

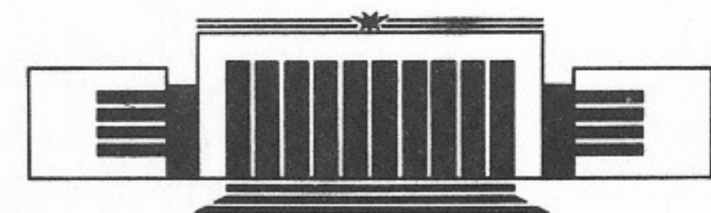


35  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

В.Н. Байер, А.Г. Грозин

РАСПАД  $B \rightarrow D_1 \bar{\nu}$  И ПРАВИЛА СУММ КХД

ПРЕПРИНТ 89-53



НОВОСИБИРСК

*В.Н. Байер, А.Г. Грозин*

Институт ядерной физики  
630090, Новосибирск 90, СССР

#### АННОТАЦИЯ

Формфактор распада  $B \rightarrow D l \bar{\nu}$  вычислен при помощи трехточечных правил сумм КХД.

$B \rightarrow D l \bar{\nu}$  from QCD sum rules

*V.N. Baier, A.G. Grozin*

Institute of Nuclear Physics  
630090, Novosibirsk, USSR

#### ABSTRACT

$B \rightarrow D l \bar{\nu}$  form factor is calculated using 3-point QCD sum rules.

#### 1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время усилился интерес к распадам  $B$ -мезонов. Это связано с открытием  $B\bar{B}$ -смешивания в экспериментах UA1 и ARGUS и с надеждой обнаружить и исследовать CP-нарушение в распадах  $B$ . Для этого требуется огромная статистика — миллионы  $B$ -мезонов. Поэтому проектируются специализированные накопители с высокой светимостью —  $B$ -фабрики. Сюда относится проект ВЭПП-5 в ИЯФ (Новосибирск); аналогичные проекты имеются также в Европе и в Японии. В недалеком будущем всевозможные моды распада  $B$ -мезонов будут детально изучены на этих установках.

Важную роль играют полулептонные распады  $B$ -мезонов. Во-первых, они составляют значительную часть полной вероятности распада. По современным экспериментальным данным, вероятности распадов с рождением электрона и мюона составляют примерно по 12% [1]. Во-вторых, они дают метку, позволяющую различать  $B$  и  $\bar{B}$ -мезоны: при распаде  $b$ -кварка рождается отрицательный лептон, а при распаде  $\bar{b}$  — положительный. И, наконец в-третьих, полулептонные распады проще поддаются теоретическому рассмотрению, чем нелептонные.

Имеющиеся оценки показывают, что основную часть вероятности полулептонных распадов составляют каналы  $B \rightarrow D l \bar{\nu}$  и  $B \rightarrow D^* l \bar{\nu}$ . В настоящей работе мы рассматриваем первый из них; анализ второго канала будет опубликован отдельно.

Вероятность распада  $B \rightarrow D l \bar{\nu}$  определяется формфактором

$f_+(t)$  (см. п. 2). Его поведение рассматривалось в работах [2—6]. Для определения  $t$ -зависимости формфактора обычно использовалась гипотеза доминантности ближайшего резонанса в  $t$ -канале, а именно векторного  $b\bar{c}$ -мезона [2—4]. Нормировочный множитель определялся через интеграл перекрытия кварковых волновых функций в различных вариантах потенциальных кварковых моделей [2—3]. В [2] он вычислялся в точке  $t=0$  в модели релятивистского гармонического осциллятора; в [3] — при  $t=t_{\max}$  в нерелятивистской потенциальной модели с потенциалом типа воронки (кулоновский плюс линейный). Важный шаг был сделан в работе [4], в которой получено значение формфактора при  $t=t_{\max}$ , не зависящее от конкретного вида потенциала в любой нерелятивистской потенциальной модели.

Однако потенциальные кварковые модели не имеют надежного обоснования в КХД, и трудно оценить точность полученных в них результатов. Модельно-независимый подход [4] должен быть справедлив и в КХД, хотя оценка поправок представляет собой сложную задачу. Аналогичный подход использовался в работе [5], где дополнительно используется малость разности масс  $B$ - и  $D$ -мезонов по сравнению с характерным масштабом задачи. В рамках этого приближения получена простая качественная картина полуплептонных распадов  $B$ -мезонов [5]. В частности, показано, что доминируют каналы  $B \rightarrow D l \bar{\nu}$  и  $D^* l \bar{\nu}$ , и отношение их вероятностей близко к 1:3. Несколько подробнее эти вопросы обсуждаются в п. 3.

Таким образом, имеется довольно много сведений о поведении формфактора  $B \rightarrow D l \bar{\nu}$ . Однако довольно трудно оценить их точность. Поэтому хотелось бы иметь независимый количественный подход, обоснованный в рамках КХД. Такой подход дается методом правил сумм. В настоящей работе мы применяем его к формфактору  $B \rightarrow D l \bar{\nu}$ . Предварительные результаты были опубликованы в [6]. В п. 4 получено правило сумм для формфактора, а в п. 5 приводятся результаты его численного анализа.

Метод правил сумм КХД [7] применялся к рассмотрению  $B$ - и  $D$ -мезонов в работах [8, 9]. В работах [10, 11] он был обобщен на трехточечные корреляторы, что позволило вычислять формфакторы. Распад  $D \rightarrow K l \bar{\nu}$ , во многих отношениях аналогичный интересующему нас распаду, рассмотрен в работе [12].

## 2. КИНЕМАТИКА

Распад изображен на рис. 1. Мы пренебрегаем массой лептона, и тем самым исключаем из рассмотрения распад на  $D l \bar{\nu}_\tau$ . Он подавлен по фазовому объему; кроме того, его существенно сложнее выделять экспериментально.

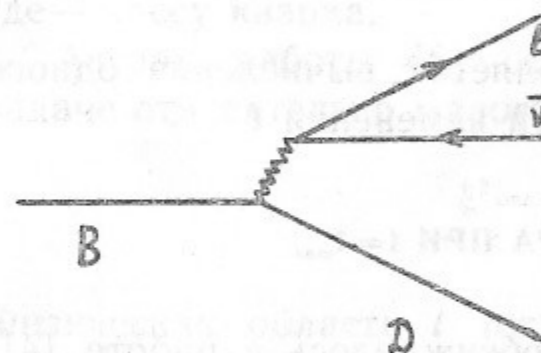


Рис. 1. Распад  $B \rightarrow D l \bar{\nu}$ .

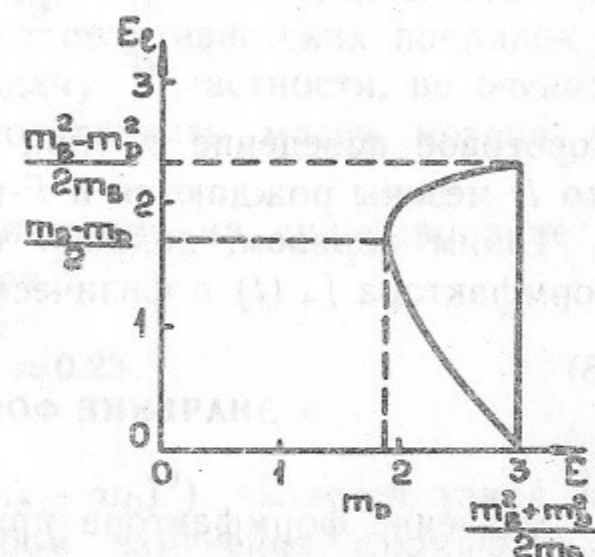


Рис. 2. Физическая область в переменных  $E, E_l$ .

Только векторный слабый ток  $V_\mu = \bar{c} \gamma_\mu b$  (но не аксиальный) имеет матричный элемент  $B \rightarrow D$ :

$$\langle D | V_\mu | B \rangle = f_+(t) p_\mu + f_-(t) q_\mu, \quad (1)$$

$$p = p_B + p_D, \quad q = p_B - p_D, \quad t = q^2$$

В приближении нулевой массы лептона, формфактор  $f_-$  не дает вклада в матричный элемент распада.

Будем рассматривать распад в системе покоя  $B$ -мезона. В качестве 2 независимых переменных выберем энергию  $D$ -мезона  $E$  и энергию заряженного лептона  $E_l$ . Физическая область в этих переменных изображена на рис. 2. Ее криволинейная граница определяется уравнением

$$E^2 - m_D^2 = (m_B - E - 2E_l)^2. \quad (2)$$

Переменная  $t = m_B^2 + m_D^2 - 2m_B E$  может меняться от 0 (в случае, когда  $l \bar{\nu}$  летят параллельно) до  $t_{\max} = (m_B - m_D)^2$  (когда образовавшийся  $D$ -мезон покоится).

