

35

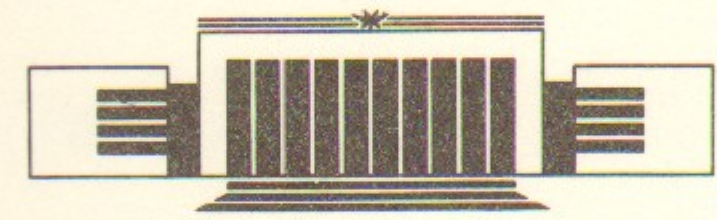


ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

А.Р. Житницкий

СР<sup>N-1</sup>-МОДЕЛЬ:  
ДРОБНЫЙ ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ЗАРЯД  
И ТЕОРЕМА ИНДЕКСА  
ДЛЯ МНОГООБРАЗИЙ С ГРАНИЦЕЙ

ПРЕПРИНТ 88-154



НОВОСИБИРСК

$CP^{N-1}$ -модель: дробный топологический заряд  
и теорема индекса для многообразий с границей

А.Р. Житницкий

Институт ядерной физики  
630090, Новосибирск 90, СССР

## АННОТАЦИЯ

Рассматривается новый класс самодуальных решений, определенных на многообразии с границей и обладающих топологическим зарядом  $Q=1/N$ . Вычислен вклад соответствующих флуктуаций в фермионный конденсат  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  в суперсимметричном варианте  $CP^{N-1}$ -модели. Результат оказывается конечным, что означает спонтанное нарушение дискретной киральной симметрии. Подробно обсуждается теорема индекса Атьи—Патоли—Сингера (APS) для многообразий с границей. Объясняется необходимость наложения глобальных граничных условий в рассматриваемом случае.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Цель настоящей работы — описать решения с дробным топологическим зарядом  $Q$  в двумерных  $CP^{N-1}$ -теориях и проанализировать физические следствия, связанные с их существованием.

Аналогичная задача для 2-мерной суперсимметричной  $O(3)\sigma$ -модели и для 4-мерной суперсимметричной глюодинамики с калибровочной группой  $SU(2)$  рассматривалась в [1] и [2], соответственно. В этих работах было показано, что решения с половинным топологическим зарядом дают конечный вклад в конденсат фермионов  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  и тем самым обеспечивают спонтанное нарушение дискретной киральной симметрии в рассматриваемых теориях. Цель настоящей статьи — выйти за рамки  $SU(2)$ -группы и на примере 2-мерной суперсимметричной  $\sigma$ -модели, основанной на группе  $SU(N)$  (так называемые  $CP^{N-1}$ -теории), продемонстрировать существование устойчивого решения с  $Q=1/N$ . Далее мы убедимся, что полученное решение дает ненулевой вклад в конденсат  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ , причем применение квазиклассического приближения полностью оправдано.

Важно подчеркнуть, что переход от группы  $SU(2)$  к  $SU(N)$  не является простой арифметической задачей. Приводимый в статье анализ  $SU(N)$ -случая позволяет взглянуть на проблему допустимых граничных условий с более общих позиций. Именно, мы убедимся, что на фермионные поля необходимо наложить глобальные граничные условия [3]. Это в точности выделяет допустимые значения топологического заряда  $Q \sim 1/N$ . Решения с другими дроб-

ными  $Q$  оказываются неустойчивыми. Таким образом, рассмотрение  $\sigma$ -модели с группой  $SU(N)$  позволило сформулировать достаточно общий принцип наложения допустимых граничных условий. Мы надеемся, что настоящий анализ поможет в дальнейшем решить аналогичную задачу для физически более интересного случая 4-мерной калибровочной  $SU(N)$ -теории.

Прежде чем подробно описывать конфигурации с дробными значениями  $Q$ , напомним, что целочисленность  $Q$  для инстантона [4, 5] связана с компактификацией физического пространства в сферу, т. е. с отождествлением всех бесконечно удаленных точек. Выбор других граничных условий может привести, в принципе, к дробным топологическим зарядам. В частности, в  $SU(N)$ -глюодинамике, определенной на гиперторе  $T_1 \times T_1 \times T_1 \times T_1$ , введение так называемых твистованных граничных условий [6] позволило получить решения классических уравнений — торонов [7], имеющих  $Q=1/N$  и действие  $S = \frac{8\pi^2}{g^2} \frac{1}{N}$ .

Кроме твистованных граничных условий, возможны и другие способы описания решений с дробными  $Q$  — аналитическое продолжение в комплексное пространство, содержащее несколько римановых поверхностей или переход к описанию на многообразиях с границей. Именно последние подходы эксплуатировались в статьях [1, 2] и будут использованы в настоящей работе.

Несколько слов собственно о суперсимметричной  $CP^{N-1}$ -модели [8, 9] и о том, чем мотивировано рассмотрение решений с дробным топологическим зарядом в этом случае [10].

Как известно, модель имеет наивную киральную  $U(1)$ -симметрию,  $\psi \rightarrow \exp\{i\alpha\gamma_5\}\psi$ , нарушаемую аномалией:

$$\partial_\mu a_\mu = 2NQ, \quad Q = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \varepsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (1)$$

Однако дискретная симметрия  $Z_2 \times Z_N$  при этом сохраняется. С другой стороны, известно точное утверждение [9], что при больших  $N$  возникает фермионный конденсат  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$ . В свою очередь это означает спонтанное нарушение упомянутой выше  $Z_N$ -симметрии и существование  $N$  вакуумных состояний, маркирующихся фазой конденсата  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_k \sim \exp\{2\pi ik/N\}$  [10]. Естественно ожидать, что аналогичное поведение характерно не только при  $N \rightarrow \infty$ , но и для теории с любым конечным  $N$ . Сильным аргументом в пользу этой гипотезы служит вычисление индекса Виттена

[11], равного точно  $N$  и определяющего число вакуумных состояний в теории. Тем не менее, хотя есть уверенность, что в теории возникает конденсат  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ , стандартные инстантонные расчеты дают нулевой вклад в  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  и могут обеспечить нулевое значение

лишь коррелятора  $\langle \prod_i^N \bar{\psi}\psi(x_i) \rangle \neq 0$  [12]. Причина этого факта кроется в том, что, как легко усмотреть из (1), инстантон характеризуется  $2N$ -фермионными нулевыми модами. В тоже время  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  может «поглотить» лишь две из них, что и приводит к тривиальному занулению инстантонного вклада в  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ .

Естественно ожидать (и это подтверждает опыт работы с группой  $SU(2)$  [1, 2]), что самодуальное решение с  $Q=1/N$  будет обладать точно двумя нулевыми модами и поэтому сможет обеспечить ненулевое значение  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ . Именно этот факт является основной мотивировкой введения в теорию торонов\*).

План работы следующий. В разделе 2 формулируется  $CP^{N-1}$ -теория и обсуждаются различные способы описания решений с дробными  $Q$ . В разделе 3 получено уравнение на моды, описывающие квантовые флуктуации в окрестности классического решения. Раздел 4 несет важную смысловую нагрузку — в нем описаны требования, предъявляемые к модам. Эти требования основаны на достаточно общих принципах, таких как теорема индекса ARS [3]. Именно эти требования, как показано в разделе 5, выделяют вполне определенные дробные значения  $Q \sim 1/N$ , обеспечивая устойчивость соответствующих решений и дают ненулевой вклад в  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ .

## 2. $CP^{N-1}$ -МОДЕЛЬ. ТОРОНЫ

Цель настоящего раздела — описание торонного решения. Для этого достаточно обсудить уравнения дуальности и лагранжиан обычной (не суперсимметричной)  $CP^{N-1}$ -модели. Модификация, связанная с введением фермионов будет рассмотрена в следующих разделах. В терминах единичного комплексного  $N$ -компонентного спинора  $n_\alpha$ ,  $\alpha=1, \dots, N$ , преобразующегося по фундаментальному

\* В настоящей работе мы сохраняем термин «торон», введенный в [7] и эксплуатировавшийся в [1, 2]. Этим мы подчеркиваем тот факт, что решение минимизирует действие и имеет топологический заряд  $Q=1/N$ , т. е. обладает всеми свойствами, присущими торону [7].

