению, сравнить эмпирический численный множитель в этой функциональной зависимости с теоретическим значением не удастся из-за того, что нет точного выражения для длины свободного пробега  $l_F$  в том случае, когда энергия лежит в центре зоны  $E=0$ . Однако, функциональная зависимость согласуется с теорией.

Возникновение ступенек в зависимости  $\gamma_i$  можно понять из спектра энергий при  $W=0$ :

$$E = 2V(\cos p_x + \cos p_y + \cos p_z) = 0, \quad (5.2.6)$$

где  $p_x, p_y, p_z$  — квазиимпульсы по трем направлениям. При наложении периодических условий по  $x, y$ , которые использовались в численном моделировании,  $p_x = 2\pi n_1/M, p_y = 2\pi n_2/M$ . В результате получим несколько ступенек с одинаковыми  $\gamma = -ip_z$ . Область  $i/M^2 > 0.65$  соответствует запрещенной зоне с мнимыми  $p_z$ , определяемыми из (5.2.6). Отметим, что положение ступенек на рис. 16,б вполне хорошо согласуется со значениями, получаемыми из (5.2.6). Максимальный ПЛ дается уравнением  $\text{sh } \gamma_{\text{max}} = 2$ .

Аналогичным образом можно определить, при каком значении параметра происходит переход Андерсона в трехмерной модели Ллойда. Численные данные дают значение  $V/W \approx 0.2$  при  $E=0$ .

### § 5.3. ПЕРЕХОД АНДЕРСОНА В ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЕ С ТРЕМЯ НЕСОРАЗМЕРНЫМИ ЧАСТОТАМИ

Результаты двух предыдущих параграфов показывают, что введение второй несоразмерной частоты оказывается эффективно эквивалентным увеличению размерности в соответствующей твердотельной модели. Такой подход открывает путь для эффективного численного исследования локализации в многомерных системах. Действительно, введение новых несоразмерных частот не приводит к увеличению базиса  $N$  и поэтому выигрыш в скорости счета по сравнению с истинно  $d$ -мерной системой пропорционален как минимум  $N^{d-1}$ .

Для твердого тела наиболее важным является размерность  $d=3$ . Вопрос о том, каким образом будет происходить переход Андерсона в этом случае, до сих пор широко обсуждается в литературе (см., например, I, [61, 62, 81 и 23]). Согласно [81], [23], проводимость (и скорость диффузии) должны скачком обращаться в нуль при переходе в область локализации. Противоположная картина перехода получается на основе теории ренормгруппы

[56—58, 61, 62] (см. I) вблизи точки перехода скорость диффузии  $D$  степенным образом должна обращаться в нуль. Ниже точки перехода длина локализации  $l$  стремится к бесконечности при приближении к критическому значению параметра  $k_c$ . Таким образом, вблизи точки перехода

$$D \sim (k - k_c)^s, \quad l \sim (k_c - k)^{-\sigma}. \quad (5.3.1)$$

Согласно теоретическим результатам [61] (см. I) показатели  $s$  и  $\sigma$  равны друг другу  $s = \sigma = 1 + O(\epsilon^4)$ , где последнее выражение получается разложением по отклонению  $\epsilon = d - 2$  от размерности  $d = 2$ . Точное выражение для первой ненулевой поправки по  $\epsilon$  неизвестно, но, поскольку такие разложения, как правило, содержат малые численные множители, то можно думать, что степенные показатели в (5.3.1) близки к 1.

Для исследования перехода Андерсона использовалась одномерная модель квантового ротатора с тремя несоразмерными частотами [26]:

$$H = H_0(n) + 2 \arctg \left[ E - 2k \cos \left( \frac{\omega_1 \tilde{t}}{T} \right) - 2k \cos \left( \frac{\omega_2 \tilde{t}}{T} \right) - 2k \cos \theta \right] \delta_T(\tilde{t}), \quad (5.3.2)$$

где  $H_0(n)$  определяет невозмущенный спектр уровней. Будем считать, что невозмущенные значения квазиэнергий  $TH_0(n)$  случайно и равномерно распределены в интервале  $[0, 2\pi]$ .

Чтобы перейти к расширенному фазовому пространству [63] (см. I), введем фазы  $\theta_{1,2} = \omega_{1,2} t$  и сопряженные им операторы  $\hat{n}_{1,2} = -i\partial/\partial\theta_{1,2}$ . Тогда гамильтониан движения будет иметь вид

$$\hat{H} = H_0(\hat{n}) + \hat{n}_1 \omega_1 + \hat{n}_2 \omega_2 + 2 \arctg [E - 2k(\cos \hat{\theta}_1 + \cos \hat{\theta}_2 + \cos \hat{\theta})] \delta_1(t). \quad (5.3.3)$$

(Здесь принято  $T=1$ ,  $t$  измеряется в числе итераций.) Аналогично (1.5.4) получим уравнения для СФКЭ:

$$E_{n_1 n_2 n} u_{n_1 n_2 n} + k(u_{n_1+1 n_2 n} + u_{n_1-1 n_2 n} + u_{n_1 n_2+1 n} + u_{n_1 n_2-1 n} + u_{n_1 n_2 n+1} + u_{n_1 n_2 n-1}) = E u_{n_1 n_2 n}, \quad (5.3.4)$$

$$E_{n_1 n_2 n} = \text{tg} [(v - H_0(n) - \omega_1 n_1 - \omega_2 n_2)/2] = \text{tg } \chi_{n_1 n_2 n}.$$

Если бы  $\chi_{n_1 n_2 n}$  была случайной функцией  $n_1, n_2, n$  то (5.3.4) точно соответствовало бы трехмерной модели Ллойда. Поэтому можно ожидать, что при превышении некоторого критического значения  $k_c \sim 1$  (при  $E=0$ ) в исходной системе (5.3.2) произойдет



переход от локализованных состояний (отсутствие возбуждения по  $n$ ) к делокализованным (диффузия по  $n$ ). Исследование этого перехода позволяет проверить предсказания теории ренормгруппы (5.3.1), в отличие от подхода, использованного в [97] (см. I), без привлечения дополнительных скейлинговых гипотез. Представляется также важным показать, что в однородной системе с тремя несоизмеримыми частотами может иметь место неограниченная диффузия.

При численном моделировании модели (5.3.2) было принято значение  $E=0$ . Частоты  $\omega_{1,2}$  были равны  $\omega_1=2\pi/\kappa$ ,  $\omega_2=2\pi/\kappa^2$ ,  $\kappa=1.3247\dots$ , где  $\kappa$  — действительный корень кубического уравнения  $\kappa^3 - \kappa - 1 = 0$ . Выбранная таким образом пара частот представляет собой наиболее иррациональную пару действительных чисел (аналогично тому, как одним самым иррациональным числом является «золотое сечение»  $(\sqrt{5}-1)/2$ , см., например, [24]). В численных экспериментах полное число невозмущенных уровней, как правило, было равно 512 (в некоторых случаях оно увеличивалось до 1024). Время счета достигало  $t=10^5$  толчков.