Стандартное вычисление дает для вероятности распада ( $V_{bc}$  — элемент матрицы Кобаяши — Маскавы)

$$\frac{d^2\Gamma}{dE dE_t} = \frac{G^2 |V_{bc}|^2 m_B f_+^2(t)}{8\pi^3} [-m_B^2 + m_D^2 - 4E(m_B - E_t) - 2E(m_B - 2E_t)]. \quad (3)$$

Энергетический спектр  $D$ -мезонов может быть вычислен в общем виде:

$$\frac{d\Gamma}{dE} = \frac{G^2 |V_{bc}|^2 m_B f_+^2(t)}{12\pi^3} p_D^3. \quad (4)$$

Пороговое поведение  $p_D^3$  при малых импульсах объясняется тем, что  $D$ -мезоны рождаются в  $P$ -волне.

Таким образом, задачей теории является вычисление одного формфактора  $f_+(t)$  в физической области изменения  $t$ .

### 3. ЗНАЧЕНИЕ ФОРМФАКТОРА ПРИ $t=t_{\max}$

Значение формфактора при  $t=t_{\max}$  обсуждалось в работе [4]. Рассмотрим переход покоящегося  $B$ -мезона в покоящийся  $D$ -мезон. Если пренебречь движением тяжелого кварка в мезоне, то картина распада сводится к тому, что покоящийся  $b$ -кварк переводится слабым током  $V_0$  в покоящийся  $c$ -кварк без изменения цвета. Поскольку для структуры мезона важно только цветовое поле, создаваемое покоящимся тяжелым кварком,  $B$ -мезон превращается в  $D$  с вероятностью 1. Равенство (1) имеет только нулевую компоненту:

$$(m_B + m_D)f_+ + (m_B - m_D)f_- = 2\sqrt{m_B m_D} \quad (5)$$

(правая часть происходит от релятивистской нормировки волновых функций).

Для получения второго уравнения, допустим, что  $D$ -мезон движется с малой скоростью  $v \ll 1$ , и запишем пространственные компоненты равенства (1) с точностью до линейных по  $\vec{v}$  членов. Матричный элемент  $\bar{c}\vec{\gamma}b$  отличается от  $\bar{c}\gamma_0 b$  множителем  $\vec{v}/2$ , где  $\vec{v}$  — скорость  $c$ -кварка. После выделения этого множителя, можно положить  $\vec{v}=0$ , т. е. считать волновые функции начального и конечного состояний одинаковыми:

$$m_D \vec{v}(f_+ - f_-) = \sqrt{m_B m_D} \vec{v}. \quad (6)$$

Решая эту систему уравнений, получаем окончательно значения формфакторов [4]:

$$f_{\pm}(t_{\max}) = \sqrt{\frac{m_D}{m_B}} \left[ 1 + \frac{\pm m_B - m_D}{2m_D} \right]. \quad (7)$$

Численно  $f_+(t_{\max}) = 1.14$ ,  $f_-(t_{\max}) = -0.54$ .

Эти соображения несомненно должны быть справедливы для достаточно тяжелых кварков. Оценка релятивистских поправок к ним представляет собой сложную задачу. В частности, не очевидно, где в эти формулы лучше подставлять массу мезона, а где — массу кварка.

Авторы работы [5] обратили внимание на существование в задаче относительно малого параметра

$$\xi^2 = \left( \frac{m_B - m_D}{m_B + m_D} \right)^2 \approx 0.23. \quad (8)$$

Физическая область  $t$  (от 0 до  $(m_B - m_D)^2$ ) является узкой по сравнению с характерным масштабом изменения формфактора  $m_{b\bar{c}} \approx m_B + m_D$ . Поэтому изменения формфактора невелики, порядка параметра (8). Отличие  $f_+(t_{\max})$  от 1 также порядка (8), поэтому для оценки вероятности распада с точностью  $\sim 50\%$  достаточно считать  $f_+(t)$  константой, равной 1.

Заметим, что формулы (7) можно переписать в виде  $f_+(t_{\max}) = 1/\sqrt{1-\xi^2}$ ,  $f_-(t_{\max}) = -\xi/\sqrt{1-\xi^2}$ , т. е.  $f_-(t_{\max}) = O(\xi)$ ,  $f_+(t_{\max}) = 1 + O(\xi^2)$ . Эти результаты можно получить и без использования уравнения (6) [5]. А именно, малость  $f_-$  следует из сохранения векторного тока в пределе  $m_B - m_D \rightarrow 0$ . Отсюда очевидно, что второй член в уравнении (5) содержит по сравнению с первым малость  $\xi^2$ , откуда  $f_+ = 1 + O(\xi^2)$ .

Значения при  $t=t_{\max}$  (7) вместе с гипотезой доминантности векторного  $b\bar{c}$ -мезона

$$f_+(t) = \frac{f_+(0)}{1-t/m_{b\bar{c}}^2} \quad (9)$$

однозначно определяют формфакторы. Мы используем значение  $m_{b\bar{c}} = 6.319$  ГэВ, полученное в потенциальной модели с потенциалом Мартина [13]. График  $f_+(t)$  изображен на рис. 3. Отметим, что зависимость  $f_+(t)$  в пределах физической области можно с хорошей точностью считать линейной; отклонения от нее порядка квадрата параметра (8).

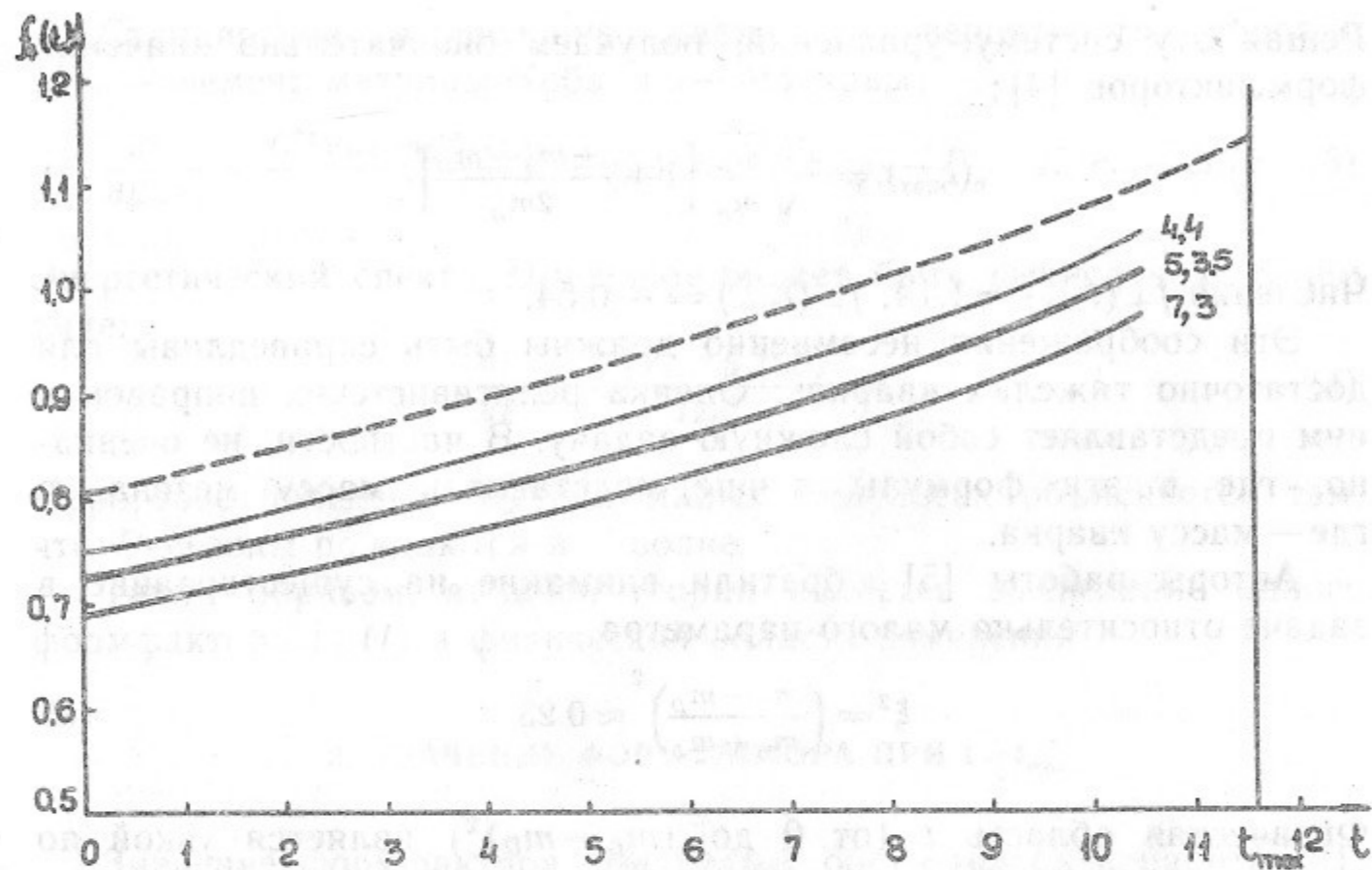


Рис. 3. Формфактор  $f_+(t)$ : штриховая линия — по формулам (7), (9) [3]; сплошные линии — экстраполяция правила сумм (14) при нескольких  $M_b^2, M_c^2$ . Результаты для всех  $M_b^2, M_c^2$  из средней части рабочей области близки к жирной кривой.