представлению группы  $SU(N)$ , действие, топологический заряд и уравнения дуальности имеют следующий вид [8, 9, 13]:

$$S = \frac{N}{2f} \int d^2x |D_\mu n_\alpha|^2; \quad D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu; \quad A_\mu = -i\bar{n}_\alpha \partial_\mu n_\alpha; \quad \mu = 1, 2;$$

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \varepsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu}; \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu; \quad \bar{n}_\alpha n_\alpha = 1; \quad \alpha = 1, \dots, N; \quad (2)$$

$$(D_\mu n_{\kappa\lambda})_\alpha = i\varepsilon_{\mu\nu} (D_\nu n_{\kappa\lambda})_\alpha.$$

Здесь  $A_\mu$ ,  $\mu = 1, 2$ , — вспомогательное калибровочное поле. Легко убедиться, что, кроме глобальной  $SU(N)$ -симметрии, лагранжиан также инвариантен относительно локальных  $U(1)$ -калибровочных преобразований:

$$n'_\alpha = e^{i\theta} n_\alpha, \quad A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \theta. \quad (3)$$

Расположим классическое решение в  $SU(2)$ -подгруппе, определяемой индексами  $\alpha = 1, 2$ . Тогда легко убедиться, что уравнения самодуальности (2) автоматически выполняются для произвольной аналитической функции  $p_\alpha(z)$ :

$$(n_\alpha)_{\kappa\lambda} = \frac{p_\alpha(z)}{|p_\alpha|}, \quad |p|^2 = \bar{p}_\alpha p_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \quad z = x_1 + ix_2. \quad (4)$$

Из определения  $Q$  (2) легко усмотреть, что топологический заряд определяется фазой, приобретаемой спинором  $n_\alpha$  при обходе по кругу большого радиуса:

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \varepsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \oint_{|x| \rightarrow \infty} A_\mu dx_\mu = \frac{1}{2\pi} \oint \partial\varphi, \quad (5)$$

$$n(x \rightarrow \infty) = n_0 e^{i\varphi}, \quad n_0 = \text{const}, \quad A_\mu(x \rightarrow \infty) = \partial_\mu \varphi.$$

Стандартному инстантону с  $Q=1$  отвечает функция  $p_\alpha(z)$ :

$$p_\alpha = u_\alpha \rho + v_\alpha (z - a), \quad u_\alpha \bar{v}_\alpha = 0, \quad (6)$$

$$|\rho| = (|\rho|^2 + |z - a|^2)^{1/2}, \quad \bar{u}_\alpha u_\alpha = \bar{v}_\alpha v_\alpha = 1,$$

выраженная через единичные  $u_\alpha$ ,  $v_\alpha$ -орты из выбранной нами подгруппы  $SU(2)$ . Действительно, так как  $p_\alpha(z)$  зависит лишь от  $z$ , уравнения дуальности выполнены автоматически. Кроме того, при обходе по большому контуру спинор  $n_\alpha$  приобретает фазу  $2\pi$ , что, в соответствии с (5), отвечает  $Q=1$ .

Теперь мы подготовлены, следуя логике работ [1, 2], описать самодуальное решение определенное на  $N$  римановых поверхностях и обладающее  $Q=1/N$ . Как и для  $O(3)\sigma$ -модели (эквивалентной  $CP^{N-1}$ -теории с  $N=2$ )<sup>\*</sup>, решение определяется с помощью предельного перехода  $\Delta \rightarrow 0$ , отвечающего регуляризации фиксированных точек орбифолда, см. ниже:

$$p_\alpha = u_\alpha \Delta^{1/N} + v_\alpha (z - a)^{1/N}, \quad \Delta \rightarrow 0, \quad S_{\text{кл}} = \frac{N\pi}{f} Q = \frac{\pi}{f},$$

$$|p| = (|\Delta|^{2/N} + |z - a|^{2/N})^{1/2}, \quad Q = 1/N. \quad (7)$$

Характерной чертой решения (7), как и в случаях [1, 2], является существование разреза. Таким образом, мы приходим к задаче об описании системы, заданной на многообразии с границей, см. рис. 1.

Если положить  $\Delta=0$  изначально, то  $(n_\alpha)_{\kappa\lambda} = v_\alpha \exp\left\{\frac{i\theta}{N}\right\}$ , что, в соответствии с (3), отвечает калибровочному повороту чисто вакуумного решения. На первый взгляд, это означает, что такое решение не может вызвать никаких физических эффектов. Опыт работы с  $O(3)\sigma$ -моделью [1] и  $SU(2)$ -калибровочной теорией [2], так же, как и проведенный ниже анализ, показывает, что это не так. Мы убедимся, что в суперсимметричной  $CP^{N-1}$  модели решение (7) при  $\Delta \rightarrow 0$  обеспечивает ненулевое значение кирального конденсата.

В дальнейшем, без ограничения общности положим  $a=0$ ,  $\Delta=1$ . Тем самым мы поместили торон в начало координат и измеряем все величины в масштабе параметра  $\Delta$ . Зависимость от  $\Delta$  может быть легко восстановлена в окончательных выражениях из соображений размерности.

Несколько слов об интерпретации торонного (см. сноску на стр. 5) решения<sup>\*\*</sup>). Для конкретности рассмотрим случай  $N=2$ . Конформно отобразим многообразие с разрезом (рис. 1) на диск радиусом  $R$  (рис. 2):

$$\omega = R \frac{1+i\bar{z}}{1-i\bar{z}}, \quad z = \bar{z}^2. \quad (8)$$

<sup>\*</sup>) Эквивалентность с  $O(3)\sigma$ -моделью проверяется с помощью соотношений:  $n^a = \bar{n} \sigma^a n$ , где  $\sigma^a$  — обычные матрицы Паули, а  $n^a$  — вещественный единичный вектор, характеризующий динамику  $O(3)\sigma$ -модели.

<sup>\*\*</sup>) Автор выражает благодарность А. Морозову и А. Рослому за объяснение этой точки зрения на решения с дробным топологическим зарядом.

В переменных  $\omega$  физическое пространство отвечает внутренности диска с радиусом  $R$ . Так что, определив теорию на диске и взяв предел  $R \rightarrow \infty$  в конце вычислений, мы приходим к исходной формулировке теории на двумерном евклидовом пространстве. В такой интерпретации торонное решение «размазано» по всему пространству и в этом смысле сильно напоминает решение [7].

Можно поступить иначе и сделать конформное отображение на внешность круга с радиусом  $\Delta \rightarrow 0$ . В этом случае торонное решение может интерпретироваться как точечный дефект (при  $\Delta \rightarrow 0$ ). Так как лагранжиан (2) инвариантен относительно конформных преобразований, то величина торонного действия  $S_{\text{кл}} = \pi/f$  не зависит от величин размерных параметров  $\Delta, R$ .

Таким образом, описание самодуального решения с дробным топологическим зарядом на многообразии с границей не представляет особых проблем. Вопросы возникают в другом месте — является ли это решение стабильным относительно квантовых флуктуаций? Является ли торонный вклад в  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  конечным после взятия предела  $\Delta \rightarrow 0$  (или  $R \rightarrow \infty$ )? Опережая события, отметим, что, хотя на рассматриваемых многообразиях с границей можно построить решения с любым топологическим зарядом, устойчивыми оказываются лишь определенные значения  $Q \sim 1/N$ .

Существует альтернативная точка зрения на торонное решение. Она связана с компактификацией комплексной плоскости  $\tilde{z}$  в сферу и отождествлением соответствующих точек, см. подробнее Приложение работы [1]. Сконструированное таким образом многообразие называется орбифолдом. Мы не будем здесь подробно останавливаться на этом вопросе, так как технически более удобно работать с исходным многообразием рис. 1. Анализ на диске вынесен в Приложение.

Итак, для ответа на поставленные выше вопросы необходимо вычислить квантовые флуктуации на фоне классического решения и определить торонную меру. Рассмотрению этих вопросов и посвящены следующие разделы.

