

22

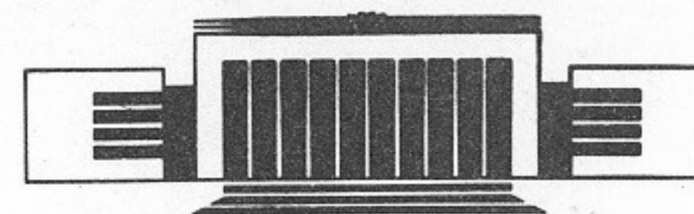


ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

В.М. Малкин, В.Н. Худик

**ТОЧЕЧНЫЙ СПЕКТР В ЗАДАЧЕ
ОБ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОМОДЕЛЬНОГО
СКАЛЯРНОГО КОЛЛАПСА**

ПРЕПРИНТ 88-128



НОВОСИБИРСК

Точечный спектр в задаче об устойчивости
автомодельного скалярного коллапса

В.М. Малкин, В.Н. Худик

Институт ядерной физики
630090, Новосибирск 90, СССР

АННОТАЦИЯ

Во всех автомодельных режимах скалярного коллапса имеются долгоживущие возрастающие возмущения — неустойчивые квазимоды. Однако в отсутствие достаточно интенсивных мелкомасштабных возмущений квазимоды не успевают развиться, что обостряет вопрос о существовании истинных неустойчивых мод. Данный вопрос до настоящего времени не был изучен.

В предлагаемой работе спектр истинных собственных значений исследован во всех центрально-симметричных автомодельных режимах скалярного коллапса. При этом доказано существование устойчивых относительно произвольных малых возмущений автомодельных решений и сформулировано весьма жесткое необходимое условие устойчивости автомодельных решений общего вида.

The Point Spectrum in the Stability Problem
for Self-Similar Scalar Collapse

V.M. Malkin, V.N. Khudic

Institute of Nuclear Physics
630090, Novosibirsk, USSR

ABSTRACT

The long-living growing perturbations — unstable quasi-modes are present in all the self-similar regimes of a scalar collapse. However in the absence of sufficiently strong short-wave perturbations, quasi-modes are destructed before they had time to develop. Thus the problem of existence of true unstable eigenmodes becomes more sharp. This problem remained unsolved up to now.

In the present work the spectrum of true eigenvalues is investigated for all the spherically-symmetric self-similar regimes of a scalar collapse. As a result, the existence of self-similar solutions which are stable against arbitrary small perturbations is proved and the very strict necessary condition for the stability of general self-similar solutions is proposed.

© Институт ядерной физики СО АН СССР

1. ВВЕДЕНИЕ

Эволюция высокочастотного скалярного поля, моделирующего электрическое поле ленгмюровских волн, описывается предложенными в [1] уравнениями:

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + \Delta - n\right)\psi = 0, \quad (1.1)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)n = \Delta|\psi|^2. \quad (1.2)$$

Эти уравнения, как и их векторные прообразы [2], обладают коллапсирующими решениями. В сверхзвуковом адиабатическом приближении (которое с развитием коллапса становится все более и более точным) из (1.1), (1.2) получают следующие уравнения для временной огибающей $\bar{\psi}$ поля ψ :

$$(-a^{-2} + \Delta - n)\bar{\psi} = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{d}{dt} \int d^3\vec{r} |\bar{\psi}|^2 = 0, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} n = \Delta|\bar{\psi}|^2. \quad (1.5)$$

Они допускают автомодельную подстановку

$$\bar{\psi}(\vec{r}, t) = a^{-3/2} E(\bar{\rho}), \quad n(\vec{r}, t) = a^{-2} u(\bar{\rho}),$$

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{r} - \bar{r}_s}{a}, \quad a \propto (t_s - t)^{2/3}. \quad (1.6)$$

При $t \rightarrow t_s$ размер каверны a стремится к нулю и вся захваченная каверной энергия локализуется в точке r_s , что соответствует сильному волновому коллапсу. Функции $E(\bar{\rho})$ и $u(\bar{\rho})$ удовлетворяют уравнениям

$$(-1 + \Delta - u)E = 0, \quad (1.7)$$

$$\left(\frac{7}{3} + \frac{2}{3}\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right) \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right) u = \Delta E^2. \quad (1.8)$$

