

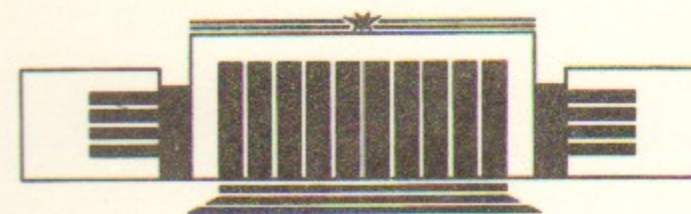


ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Кузьмин С.В.

**МГД-УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ В СИСТЕМЕ
АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ
ПРОБКОТРОНОВ**

ПРЕПРИНТ 89-5



НОВОСИБИРСК

В. С. Иванова

ИСТИНА ИЛИ ПОЛНОЕ НЕВЕДОНИЕ

ИСТИНА ИЛИ ПОЛНОЕ НЕВЕДОНИЕ

ИСТИНА ИЛИ ПОЛНОЕ НЕВЕДОНИЕ

ИСТИНА ИЛИ ПОЛНОЕ НЕВЕДОНИЕ

ИСТИНА ИЛИ ПОЛНОЕ НЕВЕДОНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Первоначальная концепция амбиполярной ловушки [1] предусматривала использование для стабилизации МГД-возмущений плазмы квадрупольных концевых магнитных систем — «якорей». Однако наличие неоклассического поперечного переноса в таких системах [2] поставило под сомнение возможность их применения для длительного удержания плазмы.

Одним из выходов в данной ситуации является переход к аксиально-симметричным магнитным схемам. Существующие работы (см., например, [3]) указывают на теоретическую возможность создания МГД-устойчивой плазмы в такой конфигурации, но техническая реализация предложенных проектов выглядит весьма проблематичной.

Другой подход к проблеме устойчивости плазмы в аксиально-симметричных конфигурациях основан на использовании эффекта стабилизации мелкомасштабных мод МГД-возмущения за счет эффектов конечного ларморовского радиуса (КЛР). В параксиальных магнитных полях таким образом могут быть застabilизированы все моды, кроме моды «жесткого смещения». Для ее стабилизации был предложен ряд способов (см., обзор [4]).

Наиболее перспективным для применения в области УТС и технически проработанным является предложение о создании аксиально-симметричной амбиполярной ловушки с концевыми непараксиальными элементами [5], которые служат стабилизаторами «жесткой» моды. Основу проекта составляет гипотеза о существо-

вании области соотношения давлений плазмы центральной части и концевых элементов, в которой устойчивы все моды МГД-возмущения.

Для точного ответа на вопрос о существовании области требуется решение уравнения плазменных колебаний в описанной системе. Отсутствие теоретического рассмотрения для случая совместного использования параксиального и непараксиального магнитных элементов вынудило авторов проекта [5] прибегнуть к оценкам. Оценки основаны на раздельном рассмотрении двух типов МГД-колебаний: смещения плазмы как целого и мелкомасштабных. При таком подходе из рассмотрения, очевидно, выпадает значительная часть спектра колебаний. Поэтому, несмотря на то, что оценки указывают на наличие диапазона давлений, в котором могут быть подавлены МГД-возмущения, это не дает даже принципиального доказательства реализуемости описанного способа стабилизации плазмы.

Создание математического аппарата для расчета плазменных МГД-колебаний в системе из параксиального и непараксиального пробкотронов позволило бы не только доказать или опровергнуть подход, предложенный в [5], но и существенно доработать проект с учетом большого числа факторов, влияющих на МГД-устойчивость плазмы. Попытка создания такого аппарата и была предпринята в данной работе.

Дальнейший план изложения следующий. В главе 1 описывается уравнение потенциальных желобковых колебаний плазмы в рассмотренной выше магнитной системе. Глава 2 посвящена методу численного решения этого уравнения и результатам тестов на простейших моделях. Глава 3 описывает пример МГД-устойчивой системы из параксиального пробкотрона и полукаспа с параметрами, приближенными к реальным.

1. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ

Для корректного ответа на вопрос об устойчивости системы связанных пробкотронов необходимо найти собственные частоты МГД-возмущения. Если ограничиться разумными предположениями о квазинейтральности плазмы в системе ($4\pi m_i n c^2 / B^2 \gg 1$, где n — концентрация плазмы, B — модуль магнитного поля, m_i — масса ионов, c — скорость света) и малости ее магнитного давления

($8\pi p / B^2 \ll 1$, где p — давление плазмы), то достаточно рассмотреть потенциальные желобковые МГД-колебания плазмы [6]. Кроме того, будем считать, что плазма ионногорячая ($T_i \gg T_e$).

Как известно [6], КЛР-эффекты становятся существенными для плазмы, расположенной в параксиальной области магнитного поля $\rho_i / a = a / L \ll 1$, где ρ_i — ларморовский радиус ионов в плазме, a — характерный размер плазмы поперек магнитного поля, L — продольный размер пробкотрона, а непараксиальные эффекты возникают при $a / L \sim 1$.