Численные эксперименты показали, что в системе происходит четкий переход от локализации при  $k < k_c \approx 0.47$  к диффузионному возбуждению при  $k > k_c$ . Ниже точки перехода в системе устанавливается стационарное распределение вероятностей по невозмущенным уровням  $\bar{f}(n)$ , которое не меняется при увеличении времени счета. Для подавления флуктуаций распределение усреднялось по некоторому интервалу  $\Delta t$ , который, как правило, был равен  $1/20$  от полного времени счета. Пример такого локализованного распределения представлен на рис. 18. С помощью линейной интерполяции методом наименьших квадратов находилась длина локализации  $l$  для полученного распределения:  $\ln \bar{f}(n) \approx -2|n|/l$  и соответствующий ей показатель локализации  $\gamma = 1/l$ . Для подавления флуктуаций для одного значения параметра  $k$  находилось 10 (иногда 20) распределений  $\bar{f}(n)$ , соответствующих разным реализациям случайного невозмущенного спектра квазиэнергий  $H_0(n)$ . Усреднение по полученным 10 значениям  $\gamma$  позволяло уменьшить флуктуации и более отчетливо наблюдать зависимость  $\gamma$  от  $k$ . Наиболее трудным было определение  $\gamma$  вблизи точки перехода  $k_c$ , поскольку с приближением к  $k_c$  длина локализации растет, а с ней растет и время счета  $t_D \sim l^3$  необходимое для того, чтобы различить дискретную структуру спектра движения в области локализации.

При  $k > k_c$  в системе наблюдался диффузионный рост числа

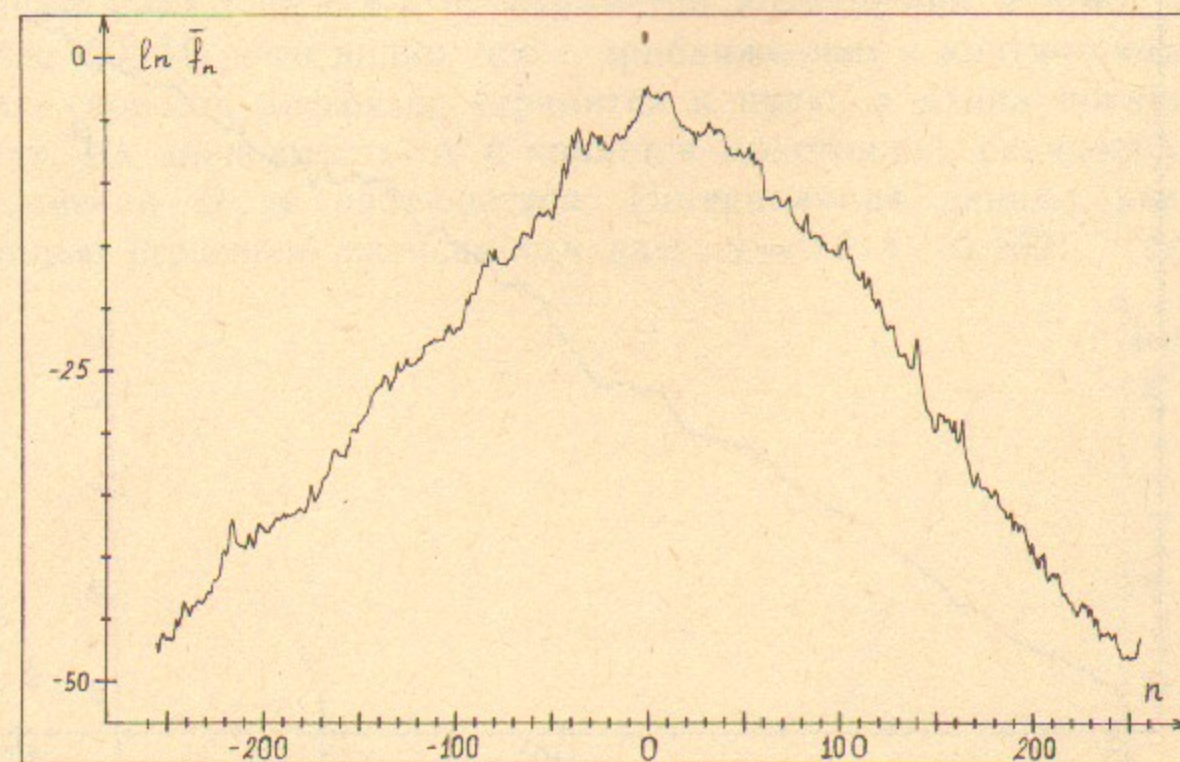


Рис. 18. Локализованное стационарное распределение в модели (5.3.2),  $E=0$ ,  $k=.38$

возбужденных уровней, который продолжался в течение всего времени счета  $t=10^5$ . При этом распределение вероятностей по уровням удовлетворительно описывалось гауссовским распределением:

$$f(n) = \frac{1}{(2\pi Dt)^{1/2}} e^{-n^2/2Dt}$$

Пример такого диффузионного возбуждения показан на рис. 19. Для подавления флуктуаций вероятности  $f(n)$  усреднялись по интервалу времени  $\Delta t$ , так же, как и при  $k < k_c$ . Скорость диффузии можно определять как из второго момента  $\langle n^2 \rangle = Dt$ , так и из распределения вероятностей путем его интерполяции гауссовским распределением:  $f(n) = Ae^{-Bn^2}$ . Параметры интерполяции  $A$ ,  $B$  давали как скорость диффузии  $D=1/2Bt$ , так и долю диффундирующей компоненты  $W_D = A\sqrt{\pi/B}$ . Эти характеристики при одном значении  $k$  находились для 10 реализаций невозмущенного спектра  $H_0(n)$ , что позволяло уменьшить флуктуации. По этим 10 значениям определялась средняя скорость диффузии  $D$ , и стандартное отклонение от среднего. В пределах флуктуаций оба способа вычисления  $D$  давали одинаковую скорость диффузии, а доля диффундирующей компоненты была близка к единице.



