

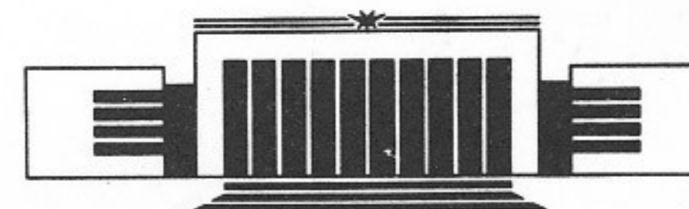


58
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

А.Д. Букин

**КОРРЕЛЯЦИИ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ
МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ**

ПРЕПРИНТ 89-86



НОВОСИБИРСК

Корреляции псевдослучайных чисел
мультипликативной последовательности

А.Д. Букин

Институт Ядерной Физики
630090, Новосибирск, СССР

АННОТАЦИЯ

В работе предложен алгоритм поиска на ЭВМ параметров плоскостей в единичном n -мерном кубе, на которые попадают точки, координаты которых образованы n последовательными псевдослучайными числами мультипликативной последовательности. Этот эффект необходимо учитывать в задачах Монте-Карло с фиксированной конструктивной размерностью. Определены параметры таких плоскостей для трех генераторов случайных чисел.

В работе предложен алгоритм поиска на ЭВМ параметров плоскостей в единичном n -мерном кубе, на которые попадают точки, координаты которых образованы n последовательными псевдослучайными числами мультипликативной последовательности. Этот эффект необходимо учитывать в задачах Монте-Карло с фиксированной конструктивной размерностью. Определены параметры таких плоскостей для трех генераторов случайных чисел.

В работе предложен алгоритм поиска на ЭВМ параметров плоскостей в единичном n -мерном кубе, на которые попадают точки, координаты которых образованы n последовательными псевдослучайными числами мультипликативной последовательности. Этот эффект необходимо учитывать в задачах Монте-Карло с фиксированной конструктивной размерностью. Определены параметры таких плоскостей для трех генераторов случайных чисел.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$m=32$	3811000	2952	200	120	4335	1731	884	231	357
$m=63$	123000	10170	220	150	4335	1731	884	231	357

В работе предложен алгоритм поиска на ЭВМ параметров плоскостей в единичном n -мерном кубе, на которые попадают точки, координаты которых образованы n последовательными псевдослучайными числами мультипликативной последовательности. Этот эффект необходимо учитывать в задачах Монте-Карло с фиксированной конструктивной размерностью. Определены параметры таких плоскостей для трех генераторов случайных чисел.

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод Монте-Карло, применяемый в различных расчетах, предполагает использование генераторов случайных чисел. Качество генератора может отразиться на результатах расчетов, поэтому важно знать статистические свойства используемых генераторов.

В настоящее время наиболее изучены свойства мультипликативных генераторов вследствие их простоты.

В работе [1] автором был опубликован сжатый обзор свойств мультипликативных генераторов вместе с исследованием коэффициента автокорреляции. Там же было предложено для улучшения статистических свойств мультипликативной последовательности использовать программную реализацию операции умножения целых чисел с большим числом двоичных разрядов.

Все свойства генераторов этого типа оказываются удовлетворительными для большинства задач, однако один вид корреляции, впервые указанный в работе [2], традиционно считается недостатком мультипликативной последовательности и ограничивает использование псевдослучайных чисел этого типа в задачах Монте-Карло с большой конструктивной размерностью гиперпространства. Речь идет о таком эффекте: если каждые n последовательных чисел мультипликативной последовательности рассматривать как координаты точки в n -мерном гиперкубе, то все такие точки попадают на набор параллельных эквидистантных гиперплоскостей, причем для количества плоскостей в этом наборе в работе [2] получено ограничение сверху. В таблице 1 приведены эти ограни-

чения для $m=32$ и $m=63$, где m — количество двоичных разрядов в мантиссе случайного числа (выбор этих значений m будет пояснен ниже).

Таблица 1

Количество гиперплоскостей в n -мерном гиперпространстве, на которые укладываются все случайные точки

n	3	4	5	6	7	8	9	10
$m=32$	2953	566	220	120	80	60	48	41
$m=63$	3811000	122000	16170	4335	1731	884	531	357

Наличие областей пространства, недоступных для случайных векторов, не является свойством генераторов только мультипликативного типа. Для других генераторов с таким же периодом последовательности эти «пустые» объемы могут иметь какую-либо сложную форму, но в общем случае это не устраняет возможность систематической ошибки в расчетах Монте-Карло. Представляется бесспорным следующее утверждение. Если для какого-либо генератора псевдослучайных чисел выявлен какой-либо тип корреляции, затрудняющий его использование для некоторых задач, нет оснований отдавать предпочтение другому генератору, у которого этот тип корреляции не исследовался или такие исследования не доведены до конца вследствие трудности задачи.

В этой связи эффект попадания случайных точек мультипликативной последовательности на плоскости является достоинством генераторов этого типа, так как позволяет количественно описать поведение случайных точек в n -мерном пространстве.

На взгляд автора, анализ возможности использования данного типа генераторов для конкретных задач больше затруднен не тем, что эти ограничения оказались удивительно низкими, а тем, что это ограничения сверху, и нет никаких оснований ожидать для конкретного генератора, что количество плоскостей в минимальном наборе окажется близким к теоретическому пределу.

В данной работе предложен алгоритм для поиска наборов таких плоскостей и получены их характеристики для трех конкретных мультипликативных генераторов, использующихся в нашем Институте.

2. АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ

Мультипликативный ряд псевдослучайных чисел r_i полностью определяется производящей константой k и начальным случайным числом. Все случайные числа — целые без знака, в интервале от 0 до $M=2^m$. Каждое следующее число получается из предыдущего по простому алгоритму:

$$r_{i+1} = r_i \cdot k \pmod{2^m}. \quad (1)$$

Вещественные случайные числа в интервале $(0, 1)$ получаются делением соответствующих целых чисел на M .

Попытки поиска наборов плоскостей минимизацией некой целевой функции и многомерным преобразованием Фурье не привели к успеху.

Для предлагаемого алгоритма поиска плоскостей существенно, что точки в n -мерном пространстве абсолютно точно укладываются на искомые гиперплоскости, а также то, что эти гиперплоскости параллельны и эквидистантны, что следует из доказательства в [2]. Схема алгоритма такова.

1. Набирается массив достаточно большого числа точек в n -мерном пространстве. Координатами каждой случайной точки являются n последовательных случайных чисел исследуемого генератора. Количество точек должно быть, по крайней мере, много больше размерности пространства n .

2. Массив точек упорядочивается по расстоянию до начала координат.

3. Точка, ближайшая к началу координат, принимается за начало отсчета и ее координаты вычитаются из координат всех остальных точек. Далее работа ведется с полученными таким образом векторами R_i .

4. На следующем этапе необходимо выбрать n точек R_i таких, чтобы определитель размерности n , составленный из координат этих точек, не был равен нулю. Вообще говоря, это условие является достаточным для поиска решения системы линейных уравнений, однако для экономии времени ЭВМ желательно, чтобы эти опорные точки были близки друг к другу, т. е. лежали на возможно более близких друг к другу гиперплоскостях, однако, не на одной и той же гиперплоскости, что соответствует поиску как можно меньшего, но не равного нулю определителя.

5. Для того, чтобы понять следующий шаг алгоритма, предста-

вим, что нам известно направление нормали к гиперплоскостям и шаг между ними. Образует вектор нормали X с модулем, равным обратной величине к шагу между гиперплоскостями. Тогда скалярное произведение вектора X на любой из векторов R_i будет равняться целому числу. Если бы мы знали n таких целых чисел для набора векторов, полученного на предыдущем шаге, то мы нашли бы неизвестный вектор X , решая систему линейных уравнений, так как определитель системы отличен от нуля. Отсюда следует очевидное завершение алгоритма — перебирая всевозможные наборы из n целых чисел (со знаками $+$ и $-$), проверять, укладываются ли все точки R_i на плоскости, однозначно задаваемые вектором X . Очевидно, что проверять надо только до первого нарушения, а если хоть одна точка не попадает точно ни на одну из плоскостей, то следует переходить к следующему набору целых чисел. Количество вариантов можно сократить примерно вдвое, если первому из целых чисел присваивать только неотрицательные значения.

В описываемом алгоритме с теоретической точки зрения имеется слабое место. Очередной набор плоскостей, полученный из набора целых чисел, проверяется на большом массиве случайных точек, но не на всех возможных точках. Есть некоторая вероятность, что после успешной проверки на ограниченном массиве точек набор плоскостей все же является ложным. Можно предположить, что для ложных наборов плоскостей распределение точек по проекции на нормаль к плоскостям является равномерным (и это наблюдалось в процессе отладки программы). Тогда вероятность принять ложный набор плоскостей за истинный падает экспоненциально с увеличением числа проверок.

Очевидно, что формально искомым набором плоскостей существует бесконечное множество. Действительно, случайные числа получаются дискретными, и по крайней мере, можно образовать набор плоскостей, параллельных одной из координатных граней, с шагом, равным минимальному расстоянию между случайными числами. Получив одно такое решение, можно образовать еще бесконечное количество наборов плоскостей, помещая новые плоскости между старыми.

Если мы интересуемся только теми решениями, где гиперплоскости расположены редко, то можно воспользоваться выводом работы [2] о том, что найдется, по крайней мере, одно решение с количеством гиперплоскостей во всем гиперкубе не более

$$N = (n! \cdot 2^m)^{1/n} \quad (2)$$

Исходя из этой формулы, можно получить ограничение сверху на модуль вектора X для искомым наборов плоскостей.

Используя это или аналогичное ограничение, можно осуществить полный перебор комбинаций целых чисел. К сожалению, не удалось найти эффективных способов сокращения числа комбинаций.

В нашем Институте широко используются три генератора указанного типа: RANDM, RNDM и DRNDM. Генератор RANDM написан в нашем Институте и используется на ЭВМ серии ЕС с 1978 года. Производящая константа случайного ряда в RANDM $k_1 = 1AFD498D_{16} = 452807053$. Генератор RNDM взят из библиотеки программ ЦЕРНа, константа ряда $k_2 = 10DCD_{16} = 69069$. Генератор DRNDM является версией предложенного в [1] генератора DRANDM, в котором осуществлялось программное моделирование команды умножения целых чисел с 63 двоичными разрядами. При этом уменьшение быстродействия генератора примерно в два раза компенсируется существенным улучшением статистических свойств ряда. Производящая константа DRNDM $k_3 = 400040010115_{16} = 70369817985301$. Генератор DRNDOM с такой же производящей константой k_3 , но несколько отличной от DRNDM программной реализацией, включен в библиотеку программ СЛАК (США). Так как свойства генератора полностью определяются производящей константой, то нижеприведенные результаты для генератора DRNDM справедливы и для генератора DRNDOM.