#### 4. ПРАВИЛО СУММ ДЛЯ ФОРМФАКТОРА

Рассмотрим коррелятор 3 токов

$$K_\mu(p_b, p_c) = \int dx_b dx_c e^{-ip_b x_b + ip_c x_c} \langle T j_B(x_b) V_\mu(0) j_D^+(x_c) \rangle =$$

$$= K_+(p_b^2, p_c^2, t) p_\mu + K_-(p_b^2, p_c^2, t) q_\mu, \quad (10)$$

$$p = p_b + p_c, \quad q = p_b - p_c,$$

где  $j_B = \bar{q} \gamma_5 b$ ,  $j_D = \bar{q} \gamma_5 c$  — токи с квантовыми числами  $B$ - и  $D$ -мезона. Нас будет интересовать только  $K_+$ . Для этой функции при  $t < 0$  можно записать двойное дисперсионное представление по переменным  $p_b^2$  и  $p_c^2$ :

$$K_+(p_b^2, p_c^2, t) = \int \frac{\rho_+(s_b, s_c, t) ds_b ds_c}{(p_b^2 - s_b + i0)(p_c^2 - s_c + i0)} + \dots, \quad (11)$$

где многоточие означает вычитательные члены, полиномиальные по  $p_b^2$  или  $p_c^2$ .

Коррелятор может быть вычислен двумя способами. С одной стороны, можно записать спектральную плотность через вклады физических состояний. Прокладывая низшие состояния —  $B$ -мезон между  $j_B$  и  $V_\mu$  и  $D$ -мезон между  $V_\mu$  и  $j_D^+$ , мы получим вклад

$$\rho_+^{res} = \frac{f_B m_B^2}{m_b} \frac{f_D m_D^2}{m_c} f_+(t) \delta(s_b - m_B^2) \delta(s_c - m_D^2), \quad (12)$$

где подставлены матричные элементы  $\langle 0 | j_B | B \rangle = i f_B m_B^2 / m_b$ ,  $\langle 0 | j_D | D \rangle = i f_D m_D^2 / m_c$ . Вклад континуума высших состояний мы аппроксимируем обычным образом:

$$\rho_+^{cont} = \rho_+^{pert} \theta(s_b - s_B) \theta(s_c - s_D), \quad (13)$$

где  $\rho_+^{pert}(s_b, s_c, t)$  — спектральная плотность, вычисленная по теории возмущений, а  $s_B, s_D$  — пороги континуума в соответствующих каналах. Константы  $f_B, f_D$  и пороги  $s_B, s_D$  определялись из двухточечных правил сумм в [8, 9].

С другой стороны, коррелятор в евклидовой области можно вычислить как сумму вклада теории возмущений (рис. 4) и ряда

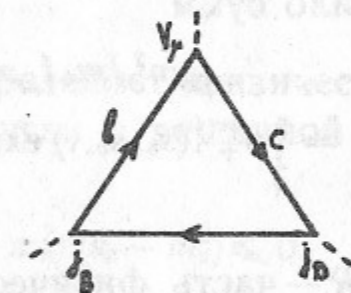


Рис. 4. Диаграмма теории возмущений для коррелятора.

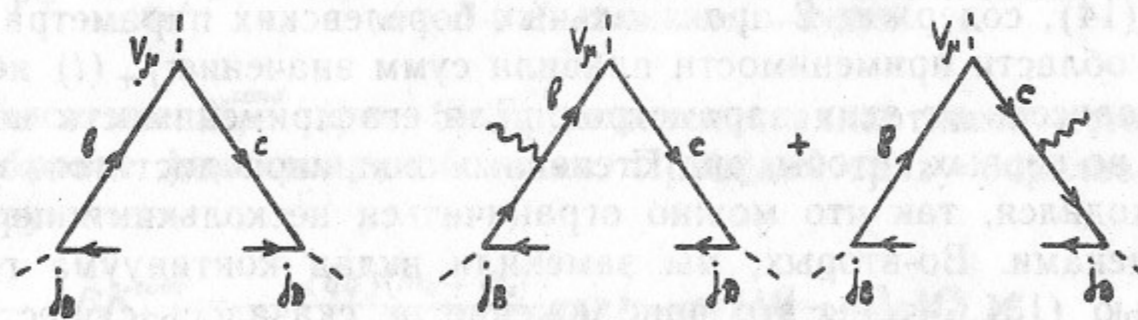


Рис. 5. Степенные поправки к коррелятору.

степенных поправок (рис. 5). Первый из них дается дисперсионным интегралом (11) со спектральной плотностью  $\rho_+^{pert}(s_b, s_c, t)$  по всей физической области. Во втором мы удерживаем вклады кварковых конденсатов размерности 3  $\langle \bar{q}q \rangle$ , 5  $ig \langle \bar{q} G_{\mu\nu}^a t^a \sigma_{\mu\nu} q \rangle =$

$= m_0^2 \langle \bar{q}q \rangle$  и  $6 g \langle \bar{q} J_\mu^a t^a \gamma_\mu q \rangle$ , где  $J_\mu^a = D_\nu^{ab} G_{\mu\nu}^b = g \sum_{q'} \bar{q}' t^a \gamma_\mu q'$ . Послед-

ний конденсат в приближении факторизации [7] равен  $-\frac{4\pi C_F}{N} \alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2$ , где  $C_F = (N^2 - 1)/2N$ ,  $N=3$  — число цветов.

Вклад теории возмущений подавлен из-за наличия петли. Мы не учитываем вклад глюонного конденсата, также содержащий петлю и являющийся малой поправкой к вкладу теории возмущений. В двухточечных правилах сумм для  $D$ - и  $B$ -мезонов, где ситуация такая же, вклад глюонного конденсата не превышает 1% [9].

Приравнивая эти 2 выражения для коррелятора и проводя двойное преобразование Бореля по переменным  $p_b^2$  и  $p_c^2$ , мы получаем правило сумм для формфактора. Преобразование Бореля позволяет избавиться от неизвестных вычитательных членов; оно приводит к экспоненциальному подавлению вклада высших состояний и к факториальному подавлению коэффициентов при высших степенных поправках.

Переносим вклад континуума из физической части в теоретическую и объединяя его с вкладом теории возмущений, мы получаем правило сумм

$$f_B m_B^2 / m_b f_D m_D^2 / m_c f_+(t) \exp\{-m_B^2/M_b^2 - m_D^2/M_c^2\} = \int_R \rho_+^{pert}(s_b, s_c, t) \exp\{-s_b/M_b^2 - s_c/M_c^2\} ds_b ds_c + BK^{cond}(M_b^2, M_c^2, t), \quad (14)$$

где  $R$  — часть физической области в плоскости  $s_b, s_c$ , вырезанная условиями  $s_b < s_B, s_c < s_D$ .

Выражение для формфактора  $f_+(t)$ , получаемое из правила сумм (14), содержит 2 произвольных борелевских параметра  $M_b^2$  и  $M_c^2$ . В области применимости правила сумм значение  $f_+(t)$  не должно зависеть от этих параметров. Для его применимости необходимо, во-первых, чтобы ряд степенных поправок достаточно быстро сходился, так что можно ограничиться несколькими первыми его членами. Во-вторых, мы заменили вклад континуума грубой моделью (13). Чтобы это приближение не сказалось существенно на точности правила сумм, вклад континуума в  $f_+(t)$  должен быть мал по сравнению с получаемым значением формфактора.