Здесь оператор Лапласа Δ записан уже в переменных $\bar{\rho}$, а поле E выбрано вещественным (что всегда возможно). Разрешимость уравнений (1.7), (1.8) была доказана в [3] примером, построенным с помощью ЭВМ. Позже удалось выяснить структуру всего множества автомодельных решений (1.6) и найти некоторые из них аналитически [4]. При численном исследовании [5] эволюции центрально-симметричных решений уравнений (1.1), (1.2) наблюдалось установление найденного в [3] автомодельного решения. С другой стороны, в [6] был получен общий критерий неустойчивости автомодельных решений

$$E^2(0) > \frac{14}{9}, \quad (1.9)$$

совпадающий с необходимым условием их существования, т. е. свидетельствующий о неустойчивости всех автомодельных решений в рамках системы уравнений (1.3) — (1.5). Анализ, проведенный в [6], показал, что учет малого — «звукового» — члена Δn (отброшенного при переходе от (1.2) к (1.5)) и соответствующих поправок к автомодельному решению (1.6) превращает неустойчивые собственные моды линеаризованных уравнений (1.3) — (1.5) в квазимоды. Последние сохраняют свой вид и растут уже не вплоть до момента образования особенности, а только при сжатии каверны в конечное, хотя и большое по параметру Маха, число раз. Это число оценочно равно отношению размера каверны a в момент формирования квазимоды к минимальной длине волны λ модуляционно неустойчивых в тот же момент времени возмущений (более коротковолновые возмущения стабилизируются звуковым членом Δn , в отсутствие которого $\lambda = 0$). Неустойчивость квазимод проявляется в тех случаях, когда возмущения концентрации n с

каким-либо малым пространственным масштабом λ уже в начале их модуляционной неустойчивости настолько сильны, что успевают достигнуть достаточной для захвата электрического поля амплитуды $\sim 1/\lambda^2$ прежде, чем каверна сожмется до размера $\sim \lambda$. В численных расчетах [5], где начальный уровень мелкомасштабных возмущений определялся погрешностью машинного округления, с огромным запасом выполнялось противоположное условие. Поэтому результаты [5] не противоречат [6], а указывают на устойчивость найденного в [3] автомодельного решения относительно бесконечно малых центрально-симметричных возмущений. Проблема устойчивости в малом всех остальных автомодельных решений, а также решения [3] относительно мультипольных возмущений, оставалась до настоящего времени неизученной. Ниже предпринята попытка восполнить данный пробел.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Потребовав, чтобы функции $\bar{\psi}$ и n представлялись в окрестности центра каверны ($\rho = 0$) разложениями типа

$$\bar{\psi} = \sum_{l=0}^{\infty} \rho^l \sum_{m=-l}^l Y_{l,m} \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\psi}_{k,l,m}(\bar{t}) \rho^{2k}, \quad (2.1)$$

где $Y_{l,m}$ — сферические гармоники, можно решать поставленную во Введении задачу в рамках системы уравнений (1.3) — (1.5) (см. [6]). В дальнейшем обладающие разложениями типа (2.1) функции для краткости называются «регулярными в центре каверны».

Линеаризация системы (1.3) — (1.5) на фоне автомодельного решения (1.6) приводит к следующим уравнениям для собственных функций (см. [6]):

$$(-1 + \Delta - u)\bar{E} = (\bar{u} + \bar{\Omega})E, \quad (2.2)$$

$$\alpha \{d^3 \bar{\rho} E \bar{E} = 0, \quad (2.3)$$

$$\left(\frac{7}{3} + \frac{2}{3}\rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \alpha\right) \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \alpha\right) \bar{u} = 2\Delta(E\bar{E}). \quad (2.4)$$

Растущим возмущениям соответствуют расположенные в левой

полуплоскости собственные значения α :

$$\operatorname{Re} \alpha < 0. \quad (2.5)$$

Все собственные значения расположены в области

$$\operatorname{Re} \alpha < \frac{4}{3}, \quad (2.6)$$

вне которой функция \tilde{u} растет при $\rho \rightarrow \infty$ как $\rho^{3\alpha/2-2}$. Для каждого автомодельного решения существуют собственные моды

$$\begin{aligned} \alpha = -\frac{2}{3}, \quad \tilde{E} = \bar{c} \bar{\nabla} E, \quad \tilde{u} = \bar{c} \bar{\nabla} u, \quad \tilde{\Omega} = 0 \quad (\bar{c} = \text{const}); \\ \alpha = -1, \quad \frac{\tilde{E}}{\tilde{\Omega}} = \frac{3}{4} E + \frac{1}{2} \bar{\rho} \bar{\nabla} E, \quad \frac{\tilde{u}}{\tilde{\Omega}} = u + \frac{1}{2} \bar{\rho} \bar{\nabla} u; \\ \alpha = 0, \quad \frac{\tilde{E}}{\tilde{\Omega}} = \frac{1}{2} \bar{\rho} \bar{\nabla} E, \quad \frac{\tilde{u}}{\tilde{\Omega}} = u + \frac{1}{2} \bar{\rho} \bar{\nabla} u, \end{aligned} \quad (2.7)$$