Любопытно, что все три константы не являются простыми числами и имеют следующее разложение: $k_1 = 17 \times 281 \times 94789$, $k_2 = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 23$, $k_3 = 29 \times 43 \times 53 \times 971 \times 1096541$. Однако неизвестно, к каким следствиям может привести наличие указанных множителей в разложении производящих констант.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

В результате исследования обнаружено, что для любого из перечисленных генераторов в n -мерном пространстве существует много наборов плоскостей, по-разному ориентированных и с различными зазорами между плоскостями. Из всех этих наборов плоскостей наибольший интерес представляет набор плоскостей с максимальным зазором между плоскостями. Обозначим этот максимальный зазор H_{\max} . В некоторых случаях может оказаться полезным иметь характеристики наборов плоскостей и с меньшими

зазорами, однако описать все наборы плоскостей практически невозможно.

Основные результаты поиска плоскостей сведены в таблицу 2. Очевидной трудностью в представлении результатов является решение вопроса — какое количество наборов плоскостей представлять для каждого генератора и для каждой размерности гиперпространства. Для практического использования этих данных необходимо знать максимальный шаг H_{\max} между плоскостями, а также параметры наборов плоскостей с шагом в интервале $(0.5 \cdot H_{\max}, H_{\max}]$. Однако в некоторых случаях даже при таких условиях количество наборов плоскостей оказалось очень большим.

Следует пояснить, почему левая граница интервала выбрана равной $0.5 \cdot H_{\max}$. Легко заметить, что если существует набор плоскостей с шагом H , то набор плоскостей с шагом $0.5 \cdot H$, полученный из начального набора объединением исходного набора с набором, смещенным на $0.5 \cdot H$, также содержит все случайные вектора, и более того, не менее половины плоскостей не будут содержать ни одного случайного вектора. Очевидно, что такие неполноценные наборы плоскостей не следует включать в результаты.

В итоге решено привести подробную информацию о не более чем десяти наборах плоскостей для каждого генератора и размерности гиперпространства от 3 до 10. Таблицы с параметрами плоскостей приведены в Приложении.

На основании данных в таблице 2 нельзя отдать предпочтение одному из генераторов RANDM или RNDM. При одних n лучше генератор RANDM, при других n — RNDM. Однако, при всех n генератор DRNDM много лучше генераторов с одинарной точностью, и в тех случаях, когда использование генераторов мультипликативного типа с одинарной точностью вызывает сомнение в надежности результатов и уменьшение скорости генерации случайных чисел в два раза не очень критично для решаемой задачи, можно применять генераторы двойной точности.

Если сравнить теоретический предел для количества плоскостей и реальные характеристики генераторов, то отличие может быть в несколько раз. Если бы зависимость числа плоскостей в минимальном наборе от производящей константы k была известна в аналитическом виде, то можно было бы выбирать оптимальное значение k для этого параметра. Однако, нет оснований ожидать, что теоретический предел (2) достигается при каком-либо значении k .

Характеристика генераторов RANDM, RNDM и DRNDM в отношении корреляции типа «плоскость»

n	Генератор	Максимальный шаг между плоскостями H_{\max}	Количество плоскостей в наборе с H_{\max} (теор. предел)	Количество наборов плоскостей с шагом в инт. $(0.5 \cdot H_{\max}, H_{\max}]$
3	RANDM	0.00142	1021 (2953)	4
	RNDM	0.00278	395 (2953)	1
	DRNDM	$9.22038 \cdot 10^{-7}$	$1.47(3.81) \cdot 10^6$	10
4	RANDM	0.0113	157 (566)	1
	RNDM	0.0102	156 (566)	3
	DRNDM	$5.44669 \cdot 10^{-5}$	$0.34(1.22) \cdot 10^5$	2
5	RANDM	0.0366	57 (220)	1
	RNDM	0.0230	88 (220)	11
	DRNDM	$2.91860 \cdot 10^{-4}$	$0.59(1.62) \cdot 10^4$	14
6	RANDM	0.0386	53 (120)	44
	RNDM	0.0643	35 (120)	3
	DRNDM	$1.75544 \cdot 10^{-3}$	$1.20(4.34) \cdot 10^3$	1
7	RANDM	0.0570	41 (80)	130
	RNDM	0.0767	30 (80)	24
	DRNDM	$2.29547 \cdot 10^{-3}$	$1.04(1.73) \cdot 10^3$	392
8	RANDM	0.1313	21 (60)	4
	RNDM	0.0767	30 (60)	378
	DRNDM	$5.97871 \cdot 10^{-3}$	382 (884)	142
9	RANDM	0.1387	19 (48)	35
	RNDM	0.1000	26 (48)	723
	DRNDM	$8.97809 \cdot 10^{-3}$	302 (531)	946
10	RANDM	0.1387	17 (41)	393
	RNDM	0.1387	19 (41)	424
	DRNDM	$1.38648 \cdot 10^{-2}$	166 (357)	2120

Учитывая последнее замечание, характеристики генераторов RANDM и RNDM в отношении исследуемого эффекта представляются близкими к предельно достижимым.

При получении характеристик плоскостей был выявлен интересный, не вполне очевидный эффект. Оказывается, параметры плос-

костей не меняются при замене исходного случайного числа на любое другое из того же случайного ряда (как известно, каждой производящей константе соответствуют два случайных непересекающихся ряда с одинаковым периодом). Этот эффект сразу же отвергает идею борьбы с попаданием случайных векторов на плоскости путем пропуска время от времени некоторого количества случайных чисел ряда.