Спектральная плотность  $\rho_+^{pert}(s_b, s_c, t)$  получается из двойного скачка диаграммы рис. 4 (деленного на  $(2\pi i)^2$ ) путем выделения структуры  $p_\mu$ . Скачок находится по правилу Каткоски, разрезаются все 3 пропагатора. Условие, чтобы аргументы всех 3  $\delta$ -функций

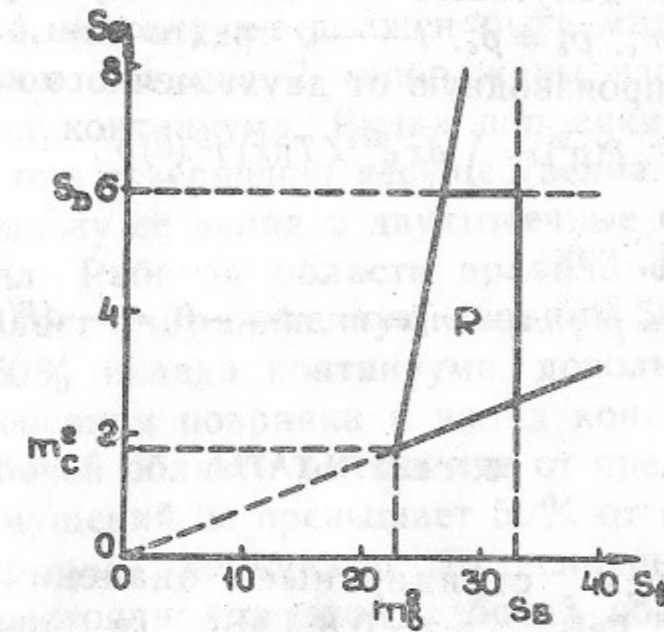


Рис. 6. Физическая область в плоскости  $s_b, s_c$  и область интегрирования  $R$  (при  $t=0$ ).

могли обращаться в нуль одновременно, определяет физическую область в плоскости  $s_b, s_c$ , имеющую форму угла с вершиной  $m_b^2, m_c^2$  (рис. 6):

$$m_c^2(s_b - m_b^2)^2 + m_b^2(s_c - m_c^2)^2 - (m_b^2 + m_c^2 - t)(s_b - m_b^2)(s_c - m_c^2) \leq 0. \quad (15)$$

Вычисление интеграла приводит к результату:

$$\rho_+^{pert} = \frac{N}{8\pi^2} \frac{(s_b - m_b^2)[s_c(-s_b + s_c - t) + m_b m_c(s_b - s_c - t)] + (b \leftrightarrow c)}{(s_b^2 + s_c^2 + t^2 - 2s_b s_c - 2s_b t - 2s_c t)^{3/2}}. \quad (16)$$

Вычисление  $K_+^{cond}$  (рис. 5) проводится стандартными методами в калибровке фиксированной точки. Приведем сразу борелизованный результат:

$$BK_+^{cond} = -\frac{\langle \bar{q}q \rangle (m_b + m_c)}{2} \exp\{-m_b^2/M_b^2 - m_c^2/M_c^2\} \times \\ \times \left[ 1 - m_0^2 \left( -\frac{m_c + 2m_b}{3(m_b + m_c)M_b^2} + \frac{m_b^2}{4M_b^4} + (b \leftrightarrow c) + \frac{m_b^2 + m_c^2 - m_b m_c / 2 - t}{3M_b^2 M_c^2} \right) + \right. \\ \left. + 8\pi \frac{C_F}{N} \alpha_s \langle \bar{q}q \rangle \left( \frac{1}{3(m_b + m_c)M_b^2} - \frac{m_b(m_b + 2m_c)}{36(m_b + m_c)M_b^4} - \frac{m_b^3}{72M_b^6} + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{m_b(m_b^2 + m_c^2 - m_b m_c/2 - t)}{36M_b^2 M_c^2} + (b \leftrightarrow c) - \frac{m_b^2 + m_c^2 - m_b m_c/2 - 2t}{9(m_b + m_c)M_b^2 M_c^2} \right] \quad (17)$$

Эти вычисления допускают интересную проверку: в формальном пределе  $m_b = m_c$ ,  $p_b^2 = p_c^2$ ,  $t \rightarrow -0$  трехточечный коррелятор  $K_+$  выражается через производную от двухточечного коррелятора

$$P(p^2) = \int dx e^{ipx} \langle Tj(x) j^+(0) \rangle, \quad (18)$$

вычисленного в [9], как

$$K_+(p_b^2 = p_c^2 = p^2, m_b = m_c = m, t \rightarrow -0) = -dP(p^2)/dp^2. \quad (19)$$

## 5. РЕЗУЛЬТАТЫ

Мы используем стандартные значения конденсатов:  $\alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2 = 1.8 \cdot 10^{-4} \text{ ГэВ}^6$ ,  $m_0^2 = 0.8 \text{ ГэВ}^2$  (в точке нормировки 500 МэВ). Первая величина слабо зависит от точки нормировки; при  $\Lambda = 100 \text{ МэВ}$  она приводит к  $\langle \bar{q}q \rangle = -(270 \text{ МэВ})^3$ . Конденсат  $m_0^2 \langle \bar{q}q \rangle$  слабо зависит от точки нормировки;  $\langle \bar{q}q \rangle$  имеет аномальную размерность 4/9. В правило сумм нужно подставлять конденсаты, нормированные на характерном расстоянии между точками  $x_b$  и  $x_c$  на рис. 5. Ясно, что оно определяется большим из расстояний от 0 до  $x_b$  и от 0 до  $x_c$ . Пропагатор  $s$ -кварка имеет меньшую виртуальность, равную  $m_c^2$  при  $p_c^2 = 0$ . В борелизованных правилах сумм существенны отрицательные  $p_c^2$  вплоть до  $M_c^2$ . Выбирая точку нормировки, несколько большую  $m_c^2$ , мы получаем  $\langle \bar{q}q \rangle = -(260 \text{ МэВ})^2$ ,  $m_0^2 = 0.63 \text{ ГэВ}^2$ . Для  $m_b$ ,  $f_B$ ,  $s_b$  и  $m_c$ ,  $f_D$ ,  $s_D$  мы использовали значения из работы [9], которая наиболее близка к настоящей работе по используемому методу (релятивистские борелизованные правила сумм).

Правило сумм применимо лишь при  $t < 0$ . Поскольку зависимость  $f_+(t)$  в физической области можно с достаточной точностью считать линейной, достаточно получить значения  $f_+(0)$  и  $f'_+(0)$ . Поэтому мы и рассмотрим правила сумм для этих величин.

При  $t=0$  интеграл от  $\rho_+^{pert}$  в (14) вычисляется аналитически, и выражается через интегральные экспоненты. Мы не будем приводить получающееся в результате длинное выражение.

Начнем с простой оценки: возьмем  $M_b^2, M_c^2 \rightarrow \infty$ , что соответствует гипотезе локальной дуальности. Тогда остается вклад теории возмущений и кваркового конденсата  $\langle \bar{q}q \rangle$ . Численно они

дают 0.33 и 0.16, соответственно, т. е.  $f_+(0) = 0.5$ . Конечно, эта оценка не очень надежна.

Правило сумм применимо тогда, когда степенные поправки  $m_0^2 \langle \bar{q}q \rangle$  и  $\alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2$  малы по сравнению с главным членом  $\langle \bar{q}q \rangle$ . Кроме того, вклад континуума должен быть мал по сравнению с полным результатом. На рис. 7 изображены изолинии степенных поправок и вклада континуума. Вклад поправки  $\alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2$  не превышает 1%, т. е. она совершенно незначительна. Этого и следовало ожидать, поскольку ее вклад в двухточечные правила сумм [9] пренебрежимо мал. Рабочая область правила сумм, за которую мы принимаем область, ограниченную линиями 50%-ной степенной поправки  $m_0^2$  и 50% вклада континуума, довольно широка. В ее средней части степенная поправка и вклад континуума не превышают 25%. В рабочей области (в отличие от предела  $M_b^2, M_c^2 \rightarrow \infty$ ) вклад теории возмущений не превышает 50% от вклада  $\langle \bar{q}q \rangle$ .