порождаемые симметриями уравнений (1.3) — (1.5) относительно пространственно-временных сдвигов и растяжения координат:

$$r \rightarrow gr, \quad a \rightarrow ga, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}, \quad n \rightarrow g^{-2}n.$$

Наличие в левой полуплоскости α хотя бы одного отличающегося от -1 и $-\frac{2}{3}$ собственного значения означает неустойчивость исследуемого автомодельного решения. В поиске таких собственных значений желательно избежать сплошного «прочесывания» левой полуплоскости α , являющегося трудоемким и недостаточно надежным методом исследования устойчивости. Можно попытаться построить аналитическую в левой полуплоскости функцию, нули которой совпадают с собственными значениями α , а полюсы отсутствуют или легко подсчитываются. Количество неустойчивых собственных мод явно выражается через интеграл от логарифмической производной такой функции по контуру Γ , проходящему вдоль мнимой оси α снизу вверх и замыкаемому бесконечной полуокружностью слева. Обладающая требуемыми свойствами функция проще всего вводится в том случае, когда исследуемое автомодельное решение центрально-симметрично. При этом возмущения удобно классифицировать по их мультипольности.

Для возмущений с «орбитальным моментом» $l \geq 1$ условие

(2.3) выполняется автоматически, величина $\tilde{\Omega}$ в уравнении (2.2) равна нулю и система (2.2) — (2.4) представима в виде

$$\begin{aligned} \left[-1 + \frac{1}{\rho} \frac{d^2}{d\rho^2} \rho - \frac{l(l+1)}{\rho^2} - u \right] \tilde{E} = \tilde{u} E, \\ \left(\frac{7}{3} + \frac{2}{3} \rho \frac{d}{d\rho} - \alpha \right) \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3} \rho \frac{d}{d\rho} - \alpha \right) \tilde{u} = 2 \left[\frac{1}{\rho} \frac{d^2}{d\rho^2} \rho - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] E \tilde{E}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Регулярное в центре каверны решение уравнений (2.8), нормированное условием

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\tilde{E}}{\rho^l} = 1, \quad (2.9)$$

зависит от единственного комплексного параметра α . При $\rho \rightarrow \infty$ существует аналитически зависящий от α предел

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho e^{-\rho} \tilde{E}(\rho, \alpha) = I_l(\alpha). \quad (2.10)$$

Собственные значения α , соответствующие модам с орбитальным моментом $l \geq 1$, совпадают с корнями уравнения

$$I_l(\alpha) = 0, \quad (2.11)$$

расположенными в области (2.6). Полюсами функции $I_l(\alpha)$ являются те значения α , при которых уравнения (2.8) имеют нетривиальное регулярное в центре каверны решение, удовлетворяющее условию

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\tilde{E}}{\rho^l} = 0. \quad (2.12)$$

Анализ рекуррентных соотношений между коэффициентами аналогичных (2.1) разложений функций \tilde{E} , \tilde{u} показывает, что такое решение существует только в точках $\alpha = \alpha_{l+2k}^{\pm}$; $k = 0, 1, 2, \dots$:

$$\alpha_p^{\pm} \equiv \frac{2}{3} p + \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \pm \left[2E^2(0) + \frac{1}{4} \right]^{1/2}. \quad (2.13)$$

Для M -го члена последовательности имеющих при каждом способе заселения каверны центрально-симметричных автомодельных решений, нумеруемых в порядке возрастания величины $E^2(0)$, данная величина удовлетворяет неравенствам

$$\frac{2}{3}M\left(\frac{4}{3}M+1\right) < E^2(0) < \frac{2}{3}\left(M+\frac{1}{2}\right)\left[\frac{4}{3}\left(M+\frac{1}{2}\right)+1\right]. \quad (2.14)$$