В заключение хотелось бы повторить, что мультипликативные генераторы, по мнению автора, имеют большое преимущество по сравнению с генераторами другого типа в первую очередь потому, что для них детально изучены основные характеристики случайных рядов: период, равномерность, корреляционные свойства. В то же время для любого нового алгоритма определение даже простейшей характеристики ряда — периода, представляет обычно большую трудность.

**ПАРАМЕТРЫ ПЛОСКОСТЕЙ,
НА КОТОРЫЕ УКЛАДЫВАЮТСЯ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕКТОРА**

Запишем уравнение, задающее систему параллельных, эквидистантных гиперплоскостей в гиперпространстве размерности n :

$$(R \cdot W) = H \cdot (D + l), \quad (3)$$

где R — случайный вектор, образованный n последовательными случайными числами мультипликативной последовательности; W — единичный вектор нормали к плоскостям; H — шаг (расстояние между соседними плоскостями); D — смещение (некоторое число в интервале от -0.5 до 0.5); l — произвольное целое число со знаком плюс или минус.

Как уже упоминалось, все случайные числа, генерируемые данной производящей константой, разбиваются на два непересекающихся ряда с одинаковым периодом, причем младшие два двоичных разряда случайных чисел первого ряда образуют число 1, а у второго ряда — число 3. Оказалось, что из всех параметров плоскостей для этих рядов различаются только смещения. В дальнейшем эти параметры будут обозначаться D_1 и D_2 .

Осталось неясным, является ли равенство параметров W и H для этих двух последовательностей теоретически строгим или отличие незаметно на уровне точности вычислений.

Количество наборов плоскостей, представленных в таблицах для каждого из трех генераторов и для размерности гиперпространства от 3 до 10, неодинаковое от варианта к варианту. Отбиралось не более 10 наборов плоскостей с наибольшим шагом H , при условии, что H попадает в интервал $(0.5 \cdot H_{\max}, H_{\max}]$.

В первой колонке таблиц указывается шаг между плоскостями H , во второй и третьей — смещения D_1 и D_2 , в четвертой колонке — количество плоскостей в данном наборе, проходящих через единичный гиперкуб, и в последней колонке — единичный вектор нормали W . Из-за недостатка места в таблице в необходимых случаях значения проекций вектора W на координатные плоскости записываются в несколько строк.

Следует иметь в виду, что если для генераторов RANDM и RNDM количество приведенных знаков в параметрах плоскостей достаточно для того, чтобы точки хорошо распределились по плос-

костям, то для DRNDM точность приведенных параметров H и W может оказаться недостаточной. Однако, точность параметров плоскостей в таблицах для DRNDM вполне достаточна для оценки влияния корреляции этого типа на точность результатов расчетов методом Монте-Карло. Кроме того, при необходимости можно довольно легко уточнить значения параметров, используя табличные данные в виде начального приближения.

RANDM $n=3$

$H \cdot 10^3$	D_1	D_2	N	W		
1.41921	0.50	0.50	1021	-0.84159	0.53504	-0.07380
1.04959	0.00	0.00	1458	0.28234	0.89005	-0.35791
0.97665	0.50	0.50	1623	0.84187	0.46000	-0.28225
0.75377	0.50	0.50	1941	0.24422	0.92337	-0.29623

RANDM $n=4$

H	D_1	D_2	N	W			
0.01128	0.50	0.50	157	0.587	0.034	-0.519	0.621

RANDM $n=5$

H	D_1	D_2	N	W			
0.0366	0.25	-0.25	57	-0.403	-0.366	-0.183	-0.366
				-0.732			

RANDM $n=6$

H	D_1	D_2	N	W			
0.0386	0.00	0.00	53	0.424	-0.039	-0.193	0.193
				0.386	-0.772		
0.0366	0.25	-0.25	57	-0.403	-0.366	-0.183	-0.366
				-0.732	0.000		
0.0366	0.25	-0.25	57	0.000	-0.403	-0.366	-0.183
				-0.366	-0.732		
0.0360	0.50	0.50	58	0.144	-0.108	0.576	0.252
				-0.324	-0.684		
0.0341	0.50	0.50	53	-0.239	-0.068	0.716	0.068
				-0.648	0.034		
0.0333	-0.25	0.25	53	-0.133	-0.266	-0.866	-0.400
				-0.033	-0.033		
0.0325	-0.25	0.25	61	0.812	-0.260	-0.162	-0.032
				-0.260	0.422		
0.0263	0.25	-0.25	80	0.763	-0.289	0.289	0.158
				-0.447	-0.158		
0.0259	-0.25	0.25	90	-0.389	-0.182	-0.545	-0.441
				-0.285	0.493		
0.0254	-0.25	0.25	69	0.916	-0.229	-0.254	0.102
				0.051	-0.178		