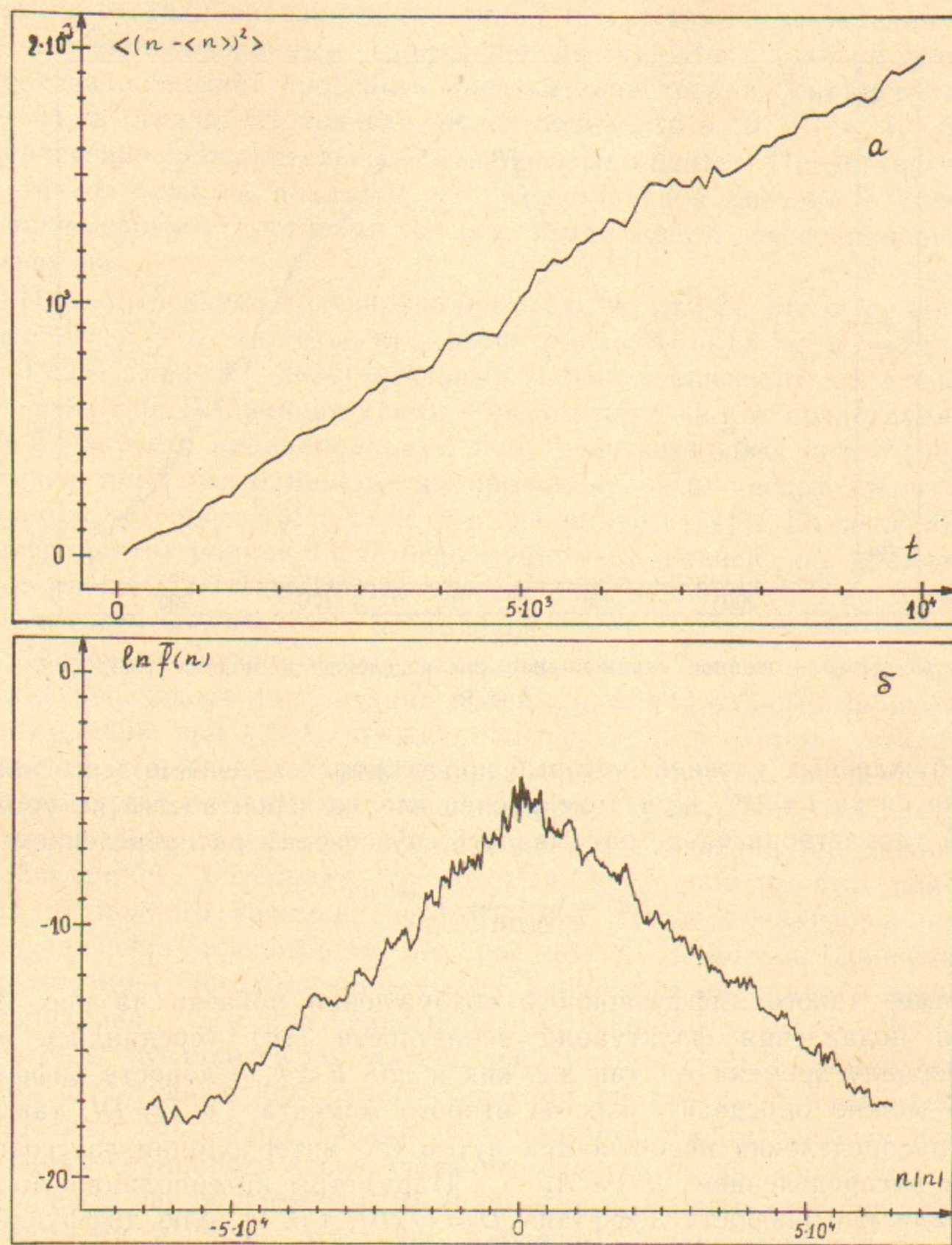


Рис. 19. Диффузионное возбуждение в модели (5.3.2),  $E=0$ ,  $k=0.6$ :  
 а — зависимость второго момента распределения от времени; б — распределение вероятности по уровням в момент времени  $t=10^4$ .

Зависимость скорости диффузии  $D$  ( $k > k_c$ ) и показателя локализации  $\gamma = 1/l$  ( $k < k_c$ ) от параметра возмущения  $k$  представлена на рис. 20. Из него видно, что с приближением к критическому значению скорость диффузии стремится к нулю, а длина локализации растет. Их зависимость от  $k$  является монотонной, скачкообразного уменьшения  $D$  не наблюдается. Интерполяция данных рис. 20 с помощью степенной зависимости дает:  $\gamma = 3.5|k - 0.469|^{1.5}$  ( $\chi^2 = 24$ ,

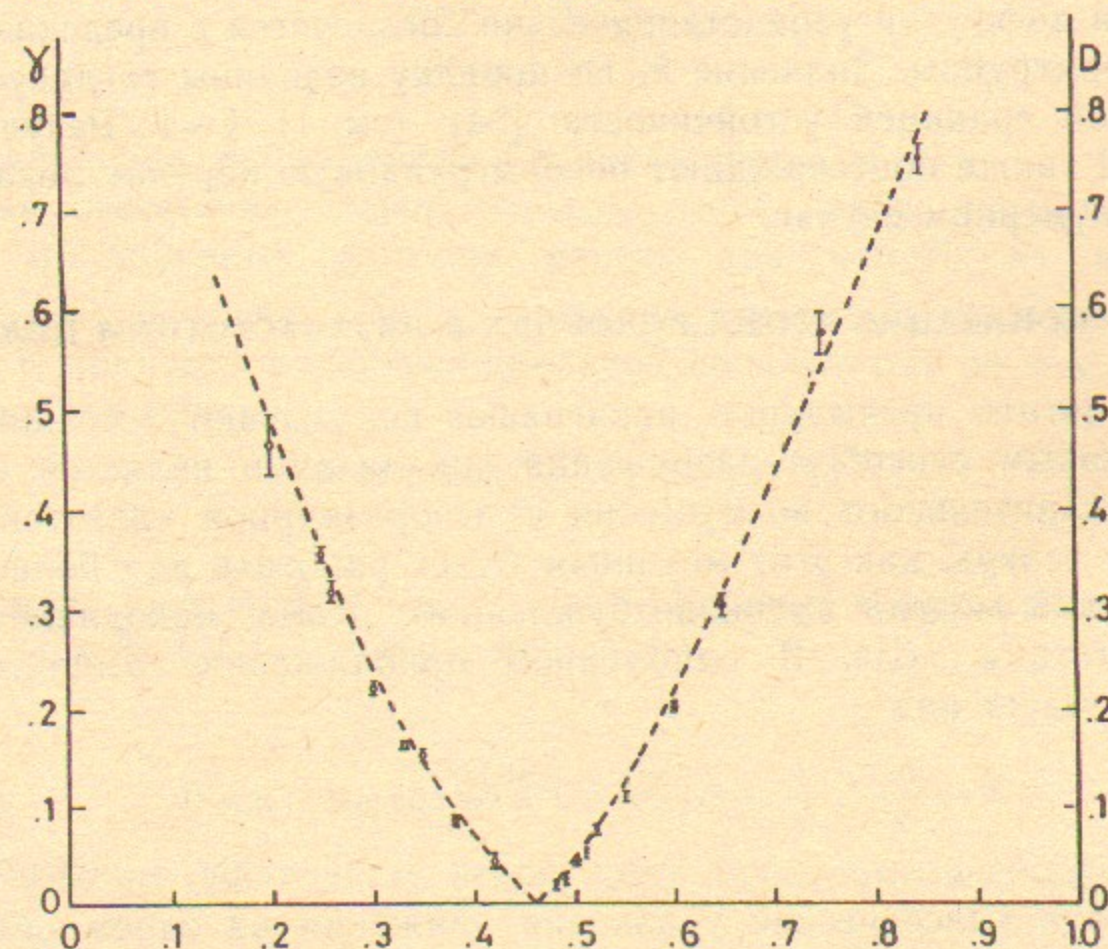


Рис. 20. Зависимость скорости диффузии  $D$  (●) и показателя локализации  $\gamma$  (○) от параметра возмущения  $k$  для модели (3.5.2),  $E=0$ , штриховые линии — интерполяция по формуле (5.3.1).