С помощью (2.13), (2.14) нетрудно подсчитать количество P_l , расположенных в левой полуплоскости полюсов функции $I_l(\alpha)$:

$$P_l = \begin{cases} 0, & l \geq 2M-1 \\ M - \left[\frac{l+1}{2}\right], & l < 2M-1 \end{cases} \quad (2.15)$$

Количество Z_l расположенных там же нулей этой функции вычисляется по формулам

$$Z_l = P_l + J_l,$$

$$J_l = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} d\alpha \frac{d}{d\alpha} \ln I_l(\alpha). \quad (2.16)$$

Интеграл от логарифмической производной $I_l(\alpha)$ по входящей в контур Γ бесконечной полуокружности равен нулю, поскольку при $|\alpha| \rightarrow \infty$ ($\text{Re } \alpha < 0$) функция $I_l(\alpha)$ стремится к конечному пределу. Остающийся в J_l интеграл по мнимой оси можно, воспользовавшись свойством $I_l(\alpha^*) = I_l^*(\alpha)$, переписать в виде

$$J_l = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\beta \frac{d}{d\beta} \arg I(i\beta). \quad (2.17)$$

Количество неустойчивых собственных мод с фиксированным «орбитальным моментом» $l \geq 2$ равно $(2l+1)Z_l$, а с $l=1$ равно $3(Z_1-1)$, так как при $l=1$ существует собственное значение $\alpha = -2/3$, не имеющее отношения к проблеме устойчивости.

Для возмущений с $l=0$ условие (2.3) не является тривиальным, а величина \tilde{Q} в (2.2), вообще говоря, отлична от нуля. При каждом комплексном значении α регулярное в центре каверны сферически-симметричное решение уравнений (2.2), (2.4) линейно зависит от двух параметров. Условие убывания \tilde{E} при $\rho \rightarrow \infty$ однозначно определяет отношение этих параметров, а после введения какой-либо нормировки, например,

$$\left. \frac{d\tilde{E}}{d\rho^2} \right|_{\rho=0} = \left. \frac{dE}{d\rho^2} \right|_{\rho=0}, \quad (2.18)$$

и функцию $\tilde{E}(\rho, \alpha)$. Вместе с $\tilde{E}(\rho, \alpha)$ аналитически зависит от α фигурирующий в (2.3) интеграл

$$I(\alpha) = \int d^3\rho E(\rho) \tilde{E}(\rho, \alpha). \quad (2.19)$$

Ненулевые собственные значения α , соответствующие сферически-симметричным модам, являются расположенными в области (2.6) корнями уравнения

$$I(\alpha) = 0. \quad (2.20)$$

С помощью формул (2.7) для соответствующей нулевому α собственной моды нетрудно показать, что

$$I(0) = -\frac{3}{4} \int d^3\rho E^2(\rho) < 0. \quad (2.21)$$

Асимптотика функции $I(\alpha)$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$, $\text{Re } \alpha < 0$ также вычисляется аналитически:

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\rho, \alpha) &= E(\rho)[1 + \alpha^{-2}O(1)], \\ I(\alpha) &= \int d^3\rho E^2(\rho)[1 + \alpha^{-2}O(1)]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Количества нулей Z_0 и полюсов P функции $I(\alpha)$, расположенных в левой полуплоскости α , связаны между собой соотношением

$$Z_0 = P + J,$$

$$J = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\beta \frac{d}{d\beta} \arg I(i\beta). \quad (2.23)$$

Различие знаков $I(0)$ и $I(i\infty)$ свидетельствует о нечетности числа J . Для подсчета P следует заметить, что при каждом полюсном значении α уравнения (2.2), (2.4) имеют нетривиальное регулярное в центре каверны и убывающее при $\rho \rightarrow \infty$ решение с $l=0$, удовлетворяющее условию

$$\left. \frac{d\tilde{E}}{d\rho^2} \right|_{\rho=0} = 0. \quad (2.24)$$

При любом значении α регулярное в центре каверны сферически-симметричное решение уравнений (2.2), (2.4), обладающее свойством (2.24), определено с точностью до умножения на произвольную постоянную. Нормировав такое решение условием

$$\tilde{E}(0) = 1, \quad (2.25)$$

можно ввести аналитическую функцию

$$I_0(\alpha) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho e^{-\rho} \tilde{E}(\rho, \alpha).$$