Если правило сумм применимо, то величина  $f_+(0)$  должна быть примерно постоянной в этой рабочей области. Рис. 8—10 демонстрируют, что действительно имеется хорошее плато, и  $f_+(0) = 0.7 \div 0.75$ . Реально неопределенность  $f_+(0)$  значительно больше, т. к. параметры  $f_B$ ,  $f_D$  и другие известны плохо. Из правила сумм извлекается  $f_B f_D f_+(0)$ , поэтому после измерения  $f_B$  и  $f_D$  неопределенность  $f_+(0)$  сильно уменьшится.

Перейдем к рассмотрению производной  $f'_+(0)$ , которую запишем в виде  $f'_+(0)/m_*^2$ . Параметр  $m_*$  имеет смысл характерного масштаба изменения формфактора, в предположении доминантности векторного  $b\bar{c}$ -мезона (9) он равен  $m_{b\bar{c}}$ . При извлечении значения  $m_*$  из правил сумм сокращаются плохо известные величины  $f_B, f_D$ .

Вклад теории возмущений здесь также вычисляется аналитически; производная от интеграла содержит член с производной от  $\rho_+^{pert}$  (16) и член, обусловленный зависимостью границ области интегрирования (15) от  $t$ . Получающееся выражение еще более громоздко. Вклад конденсатов легко находится дифференцированием формулы (17). При этом вклад кваркового конденсата  $\langle \bar{q}q \rangle$ , который был главным членом в правиле сумм для  $f_+(0)$ , зануляется. В пределе  $M_b^2, M_c^2 \rightarrow \infty$  вклад в  $f'_+(0)$  дает только диаграмма теории возмущений; используя  $f_+(0)$  в этом же пределе, мы получаем  $m_* = 5.3 \text{ ГэВ}$ .

Из-за случайного зануления главного члена, мы не можем обоснованно определить область хорошей сходимости ряда степенных поправок. Ясно, что эта область не может ограничиваться

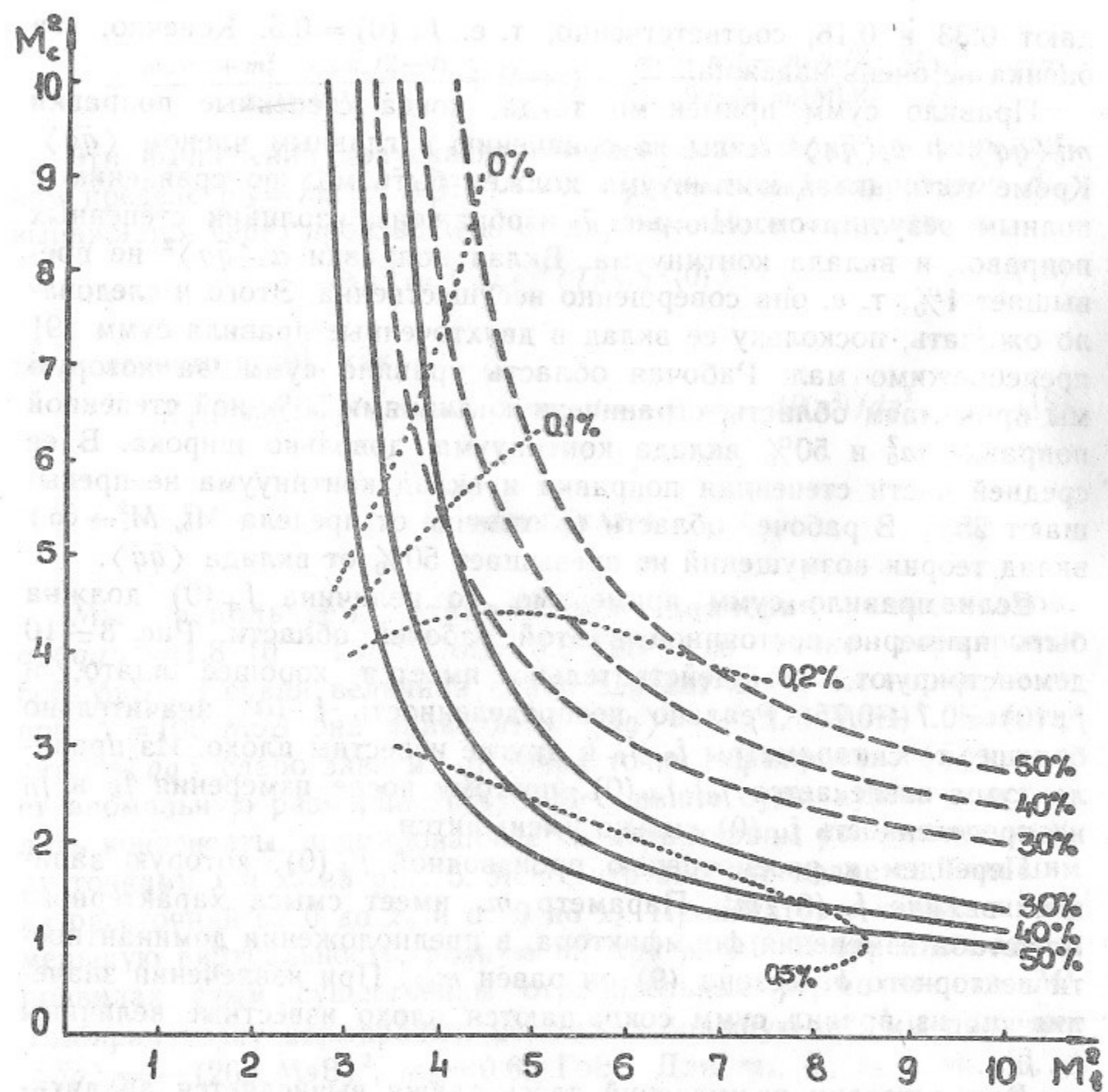


Рис. 7. Изолинии вклада степенных поправок размерности 5 (сплошные) и 6 (пунктирные) по отношению к главному вкладу (размерности 3); изолинии вклада континуума по отношению к суммарному результату (штриховые).