ошибки при изменении  $\chi^2$  на единицу равны, соответственно, 0.03, 0.001, 0.01),  $D = 2.51|k - 0.465|^{1.25}$  ( $\chi^2 = 10$ , ошибки 0.1, 0.004, 0.04). Полученные значения показателей  $s$  и  $\sigma$ , в согласии с предсказанием теории ренормгруппы (5.3.1), близки друг к другу и не сильно отличаются от 1. При больших значениях  $k \geq 2$  скорость диффузии растет линейно с  $k$  ( $D \sim 2k$ ), что согласуется с зависимостью, получаемой в квазилинейном приближении. Интересно также отметить, что величина  $k_c$  отличается от критического значения  $k_c \approx 0.2$  (§ 5.2) в модели Ллойда со случайными фазами



$\chi_{n_1 n_2 n}$  (см. (5.3.4)). Это изменение показывает, что точка перехода  $k_c$ , по-видимому, зависит от частот  $\omega_1, \omega_2$ .

Таким образом, полученные результаты показывают, что в одномерной системе с тремя несоразмерными частотами (5.3.2) при превышении критического значения для параметра возмущения происходит переход от локализации к диффузионному возбуждению. Вблизи области перехода поведение длины локализации и скорости диффузии удовлетворительно согласуется с предсказаниями ренормгруппы. Значение  $k_c$  по порядку величины согласуется с квантовой границей устойчивости [54] (см. I)  $k \sim 1$ . Результаты § 5.1, 5.2 также подтверждают ренормгрупповую картину локализации в двумерном случае.

#### § 5.4. ИОНИЗАЦИЯ АТОМА ВОДОРОДА В ДВУХЧАСТОТНОМ ПОЛЕ

Результаты предыдущих параграфов показывают, что наиболее эффективным способом разрушения локализации является введение дополнительного возмущения с несоразмерной частотой. Посмотрим теперь, как этот механизм будет работать для более реалистической модели высоковозбужденного атома, находящегося в двухчастотном поле. В одномерном приближении гамильтониан системы имеет вид

$$H = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{z} + \varepsilon_1 z \cos \omega_1 t + \varepsilon_2 z \cos \omega_2 t, \quad z > 0. \quad (5.4.1)$$

Интегрируя классические уравнения движения на одном обороте, аналогично одночастотному случаю, получим отображение

$$\begin{aligned} \bar{N}_1 &= N_1 + k_1 \sin \Phi_1, & \bar{N}_2 &= N_2 + k_2 \sin \Phi_2, \\ \bar{\Phi}_1 &= \Phi_1 + 2\pi\omega_1(-2\bar{E})^{-3/2}, & \bar{\Phi}_2 &= \Phi_2 + 2\pi\omega_2(-2\bar{E})^{-3/2}, \\ \bar{E} &= E_0 + \omega_1 \bar{N}_1 + \omega_2 \bar{N}_2 = E_0 + \omega_1 \bar{N}, \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

где  $k_{1,2} = \frac{0.822\pi\varepsilon_{1,2}}{\omega_{1,2}^{5/3}}$ ;  $E_0 = -\frac{1}{2n_0^2}$  — начальная энергия электрона;

$\Phi_{1,2} = \omega_{1,2}t$  — фазы полей в момент прохождения перигелия;  $N_{1,2}$  имеют смысл числа поглощенных квантов частот  $\omega_{1,2}$ . Рассматривается случай, когда  $\omega_{1,2}n^3 > 1$ .

Диффузионное возбуждение электрона начинается при превышении границы хаоса, которая в двухчастотном случае лежит не выше, чем меньшая из двух границ для каждой частоты в отдель-

ности. Приближенно можно считать, что

$$\varepsilon_{cr} \approx \min \left( \frac{1}{49n_0^5 \omega_1^{1/3}}, \frac{1}{49n_0^5 \omega_2^{1/3}} \right).$$

В области развитого хаоса скорость диффузии равна квазилинейному значению:

$$D = \frac{(\Delta N)^2}{\Delta t} = \frac{1}{2}(k_1^2 + v^2 k_2^2). \quad (5.4.3)$$

Здесь  $v = \omega_2/\omega_1$ , а  $t$  измеряется в числе оборотов.

Если отношение частот  $v = \omega_2/\omega_1$  есть целое,  $v = 2, 3, \dots$ , то число поглощенных фотонов растет как корень из времени  $\Delta N \simeq \sqrt{Dt}$ , и тогда, как и в одночастотном случае, квантовые эффекты приводят к экспоненциальной локализации по  $N$  с длиной локализации равной

$$l_\Phi \approx D \approx 3.33 \frac{\varepsilon_0^2 n_0^2}{\omega_0^{10/3}} (1 + q^2/v^{4/3}), \quad (5.4.4)$$

где  $\varepsilon_0 = \varepsilon n_0^4$ ,  $\omega_0 = \omega_1 n_0^3$ ,  $q = \varepsilon_2/\varepsilon_1$ ,  $v > 1$ . Условие делокализации имеет вид  $l_\Phi > N_l$  ( $N_l = 1/2n_0^2\omega_1$ ), что дает

$$\varepsilon_0 > \frac{\omega_0^{7/6}}{\sqrt{6.66n_0(1+q^2v^{-4/3})}}. \quad (5.4.5)$$

При обратном неравенстве вероятность ионизации экспоненциально мала.

Другая ситуация имеет место для иррационального отношения частот  $v$ . В этом случае число возбужденных состояний растет линейно со временем  $\Delta N_1 \Delta N_2 \approx (D_1 D_2)^{1/2} t$  ( $D_{1,2} = k_{1,2}^2/2$ ) и из аналогии с двумерной локализацией следует, что длина локализации по  $N$  экспоненциально растет с  $k_{1,2}$ :  $\ln l_\Phi \sim \sqrt{D_1 D_2}$ . Из-за столь быстрого роста  $l_\Phi$  уже при  $k_1 k_2 \sim \ln N_l \sim 1$  длина локализации достигает границы ионизации  $N_l$ , и поэтому можно приближенно принять, что для двух несоразмерных частот граница делокализации равна  $D_1 D_2 = 1$ . Отсюда, с учетом соотношения (5.4.5), находим область параметров, в которой двухчастотное поле приводит к значительно более сильной ионизации, чем одночастотное (или двухчастотное с целым  $v$ ):

$$\frac{\omega_0^{5/3} v^{5/6}}{1.82\varepsilon_0 q^{1/2}} < n_0 < \frac{\omega_0^{7/3}}{6.66\varepsilon_0^2 (1+q^2/v^{4/3})}. \quad (5.4.6)$$