В дальнейшем для простоты рассмотрения ограничимся системой из двух пробкотронов: параксиального и непараксиального. Общим уравнением, связывающим обе области, остается уравнение квазинейтральности плазмы:

$$\operatorname{div} j = 0.$$

Линеаризуя это уравнение относительно малых возмущений плазмы и расписывая его в потоковых (ψ, χ) координатах, получим

$$B^2 \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{j_{\parallel}}{B^2} \right) + \operatorname{div} j'_{\perp} = 0. \quad (1)$$

Здесь и далее индексы \parallel, \perp означают, соответственно, продольную и поперечную компоненты вектора по отношению к вектору поля, а штрих — возмущенную компоненту. Проинтегрировав выражение (1) по χ с весом $1/B^2$ по всей длине системы, найдем, что

$$\frac{j'_{\parallel}}{B^2} \Big|_{\chi_1}^{\chi_3} + \int_{\chi_1}^{\chi_3} \frac{d\chi}{B^2} \operatorname{div} j'_{\perp} = 0,$$

где индексы 1 и 3 означают левый и правый концы системы. Так как возмущенный ток должен зануляться на концах установки, то окончательно можем записать:

$$\int_{\chi_1}^{\chi_2} \frac{d\chi}{B^2} \operatorname{div} j'_{\perp} + \int_{\chi_2}^{\chi_3} \frac{d\chi}{B^2} \operatorname{div} j'_{\perp} = 0, \quad (2)$$

где индекс 2 относится к промежуточной точке между параксиальным и непараксиальным пробкотронами.

Уравнение (2) является базовым при выводе уравнения потенциальных желобковых колебаний плазмы. Далее необходимо

вычислить поперечную компоненту возмущенного тока в параксиальном и непараксиальном пробкотронах. Наиболее просто это сделать в непараксиальном пробкотроне, где $\rho_i/a \ll a/L$ (см. Введение), и, следовательно, можно не учитывать в уравнениях поправки, связанные с конечностью ларморовского радиуса ионов, и воспользоваться приближением одножидкостной гидродинамики для плазмы с бесконечной проводимостью:

$$\begin{cases} m_i n \frac{d\vec{v}}{dt} = -\operatorname{div} \vec{p} + \frac{1}{c} [j, B], \\ 0 = \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v}, \vec{B}], \end{cases} \quad (3)$$

где \vec{E} — вектор электрического поля, \vec{v} — вектор направленной скорости плазмы. В дальнейшем ограничимся случаем, когда электрическое поле и направленная скорость отсутствуют в равновесном состоянии. Линеаризуя уравнения (3) с учетом сделанных предположений о квазинейтральности и желобковом характере возмущения ($\vec{B}' = 0$, $(\vec{B}, \vec{E}') = 0$), после несложных выкладок для возмущенной поперечной компоненты плотности тока можно записать

$$\vec{j}'_{\perp} = \frac{m_i n}{B^2} \vec{\nabla} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \frac{1}{B^2} [\vec{B}, \vec{\nabla} p'_{\perp}] + \frac{(p'_{\parallel} - p'_{\perp})}{B^2} [\vec{B}, \vec{\kappa}],$$

где $\vec{\kappa} = (\vec{h}, \vec{\nabla}) \vec{h}$, а $\vec{h} = \vec{B}/B$. Следовательно, для дивергенции этой величины имеем

$$\operatorname{div} j'_{\perp} = \operatorname{div} \left\{ \frac{m_i n}{B^2} \vec{\nabla} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \right\} + \frac{[\vec{B}, \vec{\kappa}]}{B^2} \vec{\nabla} (p'_{\parallel} + p'_{\perp}). \quad (4)$$

Представив временную часть возмущенного потенциала в виде ряда по частотам ($\varphi \propto e^{i\omega t}$), а азимутальную в виде ряда по гармоникам ($\varphi \propto e^{i\omega\theta}$), и проинтегрировав по $d\chi/B^2$, перепишем (4) следующим образом:

$$i \int_{\chi_2}^{\chi_3} \frac{d\chi}{B^2} \operatorname{div} j'_{\perp} = \omega \left\{ \frac{\partial}{\partial \psi} \left(A_n \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right) - m^2 C_n \varphi \right\} + \frac{m^2}{\omega} \omega_n \varphi, \quad (5)$$