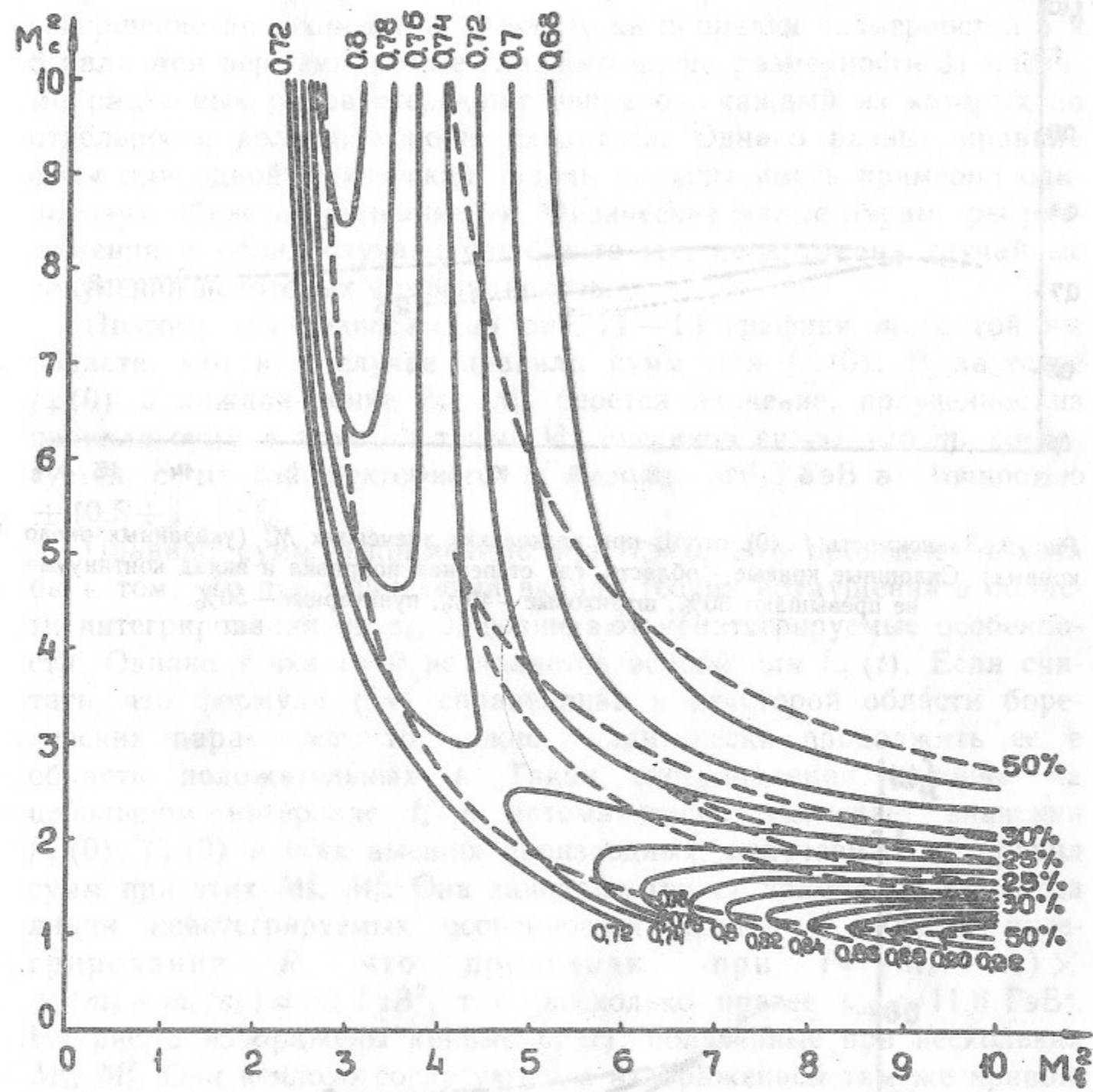


Рис. 8. Изолинии  $f_+(0)$ . Штриховой линией изображена рабочая область правила сумм (50%) и ее наиболее надежная часть (30%). Видно, что имеется перевал и обширное плато с  $f_+(0) = 0.72 \pm 0.02$ . Стабильность правила сумм нарушается на краях рабочей области — при больших  $M_c^2$  и маленьких  $M_c^2$  (и в меньшей степени при больших  $M_c^2$  и маленьких  $M_c^2$ ). Вероятно, в этих областях существенны высшие степенные поправки, содержащие высокие степени меньшего из борелевских параметров  $M_b^2, M_c^2$ .



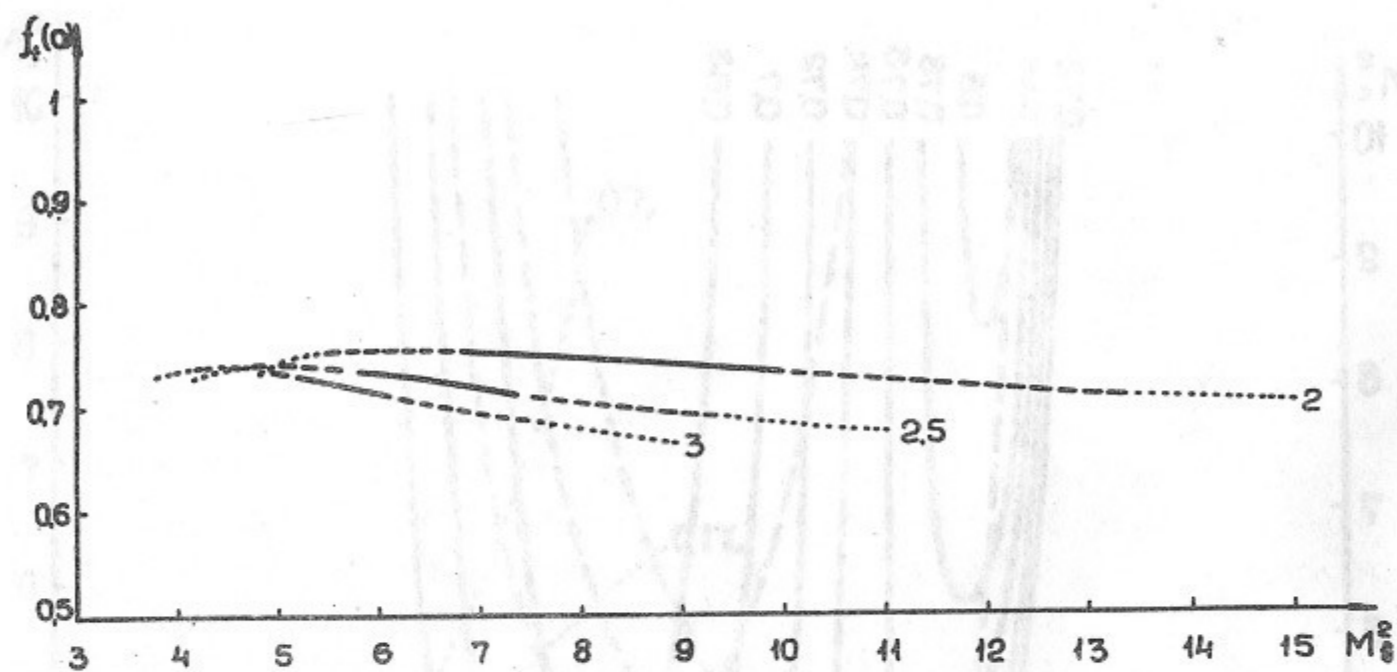


Рис. 9. Зависимость  $f_+(0)$  от  $M_b^2$  при нескольких значениях  $M_c^2$  (указанных около кривых). Сплошные кривые - область, где степенная поправка и вклад континуума не превышают 30%, штриховые - 40%, пунктирные - 50%.

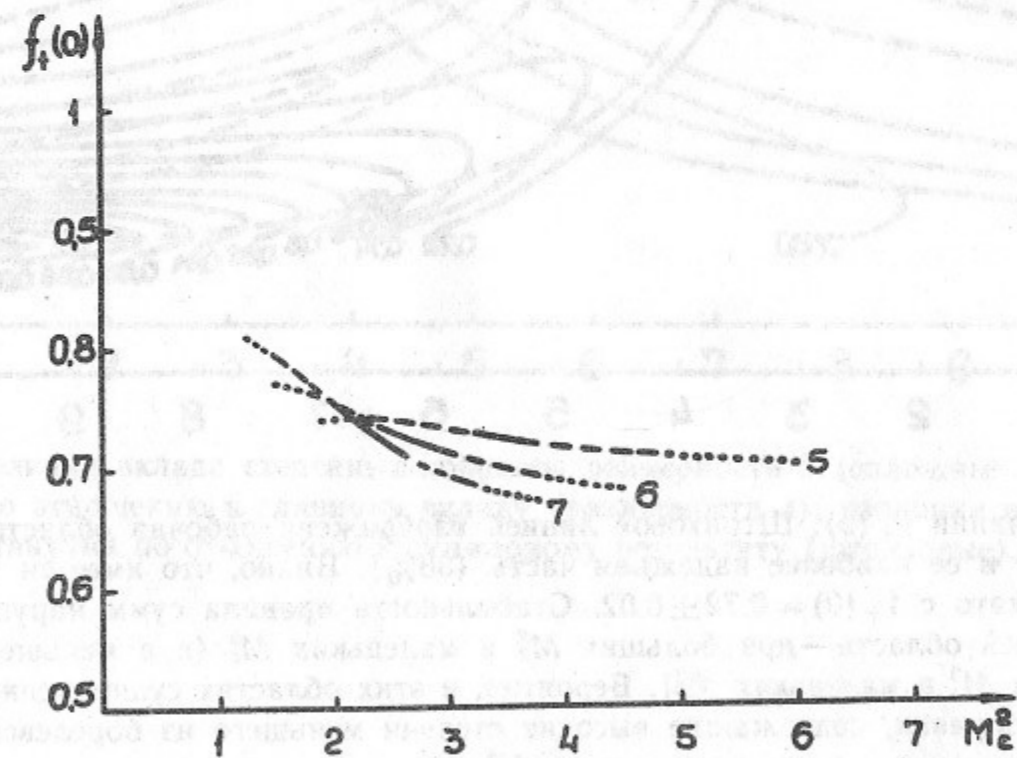


Рис. 10. Зависимость  $f_+(0)$  от  $M_c^2$  при нескольких значениях  $M_b^2$  (обозначения те же).

поправкой размерности 6, роль которой в рассматриваемой задаче совершенно пренебрежима. Фактически поправки размерностей 5 и 6 являются первыми (после главного члена размерности 3) членами различных рядов степенных поправок, каждый из которых по отдельности должен хорошо сходиться. Однако разные правила сумм для одной физической задачи должны иметь примерно одинаковую область применимости. Физические малые параметры разложения в обоих случаях одни и те же, несмотря на случайные зануления некоторых коэффициентов.

Поэтому мы приводим на рис. 11—13 графики  $m_*$  в той же области, что и в случае правила сумм для  $f_+(0)$ . В качестве  $f_+(0)$  в каждой точке  $M_b^2, M_c^2$  берется значение, полученное из правила сумм в этой же точке. Из рисунков видно, что  $m_*$  согласуется с массой векторного  $b\bar{c}$ -мезона  $\approx 6.3$  ГэВ с точностью  $\pm (0.5 \div 1)$  ГэВ.