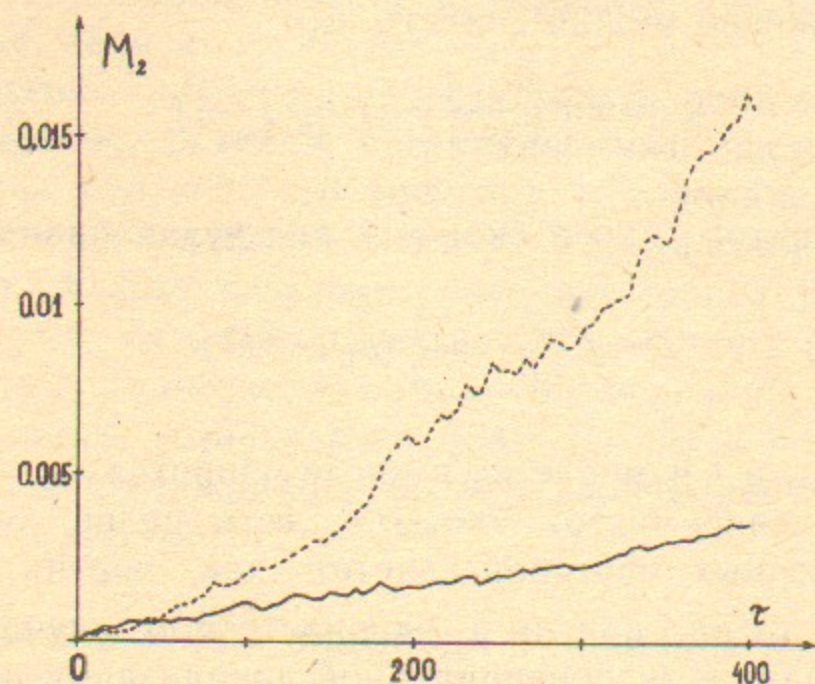


Рис. 21. Зависимость второго момента распределения от времени при двухчастотном возбуждении атома,  $n_0=400$ ,  $\epsilon_0=0.014$ ,  $\omega_0=2.5$ ,  $q=1$ ,  $\nu=3.382/2.5$  (пунктирная линия — классическая модель, сплошная линия — квантовая).

Для проверки полученных оценок были проведены численные эксперименты с одномерной моделью атома в двухчастотном поле. Пример зависимости второго момента  $M_2 = \langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle$  от времени  $\tau = \omega_2 t$  в классическом и квантовом случаях представлен на рис. 21. Из него видно, что квантовая диффузия продолжается в течение времени  $\tau \approx 400$ , значительно превышающего время локализации  $\tau_D = \omega_0 D \approx 20$ , следующего из одночастотной оценки. Причина этого, как отмечалось выше, заключается в том, что число возбуждаемых состояний в двухчастотном случае резко увеличивается. Это увеличение отчетливо проявляется в характере распределения вероятностей по уровням. В отличие от одночастотного поля, для которого распределение имеет вид эквидистантных пиков, в двухчастотном поле с той же средней мощностью излучения, пики отсутствуют и распределение  $f(n)$  является довольно плавной функцией (рис. 22):

$$N_{\Phi} = \frac{\frac{1}{2n_0^2} - \frac{1}{2n^2}}{\omega_1}$$

Отметим, что хотя мощность излучения в обоих случаях одинакова, но вероятность возбуждения  $W_{1.5}$  для двух частот в  $3 \cdot 10^2$  раз больше, чем для одной.

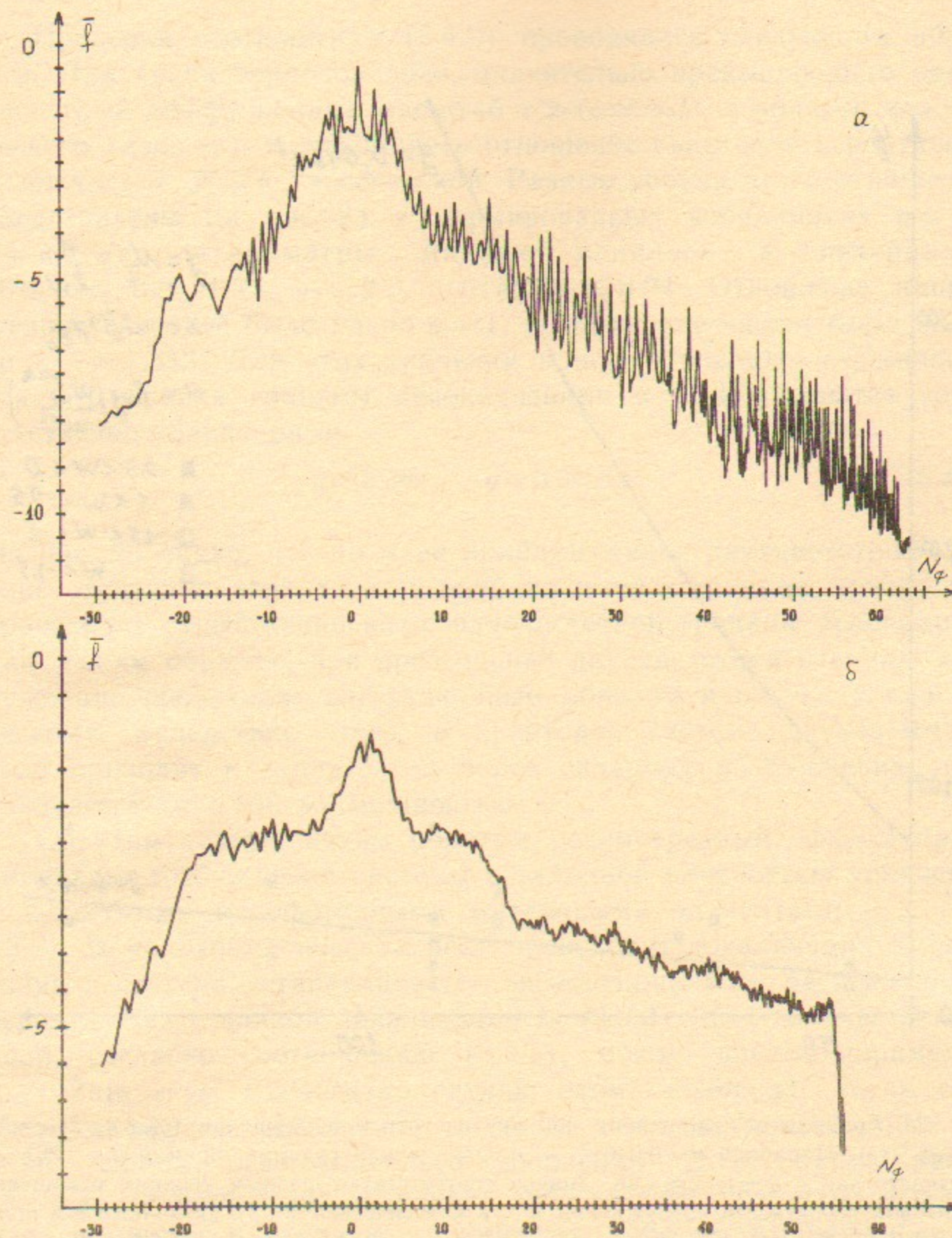


Рис. 22. а — Стационарное распределение при одночастотном возбуждении при  $n_0=400$ ,  $\omega_0=2.5$ ,  $\epsilon_0=0.02$ . б — Распределение по уровням при двухчастотном возбуждении с той же микроволновой мощностью:  $\omega_0=2.5$ ,  $\nu=3.382/2.5$ ,  $\epsilon_0=0.014$ ,  $q=1$ ,  $n_0=400$ ,  $320 < \tau < 400$ .