где

$$A_n = \int_{\chi_2}^{\chi_3} \frac{d\chi}{B^2} \rho r^2; \quad C_n = \int_{\chi_2}^{\chi_3} \frac{d\chi}{B^2} \frac{\rho}{r^2 B^2}; \quad \rho = m_i n;$$

$$\omega_n = \int_{\chi_2}^{\chi_3} \frac{d\chi}{B^2} \left\{ -\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \psi} \frac{\partial (p_{\parallel} + p_{\perp})}{\partial \psi} + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \psi} \right)^2 B \frac{\partial (p_{\parallel} + p_{\perp})}{\partial B} \right\} + K;$$

$$K = - \int d\varepsilon d\mu \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \left(\int_{\chi_2}^{\chi_3} \frac{v_{\perp}^2 + \mu B}{v_{\parallel}} \frac{\partial B}{\partial \psi} \frac{d\chi}{B^3} \right)^2 \left(\int_{\chi_2}^{\chi_3} \frac{d\chi}{B v_{\parallel}} \right)^{-1}.$$

Функция ω_n была получена в таком виде в работе [6]. При выводе было учтено, что

$$p'_{\parallel} + p'_{\perp} = \int \frac{B d\mu d\varepsilon}{v_{\parallel}} (2\varepsilon - \mu B) f',$$

где f' — возмущенная часть функции распределения, которая для рассматриваемого случая, имеет вид

$$f' = \frac{m}{\omega} \varphi \left\{ \frac{\partial F}{\partial \psi} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \left[\int_{\chi_2}^{\chi_3} \frac{d\chi}{B^3} \frac{\partial B}{\partial \psi} \frac{(2\varepsilon - \mu B)}{v_{\parallel}} \right] \left[\int_{\chi_2}^{\chi_3} \frac{d\chi}{B v_{\parallel}} \right]^{-1} \right\},$$

F — равновесная функция распределения ионов.

Для получения дивергенции возмущенной компоненты поперечного тока в параксиальном случае воспользуемся результатами работы [7]:

$$\begin{aligned} \int_{\chi_1}^{\chi_2} \operatorname{div} j'_{\perp} &= \omega \left\{ \frac{\partial}{\partial \psi} \left(A_n \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right) - m^2 C_n \varphi \right\} + \\ &+ m \left\{ \frac{\partial}{\partial \psi} \left(A_k \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right) - C_k \varphi \right\} + \frac{m^2}{\omega} \omega_n \varphi, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$A_n = \int_{\chi_1}^{\chi_2} \frac{d\chi}{B^2} \rho r^2, \quad C_n = \int_{\chi_1}^{\chi_2} \frac{d\chi}{B^2} \frac{\rho}{r^2 B^2},$$

$$\omega_n = \int_{\chi_1}^{\chi_2} \frac{d\chi}{B^2} \left[-\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \psi} \frac{\partial (p_{\parallel} + p_{\perp})}{\partial \psi} \right],$$

$$A_k = \int_{\chi_1}^{\chi_2} \frac{d\chi}{B^2} r^2 \frac{\partial \rho_{\perp}}{\partial \psi},$$

$$C_k = \int_{\chi_1}^{\chi_2} \frac{d\chi}{B^2} \left\{ \frac{m^2}{r^2 B^2} \frac{\partial p_{\perp}}{\partial \psi} + \frac{1}{2B} \frac{\partial p_{\perp}}{\partial \psi^2} \right\}.$$

Объединяя уравнения (5) и (6), получаем окончательное уравнение для расчета собственных частот и формы возмущенного потенциала для желобковых колебаний плазмы в такой системе:

$$\omega^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \psi} \left[(A_n + \alpha A_n) \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right] - m^2 (C_n + \alpha C_n) \varphi \right\} + \omega m \left\{ \frac{\partial}{\partial \psi} \left(A_k \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right) - C_k \varphi \right\} + m^2 (\omega_n + \beta \omega_n) \varphi = 0, \quad (7)$$

где

$$\alpha = \frac{m_i^0 n_0^0}{m_i^0 n_0^0}, \quad \beta = \frac{n_0^0 T_0^0}{n_0^0 T_0^0},$$

а n_0 , T_0 — пиковые значения концентрации плазмы и температуры ионов. С математической точки зрения полученное равенство представляет собой одномерное уравнение второго порядка на собственные значения. Граничные условия и методы его решения обсуждаются в следующей части.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ И ЕГО ТЕСТИРОВАНИЕ

Будем считать, что плазма окружена проводящим кожухом, расположенным на $\psi = \psi_0$ и, следовательно, $\varphi(\psi_0) = 0$. Совместно с требованием ограниченности потенциала в центре при $\psi = 0$ условие зануления потенциала на ψ_0 однозначно определяет решение уравнения (7).

Наиболее устойчивым методом решения уравнения второго порядка на собственные значения при заданных граничных условиях является спектральный (см., например, [8]). В этом случае решение представляется в виде конечного ряда

$$\varphi = \sum_{j=1}^N y_j \varphi_j \quad (8)$$

из полного набора функций, каждая из которых отвечает заданным граничным условиям. Требуемое число членов ряда зависит

от свойств функций из набора. Чем более они соответствуют структуре исходного уравнения, тем меньшего числа членов ряда достаточно для получения правильного результата, что существенно для повышения точности вычислений. Для аксиально-симметричной системы наиболее адекватен набор из бесселевых функций:

$$\varphi_j = J_l \left(\mu_j^l \sqrt{\frac{\psi}{\psi_0}} \right),$$

где μ_j^l — корни l -й бесселевой функции. Как правило, использовались $l=2$ и $l=3$, что позволило получить решения во всех рассмотренных случаях.