H	D_1	D_2	N	W			
0.0366	0.25	-0.25	57	-0.403	-0.366	-0.183	-0.366
				-0.732			

RANDM $n=7$

H	D_1	D_2	N	W			
0.0570	-0.25	0.25	41	-0.342	-0.057	0.285	-0.627
				0.171	-0.570	-0.228	
0.0453	0.50	0.50	45	-0.498	-0.272	0.136	0.724
				-0.362	0.045	0.045	
0.0446	0.25	-0.25	53	-0.357	-0.446	0.223	0.045
				0.625	0.179	-0.446	
0.0444	0.00	0.00	50	0.355	-0.666	0.133	0.177
				-0.577	0.177	-0.133	
0.0430	0.25	-0.25	55	-0.730	-0.301	0.344	0.215
				-0.215	-0.387	-0.129	
0.0423	-0.25	0.25	55	0.085	-0.677	0.339	-0.296
				-0.423	-0.254	-0.296	
0.0420	0.50	0.50	59	0.545	-0.252	0.545	0.126
				0.420	-0.252	-0.294	
0.0415	0.50	0.50	53	-0.083	-0.373	0.000	0.497
				0.456	0.580	-0.249	
0.0408	0.50	0.50	48	0.082	-0.204	0.734	-0.082
				0.000	0.571	-0.285	
0.0406	0.25	-0.25	58	0.406	0.203	0.527	-0.122
				-0.568	0.406	0.122	

RANDM $n=9$

H	D_1	D_2	N	W				
0.139	0.00	0.00	19	-0.277	-0.139	0.000	0.277	-0.416
				0.416	0.555	0.000	-0.416	
0.131	0.50	0.50	19	0.000	-0.263	-0.394	-0.394	-0.131
				-0.525	-0.131	0.394	0.394	
0.131	0.50	0.50	21	-0.262	-0.394	-0.394	-0.131	-0.525
				-0.131	0.394	0.394	0.000	
0.096	0.25	-0.25	29	-0.096	-0.385	0.289	0.385	0.096
				-0.577	-0.385	0.192	-0.289	
0.089	0.25	-0.25	29	0.178	0.178	0.535	-0.178	0.178
				-0.267	0.535	0.445	-0.178	
0.088	-0.25	0.25	31	0.439	0.088	0.175	-0.263	-0.614
				0.263	-0.351	-0.088	0.351	
0.087	0.25	-0.25	31	-0.261	-0.435	0.261	0.522	-0.174
				-0.261	0.000	0.174	-0.522	
0.083	-0.25	0.25	29	-0.083	-0.167	0.500	0.583	0.167
				-0.167	-0.250	-0.083	-0.500	
0.081	-0.25	0.25	23	0.243	0.000	0.162	-0.081	-0.811
				0.487	0.000	-0.081	0.081	
0.080	0.00	0.00	29	0.160	-0.320	0.400	0.240	-0.721
				0.000	-0.320	0.080	-0.160	

RANDM $n=8$

H	D_1	D_2	N	W			
0.1313	0.50	0.50	21	-0.263	-0.394	-0.394	-0.131
				-0.525	-0.131	0.394	0.394
0.0729	0.25	-0.25	29	0.073	0.438	0.000	-0.073
				0.000	0.729	0.365	-0.365
0.0729	-0.25	0.25	32	-0.073	0.219	-0.219	-0.146
				-0.292	0.656	0.583	-0.146
0.0690	0.25	-0.25	33	-0.690	0.414	-0.483	0.000
				-0.138	-0.138	-0.276	-0.069

RANDM $n=10$

H	D_1	D_2	N	W				
0.139	0.00	0.00	17	0.277	0.139	0.000	-0.277	0.416
				-0.416	-0.555	0.000	0.416	0.000
0.139	0.00	0.00	19	0.000	0.277	0.139	0.000	-0.277
				0.416	-0.416	-0.555	0.000	0.416
0.131	0.50	0.50	19	0.000	0.000	-0.263	-0.394	-0.394
				-0.131	-0.525	-0.131	0.394	0.394
0.131	0.50	0.50	19	0.000	0.262	0.394	0.394	0.131
				0.525	0.131	-0.394	-0.394	0.000
0.131	0.50	0.50	21	0.263	0.394	0.394	0.131	0.525
				0.131	-0.394	-0.394	0.000	0.000
0.129	0.50	0.50	19	-0.258	-0.129	-0.258	-0.129	-0.775
				0.258	0.000	-0.129	0.000	0.387
0.109	-0.25	0.25	23	-0.546	-0.109	-0.436	0.000	0.436
				-0.436	0.000	0.000	-0.109	0.327
0.105	-0.25	0.25	27	0.105	0.316	-0.105	-0.211	0.316
				0.000	-0.316	0.422	-0.527	0.422
0.102	-0.25	0.25	25	-0.204	-0.408	-0.714	0.204	0.000
				0.000	-0.306	-0.102	0.204	-0.306
0.102	0.25	-0.25	27	-0.510	0.102	-0.102	0.306	0.510
				0.000	0.102	-0.306	-0.408	0.306

RNDM $n=3$

$H \cdot 10^4$	D_1	D_2	N	W		
2.77849	0.25	-0.25	395	0.06113	0.03612	-0.99748

RNDM $n=4$

H	D_1	D_2	N	W			
0.01016	-0.25	0.25	156	0.315	-0.203	0.914	0.152
0.00628	0.50	0.50	296	-0.722	0.295	0.559	-0.282
0.00583	-0.25	0.25	274	-0.851	0.391	-0.006	-0.350

RNDM $n=5$

H	D_1	D_2	N	W			
0.0230	0.25	-0.25	88	0.459	0.735	0.390	-0.184
				0.252			
0.0168	0.50	0.50	101	0.487	0.017	0.134	0.839
				-0.201			
0.0144	0.25	-0.25	153	-0.416	0.431	-0.402	0.574
				0.388			
0.0141	0.25	-0.25	130	0.127	-0.438	-0.127	0.819
				-0.325			
0.0141	0.25	-0.25	148	-0.661	-0.323	0.520	0.183
				0.394			
0.0138	0.50	0.50	133	-0.372	0.124	0.744	0.069
				0.537			
0.0130	-0.25	0.25	151	0.639	0.430	0.326	0.548
				-0.013			
0.0124	0.50	0.50	151	-0.112	0.768	-0.136	0.396
				0.471			
0.0120	0.00	0.00	160	-0.586	-0.024	-0.538	0.574
				0.191			
0.0119	-0.25	0.25	163	-0.214	-0.262	0.536	0.750
				0.190			