Подведем итог. Стандартное инстантонное решение определяется на компактном многообразии без границы (сфера). Торонное решение может быть определено только на многообразии с границей. Причем, все характерные размеры  $z$ , определяющие физические величины (действие и т. д.), характеризуются внешним параметром  $\Delta \rightarrow 0$ . Так что торонное решение может пониматься как точечный (при  $\Delta = 0$ ) дефект, регуляризованный таким образом, что уравнения самодуальности выполнены и при конечных значе-

ниях  $\Delta$ . Как мы увидим ниже, такая регуляризация точечного дефекта обеспечивает конечное значение  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  при  $\Delta \rightarrow 0$ . Кроме того, в асимптотически свободных теориях ( $CP^{N-1}$ -модели принадлежат к их числу), когда характерные значения  $z \sim \Delta \rightarrow 0$ ,  $g(z \sim \Delta \rightarrow 0) \rightarrow 0$ , стандартное квазиклассическое вычисление, основанное на торонном решении, полностью контролируемо.

### 3. ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ФЛУКТУАЦИЙ В ПОЛЕ ТОРОНА

Как обычно, для квазиклассического вычисления необходимо разложить поле  $n_\alpha$  в окрестности классического решения  $(n_\alpha)_{\text{кл}}$ . Сохраняя лишь квадратичные члены, приходим к выражению [12, 14—16]

$$S = S_{\text{кл}} + \int d^2x \delta n_\alpha \overline{M_{\alpha\beta}} \delta n_\beta, \quad \partial = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2) - \\ - M_{\alpha\beta} = |p| \partial \frac{1}{|p|^2} \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{p_\alpha \bar{p}_\beta}{|p|^2} \right) \bar{\partial} |p|, \quad \overline{\delta n_\alpha p_\alpha} = 0. \quad (9)$$

Здесь  $\delta n_\alpha$  — флуктуация, описывающая малое отклонение от классического решения, а  $p_\alpha(z)$  — торонное решение, определяемое выражением (7). Дополнительное условие,  $\delta n_\alpha \bar{p}_\alpha = 0$ , выписанное в (9), обусловлено связью  $n_\alpha \bar{n}_\alpha = |(n_\alpha)_{\text{кл}} + \delta n_\alpha|^2 = 1$ . Далее, следуя [16], рассмотрим вначале флуктуации

$$\delta n_\alpha = \omega_\alpha G, \quad \alpha = 3, 4, \dots, N, \quad \omega_\alpha \bar{u}_\alpha = 0, \quad \omega_\alpha \bar{v}_\alpha = 0, \quad (10)$$

расположенные вне выделенной  $SU(2)$ -подгруппы, накрываемой ортами,  $u_\alpha, v_\alpha$  (7). Здесь  $\omega_\alpha$  — единичный постоянный вектор, ортогональный обоим векторам  $u_\alpha, v_\alpha$ . Отдельно рассмотрим флуктуации

$$\delta n_\alpha = t_\alpha F, \quad \alpha = 1, 2, \quad t_\alpha = \frac{v_\alpha \bar{\Delta}^{1/N} - u_\alpha \bar{z}^{1/N}}{|p|}, \\ t_\alpha \bar{t}_\alpha = 1, \quad t_\alpha \bar{p}_\alpha = 0, \quad t_\alpha \bar{\omega}_\alpha = 0 \quad (11)$$

из  $SU(2)$ -подгруппы, содержащей классическое решение (7), и ортогональное последнему. Таким образом, дополнительное требование  $\delta n_\alpha (\bar{n}_\alpha)_{\text{кл}} = 0$ , обусловленное связью, выполнено и задача

свелась к уравнениям на скалярные функции  $G$  (10) и  $F$  (11). Решающей для дальнейшего анализа является следующая замена переменных:

$$\eta = \frac{|z|^{2/N} - 1}{|z|^{2/N} + 1}, \quad \varphi = \arctg \frac{x_1}{x_2}, \quad -1 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (12)$$

Физический смысл  $\eta$ ,  $\varphi$  очевиден — это соответствующие координаты сферы, полученной компактификацией комплексной плоскости  $z$  с границей (рис. 1). В переменных  $\eta$ ,  $\varphi$  вопрос диагонализации интересующей нас квадратичной формы (9) сводится к хорошо известным уравнениям для  $d$ -функций. Действительно, подставляя соотношения (10—12) в (9), приходим к следующему выражению для квадратичной формы:

$$S = S_{\text{кл}} + \int_{-1}^1 d\eta \int_0^{2\pi} d\varphi \bar{G} \left\{ -(1-\eta^2) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2\eta \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{1}{1-\eta^2} \left[ N^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{iN(1+\eta)\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{2}(1+\eta) \right] - \frac{3}{4} \right\} G + \quad (13a)$$

$$+ \int_{-1}^1 d\eta \int_0^{2\pi} d\varphi \bar{F} \left\{ -(1-\eta^2) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2\eta \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{1}{1-\eta^2} \left[ N^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - 2iN(1+\eta) \frac{\partial}{\partial \varphi} - 2(1+\eta) \right] - 2 \right\} F. \quad (13b)$$

Отметим, что стандартное требование однозначности функций  $F$ ,  $G \sim \exp(il\varphi)$ ,  $l=0, 1, \dots$ , не является обязательным, так как наше исходное многообразие, рис. 1, имеет границу при  $\varphi=0, 2\pi$ . Так что точки  $\varphi=0$  и  $\varphi=2\pi$  не отождествлены. Однако, как видно из выражения (7), торонное решение определено на римановой поверхности, содержащей  $N$  листов с соответствующей склейкой  $N$ -го листа с первым и с соответствующим отождествлением. Это в точности обеспечивает зависимость  $F$ ,  $G$ -функций от  $\varphi$  в виде

$$F, G \sim \exp(im\varphi/N), \quad m=0, 1, \dots \quad (14)$$

Как будет видно ниже, поведение (14) в точности обеспечивает существование регулярных решений. Можно было бы поступить иначе — потребовать регулярности  $F$ ,  $G$ -функций. Это с необходимостью привело бы к (14). Итак, с учетом (13), (14), мы приходим к следующей задаче на собственные значения:

$$\left\{ -(1-\eta^2) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2\eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{1}{1-\eta^2} \left[ \left( m^2 - m + \frac{1}{2} \right) - \eta \left( m - \frac{1}{2} \right) \right] - \frac{3}{4} \right\} G = \lambda_G G, \quad (15a)$$

$$\left\{ -(1-\eta^2) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2\eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{1}{1-\eta^2} \left[ (m^2 - 2m + 2) - \eta(2m - 2) \right] - 2 \right\} F = \lambda_F F. \quad (15b)$$

Регулярные решения уравнений (15) хорошо известны и описаны, например в [17]. Результат имеет вид

$$G \sim \exp\left(i \frac{m}{N} \varphi\right) \cdot d_{m-1/2, -1/2}^{j+1/2}(\eta), \quad \lambda_G = j(j+2), \quad m, j=0, 1, \dots \quad (16a)$$

$$F \sim \exp\left(i \frac{m}{N} \varphi\right) \cdot d_{-m, 1}^{j+1}(\eta), \quad \lambda_F = j(j+3), \quad m, j=0, 1, \dots \quad (16b)$$

Отметим, что собственные значения (16) в точности совпадают с соответствующими значениями, полученными в инстантонных расчетах [16]. Однако степень вырождения  $g_j$  каждой из мод в этих двух случаях различается\*. Аналогичное явление возникало и в  $O(3)\sigma$ -модели [1], там же отмечались важные следствия этого различия. Именно, дополнительные требования, которые будут обсуждаться в следующем разделе, выделяют из всей совокупности решений (16) допустимые, и определяют степень вырождения каждой из мод. Как обычно, при вычислении функционального интеграла, необходимо отнормироваться на вакуумное решение, направленное, для определенности, по орту  $v_\alpha$ . В этом случае моды удовлетворяют стандартному уравнению для полиномов Лежандра:

$$\left[ -(1-\eta^2) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2\eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{m^2}{1-\eta^2} \right] \delta n_\alpha = \lambda \delta n_\alpha, \quad (17)$$

$$\delta n_\alpha \sim (u_\alpha, \omega_\alpha) \exp\left\{ i \frac{m}{N} \varphi \right\} P_{jm}(\eta), \quad \bar{u}_\alpha v_\alpha = 0, \quad \bar{\omega}_\alpha v_\alpha = 0$$

с собственными значениями  $\lambda = j(j+1)$ .