После подстановки ряда (8) в уравнение (7) и интегрирования его по $d\psi$ с различными φ_i получаем матричную систему линейных уравнений

$$\omega^2 L_{ij} y_j + \omega M_{ij} y_j + N_{ij} y_j = 0, \quad (9)$$

где

$$L_{ij} = - \int_0^{\psi_0} d\psi \left[(A_n + \alpha A_n) \frac{d\varphi_i}{d\psi} \frac{d\varphi_j}{d\psi} + (C_n + \alpha C_n) \varphi_i \varphi_j \right],$$

$$M_{ij} = -m \int_0^{\psi_0} d\psi \left[A_k \frac{d\varphi_i}{d\psi} \frac{d\varphi_j}{d\psi} + C_k \varphi_i \varphi_j \right],$$

$$N_{ij} = m^2 \int_0^{\psi_0} d\psi [(\omega_n + \beta \omega_n) \varphi_i \varphi_j].$$

Ее можно свести к стандартной системе, если ввести $\lambda_j = \omega y_j$. Тогда (9) записывается в следующей форме:

$$\begin{pmatrix} -L^{-1}M & -L^{-1}N \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ y \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \lambda \\ y \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Эта система уже решается стандартным набором математических подпрограмм линейной алгебры. Так как матрица в левой части системы (10) не эрмитова, то собственные числа могут быть и мнимыми.

Для проверки точности вычисления собственных значений с помощью предложенной схемы предположим, что

$$A_n + \alpha A_n = \psi, \quad A_k = C_k = 0,$$

$$C_n + \alpha C_n = 1/\psi, \quad \omega_n + \beta \omega_n = \left(\frac{d}{m}\right)^2 \psi.$$

В этом случае решением уравнения являются функции Бесселя $J_m(d \cdot \psi/\psi_0)$ и собственные числа точно известны. Оказалось, что для достижения точности не более 1% для j -го корня произвольной функции Бесселя достаточно всего $j+2$ членов ряда (8). Вторым важным достоинством предложенной схемы является ее устойчивость по отношению к шумам (неточностям вычислений) в коэффициентах уравнения. В среднем при величине шума Δ точность определения собственного числа ухудшается как $0.1 \cdot \Delta$ (см., рис. 1), что, по-видимому является следствием интегрального характера коэффициентов системы (10).

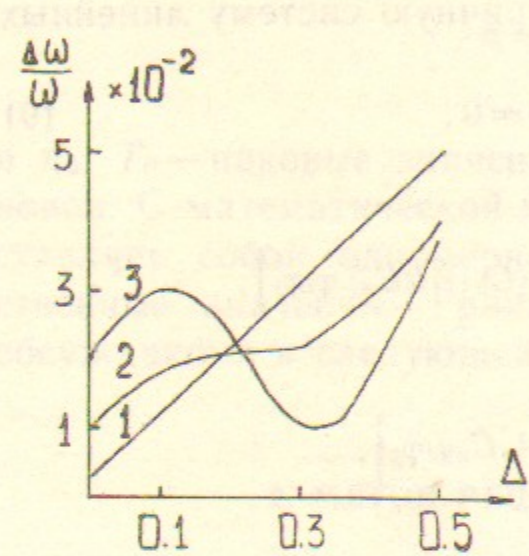


Рис. 1. Относительная ошибка вычисления собственного числа от величины шума при $N=3$ (1), $N=4$ (2), $N=5$ (3).

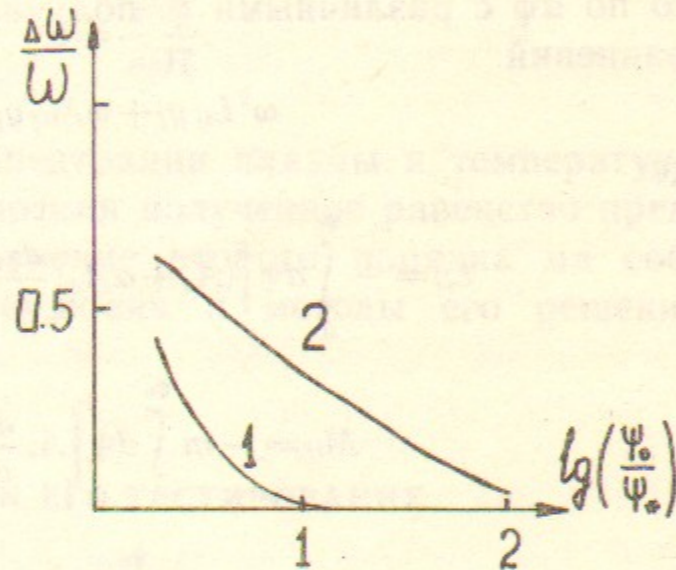


Рис. 2. Относительное отклонение собственного числа от аналитического предела для низших радиальных мод гармоник: 1: $m=1$, 2: $m=2$.