RNDM $n=6$

H	D_1	D_2	N	W			
0.0643	0.00	0.00	35	-0.193	0.707	-0.257	0.514
				-0.257	0.257		
0.0359	0.25	-0.25	53	0.574	-0.179	0.215	0.753
				-0.143	-0.072		
0.0329	-0.25	0.25	63	-0.626	0.527	-0.329	-0.428
				0.000	0.198		

RNDM $n=7$

H	D ₁	D ₂	N	W			
0.0767	0.00	0.00	30	0.230	-0.614	-0.537	-0.307
				-0.307	0.000	-0.307	
0.0643	0.00	0.00	34	0.000	-0.193	0.707	-0.257
				0.514	-0.257	0.257	
0.0643	0.00	0.00	34	0.193	-0.707	0.257	-0.514
				0.257	-0.257	0.000	
0.0524	0.00	0.00	44	0.524	0.419	0.577	-0.367
				-0.262	0.105	0.052	
0.0500	0.00	0.00	42	0.650	0.000	0.200	-0.550
				-0.450	0.100	-0.150	
0.0475	0.00	0.00	46	-0.475	-0.522	0.000	0.142
				0.617	-0.285	0.142	
0.0456	0.50	0.50	45	-0.091	0.320	0.046	-0.456
				-0.456	-0.046	0.685	
0.0455	0.50	0.50	48	0.545	0.045	0.455	0.136
				0.227	0.136	-0.636	
0.0426	0.50	0.50	48	0.043	-0.043	-0.255	-0.596
				-0.596	-0.043	0.468	
0.0422	0.25	-0.25	53	0.127	0.337	-0.506	0.084
				0.717	-0.169	-0.253	

RNDM $n=8$

H	D ₁	D ₂	N	W			
0.0767	0.00	0.00	30	0.000	-0.230	0.614	0.537
				0.307	0.307	0.000	0.307
0.0767	0.00	0.00	30	0.230	-0.614	-0.537	-0.307
				-0.307	0.000	-0.307	0.000
0.0729	0.00	0.00	30	0.219	-0.802	0.073	0.219
				0.000	0.292	-0.292	0.292
0.0684	0.00	0.00	33	-0.205	-0.137	-0.068	-0.479
				0.752	0.342	0.137	-0.068
0.0654	0.25	-0.25	35	-0.458	-0.196	0.065	-0.588
				0.000	0.131	-0.196	-0.588
0.0643	0.00	0.00	35	0.000	0.000	-0.193	0.707
				-0.257	0.514	-0.257	0.257
0.0643	0.00	0.00	34	0.000	-0.193	0.707	-0.257
				0.514	-0.257	0.257	0.000
0.0643	0.00	0.00	34	0.193	-0.707	0.257	-0.514
				0.257	-0.257	0.000	0.000
0.0640	0.25	-0.25	36	-0.256	-0.064	0.128	-0.128
				-0.704	-0.192	-0.320	-0.512
0.0635	0.25	-0.25	40	-0.254	-0.254	0.635	0.318
				-0.446	0.064	-0.318	-0.254

RNDM $n=9$

H	D_1	D_2	N	W				
0.100	0.50	0.50	26	0.200	0.300	0.000	0.200	-0.400
				-0.500	-0.400	-0.500	-0.100	
0.092	0.50	0.50	24	-0.092	0.092	-0.092	-0.460	0.644
				0.000	-0.184	-0.552	-0.092	
0.086	-0.25	0.25	29	-0.515	-0.343	0.172	-0.343	-0.600
				0.172	-0.086	-0.257	0.086	
0.083	0.25	-0.25	26	0.167	0.583	0.083	0.000	-0.167
				0.500	-0.083	0.000	0.583	
0.082	0.25	-0.25	33	0.493	0.329	0.082	-0.329	0.000
				-0.493	-0.247	0.247	-0.411	
0.082	0.50	0.50	26	0.163	0.000	-0.163	-0.163	0.000
				0.163	0.735	-0.572	0.163	
0.081	-0.25	0.25	30	0.324	0.081	0.081	-0.487	0.324
				-0.081	0.081	0.649	-0.324	
0.081	0.50	0.50	33	0.161	-0.242	0.725	-0.242	-0.242
				0.161	0.403	-0.242	-0.161	
0.078	0.50	0.50	29	-0.155	-0.233	0.233	-0.776	-0.233
				0.078	0.000	0.388	-0.233	
0.078	-0.25	0.25	35	0.621	0.310	-0.310	0.388	-0.310
				0.310	0.155	0.000	-0.233	