\* В противном случае, ввиду совпадения собственных значений  $\lambda_j$ , торонный и инстантонный детерминанты  $\sim \exp\{a^2 x \delta \bar{n}_\alpha M_{\alpha\beta} \delta n_\beta\} \sim \prod (\lambda_j)^{-g_j/2}$  тождественно совпадали бы, что, не имеет места.

Прежде чем вплотную заняться отбором допустимых мод из перечисленных в (16), (17), напомним вкратце некоторые результаты, относящиеся к фермионному детерминанту.

В квазиклассическом приближении добавка к действию определяется выражением [12]

$$\Delta S_f = \int d^2x \bar{\psi}_\alpha L_{\alpha\beta} \psi_\beta, \quad \psi_\alpha(\bar{n}_\alpha)_{\text{кл}} = 0, \\ L_{\alpha\beta} = i \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{p_\alpha \bar{p}_\beta}{|p|^2} \right) \begin{pmatrix} 0 & |p| \partial(1/|p|) \\ (1/|p|) \bar{\partial} |p| & 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Здесь  $\psi_\alpha = \begin{pmatrix} \psi_\alpha^1 \\ \psi_\alpha^2 \end{pmatrix}$  — двухкомпонентный спинор, каждая из компонент которого преобразуется по фундаментальному представлению группы  $SU(N)$ . В дальнейшем нам потребуется следующее важное свойство спинора  $\psi_\alpha$  — собственные функции его верхней компоненты  $\psi_\alpha^1$  в точности удовлетворяют соответствующим бозонным уравнениям (9)\*, и, тем самым, собственные значения оператора  $L$  (18) равны в точности  $\pm \sqrt{\lambda^{F,G}}$ . Действительно, выделяя, как и в бозонном случае, необходимую структуру, обеспечивающую ортогональность классическому решению,

$$\psi_\alpha = \omega_\alpha \begin{pmatrix} G_1 \\ iG_2 \end{pmatrix} + t_\alpha \begin{pmatrix} F_1 \\ iF_2 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

приходим к следующим уравнениям на фермионные моды:

$$\begin{cases} -|p| \partial \frac{1}{|p|} G_2 = \lambda G_1 \\ \frac{1}{|p|} \bar{\partial} |p| G_1 = \lambda G_2 \end{cases} \quad \begin{cases} -|p|^2 \partial \frac{1}{|p|^2} F_2 = \lambda F_1 \\ \frac{1}{|p|^2} \bar{\partial} |p|^2 F_1 = \lambda F_2 \end{cases} \quad (20)$$

Комбинируя (20) легко убедиться, что верхние компоненты  $G_1, F_1$  в точности удовлетворяют уравнениям, определяемым бозонной формой (9) с собственными значениями  $\lambda^2 = \lambda_{F,G}$ ; нижние компоненты  $G_2, F_2$  однозначно восстанавливаются из верхних с помощью (20). Ясно, что двукратное вырождение фермионных мод (наличие решений с  $+\sqrt{\lambda_{F,G}}$ ,  $-\sqrt{\lambda_{F,G}}$ ) является следствием

\* Строго говоря, это утверждение относится только к случаю ненулевых мод. Однако, так как нулевые собственные функции ортогональны всем остальным, то ясно, что и они совпадают с соответствующими бозонными модами.

киральной инвариантности, а совпадение собственных значений, соответственно, следствием суперсимметричности модели. Сокращение вкладов ненулевых мод бозонов и фермионов в функциональный интеграл выглядит теперь совершенно очевидным. Несмотря на это сокращение, необходимо знать (в основном из-за существования нулевых мод, требующих специального рассмотрения), какие именно моды из перечисленных в (16), (17), (19) удовлетворяют всем требованиям. Выработке соответствующих критериев отбора и посвящен следующий раздел.

#### 4. О ТРЕБОВАНИЯХ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫХ К МОДАМ

Проще всего сформулировать критерии отбора мод на примере  $CP^1$ -теории, эквивалентной  $O(3)\sigma$ -модели. В этом случае лагранжиан может быть переписан в форме, содержащей лишь физические степени свободы. Именно, в терминах одного комплексного поля  $\varphi(x_1, x_2)$ , неограниченного связью, лагранжиан  $O(3)\sigma$ -модели представляется в виде

$$S = \frac{1}{f} \int d^2x \frac{|\partial_\mu \varphi|^2}{(1 + \bar{\varphi}\varphi)^2}. \quad (21)$$

Эквивалентность с исходной формулировкой (2) проверяется с помощью соотношения

$$\varphi = \frac{n_2}{n_1}. \quad (22)$$

Здесь  $n_2$  ( $n_1$ ) — величина проекции спинора  $n_\alpha$  на направления  $u_\alpha$  ( $v_\alpha$ ). Кроме того, мы ограничимся анализом лишь нулевых мод по упомянутой выше причине сокращения ненулевых в суперсимметричных теориях. Напомним [1], (7), что в терминах (22) торонному решению отвечает функция  $\varphi(z) = \sqrt{\Delta/z}$ , а уравнение на нулевую моду есть просто условие Коши — Римана:

$$\bar{\partial}(\delta\varphi_0) = 0. \quad (23)$$

Важное условие, ограничивающее этот произвол, связано с требованием конечности, которое для  $O(3)\sigma$ -модели выглядит следующим образом:  $|\delta\varphi_0|^2 / (1 + \bar{\varphi}_{\text{кл}}\varphi_{\text{кл}})^2 \xrightarrow{z \rightarrow 0} \text{const}$  [18]. Это условие, наряду с требованием однозначности на физической плоскости

(или, что то же самое, на одном римановом листе) приводит к существованию лишь одной нетривиальной комплексной нулевой моды  $\delta\varphi_0 \sim 1/z$  [1].

Как эти условия выглядят в формулировке (2), содержащей локальную калибровочную инвариантность и лишние степени свободы? Для ответа на этот вопрос напомним, что количество нетривиальных нулевых мод определяется разностью между числом нулевых мод в поле торона (16б) и в поле вакуума (17). В поле вакуума решение (17)  $\delta n_\alpha \sim u_\alpha P_{00}$  с  $\lambda=0$  отвечает значению  $j=0$ ,  $m=0$ . Так что степень вырождения в данном случае равна  $g_{\text{вак}}=2^*$ . В поле торона нулевой моде  $\lambda_F=0$  (16б),  $j=0$ , отвечают три значения  $m=0, 1, 2$ . Однако только две из перечисленных функций ортогональны на физическом листе (на полной римановой поверхности, содержащей два листа, все три комплексные моды, конечно, ортогональны):

$$\delta n_\alpha \sim t_\alpha F, \quad F \sim d_{11}^+ \sim (1-\eta), \quad (24a)$$

$$t_\alpha = \frac{v_\alpha \sqrt{\Delta} - u_\alpha \sqrt{z}}{|p|}, \quad F \sim d_{-11}^- e^{i\eta} \sim (1+\eta) e^{i\eta}. \quad (24б)$$

Таким образом, из всей совокупности решений (16) мы выделяем систему, ортонормированную на одном физическом листе. Как объяснялось в [1] на примере  $O(3)\sigma$ -модели, это приводит в точности к такому уменьшению степени вырождения  $g_j$  (по сравнению с инстантонным случаем), что мера автоматически сохраняет ренорминвариантный вид.

Другое требование состоит в отсутствии сингулярностей у собственных функций во всей области определения. Именно это условие выделяет из всей совокупности решений лишь регулярные (16), пропорциональные  $d$ -функциям.

Итак, в поле торона имеется 4 нулевых моды (24); в пустом пространстве их 2. Это приводит к существованию лишь  $2=4-2$  нетривиальных нулевых мод в согласии с существованием двух параметров ( $a$ ), описывающих местоположение торона (7) (напомним, что параметр  $\Delta \rightarrow 0$  (7) есть регулятор и не является коллективной переменной).