Для выяснения возможности решать с помощью описанного метода системы с резкими профилями A , C , ω был выбран набор следующих функций:

$$A_n + \alpha A_n = \psi \exp\left(-\frac{\psi}{\psi_*}\right); \quad C_n + \alpha C_n = \frac{1}{\psi} \exp\left(-\frac{\psi}{\psi_*}\right);$$

$$A_k = -\frac{\psi}{\psi_*} \exp\left(-\frac{\psi}{\psi_*}\right); \quad C_k = \left\{ -\frac{m^2}{\psi \psi_*} \exp\left(-\frac{\psi}{\psi_*}\right) + \frac{1}{\psi_*^2} \exp\left(-\frac{\psi}{\psi_*}\right) \right\}; \quad (11)$$

$$\omega_n + \beta \omega_n = \frac{s}{\psi_*} \exp\left(-\frac{\psi}{\psi_*}\right).$$

В этом случае решением уравнения (7) являются функции Уиттекера. Причем параметр s определяет наличие ($s < 0$) или отсутствие ($s > 0$) решений с мнимыми собственными значениями. Как видно из (11), при $\psi_* \rightarrow 0$ профили коэффициентов приобретают все более резкий характер, тем не менее устойчивость вычислительной схемы не нарушалась и получаемые собственные частоты сходились к теоретически известным для случая $\psi_0/\psi_* \rightarrow \infty$ (см., рис. 2). Существенно, что при этом не возникали решения с мнимыми собственными значениями по причинам вычислительного характера.

Проведенные тесты дают определенную уверенность в устойчивости работы схемы и правильности получаемых с ее помощью результатов.

3. ПРИМЕР АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ МГД-УСТОЙЧИВОЙ СИСТЕМЫ

Для доказательства существования МГД-устойчивых систем на основе анализа точного уравнения рассмотрим магнитную систему, состоящую из параксиального пробкотрона и линейного каспа ($B_r = Gr$, $B_z = -2Gz$). Далее для простоты будем считать, что пробкотрон имеет пробочное отношение $R_n = 4.0$, касп $R_n = 2.0$, а распределение плазмы в системе описывается следующими модельными функциями:

$$n = n_0 \hat{n} \left(\frac{B_0}{B}\right)^k \frac{(B_m - B)^{k+1/2}}{(B_m - B_0)^{k+1/2}},$$

$$p_{\parallel} = n_0 T_0 \hat{n} \left(\frac{B_0}{B}\right)^k \frac{(B_m - B)^{k+1/2}}{(B_m - B_0)^{k+1/2}} - \frac{2(B_m - B)}{2(k+2)B_m - B_0},$$

$$p_{\perp} = n_0 T_0 \hat{n} \left(\frac{B_0}{B}\right)^k \frac{(B_m - B)^{k+1/2}}{(B_m - B_0)^{k+1/2}} - \frac{2(k+1)B_m + B}{2(k+2)B_m - B_0},$$

где B_m , B_0 — максимум и минимум модуля поля на данной силовой линии, а $\hat{n}(\psi)$ — поперечное распределение концентрации. Параметр k характеризует ширину функции распределения в пространстве питч-углов. (При $k=0$ это ступенька, обрывающаяся на конусе потерь.) Поперечное распределение концентрации считалось гауссовским:

$$\hat{n}(\psi) = \begin{cases} \exp\left\{-\alpha_1 \frac{(\psi_s - \psi)^2}{\psi_s^2}\right\} & \psi \leq \psi_s, \\ \exp\left\{-\alpha_2 \frac{(\psi_s - \psi)^2}{(\psi_m - \psi_s)^2}\right\} & \psi > \psi_s, \end{cases} \quad (12)$$

где было принято $\psi_m = 0.5 \cdot \psi_0$, $\alpha_2 = 2.3$ (что дает $\hat{n}(\psi_m) = 0.1 \cdot n_0$), а $\alpha_1 = 0.0$ для пробкотрона и $\alpha_1 = 2.3$ для каспа.