RNDM $n=10$

H	D_1	D_2	N	W				
0.139	0.50	0.50	19	-0.277	-0.416	0.000	0.139	-0.555
				-0.277	0.000	0.139	0.139	-0.555
0.116	0.00	0.00	21	0.233	0.116	-0.349	0.233	-0.697
				-0.116	0.116	-0.116	0.465	0.116
0.110	-0.25	0.25	24	0.552	-0.221	0.221	0.110	-0.110
				-0.110	0.110	0.552	0.442	-0.221
0.108	-0.25	0.25	23	-0.431	0.108	-0.108	0.431	-0.647
				0.108	0.108	0.108	-0.324	0.216
0.108	0.50	0.50	25	0.431	0.431	-0.324	0.108	-0.216
				0.108	0.108	-0.216	0.324	0.539
0.107	0.50	0.50	27	-0.107	0.107	-0.426	-0.426	-0.533
				-0.320	0.107	0.320	-0.320	-0.107
0.107	0.00	0.00	27	0.107	-0.320	0.426	-0.426	-0.426
				0.320	0.000	0.107	0.426	0.213
0.107	0.00	0.00	26	0.320	0.213	0.107	0.426	-0.320
				0.213	0.213	0.533	0.000	0.426
0.105	0.00	0.00	27	0.105	0.422	-0.422	-0.527	-0.105
				0.105	0.105	0.211	-0.422	0.316
0.104	0.50	0.50	23	-0.104	-0.209	0.417	0.313	-0.104
				0.104	0.104	0.730	-0.313	-0.104

DRNDM $n=3$

$H \cdot 10^7$	D_1	D_2	$N \cdot 10^{-6}$	W		
9.22038	0.50	0.50	1.47	0.924661	-0.377194	0.052220
6.91108	-0.25	0.25	1.95	0.423631	-0.016571	-0.905683
6.78952	-0.25	0.25	2.14	0.264704	-0.261472	0.928205
6.16011	0.00	0.00	1.88	-0.165643	-0.986173	-0.004961
5.73357	0.50	0.50	2.53	0.729162	0.683336	0.037089
5.12772	-0.25	0.25	3.25	0.337798	0.623425	0.705148
4.78335	0.25	-0.25	3.30	0.772903	-0.207150	-0.599758
4.71554	-0.25	0.25	3.29	0.162251	-0.766218	-0.621759
4.67213	0.50	0.50	2.79	0.342910	-0.939094	0.022698
4.66380	0.25	-0.25	3.61	0.649536	-0.370399	0.664009

DRNDM $n=4$

$H \cdot 10^5$	D_1	D_2	$N \cdot 10^{-4}$	W			
5.44669	0.00	0.00	3.44	-0.69685	0.33312	0.26346	-0.57795
2.75915	0.25	-0.25	5.73	0.41255	-0.10110	-0.17932	-0.88737

DRNDM $n=5$

$H \cdot 10^4$	D_1	D_2	$N \cdot 10^{-4}$	W				
2.91860	-0.25	0.25	5.93	0.35461	0.34877	0.85457	0.02627	0.14710
2.75419	0.50	0.50	7.17	0.52275	0.51779	0.01928	0.59959	-0.31425
2.71489	0.25	-0.25	7.76	-0.56877	0.45339	0.23538	0.58995	0.25981
2.48717	-0.25	0.25	7.96	0.16987	0.17037	-0.71083	0.51907	-0.40914
2.23755	0.50	0.50	8.38	-0.74063	0.10628	-0.46116	0.46608	0.10136
2.18088	-0.25	0.25	7.10	-0.87083	-0.04580	0.17382	-0.00087	0.45755
1.84613	0.50	0.50	10.2	-0.51286	0.18184	0.68768	0.01588	0.48036
1.82196	0.00	0.00	10.7	-0.25726	0.42907	-0.36275	0.77615	-0.12535
1.80656	0.00	0.00	11.3	-0.15898	0.51758	0.68559	0.40883	0.26394
1.75477	-0.25	0.25	9.22	-0.03457	0.62294	0.16442	0.76333	-0.03229

DRNDM $n=6$

$H \cdot 10^3$	D_1	D_2	$N \cdot 10^{-3}$	W				
1.75544	-0.25	0.25	1.20	0.12464	-0.38971	0.61440	0.40726	-0.53716
				0.02633				

DRNDM $n=7$

$H \cdot 10^4$	D_1	D_2	$N \cdot 10^{-2}$	W				
2.29547	-0.25	0.25	10.4	0.50500	0.34662	0.17446	0.08952	-0.44073
2.27882	0.50	0.50	9.48	0.07748	0.33727	-0.58794	-0.15724	-0.05697
2.27000	0.50	0.50	6.54	0.29964	0.00908	-0.02724	-0.04313	0.94432
2.26268	0.25	-0.25	10.1	0.19006	0.05204	-0.50910	0.13802	0.33261
2.22444	0.00	0.00	9.70	0.50231	0.56567	-0.64286	0.09120	-0.17128
2.19488	-0.25	0.25	10.4	0.10535	0.05926	-0.46751	0.17559	-0.59042
2.16198	0.25	-0.25	9.52	0.10810	0.27025	-0.07135	-0.28106	-0.37186
2.13554	-0.25	0.25	10.5	0.17511	0.25840	-0.09610	-0.31820	0.52107
2.08794	-0.25	0.25	11.1	0.35495	0.20253	-0.37374	0.54078	-0.27561
2.01833	-0.25	0.25	9.32	0.00000	0.57001	-0.09890	-0.51266	-0.06660
				0.01413	0.25835			