Правило сумм неприменимо при  $t > 0$ . Это проявляется хотя бы в том, что при вычислении вклада теории возмущений в области интегрирования по  $s_b, s_c$  возникают неинтегрируемые особенности. Однако точка  $t=0$  не является особой для  $f_+(t)$ . Если считать, что формула (14) справедлива в некоторой области борелевских параметров, то можно аналитически продолжить ее в область положительных  $t$ . Такая экстраполяция законна на небольшом интервале  $t$ , и автоматически учитывает значения  $f_+(0), f_+'(0)$  и всех высших производных, получаемых из правил сумм при этих  $M_b^2, M_c^2$ . Она заведомо теряет применимость, когда линия неинтегрируемых особенностей входит в область интегрирования  $R$ , что происходит при  $t = (m_b - m_c) \times (m_b - m_c^2/s_D) \approx 15$  ГэВ<sup>2</sup>, т. е. несколько правее  $t_{\max} \approx 11.6$  ГэВ<sup>2</sup>. На рис. 3 изображены кривые  $f_+(t)$ , полученные при нескольких  $M_b^2, M_c^2$ . Они неплохо согласуются с изображенной там же кривой, следующей из доминантности векторного  $b\bar{c}$ -мезона и значения  $f_+(t_{\max})$  (7). Если уменьшить  $f_B f_D$  на 10% (что вполне возможно с учетом их точности), согласие станет практически полным.

Подчеркнем, что наше рассмотрение совершенно независимо от соображений п. 3. Буквенно значение формфактора и его наклон не имеют ничего общего с (7) и  $m_{b\bar{c}}$ . Величина  $f_+(0)$  весьма чувствительна к значениям  $f_B, f_D, \langle \bar{q}q \rangle$ , и в несколько меньшей степени — к  $m_b^2, s_B, s_D, m_b, m_c$ . Поэтому согласие величины  $f_+$  с (7) подтверждает самосогласованность используемой картины. В частности, совершенно исключаются изменения  $f_B, f_D, \langle \bar{q}q \rangle$  на множители  $\sim 2$  (если только они не компенсируют друг друга).

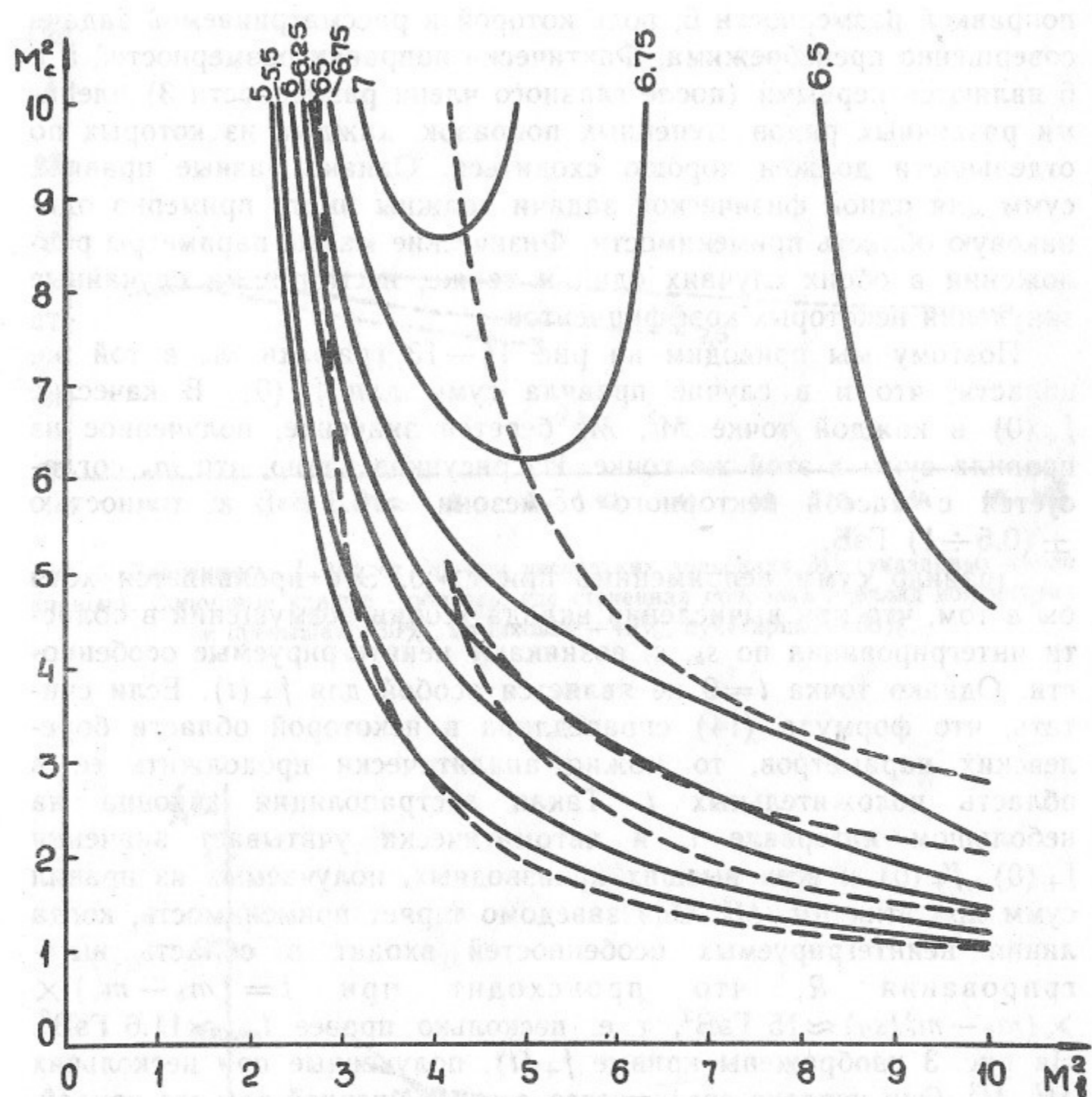


Рис. 11. Изолинии  $m_*$ . Штриховой линией изображена рабочая область правила сумм для  $f_+(0)$ . Видно, что имеется обширное плато с  $m_* = 6 \div 6.5$  ГэВ. Как и в случае  $f_+(0)$ , стабильность правила сумм нарушается, когда одна из борелевских масс велика, а другая мала. Плато расположено при несколько больших  $M_b^2$ ,  $M_c^2$ , чем в случае  $f_+(0)$ . Вероятно, это свидетельствует о большей роли степенных поправок в правиле сумм для  $f_+(0)$ .