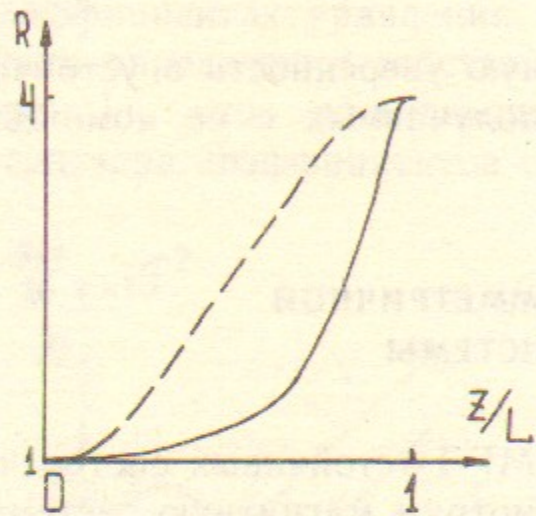


Рис. 3а. Форма поля на оси параксиального пробкотрона: сплошная линия — близкая к оптимальной; штриховая — $B(z) = B_0 \left(1 + 3 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{L}\right)\right)$.

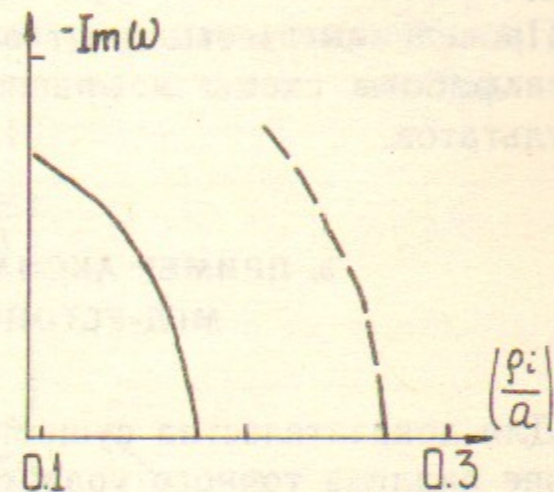


Рис. 3б. Величина мнимой части собственной частоты при $k=0$, $n = \exp(-\psi/\psi_s)$ в зависимости от ρ_i/a для соответствующей формы поля.

После выбора модели давления свободным параметром параксиального пробкотрона остается форма поля на оси. Оказывается возможным провести оптимизацию по этому параметру (см. Приложение). Поэтому в дальнейшем будем пользоваться для параксиального пробкотрона моделью поля, близкой к оптимальной (см. рис. 3а):

$$B = B_0 \left\{ 1 + 1.8 \left(\frac{z}{L}\right)^2 + 8.8 \left(\frac{z}{L}\right)^8 - 6.6 \left(\frac{z}{L}\right)^{10} \right\}.$$

Как известно из теории [6], в параксиальном пробкотроне при увеличении отношения ρ_i/a , начиная с некоторого — «критического», неустойчивой остается только одна, так называемая «жесткая» мода. Из всех остальных мод наиболее неустойчивой оказывается вторая радиальная мода азимутальной гармоники $m=1$. Поведение мнимой части собственных частот этой моды при

изменении ρ_i/a показано на рис. 3б для исходного и оптимизированного профиля поля на оси пробкотрона.

Очевидно, что существенное значение для устойчивости плазмы имеет форма плазменного образования. Влияние основных пространственных характеристик можно оценить из графиков на рис. 4, где показаны зависимости критического отношения от параметров поперечного (ψ_s/ψ_m) и продольного (k) распределения плазмы. Эта зависимость указывает на предпочтительное использование с точки зрения МГД-устойчивости дискообразной плазмы, локализованной вблизи минимума поля пробкотрона, но в дальнейшем отнесем это к резервам оптимизации и примем, что $k=0$ и $\psi_s/\psi_m=0$.

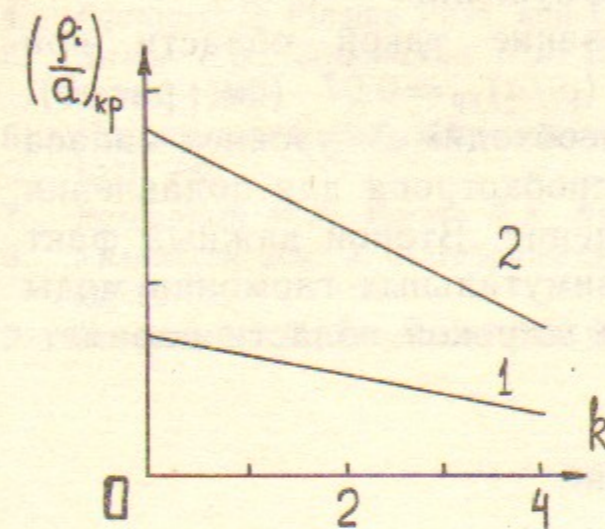


Рис. 4. Зависимость критического отношения от распределения плазмы: 1: $\psi_s/\psi_m=0$; 2: $\psi_s/\psi_m=0.4$.