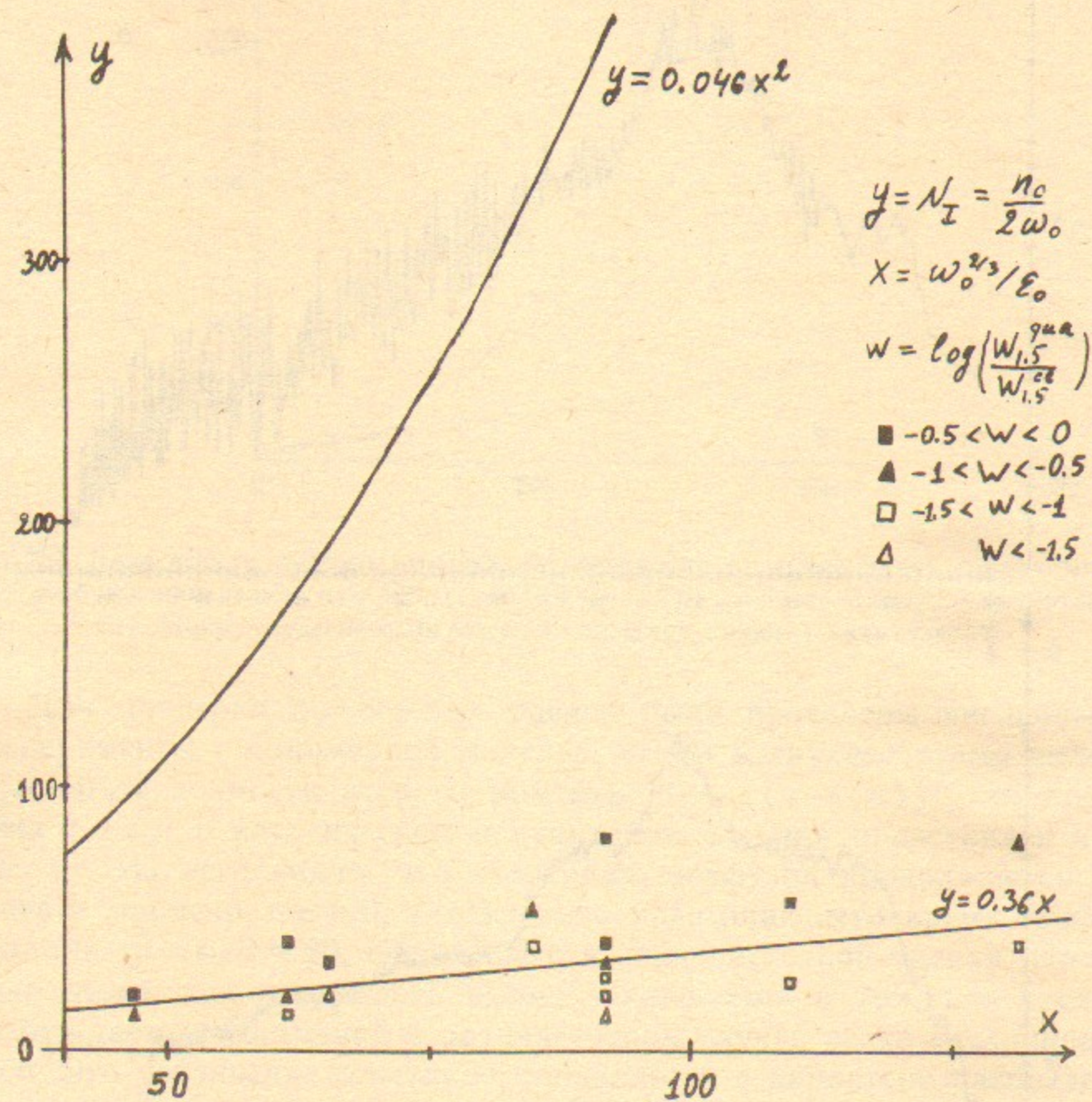


Рис. 23. Граница делокализации при двухчастотном возмущении ( $y_0 = n_0/2\omega_0 = N_I$ ,  $x = \omega_0^{2/3}/\epsilon_0$ ). Парабола  $y = 0.046x^2$  — одночастотная граница, прямая  $y = 0.36x$  — двухчастотная с  $q=1$ ,  $\nu \approx 1.38$ . Значки соответствуют разным уровням отношения квантовой вероятности возбуждения  $W_{1.5}^q$  к классической  $W_{1.5}^{cl}$  в двухчастотном поле: (■) —  $-0.5 < W = \lg(W_{1.5}^q/W_{1.5}^{cl}) < 0$ ; (▲) —  $-1 < W < -0.5$ ; (□) —  $-1.5 < W < -1$ ; (△) —  $W < -1.5$ .

Проверка соотношения (5.4.6) проводилась следующим образом. Для числа периодов поля, значительно превышающего одночастотный диффузионный масштаб  $\tau \gg \tau_D \approx \omega_0 D$ , в области классического хаоса  $\epsilon_0 > \epsilon_c$  находилось отношение квантовой вероятности возбуждения  $W_{1.5}$  к классической. Разные уровни этого отношения представлены на рис. 23 в нормированных координатах  $y = N_I$ ,  $x = \omega_0^{2/3}/\epsilon_0$ . Параметры модели менялись в интервалах  $66 \leq n_0 \leq 400$ ,  $1.3 \leq \omega_0 \leq 2.5$ ,  $0.014 \leq \epsilon_0 \leq 0.04$ . Отношение напряженностей полей было равно  $q=1$ , а отношение частот было близко к  $\nu \approx 1.382$ . Для этих значений в нормированных переменных левая и правая границы делокализации в (5.4.6) даются соответственно уравнениями

$$y = 0.36x, \quad y = 0.0455x^2. \quad (5.4.7)$$

Из рис. 23 видно, что по мере приближения к двухчастотной границе отношение вероятностей приближается к единице, причем это происходит существенно ниже одночастотной границы делокализации. Таким образом, при превышении двухчастотной границы возбуждение происходит диффузионным образом и близко к классическому. Вследствие этого, в квантовой системе двухчастотное поле приводит к значительно более сильному возбуждению, чем одночастотное с той же мощностью.

Обсудим теперь, каким образом рассмотренный эффект проявится при возбуждении системы с заданной плотностью уровней  $\rho$  и известными однофотонными матричными элементами  $\mu_{1,2}$  (см. § 3.3). В монохроматическом поле происходит локализация диффузии и в системе устанавливается экспоненциальное распределение вероятностей с длиной локализации  $l_\Phi$  (3.3.3). Для двухчастотного поля, согласно соотношению (3.4.5), можно ввести параметры  $k_{1,2} = 2\pi\mu_{1,2}\epsilon_{1,2}\rho$ , аналогично случаю атома водорода. Тогда скорость диффузии, измеренная в числе квантов, поглощенных за один период невозмущенного движения  $2\pi/\rho$ , будет равна  $D_{1,2} = k_{1,2}^2/2$  (диффузия возникает либо за счет случайных флуктуаций в спектре и матричных элементах, либо из-за возникновения хаоса при выполнении условия (3.4.6)). Вследствие этого число поглощенных фотонов  $\Delta N_1 \Delta N_2 \approx (D_1 D_2)^{1/2} t$  и длина локализации растет экспоненциально с напряженностью поля:

$$\ln l_\Phi \approx 1.8 \sqrt{D_1 D_2} \approx 7.2 \pi^2 \mu_1 \mu_2 \epsilon_1 \epsilon_2 \rho^2, \quad (5.4.8)$$



где использован численный множитель из (5.2.4). При этом надо иметь в виду, что он относится к  $l_\Phi$  в СФКЭ.