Теперь убедимся, что обе описанные выше формулировки при-

\* Мы подсчитываем количество вещественных нулевых мод. Решение (17) определено с точностью до комплексной фазы, что и приводит к появлению дополнительного фактора 2.

водят к одинаковому результату для мод. Для этого найдем связь между флуктуациями  $\delta\varphi_0$  в формулировке (21) и  $\delta n_\alpha$  в терминах (2). С помощью соотношения (22) имеем

$$\delta\varphi = \frac{\delta n_2 \cdot (n_1)_{\text{кл}} - \delta n_1 \cdot (n_2)_{\text{кл}}}{(n_1)_{\text{кл}}^2}. \quad (25)$$

Решению (24а) отвечает нулевая мода  $\delta\varphi_0=1$ , а (24б), соответственно,  $\delta\varphi_0 \sim 1/z$ . Что касается моды  $\delta\varphi_0=1$ , то она тривиальна и связана с возможностью вариации граничных условий (аналогичная мода существует и в отсутствие торона, т. е. в вакууме). Другая, нетривиальная  $\delta\varphi_0 \sim 1/z$  мода была уже получена независимым образом.

Урок, который следует извлечь из приведенного выше анализа, состоит в следующем. Мода  $\delta\varphi_0 \sim 1/z$  в формулировке (21) является однозначной. Та же самая мода, но в формулировке (2) с локальной калибровочной инвариантностью не является таковой ( $t_\alpha$  содержит фактор  $\sqrt{z}$ ). Однако инвариантная величина  $\delta n_\alpha \delta n_\alpha$  является однозначной функцией.

Таким образом, требование, которое следует наложить на собственные функции для теорий с лишними степенями свободы (типа калибровочных (2)), состоит в однозначности инвариантных величин. Именно такие величины имеют физический смысл.

То же самое требование может быть понято с совершенно иной точки зрения, а именно, с точки зрения теоремы индекса APS [3] для многообразий с границей. Как известно [3, 19], в этом случае для подсчета числа фермионных нулевых мод необходимо наложить глобальные граничные условия с тем, чтобы оператор (18) удовлетворял условию самосопряженности на многообразии с границей. Так как оператор  $L$  (18) первого порядка, то условие самосопряженности означает возможность интегрирования по частям с отбрасыванием полной производной. Как легко убедиться [3, 19], эта полная производная есть в точности интеграл  $\int_Y dy$  по границе

$Y$  от скалярного произведения некоторых собственных функций оператора (18). Так что глобальные граничные условия имеют вид [3, 19]

$$\psi_\alpha = \begin{pmatrix} \psi_\alpha^1 \\ \psi_\alpha^2 \end{pmatrix}, \quad \int_Y dy \bar{\psi}_\alpha^1 \psi_\alpha^2 + \text{н. с.} = 0. \quad (26)$$



В частности, для многообразия (рис. 1) с границей, определяемой условием  $\varphi=2\pi$ ,  $\varphi=0$ , имеем

$$\int_0^{\infty} dr (\bar{\psi}_\alpha^1 \psi_\alpha^2) |_{\varphi=0} - \int_0^{\infty} dr (\bar{\psi}_\alpha^1 \psi_\alpha^2) |_{\varphi=2\pi} + \text{н. с.} = 0.$$

Более подробно применение теоремы [3] для нашего случая обсуждается в Приложении. Здесь же отметим, что если бы многообразие не имело границы и собственные функции были бы однозначны, то соотношение (26) выполнялось бы автоматически. В рассматриваемом случае условие (26) очень сильное — оно требует, чтобы любые инвариантные величины совпадали бы на берегах разреза, т. е. при  $\varphi=2\pi$  и  $\varphi=0$ . Но это в точности требование, сформулированное выше для бозонных степеней свободы. О том, что фермионные и бозонные степени свободы связаны, уже упоминалось выше, в конце предыдущего раздела. Здесь же мы акцентируем внимание на том, что требование однозначности именно инвариантных величин (а не самих функций) возникает с совершенно иной стороны — из требования самосопряженности оператора и связанного с этим требованием условия (26).

Как уже упоминалось, торонное решение может быть описано на диске (рис. 2) или внешности круга (рис. 3). Соответствующий анализ вынесен в Приложение. Здесь же отметим, что количество нетривиальных фермионных нулевых мод равно двум, как и число бозонных. Это утверждение справедливо, как для диска (см. Приложение), так и для многообразия (рис. 1). Действительно, спинор (19) с нулевой нижней компонентой ( $F_2=G_2=0$ ) и с ненулевой верхней, равной  $F_1 \sim F(\lambda=0)$ ,  $G_1 \sim G(\lambda=0)$  (16), автоматически удовлетворяет уравнениям (20) с собственным значением  $\lambda=0$ .

Таким образом, число нетривиальных бозонных и фермионных нулевых мод совпадает. Это утверждение имеет достаточно общую основу [18].

В виде приложения рассмотренных выше требований, опишем нулевые моды для группы  $SU(3)$  с  $Q=1/3$ . Как мы убедимся, для других дробных значений  $Q$  в группе  $SU(3)$  невозможно удовлетворить обсуждавшимся выше условиям. Этот факт мы интерпретируем в следующем разделе как неустойчивость соответствующих конфигураций. Тем самым вид группы  $SU(3)$  однозначно фиксирует допустимое значение  $Q=1/3$ . Результат тривиально обобщается на любое  $N$ .

Начнем с анализа в пустом пространстве (17). Количество нулевых мод, отвечающих значению  $j=0$ , равно  $2(N-1)_{N=3}=4^*$ . Теперь рассмотрим моды в поле торона из выделенной  $SU(2)$ -подгруппы ( $F$ -функции (16б)). В этом случае легко убедиться, что требованиям ортогональности и однозначности скалярных произведений на физическом листе удовлетворяет лишь одна комплексная (2 вещественных) мода из трех ( $m=0, 1, 2$ ). Ситуация с состояниями, направленными вдоль орта  $\omega_3$  ( $G$ -функции (16а)), менее тривиальна. Значению  $\lambda=0$  отвечает  $j=0, m=0, 1$  (16а). Легко убедиться, что из этих решений можно построить две комбинации:

$$\begin{aligned} \delta n_3^I &\sim \omega_3 d_{-1/2}^{1/2} \sim \omega_3 \sqrt{1-\eta}, \\ \delta n_3^{II} &\sim \omega_3 \left[ d_{-1/2}^{1/2} + \frac{8}{3\sqrt{3}} \exp\left(\frac{i2\pi}{3}\right) d_{1/2}^{1/2} \exp\left(i\frac{\varphi}{3}\right) \right] \sim \\ &\sim \omega_3 \left[ \sqrt{1-\eta} + \frac{8}{3\sqrt{3}} \sqrt{1+\eta} \exp\left\{i\left(\frac{2\pi+\varphi}{3}\right)\right\} \right], \end{aligned} \quad (27)$$

удовлетворяющие всем необходимым требованиям. Именно, моды (27) ортогональны между собой:

$$\int_{-1}^1 d\eta \int_0^{2\pi} d\varphi \delta n_3^I \overline{\delta n_3^{II}} = 0 \quad (28)$$

и однозначны на физическом листе:

$$\begin{aligned} |\delta n_3^I|^2 &\sim (1-\eta), \\ |\delta n_3^{II}|^2 &\sim (1-\eta) + \left(\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)^2 (1+\eta) + \frac{16}{3\sqrt{3}} \cos\left(\frac{2\pi+\varphi}{3}\right) \cdot \sqrt{1-\eta^2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Действительно, единственная нетривиальная функция от угла  $\varphi$  входит в виде  $\cos\left(\frac{2\pi+\varphi}{3}\right)$ , имеющего одинаковый предел при  $\varphi \sim \varepsilon \rightarrow 0$  и  $\varphi \sim 2\pi - \varepsilon$ . Таким образом, имеется 4 нулевых моды (27), направленных по орту  $\omega_3$ . Вместе с двумя нулевыми модами из группы  $SU(2)$  это обеспечивает 6 нулевых состояний в поле торона. Нетривиальных из них лишь  $2=6-4$ , что связано с существованием 4 вакуумных мод (см. выше). Это число (два)

\* Напомним, что появление общего фактора 2 связано с подсчетом числа вещественных (не комплексных) мод.