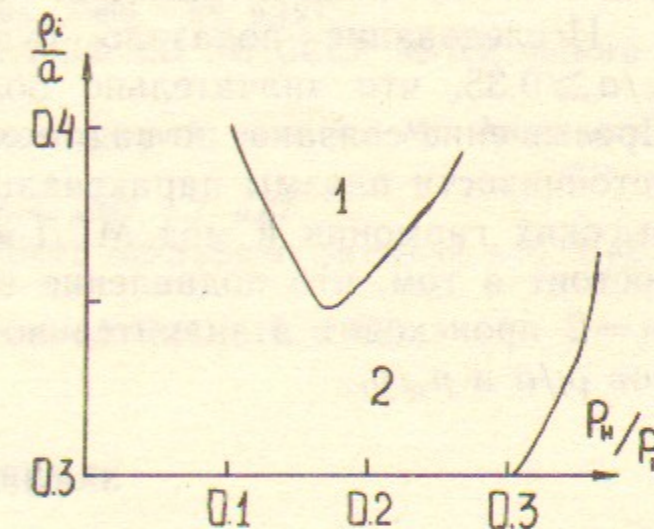


Рис. 5. Области устойчивых решений при $T_0^*/T_0^*=0.1$; $m_i^*/m_i^*=0.5$: 1 — по всему спектру колебаний; 2 — по всему спектру, кроме колебаний с $m=1$.

Из особенностей поведения плазмы в каспе остановимся только на проблеме поперечного распределения. Как было выяснено в работе [9], если спад давления к области нуля поля каспа происходит достаточно плавно: $p \propto \psi^\delta$ при $\delta < \delta_{кр} = 0.43$, плазма остается устойчивой относительно МГД-возмущений. Исследование подтвердило наличие критического профиля спада давления с предсказанным $\delta_{кр}$, что на языке уравнения (7) соответствует наличию ($\delta > \delta_{кр}$) или отсутствию ($\delta < \delta_{кр}$) области ω_n , в которой $\omega_n < 0$. Учитывая, что реальный спад давления происходит значительно круче критического, для каспа в модели давления (12) принято $\alpha_1 = 2.3$ и $\psi_s/\psi_m = 0.5$. Это приводит в свою очередь к наличию

области, в которой $\omega_n < 0$ и, следовательно, наличие неустойчивых мод МГД-возмущения. Но форма поперечного распределения такова, что сохраняется устойчивость жесткой моды и неустойчивые МГД-возмущения плазмы имеют место на более высоких радиальных модах и азимутальных гармониках.

В такой ситуации очевидно, что если давление в каспе много меньше давления в пробкотроне ($p_n/p_p \ll 1$), то полученная система будет неустойчива по отношению к жесткой моде МГД-возмущения. В случае, когда $p_n/p_p \gg 1$, неизбежны неустойчивости на более высоких гармониках, вызываемые поведением плазмы в каспе. Следовательно, вопрос о МГД-устойчивости плазмы в такой системе сводится к вопросу о наличии области соотношения давлений, в которой плазма устойчива относительно всех радиальных мод и азимутальных гармоник МГД-возмущения.

Исследование показало существование такой области при $\rho_i/a \geq 0.35$, что значительно больше $(\rho_i/a)_{кр} = 0.07$ (см. рис. 5). Превышение связано, по-видимому, с необходимым уровнем запаса устойчивости плазмы параксиального пробкотрона для подавления высоких гармоник и мод МГД-возмущения. Вторым важным фактом состоит в том, что подавление всех азимутальных гармоник моды $m=2$ происходит в значительно более широкой области параметров ρ_i/a и p_n/p_p .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Главной задачей данной работы, как сказано во Введении, было создание математического аппарата для определения МГД-устойчивости плазмы в сложных магнитных системах. Однако представляется полезным еще раз обратить внимание на следующие факты, полученные в результате пробного исследования таких систем:

- доказательство теоремы существования МГД-устойчивой системы двух пробкотронов, каждый из которых в отдельности неустойчив;
- во всех рассмотренных случаях наибольшую опасность представляют низшие радиальные моды гармоник $m=1$.

Численное решение уравнения желобковых колебаний плазмы позволяет оптимизацию параметров установки с учетом многих факторов, влияющих на МГД-устойчивость плазмы. Кроме включенных в рассмотрение в данной работе, при необходимости можно учесть:

- неадиабатичность движения ионов плазмы;
- наличие температурного профиля плазмы;
- присутствие холодной компоненты в горячей плазме.