DRNDM $n=8$

$H \cdot 10^3$	D_1	D_2	N	W				
5.97871	0.00	0.00	382	0.03587	0.59189	-0.25708	0.07772	-0.20328
				-0.34676	0.62776	0.14349		
5.09224	-0.25	0.25	458	0.05601	-0.44812	-0.37173	-0.13240	-0.12221
				0.09166	0.57542	0.53469		
5.09066	0.25	-0.25	472	-0.41234	-0.44289	0.02036	0.31053	-0.11199
				-0.64142	0.17817	-0.28508		
4.66760	-0.25	0.25	508	0.52277	-0.54611	0.48076	0.08402	-0.18670
				-0.35941	0.03267	0.15870		
4.47590	-0.25	0.25	436	0.02238	-0.83699	-0.13428	-0.17456	0.04476
				0.34017	0.03581	0.36255		
4.13739	-0.25	0.25	606	0.48821	-0.07447	0.24824	0.12826	-0.30617
				-0.55855	-0.46339	0.23997		
4.12990	0.25	-0.25	538	-0.53689	-0.04130	0.21476	-0.05782	0.21063
				-0.46668	-0.06608	0.62776		
4.03541	0.50	0.50	550	0.77883	-0.12106	0.39951	-0.17352	-0.07264
				0.19774	-0.11299	0.36319		
4.01338	0.25	-0.25	592	0.32107	0.08428	0.64214	-0.14850	0.42140
				0.27291	0.44950	-0.03612		
3.99215	0.25	-0.25	598	-0.34732	-0.74254	0.18763	0.19162	0.04791
				-0.27147	-0.27945	-0.31937		

DRNDM $n=9$

$H \cdot 10^3$	D_1	D_2	N	W				
8.97809	0.50	0.50	302	-0.08080	0.32321	-0.35015	0.13467	-0.22445
				-0.59255	-0.31423	-0.27832	-0.41299	
8.30913	-0.25	0.25	272	0.83091	0.10802	-0.14956	0.07478	-0.33237
				-0.16618	0.29082	-0.14956	0.15787	
7.92354	-0.25	0.25	342	0.41202	0.37241	-0.49126	-0.14262	0.03962
				-0.30109	-0.18224	0.31694	0.45164	
7.90866	0.00	0.00	302	0.00791	-0.29262	0.05536	0.03954	-0.11863
				-0.51406	-0.51406	-0.35589	0.49034	
7.82110	0.00	0.00	296	-0.28156	-0.79775	-0.17206	0.19553	0.25028
				-0.32066	-0.21899	0.03911	-0.03911	
7.77275	-0.25	0.25	362	-0.24873	0.38086	0.36532	0.38086	0.36532
				-0.39641	-0.00777	-0.34977	0.31868	
7.75077	0.00	0.00	370	0.37204	-0.26353	0.34103	0.20927	-0.34878
				0.13951	0.44954	-0.44954	-0.29453	
7.62715	0.50	0.50	324	-0.46526	0.00000	-0.49576	-0.30509	-0.42712
				-0.39661	0.04576	0.32034	0.01525	
7.57272	0.50	0.50	304	0.23475	-0.02272	0.00000	0.59067	0.40893
				-0.35592	0.53766	-0.09845	-0.05301	
7.45812	0.00	0.00	376	-0.27595	-0.48478	-0.21629	0.14916	0.35053
				0.17899	0.27595	0.37291	-0.49969	

DRNDM $n=10$ $\vartheta = n$ МДИЯС

$H \cdot 10^2$	D_1	D_2	N	W	W	W	W	W
1.38648	0.50	0.50	166	-0.16638	0.29116	-0.23570	0.79030	0.02773
1.29445	0.50	0.50	212	-0.29772	-0.44011	-0.45306	0.19417	-0.12945
1.22831	-0.25	0.25	224	0.18122	0.32361	-0.02589	-0.15533	0.54367
1.22776	-0.25	0.25	208	0.40534	-0.30708	-0.49132	0.25795	-0.27023
1.21716	0.00	0.00	222	0.51589	-0.14740	-0.07370	-0.25795	-0.02457
1.20860	0.25	-0.25	202	0.24555	0.63843	-0.35605	-0.15961	-0.08594
1.20456	0.00	0.00	214	0.01228	0.00000	-0.33149	0.35605	-0.36833
1.18896	0.50	0.50	204	-0.25560	0.09737	0.18257	0.25560	-0.66944
1.17250	0.00	0.00	202	0.06086	0.19475	-0.24343	0.34081	-0.40166
1.14693	-0.25	0.25	224	-0.03626	0.21755	-0.77350	0.02417	-0.20546
				0.18129	0.30215	-0.35049	0.20546	0.14503
				-0.49387	0.24091	-0.54205	-0.07227	-0.16864
				-0.04818	-0.54205	0.16864	-0.16864	0.13250
				-0.20212	0.46369	-0.13079	-0.65393	0.26157
				0.35669	-0.01189	0.00000	0.02378	0.32102
				-0.02345	0.04690	0.32830	-0.17588	-0.44555
				0.72695	-0.25795	0.03518	-0.09380	-0.23450
				-0.66522	-0.05735	0.37849	-0.24085	-0.29820
				0.38996	-0.17204	0.08028	0.01147	0.27526

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Д. Букин. О мультипликативных генераторах псевдослучайных чисел. — Препринт ИЯФ СО АН СССР 86-37, 1986, Новосибирск.
2. G. Marsaglia. Proc. Nat. Acad. Sci., 61 (1968) 25.

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 5 июня 1989 г.
 Подписано в печать 8.06.1989 г. МН 10262
 Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1,3 печ.л., 1,0 уч.-изд.л.
 Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ № 86

Набрано в автоматизированной системе на базе фото-
 наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и
 отпечатано на ротапинтере Института ядерной физики
 СО АН СССР,
 Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.