согласуется, конечно, с наличием двух параметров ( $a$ ), описывающих местоположение торона (7), Количество нетривиальных фермионных нулевых мод также равно двум. Причем, их явные выражения по упомянутой выше причине, в точности совпадают с видом бозонных нулевых мод.

Отметим, что существование ровно двух нетривиальных фермионных нулевых мод есть следствие теоремы индекса для многообразия с границей [3, 19]:

$$n_+ - n_- = 2|NQ|. \quad (30)$$

Здесь скобки  $[\ ]$  означают целую часть числа. Интерес представляет лишь конкретная реализация этой теоремы.

В заключение настоящего раздела опишем коротко ситуацию, возникающую при увеличении числа  $N$ . При переходе от  $N=3$  к  $N=4$  появляются два новых момента: во-первых, нулевой моде отвечает фаза  $\exp\{i\varphi/4\}$  (16а) вместо  $\exp\{i\varphi/3\}$  для  $SU(3)$ -случая; во-вторых, появляются новые моды вместе с появлением орта  $\omega_4$ . Оба этих факта приводят к тому, что имеются две (нетривиальных от угла  $\varphi$ ) функции:  $\sim \cos\left(\frac{2\pi+\varphi}{4}\right)$  и  $\cos\left(\frac{4\pi+\varphi}{4}\right)$ , из которых можно построить комбинацию  $\sim \cos\left(\frac{2\pi+\varphi}{4}\right) + \cos\left(\frac{4\pi+\varphi}{4}\right)$ , однозначную на берегах разреза (при  $\varphi \rightarrow 0, \varphi \rightarrow 2\pi$ ). Ситуация является общей — с ростом номера  $N$  и уменьшением угла фазы  $\exp\{i\varphi/4\}$  возникает дополнительное слагаемое  $\sim \cos\left(\frac{2\pi k + \varphi}{N}\right)$ , связанное с появлением орта  $\omega_N$ . Это и обеспечивает существование двух нетривиальных нулевых мод (бозонных и фермионных) в согласии с существованием двух параметров  $a$ , описывающих местоположение торона. Эти моды удовлетворяют всем необходимым требованиям.

Подведем итог. С совершенно разных точек зрения (теорема индекса [3] и анализ  $CP^1$ -модели в терминах неограниченного связью поля  $\varphi$ ) были выработаны критерии отбора допустимых мод. Оказалось, что соответствующим требованиям в группе  $SU(N)$  удовлетворяют только конфигурации с  $Q \sim 1/N$ . Кроме того, эрмитовость гамильтониана, равенство калибровочно-инвариантных величин на разрезе, существование ортонормированной системы собственных функций — все эти вопросы оказываются взаимосвязанными при формулировке теории на многообразии с гра-

ницей. Кроме перечисленных выше свойств, выделенность конфигураций с  $Q \sim 1/N$  проявляется в их устойчивости. Этому вопросу и посвящен следующий раздел.

## 5. УСТОЙЧИВОСТЬ ТОРОНОВ. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОНДЕНСАТА $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$

Цель настоящего раздела — привести дополнительные аргументы в пользу выделенности  $Q \sim 1/N$  по сравнению с другими дробными значениями  $Q$ . Именно, мы убедимся, что конфигурации полей с такими значениями  $Q$  устойчивы, т. е. квантовые флуктуации не «расшатывают» классического решения и сохраняют топологический заряд  $Q$  неизменным. С физической точки зрения это утверждение совершенно прозрачно. Дело в том, что топологический заряд есть полная производная от некоторой величины и определяется значениями функции на границе. Поэтому отличие  $Q$  от классического значения  $Q_{\text{кл}}$  может быть связано только с флуктуациями, терпящими скачок на границе. Но в предыдущем разделе мы выяснили, что требование однозначности физических величин на разрезе, сохраняющее  $Q$ , может быть выполнено в точности для решений с  $Q=1/N$ . Таким образом, именно эти решения устойчивы по отношению к квантовым флуктуациям.

Для того, чтобы продемонстрировать это утверждение технически, требуется вернуться к определению топологического заряда (2) и записать его в виде

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \varepsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\frac{i}{2\pi} \int d^2x \overline{D_\mu n} D_\nu n \varepsilon_{\mu\nu} = \frac{1}{\pi} \int d^2x (|Dn|^2 - |\bar{D}n|^2),$$

$$D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu, \quad D = \frac{1}{2}(D_1 - iD_2). \quad (31)$$

Далее, параметризуем поле  $n_\alpha$  в форме, точно сохраняющей норму  $\bar{n}_\alpha n_\alpha = 1$ :

$$n_\alpha = \frac{p_\alpha}{|p|} \sqrt{1 - |\delta n_\alpha|^2} + \delta n_\alpha,$$

$$\bar{n}_\alpha n_\alpha = 1, \quad p_\alpha \delta n_\alpha = 0. \quad (32)$$

Здесь  $p_\alpha$  — классическое решение (7),  $\delta n_\alpha$  — малая флуктуация, ортогональная классическому решению. Подставляя (32) и (31) и сохраняя лишь квадратичные по  $\delta n_\alpha$  слагаемые, приходим к следу-

ющему выражению для  $\delta Q$ :

$$Q = 1/N + \delta Q,$$

$$\delta Q \sim \int d^2x \left\{ -\bar{\partial} \left[ \frac{|p| \delta n_\alpha}{|p|^2} \bar{\partial}(\delta n_\alpha |p|) \right] - \partial \left[ \frac{|p| \delta n_\alpha}{|p|^2} \bar{\partial}(\delta n_\alpha |p|) \right] + \right. \\ \left. + 2\partial \left[ \delta n_\alpha \bar{\partial}(\delta n_\alpha) \right] \right\}. \quad (33)$$

В дальнейшем, для конкретности, ограничимся случаем SU(3)-группы, подробно рассмотренным выше. Ясно, что наиболее опасными (с точки зрения возможности получить  $\delta Q \neq 0$ ) являются две дополнительные нулевые моды (27), имеющие нетривиальную зависимость от угла  $\varphi$ . Так как эти моды удовлетворяют условию  $\bar{\partial}(\delta n_\alpha |p|) = 0$ , то выражение  $\delta Q$  (33) может быть упрощено и записано в виде

$$\delta Q \sim \int d^2x \left\{ -\bar{\partial} \left[ \frac{1}{|p|^2} \bar{\partial}(|p|^2 |\delta n_\alpha|^2) \right] + 2\partial \left[ \frac{1}{|p|} \bar{\partial}(|p| |\delta n_\alpha|^2) \right] \right\}. \quad (34)$$

Как и следовало ожидать,  $\delta Q$  представляется в виде полной производной от некоторой величины. Если эта величина однозначна на берегах разреза, то  $\delta Q = 0$ . Но именно этому требованию удовлетворяют собственные функции (29) в поле торона с  $Q = 1/3$ . Для других дробных значений  $Q$  упомянутое выше требование не может быть выполнено, что и приводит к ненулевому значению  $\delta Q$  (34), т. е. к неустойчивости. Аналогичное явление имеет место и для O(3) $\sigma$ -модели [1]. Именно, в терминах поля  $\varphi$  (22) неустойчивость проявляется как нарушение требования регулярности собственных функций.

Убедившись, что найденные выше моды удовлетворяют всем требованиям, перечисленным в разделе 4, легко вычислить торонную меру и конденсат  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  в суперсимметричной CP<sup>N-1</sup>-модели. Как уже объяснялось, вклад ненулевых мод точно сокращается и поэтому требуется анализ лишь нулевых мод, проведенный выше.

Напомним [12, 14–16], что при вычислении функционального интеграла  $Z$  в квазиклассическом приближении, каждая нетривиальная бозонная нулевая мода приводит к фактору  $M_0 dx_0$ . Здесь  $M_0$  — ультрафиолетовое обрезание,  $dx_0$  — интеграл по коллективной переменной, соответствующий этой нулевой моде. Каждая фермионная нулевая мода сопровождается множителем  $d\varepsilon/\sqrt{M_0}$ , где  $d\varepsilon$  — фактор, связанный с интегрированием по коллективной Грассмановой координате.