Автор выражает благодарность П.Б. Лысянскому за инициирование работы и критические замечания, Г.В. Ступакову за полезные обсуждения и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Димов Г.И., Закайдаков В.В., Кишиневский М.Е. Физика плазмы, 1976, т.2, с.597.
2. Рютов Д.Д., Ступаков Г.В. В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 13. — М: Атомиздат, 1983, с.74.
3. Арсенин В.В. Письма ЖЭТФ, 1983, т.37, с.534.
4. Ryutov D.D. Plasma Phys. and Contr. Fus., 1986, v.28, p.191.
5. Димов Г.И., Лысянский П.Б. Препринт ИЯФ СО АН СССР 86-102. Новосибирск, 1986.
6. Михайловский А.Б. Неустойчивости неоднородной плазмы. — М: Атомиздат, 1971, т.2.
7. Rosenbluth M.N., Varma R.K. Nucl. Fusion, 1967, v.7, p.67.
8. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. — М: Наука, 1970.
9. Нагорный В.П., Ступаков Г.В. Физика плазмы, 1984, т.10, с. 476.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для определения условий оптимизации поля на оси пробкотрона при заданном пробочном отношении рассмотрим следующее распределение плазмы:

$$\rho = \rho_{\parallel} + \rho_{\perp} = n_0 T_0 \hat{n}; \quad \hat{n} = e^{-\psi/\psi_0}$$

В этом случае коэффициенты основного уравнения (7) могут быть приведены к виду коэффициентов уравнения Уиттекера с параметром s у члена $\omega_n + \beta\omega_n$ в виде (см. (11)):

$$s = \int_{\chi_1}^{\chi_2} \frac{d\chi}{B^4} \cdot \frac{\partial B}{\partial \psi} \left[\int_{\chi_1}^{\chi_2} \frac{d\chi}{B^3} \right]^{-1}. \quad (\text{П.1})$$

Как следует из общего анализа этого уравнения, неустойчивых решений нет, если $s > 0$. Если $s < 0$, то их число тем меньше, чем больше s . Поэтому в параксиальном пробкотроне профиль магнит-

ного поля на оси пробкотрона должен выбираться таким, чтобы выражение (П.1) достигало своего максимума при заданных χ_1, χ_2 и граничных условиях на B .

Учтем, что в параксиальном случае $d\chi/B^2 \approx dz/b$, где z — координата, а $b(z)$ — модуль поля на оси симметрии пробкотрона. Произведем нормировку $\bar{z} = z/L$, примем что $z=0$ плоскость симметрии параксиального пробкотрона ($b(z) = b(-z)$), тогда выражение (П.1) может быть записано в следующем виде:

$$s = \int_0^1 \frac{d\bar{z}}{b^4} \left[\frac{3}{4} (b')^2 - \frac{1}{2} b b'' \right] \left[\int_0^1 \frac{d\bar{z}}{b^2} \right]^{-1}. \quad (\text{П.2})$$

Теперь требуемые граничные условия могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{aligned} b(0) &= b_0, & b'(0) &= 0, \\ b(1) &= b_m, & b'(1) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

С учетом граничных условий выражение для s может быть переписано таким образом, чтобы было очевидным наличие конечного максимума:

$$s = -\frac{1}{4} \int_0^1 \frac{d\bar{z}}{b^2} \left(\frac{b'}{b} \right)^2 \left[\int_0^1 \frac{d\bar{z}}{b^2} \right]^{-1}. \quad (\text{П.4})$$

Однако если мы сразу выпишем дифференциальное уравнение Эйлера на функцию максимизирующую (П.4), то окажется, что мы имеем избыточные граничные условия. Для того, чтобы преодолеть это затруднение мы учтем, что вторая производная поля не может быть произвольно большой. Ее максимальная величина определяется геометрией катушек системы. Это обстоятельство позволяет провести регуляризацию функционала (П.2):

$$s_R = (1 - \eta) s + \eta \int_0^1 (b'')^2 d\bar{z}. \quad (\text{П.5})$$

Экстремальное дифференциальное уравнение, соответствующее (П.5), оказывается уже четвертого порядка и его численное решение с граничными условиями (П.3) позволяет установить опти-

мальный профиль на оси пробкотрона при заданном коэффициенте регуляризации.

Моделирование полученного профиля с помощью полиномов позволило выбрать полином с формой, близкой к оптимальной:

$$B = B_0 \left\{ 1 + \beta_1 \left(\frac{z}{L} \right)^2 + \beta_2 \left(\frac{z}{L} \right)^{n-2} + \beta_3 \left(\frac{z}{L} \right)^n \right\}, \quad (\text{П.6})$$

где

$$\beta_1 = R_* - 1; \quad R_* = b_*/b_0; \quad R_m = b_m/b_0;$$

$$\beta_2 = \frac{n}{2} (R_m - R_*) + \beta_1;$$

$$\beta_3 = \left(1 - \frac{n}{2} \right) \cdot (R_m - R_*) - \beta_1.$$

Величина $R_m = 4.0$ следует из исходной постановки, при этом $R_* = 2.8$, а $n = 10$, что дает $\beta_1 = 1.8$, $\beta_2 = 8.8$, $\beta_3 = -6.6$.

Кузьмин С.В.

**МГД-устойчивость плазмы в системе
аксиально-симметричных пробкотронов**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 20 декабря 1988 г.
Подписано в печать 16.01 1989 г. МН 10017
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1,5 печ.л., 1,2 уч.-изд.л.
Тираж 180 экз. Бесплатно. Заказ № 5

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и
отпечатано на ротапринтере Института ядерной физики
СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*