Еще более эффективным оказывается возбуждение для трехчастотного поля. В этом случае неограниченная диффузия возникает уже просто при превышении квантовой границы устойчивости:

$$2\mu\epsilon\rho \sim 1 \quad (5.4.9)$$

(здесь принято, что все параметры полей одного порядка:  $\epsilon_{1,2,3} \sim \epsilon$ ,  $\mu_{1,2,3} \sim \mu$ ).

Усиление диффузионного возбуждения в двух- и трехчастотном поле должно наиболее эффективно проявляться для систем со многими промежуточными состояниями, при ионизации которых требуется поглотить большое число квантов. В качестве такого объекта, кроме высоковозбужденных атомов, можно назвать многозарядную ионизацию атомов в сильном лазерном поле, когда для ионизации требуется поглотить около сотни фотонов [25]. При этом возникает интересный вопрос о влиянии межэлектронного взаимодействия на локализацию по энергии в монохроматическом поле. По-видимому, подход к рассмотрению такой задачи может быть аналогичен анализу влияния межэлектронного взаимодействия на локализацию Андерсона в металлах [62, 65] (см. I).

### § 5.5. ОДНОМЕРНАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ В МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМАХ

С увеличением размерности невозмущенной системы становится все более легко разрушить локализацию возбуждения в периодическом поле. Это, однако, вовсе не означает, что в многомерных системах при превышении квантовой границы устойчивости всегда имеет место делокализация. Действительно, пример атома водорода показывает, что и в многомерном случае возможна фактически одномерная локализация по энергии, если движение вдоль невозмущенной энергетической поверхности происходит достаточно медленно. Покажем теперь, что одномерная локализация может иметь место и в том случае, когда происходит быстрое перемешивание на энергетической поверхности [30] (см. I).

Пусть имеется консервативная система с  $d$  степенями свободы, энергией  $E$  и плотностью уровней  $\rho(E)$ . Рассмотрим ситуацию, когда движение является хаотическим и имеется только один интеграл энергии. Тогда движение по энергетической поверхности происходит диффузионным образом и характеризуется скоростью

диффузии  $D_{||}$ . Будем считать, что  $D_{||}$  не зависит от направления, выбранного на энергетической поверхности. Тогда  $D_{||}$  определяет время, за которое узкая классическая функция распределения расплывается по всей поверхности:  $\tau_{||} \sim E^2/D_{||}$ . Пусть теперь на систему действует периодическое по времени поле, которое из-за хаотичности невозмущенной системы приводит к диффузионному набору энергии со скоростью  $D_{\perp} = (\Delta E)^2/\tau$  (диффузия, перпендикулярная энергетической поверхности,  $\tau$  измеряется в числе периодов поля).

Если поперечная диффузия  $D_{\perp}$  идет достаточно медленно, то функция распределения успевает расплыться по всей энергетической поверхности с данным значением  $E$ . Энергию можно считать фиксированной, а деформацию поверхности малой, если за время  $\tau_{||}$  изменение энергии  $\Delta E (D_{\perp} E^2/D_{||})^{1/2} \ll E$ . Таким образом, при

$$D_{\perp} \ll D_{||} \quad (5.5.1)$$

число возбуждаемых уровней растет так же, как и при одномерной диффузии, и равно  $\Delta n = \rho \Delta E \sim \rho \sqrt{D_{\perp} \tau}$ . Тогда, как и в одномерном случае, из (1.7.7) получаем выражение для длины локализации в стационарном распределении:

$$l = \rho^2 D_{\perp} \sim \Delta n \sim \tau_D, \quad l_E = l/\rho, \quad l_\Phi = l/\rho\omega, \quad (5.5.2)$$

где  $l_E$  — длина локализации по энергии, а  $l_\Phi$  — по числу фотонов. Эта формула применима, когда число поглощенных фотонов  $N_\Phi \sim l_\Phi \gg 1$  и число возбужденных уровней  $\Delta n \sim l \gg 1$ . Кроме того, требуется, чтобы  $\tau_D \gg \tau_{||}$ , иначе локализация произойдет быстрее, чем волновая функция расплывется по всей энергетической поверхности, и  $l$  будет меньше, чем в (5.5.2). При монохроматическом возмущении для диффузии также необходимо, чтобы  $\rho\omega \gg 1$ . При этом выражение для  $D_{\perp}$  дается формулой (3.3.2), а длина локализации формулой (3.3.3).

Соотношение (5.2.2) сохраняется и в случае неоднородной диффузии, когда  $l_E$  зависит от  $E$ , если только  $l_E = \rho D_{\perp} \ll E$ . Если же  $l_E \gg E$ , то в системе происходит делокализация. При  $\rho D_{\perp} = \rho_0 E^\beta$  получаем, что делокализация происходит при  $\beta > 1$  и  $\rho_0 > E^{1-\beta}$  (случай  $\beta = 1$ , как и размерность  $d = 2$ , требует специального анализа).

В качестве иллюстрации описанного эффекта рассмотрим конкретный пример, а именно: движение частицы в двумерной бесконечно глубокой яме под действием периодического возмущения.



Гамильтониан системы имеет вид

$$H = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} + k \sin x_1 \sin \left( \frac{x_2}{\sigma} \right) \delta_T(t), \quad (5.5.3)$$

а волновая функция  $\psi$  равна на границе нулю,  $\sigma \approx 1$ . В случае прямоугольной границы с  $0 \leq x_1 \leq \pi$ ,  $0 \leq x_2 \leq \pi\sigma$  невозмущенный спектр имеет вид  $E_{n_1, n_2} = (n_1^2 + n_2^2 / \sigma^2) / 2$ . Плотность уровней постоянна и равна  $\rho \sim 1$ . При  $kT \gg 1$  в системе возникает развитый хаос, в результате чего происходит диффузионное возбуждение по каждой степени свободы:  $(\Delta n_1)^2 \approx (\Delta n_2)^2 = D\tau$  с  $D \sim k^2$ . При  $D \ll 1$  длина локализации  $l \ll 1$  и почти вся вероятность сосредоточена на начально возбужденном уровне, а на соседних вероятность  $W_{n_1, n_2} \ll 1$ . Для  $D \gg 1$  длина локализации экспоненциально велика:  $\ln l \sim D$ . Пусть теперь стенки прямоугольника вогнуты вовнутрь, что соответствует движению частицы в бильярде Синая (см., например, I, [87]). Тогда и без возмущения динамика становится хаотической. За одно столкновение со стенкой  $\Delta p \sim p$  откуда, учитывая, что время между столкновениями  $\sim E^{-1/2}$ , получаем  $D_{\parallel} \sim E^{5/2} T$ . Скорость поперечной диффузии  $D_{\perp} \sim Ek^2$ . При достаточно больших  $E$  условие (5.5.1) выполнено, а также  $\tau_{\perp} \ll \tau_D$ . Поэтому в системе имеет место одномерная локализация (5.5.2) с  $l_E \sim Ek^2$ . Из-за зависимости  $l_E$  от  $E$  это выражение применимо только при  $k \leq 1$ . Для  $k \geq 1$  по-видимому,  $\ln l \sim D$ . Существенное отличие от интегрируемого случая заключается в том, что и при малом возмущении ( $k \ll 1$ ) длина локализации может быть достаточно большой  $l \sim l_E \gg 1$  если  $E \gg k^{-2}$ , в то время как при таком  $k$  в прямоугольнике  $k \ll 1$ .