С учетом вышеизложенного торонная мера принимает следующий вид:

$$Z_{\text{торон}} \sim M_0^2 d^2a \left( \frac{d^2\varepsilon}{M_0} \right) \exp \left\{ -\frac{\pi}{f(M_0)} \right\} = m d^2a d^2\varepsilon, \quad (35)$$

$$m \equiv M_0 \exp \left\{ -\frac{\pi}{f} \right\}.$$

Здесь фактор  $M_0^2 d^2a$  обусловлен двумя бозонными, а фактор  $d^2\varepsilon/M_0$  двумя фермионными нулевыми модами, упомянутыми выше. Множитель  $\exp\{-\pi/f\}$  есть вклад классического действия торона (7), параметр  $a$  описывает местоположение торона. Как и для инстантонных расчетов [12] выражение (35) имеет точно ренорминвариантный вид. Легко проследить это явление — вместе с уменьшением действия уменьшается количество нулевых мод (удовлетворяющих требованиям раздела 4), что точно восстанавливает ренорминвариантный ответ.

Теперь все подготовлено для вычисления кирального конденсата  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ . Подставляя вместо  $\psi$  их нулевые моды и учитывая, что интегрирование по коллективным фермионным переменным в (35) в точности равно  $\int \varepsilon \bar{\varepsilon} d\varepsilon d\bar{\varepsilon} = 1$ , убеждаемся, что

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle \sim m \int d^2a \bar{\psi}_0(x-a) \psi_0(x-a) = m. \quad (36)$$

На последнем этапе мы воспользовались значением нормировочного интеграла для нулевой моды, после чего сняли регуляризацию, положив  $\Delta = 0$ .

Как известно [9], соотношение (36) означает спонтанное нарушение дискретной киральной симметрии. Отметим, что инстантон может обеспечить ненулевое значение лишь коррелятора  $\langle \prod_i \bar{\psi}\psi(x_i) \rangle$  [12] в соответствии с тем, что решение с  $Q = 1$  меняет киральный заряд  $\Delta Q_5$  на  $2N$  единиц (1). Торонное решение с  $Q = 1/N$  меняет  $\Delta Q_5$  (1) на две единицы и имеет две нетривиальных нулевых моды. Так что соответствующий вакуумный переход обязательно сопровождается рождением пары  $\bar{\psi}\psi$ , что и продемонстрировано явным расчетом (36).

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основная цель работы состояла в описании самодуального решения с  $Q=1/N$  на многообразии с границей и анализе физических следствий, связанных с этим решением на примере суперсимметричной  $CP^{N-1}$ -модели. Были приведены аргументы в пользу интерпретации торона, как точечного дефекта, регуляризованного специальным образом. Причем такая регуляризация «уважает» уравнения дуальности и обеспечивает ненулевое значение  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  после снятия регуляризации ( $\Delta \rightarrow 0$ ).

Другой круг вопросов, рассматривавшихся в работе, связан с выработкой критерия отбора допустимых мод в поле торона. Именно, было сформулировано требование самосопряженности гамильтониана на многообразии с границей. Это обеспечило однозначность калибровочно-инвариантных величин на берегах разреза. В свою очередь это означает выполнение глобальных граничных условий для фермионных мод [3] и устойчивость классической конфигурации для бозонных. Именно этот принцип выделил допустимые значения  $Q \sim 1/N$ .

Мы надеемся, что сформулированный принцип является достаточно общим и определит, в частности, допустимые значения дробного топологического заряда в SYM с произвольной калибровочной группой [20]. Именно это допустимое значение  $Q$  обеспечит ненулевое значение фермионного конденсата, точно так же, как это происходит в рассмотренных выше  $CP^{N-1}$ -моделях и в теориях, основанных на группе  $SU(2)$  [1, 2].

Последнее замечание касается справедливости квазиклассических вычислений основанных на торонном решении. В этом случае, в отличие от инстантонных расчетов [12], все характерные масштабы  $x^2$  определяются внешним параметром  $\Delta^2 \rightarrow 0$ . Здесь константа связи  $f(x \sim \Delta \sim 0) \rightarrow 0$  мала и квазиклассическое приближение оправдано. В инстантонных вычислениях конденсата  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  вклад дают не только интантоны малых размеров ( $\rho \rightarrow 0, f(\rho) \rightarrow 0$ ), но и больших ( $\rho \rightarrow \infty$ ), где квазиклассические формулы не контролируются.

Таким образом, на основе торонного решения был найден некоторый вклад в  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ . Причем, все вычисления определяются малыми расстояниями и находятся под контролем. Вопрос — является ли найденный вклад полным ответом или лишь его частью — остался невыясненным, см. обсуждение в [1, 2].

В заключение автор выражает благодарность А.Ю. Морозову и А.А. Рослому за полезные обсуждения.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Цель настоящего Приложения — на примере  $CP^1$ -теории описать торонное решение, сформулированное на диске (рис. 2). Многообразие такого сорта с границей в виде кольца более привычны (чем многообразия рис. 1) и подробно обсуждались в литературе [19] при анализе теоремы индекса [3]. Поэтому наша задача сос-

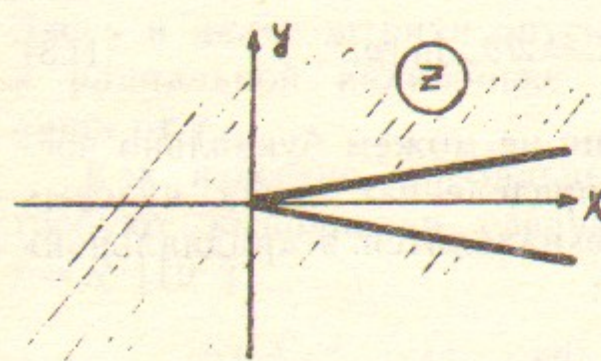


Рис. 1.

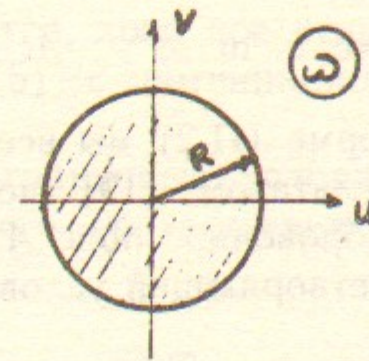


Рис. 2.

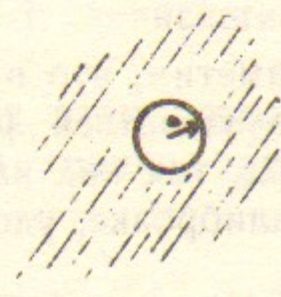


Рис. 3.

тоит лишь в применении общих результатов [19] к конкретному случаю торонного решения (7) с  $N=2$ . Мы убедимся ниже, что при наложении глобальных граничных условий [3, 19] торонное решение, сформулированное на диске, характеризуется в точности одной комплексной (двумя вещественными) нулевой модой, в согласии с результатом раздела 4.