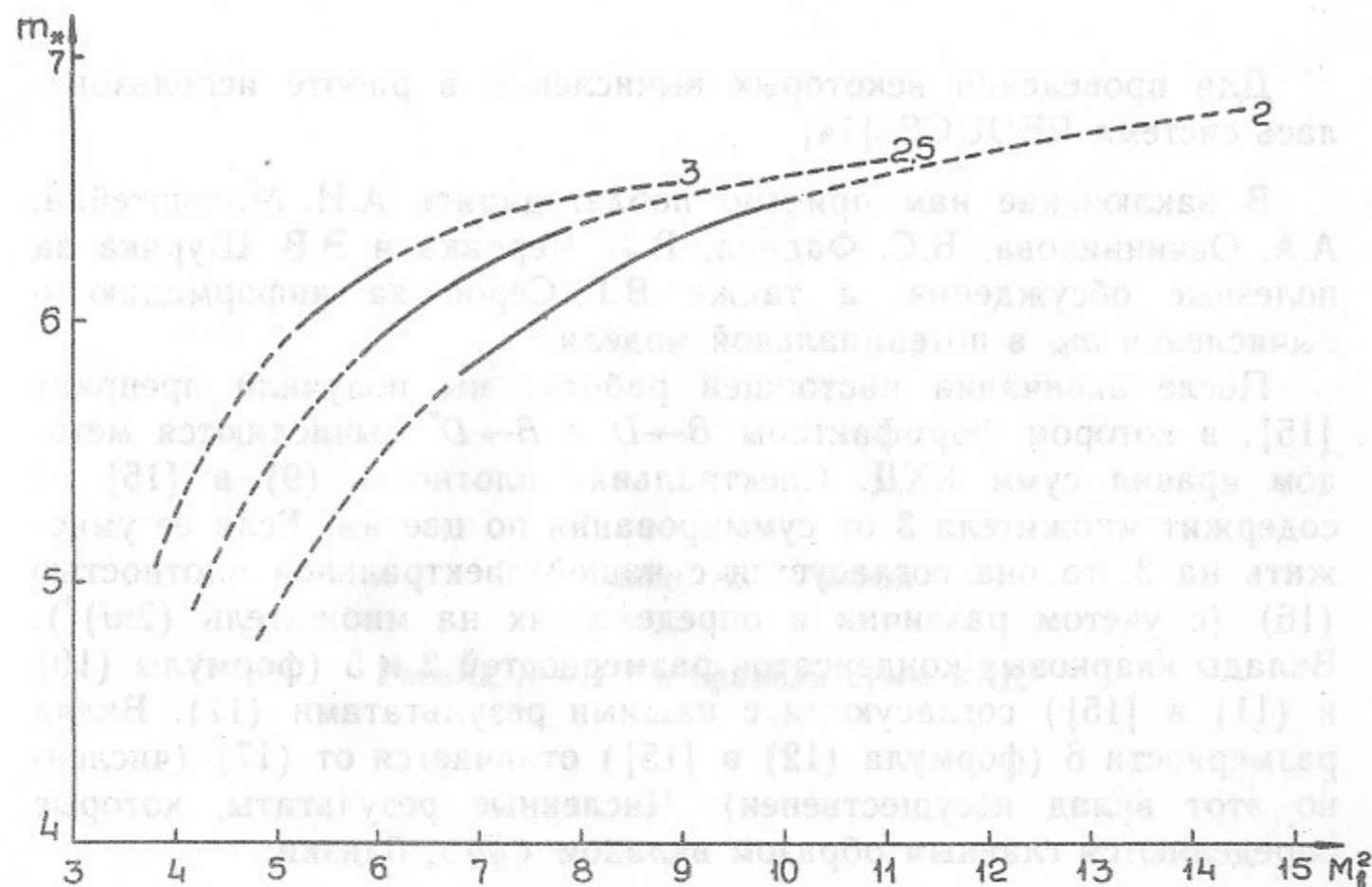


Рис. 12. Зависимость  $m_*$  от  $M_c^2$  при нескольких значениях  $M_b^2$ . Сплошные линии — область, где степенная поправка и вклад континуума в правиле сумм для  $f_+(0)$  не превышают 30%, штриховые — 50%.

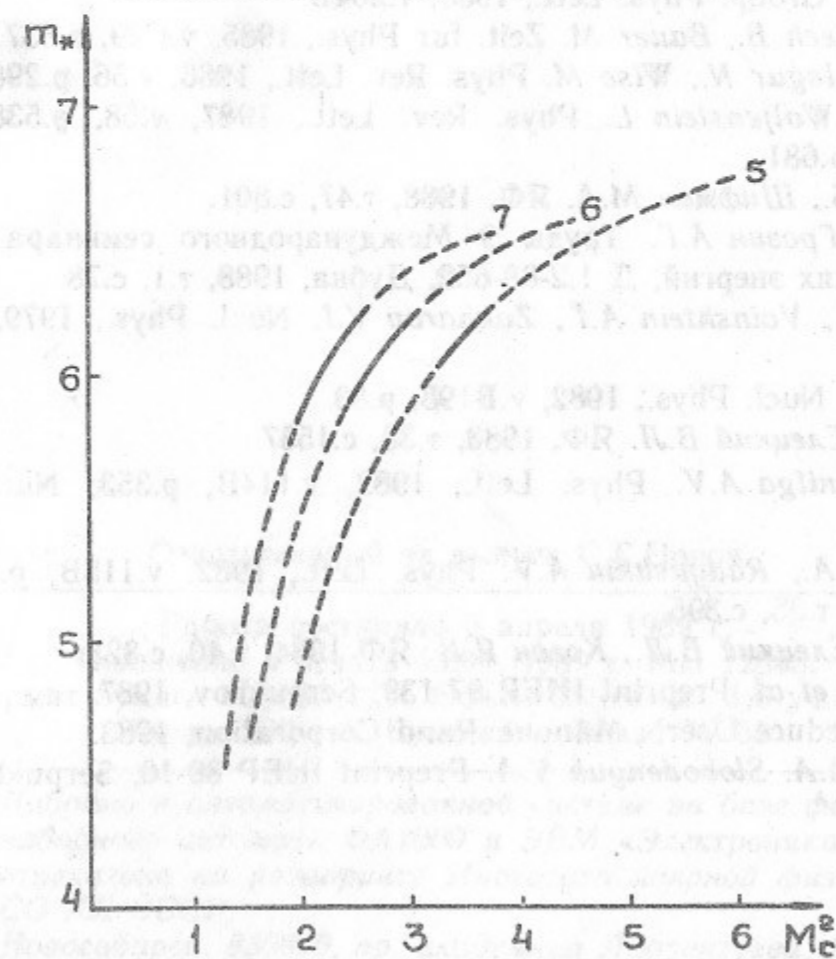


Рис. 13. Зависимость  $m_*$  от  $M_c^2$  при нескольких значениях  $M_b^2$  (обозначения те же).

Для проведения некоторых вычислений в работе использовалась система REDUCE [14].

В заключение нам приятно поблагодарить А.И. Мильштейна, А.А. Овчинникова, В.С. Фадину, В.Л. Черняка и Э.В. Шуряка за полезные обсуждения, а также В.Г. Сербо за информацию о вычислении  $m_{b\bar{c}}$  в потенциальной модели.

После окончания настоящей работы, мы получили препринт [15], в котором формфакторы  $B \rightarrow D$  и  $B \rightarrow D^*$  вычисляются методом правил сумм КХД. Спектральная плотность (9) в [15] не содержит множителя 3 от суммирования по цветам. Если ее умножить на 3, то она согласуется с нашей спектральной плотностью (16) (с учетом различия в определениях на множитель  $(2\pi i)^2$ ). Вклады кварковых конденсатов размерностей 3 и 5 (формулы (10) и (11) в [15]) согласуются с нашими результатами (17). Вклад размерности 6 (формула (12) в [15]) отличается от (17) (численно этот вклад несущественен). Численные результаты, которые определяются главным образом вкладом  $\langle \bar{q}q \rangle$ , близки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Particle Data Group. Phys. Lett., 1988, v.204B.
2. Wirbel M., Stech B., Bauer M. Zeit. fur Phys., 1985, v.C29, p.637.
3. Grinstein B., Isgur N., Wise M. Phys. Rev. Lett., 1986, v.56, p.298.
4. Altomari T., Wolfenstein L. Phys. Rev. Lett., 1987, v.58, p.5383; Phys. Rev., 1988, v.D37, p.681.
5. Волошин М.Б., Шифман М.А. ЯФ, 1988, т.47, с.801.
6. Байер В.Н., Грозин А.Г. Труды 9 Международного семинара по проблемам физики высоких энергий, Д 1,2-88-652, Дубна, 1988, т.1, с.78.
7. Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I. Nucl. Phys., 1979, v.B147, p.395, p.448.
8. Shuryak E.V. Nucl. Phys., 1982, v.B198, p.83.
9. Алиев Т.М., Елецкий В.Л. ЯФ, 1983, т.38, с.1537.
10. Ioffe B.L., Smilga A.V. Phys. Lett., 1982, v.114B, p.353; Nucl. Phys., 1983, v.B216, p.373.
11. Nesterenko V.A., Radyushkin A.V. Phys. Lett., 1982, v.115B, p.410; Письма в ЖЭТФ, 1982, т.35, с.395.
12. Алиев Т.М., Елецкий В.Л., Коган Я.И. ЯФ 1984, т.40, с.823.
13. Gershtein S.S et al. Preprint IHEP 87-139, Serpukhov, 1987.
14. Hearn A.C. Reduce User's Manual. Rand Corporation, 1983.
15. Ovchinnikov A.A. Slobodenyuk V.A. Preprint IHEP 89-10, Serpukhov, 1989.

В.Н. Байер, А.Г. Грозин

#### Распад $B \rightarrow D l \bar{\nu}$ и правила сумм КХД

Ответственный за выпуск С.Г. Попов

Работа поступила 5 апреля 1989 г.  
Подписано в печать 13.04. 1989 г. МН 12053.  
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2,0 печ.л., 1,6 уч.-изд.л.  
Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ № 53

Набрано в автоматизированной системе на базе фото-  
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и  
отпечатано на ротапринтере Института ядерной физики  
СО АН СССР,  
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.