Таким образом, в многомерных системах может иметь место одномерная локализация при выполнении условия (5.5.1).

#### ЛИТЕРАТУРА

- I. Шепелянский Д.Л. Теория диффузионного фотоэффекта в атоме водорода. 1. Квантовая локализация динамического хаоса.—Препринт ИЯФ СО СССР 89-54. Новосибирск, 1989.
- II. Шепелянский Д.Л. Теория диффузионного фотоэффекта в атоме водорода. 2. Методика численных экспериментов. 3. Одномерная модель атома водорода в монохроматическом поле.—Препринт ИЯФ СО АН СССР 89-89. Новосибирск, 1989.
1. Stevens M.J., Sundaram B. Static-Field Effects on the Ionization of a Sinusoidally Driven Weakly Bound Electron.—Phys. Rev. A, 1987, v.36, N 1, p.417—420.
2. Meerson B.I., Oks E.A., Sasorov P.V. A Highly Excited Atom in a Field of

- Intense Resonant Electromagnetic Radiation. I. Classical Motion.—J. Phys. B, 1982, v.15, N 20, p.3599—3614.
3. Leopold J.G., Richards D. The Effect of a Resonant Electric Field on a Classical Hydrogen Atom.—J. Phys. B, 1986, v.19, N 8, p.1125—1142.
4. Leopold J.G., Richards D. The Effect of a Combined Static and Microwave Field on an Excited Hydrogen Atom.—J. Phys. B, 1987, v.20, N 11, p.2369—2382.
5. Petrowsky T.Y. Chaos and Cometary Clouds in the Solar System.—Phys. Lett. A, 1986, v.117, N 7, p.328—332.
6. Вечеславов В.В., Чириков Б.В. Хаотическая динамика кометы Галлея.—Новосибирск, 1986, 30 с.—(Препринт/Институт ядерной физики, 86-184).
7. Jensen R.V. Stochastic Ionization of Electrically Polarized Hydrogen Rydberg Atom.—Phys. Rev. Lett., 1985, v.54, № 18, p.2057—2057.
8. Blumel R., Smilansky U. Microwave Ionization of Highly Excited Hydrogen Atoms.—Z. Phys. D, 1987, v.6, N 1, p.83—105.
9. MacKay R.S., Meiss J.D., The Relation Between Quantum and Classical Thresholds for Multiphoton Ionization of Excited Atoms.—Austin, 1987, 18 p.—(Preprint/Institute for Fusion Studies, the Univ. of Texas, IFSR 291).
10. Pillet P., van Linden van den Heuvell H.B., Smith W.W., Kachru R., Tran N.H., Gallagher T.F. Microwave Ionization of the Na Rydberg Atoms.—Phys. Rev. A, 1984, v.30, N 1, p.280—294.
11. Ott E., Antonsen T.M., Hanson J.D. Effect of Noise on Time-Dependent Quantum Chaos.—Phys. Rev. Lett., 1984, v.53, N 23, p.2187—2190.
12. Меерсон Б.И., Сасоров П.В. Высоковозбужденный атом в поле интенсивного низкочастотного электромагнитного излучения.—Опт. и спектр., 1980, т.48, № 5, с.833—837.
13. Blochinzew D. Zur Theorie des Starkeffektes im Zeitveränderlichen Field.—Phys. Z. der Sowjetunion, 1933, B.4, N 3, p.501—515.
14. Chirikov B.V., Lieberman M.A., Shepelyansky D.L., Vivaldi F.M. A Theory of Modulational Diffusion.—Physica D, 1985, v.14, N 3, p.289—304.
15. Izrailev F.M. Limiting Quasi-Energy Statistics for Simple Quantum Systems.—Phys. Rev. Lett., 1986, v.56, N 6, p.541—544.
16. Milonni P.W., Ackerhalt J.R., Goggin M.E. Quasiperiodically Kicked Quantum Systems.—Phys. Rev. A, 1987, v.35, N 4, p.1714—1719.
17. Абрикосов А.А., Основы теории металлов.—М.: Наука, 1987.—520 с.
18. Doron E., Fishman S. Anderson Localization for a Two-Dimensional Rotor.—Phys. Rev. Lett., 1988, v.60, N 10, p.867—870.
19. Izrailev F.M. Intermediate Statistics of Quasi-Energy Spectrum and Quantum Localization of Classical Chaos.—Novosibirsk, 1988 24 p.—(Preprint/Institute of Nuclear Physics, 88-45).
20. Parisi G., Vulpiani A. Scaling Law for the Maximum Lyapunov Characteristic Exponent of Infinite Product of Random Matrices.—J. Phys. A., 1986, v.19, N 8, p.L425—L428.
21. Livi R., Politi A., Ruffo S., Vulpiani A. Liapunov Exponents in High-Dimensional Symplectic Dynamics.—J. of Stat. Phys., 1987, v.46, N 1/2, p.147—160.
22. Rechester A.B., Rosenbluth M.N., White R.B. Calculation of the Kolmogorov Entropy for Motion along a Stochastic Magnetic Field.—Phys. Rev. Lett., 1979, v.42, N 19, p.1247—1250.
23. Mott N. The Mobility Edge since 1967.—J. Phys. C, 1987, v.20, N 21, p.3075—3102.
24. Kim S., Ostlund S. Simultaneous Rational Approximations in the Study of



- Dynamical Systems.—Phys. Rev. A, 1986, v.34, N 4, p.3426—3434.
25. *Johann U., Luk T.S., Egger H., Rhodes C.K.* Rare-Gas Electron-Energy Spectra Produced by Collision-Free Multiquantum Processes.—Phys. Rev. A, 1986, v.34, N 2, p.1084—1103.
26. *Casati G., Guarneri I., Shepelyansky D.L.* Anderson Transition in a One-Dimensional System with Three Incommensurate Frequencies.—Phys. Rev. Lett., 1989, v.62, N 4, p.345—348.

*Д.Л. Шепелянский*

**Теория  
диффузионного фотоэффекта  
в атоме водорода.**

- 4. Ионизация трехмерного атома  
в монохроматическом поле**
- 5. Диффузионное возбуждение в двух-  
и трехчастотном поле**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

---

Работа поступила 19 июня 1989 г.  
Подписано в печать 23.06. 1989 г. МН 10291  
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 4,1 печ.л., 3,0 уч.-изд.л.  
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 93

---

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-  
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и  
отпечатано на ротапринтере Института ядерной физики  
СО АН СССР,  
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*