Стартуем с дираковского оператора (18). В интересующем нас случае группы  $SU(2)$  с учетом (19), (20) запишем исходное действие в виде

$$\int dz d\bar{z} (\bar{F}_1 \bar{F}_2) \begin{pmatrix} 0 & L^+ \\ L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \int d^2z (\bar{F}_1 L^+ F_2 + \bar{F}_2 L F_1), \quad (\text{П.1})$$

$$L = \bar{\partial} + \bar{\partial} \ln |p|^2, \quad L^+ = -\partial + \partial \ln |p|^2, \quad |p|^2 = 1 + |z|^2.$$

Далее, сделаем конформное отображение (8) и определим новый спинор  $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ , связанный со старым посредством соотношений:

$$f_2 = F_2 \cdot \left( \frac{d\bar{z}}{d\bar{\omega}} \right)^{1/2}, \quad f_1 = F_1 \cdot \left( \frac{dz}{d\omega} \right)^{1/2}.$$

Таким образом, мы приходим к стандартному оператору Дирака, определенному в терминах  $\omega$  ( $\omega$  — координата диска, рис. 2):

$$\int d^2\omega (\bar{f}_1 L_\omega^+ f_2 + \bar{f}_2 L_\omega f_1), \quad |p|^2 = 1 + \left| \frac{\omega + R}{\omega - R} \right|^2,$$

$$L_\omega^+ = -\partial_\omega + \partial_{\bar{\omega}} \ln |p|^2, \quad L_\omega = \bar{\partial}_\omega + \bar{\partial}_{\bar{\omega}} \ln |p|^2, \quad (\text{П.2})$$

$$\omega = u + iv = re^{i\alpha}, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi, \quad 0 \leq |r| \leq R, \quad \partial_\omega = \frac{1}{2}(\partial_u - i\partial_v),$$

с калибровочным полем  $A_\mu$ ,  $\mu = u, v$ , определяемым соотношением:

$$A_u = \varepsilon_{uv} \partial_v \ln |p|^2, \quad A_v - iA_u = 2i\partial_\omega \ln |p|^2. \quad (\text{П.3})$$

Заметим, что в форме (П.2) мы все еще не можем буквально воспользоваться результатом [19] по определению числа нулевых мод, так как калибровочное поле  $A_\mu$  не находится в «радиальной» калибровке, удовлетворяющей условию:

$$A_u = \frac{v}{r} A, \quad A_v = -\frac{u}{r} A.$$

Для перехода в «радиальную» калибровку сделаем калибровочное преобразование:

$$\tilde{f}_{1,2} = e^{i\Lambda} f_{1,2}, \quad A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Lambda, \quad e^{i\Lambda} = \frac{\omega - R}{\bar{\omega} + R}, \quad (\text{П.4})$$

которое обеспечивает требуемый вид поля  $A'_\mu$ :

$$A'_u = \frac{v}{r} A, \quad A'_v = -\frac{u}{r} A, \quad A = \frac{2r}{r^2 + R^2}, \quad r^2 = u^2 + v^2. \quad (\text{П.5})$$

Количество нулевых мод в этом случае определяется соотношением [19]

$$n_+ - n_- = |rA(r)|_{r=R} = 1. \quad (\text{П.6})$$

Здесь скобки [ ] обозначают целую часть числа. Как и ожидалось, мы имеем одну комплексную (2 вещественных) нулевую моду при любых  $R$ , в том числе при  $R \rightarrow \infty$ . Важно отметить также, что вклад границы, определяемой соотношением  $\int(Y) = \langle rA(r) \rangle_{r=R}$  [19], тождественно обращается в нуль. Здесь скобки  $\langle \rangle$  обозначают дробную часть числа.

Имея явное выражение для потенциала  $A$  (П.5), полезно получить явное выражение для нулевой моды, удовлетворяющей глобальным граничным условиям [3]. Для этого запишем  $L_\omega, L_\omega^+$  в цилиндрических координатах в соответствии с симметрией задачи:

$$L_\omega = \frac{1}{2} e^{i\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} + A \right) \equiv \frac{1}{2} \frac{e^{i\alpha/2}}{\sqrt{r}} \left( \frac{\partial}{\partial r} + B \right) e^{i\alpha/2} \sqrt{r},$$

$$L_\omega^+ = \frac{1}{2} e^{-i\alpha} \left( -\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} + A \right) \equiv \frac{1}{2} \frac{e^{-i\alpha/2}}{\sqrt{r}} \left( -\frac{\partial}{\partial r} + B \right) e^{-i\alpha/2} \sqrt{r}, \quad (\text{П.7})$$

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\sqrt{r}} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & g_1 \\ e^{i\alpha/2} & g_2 \end{pmatrix}, \quad B \equiv \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} + A.$$

Здесь и далее штрихи опускаются, хотя все величины определены в радиальной калибровке (П.5) с потенциалом  $A$ , зависящим лишь от  $r$ .

Как известно, глобальные граничные условия в этом случае требуют выполнения следующего соотношения на границе при  $r=R$  [19\*]:

$$\left( \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} + A \right) l_\lambda = B l_\lambda = \lambda l_\lambda, \quad \lambda \geq 0, \quad l_\lambda \sim \exp\{iJ\alpha\}. \quad (\text{П.8})$$

Причем требование однозначности по  $\alpha$  выделяет лишь полуцелые, а регулярность при  $r=0$  лишь положительные значения  $J$ :

$$J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \quad (\text{П.9})$$

Из (П.8) находим, что условия APS [3] выполняются только для значения  $J=1/2$ . Действительно, из (П.8), (П.9) имеем

$$\lambda|_{r=R} = -\frac{J}{R} + \frac{1}{R} \geq 0, \quad J = \frac{1}{2}. \quad (\text{П.10})$$

Этому требованию удовлетворяет лишь одна (комплексная) нулевая мода

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{r^2 + R^2}, \quad J = \frac{1}{2}. \quad (\text{П.11})$$

Другие моды, отвечающие значениям  $J=3/2, 5/2, \dots$ , хотя нормируемы и регулярны в диске, не удовлетворяют глобальным граничным условиям (П.8), так как приводят к значениям  $\lambda < 0$ .

Таким образом, мы воспроизводим результат раздела 4-го о существовании лишь двух вещественных нетривиальных мод в поле торона.

\* Физический смысл этого требования подробно обсуждается в [19] поэтому мы не повторяем аргументов вышеупомянутой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Житницкий А.Р. ЖЭТФ, 1988, т.94, с.19.
2. Житницкий А.Р. Препринт 88-95. Новосибирск, 1988; ЖЭТФ, 1988, т.95, № 1, с.24.
3. Atiyah M.F., Patodi V.K., Singer I.M. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1975, v.77, p.43; v.78, p.405; 1976 v.79, p.71.
4. Белавин А.А., Поляков А.М. Письма в ЖЭТФ, 1975, т.22, с.503.
5. Belavin A.A., Polyakov A.M., Schwartz A.S., Tyupkin Yu.S., Phys. Lett., 1975, v.59, p.85.
6. 't Hooft G. Nucl. Phys. B, 1978, v.138, p.1; 1979, v.153, p.141.
7. 't Hooft G. Commun. Math. Phys., 1981, v.81, p.267.
8. Cremer E., Scherk J. Phys. Lett., 1978, v.B74, p.341.
9. Witten E. Nucl. Phys. B, 1979, v.149, p.285.
10. Житницкий А.Р. ЯФ, 1988, т.47, с.251.
11. Witten E. Nucl. Phys. B, 1982, v.202, p.253.
12. Narain K.S. Nucl. Phys. B, 1984, v.243, p.131.
13. D'Adda A., Di Vecchia P., Luscher M. Nucl. Phys., 1978, v.B146, p.63.  
Eichenherr H. Nucl. Phys. B, 1978, v.146, p.215.  
Golo V.L., Perelomov A.M. Phys. Lett. B, 1978, v.79, p.112.
14. Berg B. and Lüscher M. Comm. Math. Phys., 1979, v.69, p.57.
15. Фатеев В.А., Фролов И.В., Шварц А.С. ЯФ, 1979, т.30, с.1134.
16. Din A.M., Di Vecchia P., Zakrzewski W.J. Nucl. Phys. B, 1979, v.155, p.447.
17. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп.—М.: Наука, 1965.
18. Morozov A.Yu., Perelomov A.M. Nucl. Phys. B, 1986, v.271, p.620.
19. Ninomiya M., Tan C.I. Nucl. Phys. B, 1985, v.257, p.199.  
Ma Z.-Q. Preprint, SLAC-PUB-3762, 1985.
20. Shifman M.A., Vainshtein A.I. Nucl. Phys. B, 1988, v.296, p.445.  
Morozov A.Yu., Olshanetsky M.A., Shifman M.A. Nucl. Phys. B, 1988, v.304, p.291.

А.Р. Житницкий

$CP^{N-1}$ -модель: дробный топологический заряд  
и теорема индекса для многообразий с границей

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 9 ноября 1988 г.  
Подписано в печать 21.XI. 1988 г. МН 08602  
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2,0 печ.л., 1,6 уч.-изд.л.  
Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ № 154

Набрано в автоматизированной системе на базе фото-  
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и  
отпечатано на ротапинтере Института ядерной физики  
СО АН СССР,  
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.