Ее нули расположены в полюсах функции $I(\alpha)$, что позволяет подсчитать последние по формуле

$$P = P_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\beta \frac{d}{d\beta} \arg I_0(i\beta). \quad (2.26)$$

В полюсах функции $I_0(\alpha)$, количество которых в левой полуплоскости α обозначено здесь через P_0 , уравнения (2.2), (2.4) имеют нетривиальное регулярное в центре каверны решение с $l=0$, удовлетворяющее условиям

$$\tilde{E}(0) = 0, \quad \left. \frac{d\tilde{E}}{d\rho^2} \right|_{\rho=0} = 0. \quad (2.27)$$

Такое решение существует только при $\alpha = \alpha_{2k}^{\pm}$, $k=1, 2, \dots$ (ср. (2.13)). Совпадающее с P_0 количество отрицательных членов последовательности α_{2k}^{\pm} ($k=1, 2, \dots$) просто выражается через номер M автомодельного решения:

$$P_0 = M - 1. \quad (2.28)$$

Объединение формул (2.23), (2.26), (2.28) дает

$$Z_0 = M - 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\beta \frac{d}{d\beta} \arg [I(i\beta) I_0(i\beta)]. \quad (2.29)$$

Количество неустойчивых собственных мод с $l=0$ равно $Z_0 - 1$, поскольку расположенный в точке $\alpha = -1$ нуль функции $I(\alpha)$ не имеет отношения к проблеме устойчивости.

3. ТОЧЕЧНЫЙ СПЕКТР В АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕЖИМАХ С ЗАСЕЛЕННЫМ ОСНОВНЫМ СОСТОЯНИЕМ

Результаты численного исследования устойчивости центрально-симметричных автомодельных решений с заселенным основным состоянием и не очень большим порядковым номером M собраны в табл. 1. Величины α_0^- и Z_l вычислялись по формулам предыдущего раздела. Зная количество неустойчивых мод каждого типа, было проще найти соответствующие им собственные значения α , приведенные в заключительном столбце табл. 1. В устойчивости автомодельных решений с $M \sim 1$ относительно мультиполюсных возмущений с $l \gg 1$ нетрудно было убедиться воспользовавшись тем фактом, что при $l \gg 1$ «центробежный потенциал» $\frac{l(l+1)}{\rho^2}$ вытесняет возмущение в область $\rho \gg 1$, где автомодельное решение уже близко к нулю.

Таблица 1

M	α_0^-	l	Z_l	α
1	-0,186	0	1	
		1	1	
		≥ 2	0	
2	-1,634	0	2	-1,548
		1	2	-2,453
		2	1	-1,258
		3	1	-0,407
		≥ 4	0	
3	-3,029	0	3	-3,112, -1,444
		1	3	-4,226, -2,143
		2	2	-2,804, -1,291
		3	2	-1,896, -0,511
		4	1	-1,11
		5	1	-0,38
		≥ 6	0	

Как видно из табл. 1, центрально-симметричное автомодельное

решение с заселенным основным состоянием и минимальным значением поля E в центре каверны устойчиво относительно произвольных малых возмущений. Аналогичные решения с $M=2$ и $M=3$ неустойчивы, причем наибольший показатель степенного роста в обоих случаях достигается на дипольных собственных модах и превышает максимальный показатель роста квазимод, равный $-\alpha_0^-$. Для выяснения степени общности отмеченных свойств полезно проанализировать предельный случай $M \gg 1$.

Автомодельные решения с заселенным основным состоянием и $E(0) \gg 1$ были найдены в [4]. Внутри каверны, т. е. внутри области, где $u \leq -1$, они удовлетворяют приближенному уравнению

$$\Delta E^2 \approx -\frac{28}{9}. \quad (3.1)$$

Из (3.1) видно, что масштаб изменения поля E велик по сравнению с единицей:

$$|\bar{\nabla} \ln E^2|^{-1} \sim E(0) \sim M \gg 1.$$

Приближение (3.1) нарушается лишь на расстояниях $\delta \sim M^{1/3}$ от границы каверны. В δ -окрестности границы поле E убывает, грубо говоря, вдвое, оставаясь величиной порядка $E_{\text{гр}} \sim (M\delta)^{1/2} \sim M^{2/3}$. Вне каверны убывание E носит экспоненциальный характер. В области $\delta \ll \rho - R \ll R \sim M$, где R — расстояние от центра до границы каверны вдоль заданного луча, масштаб изменения E по-прежнему заметно превышает единицу:

$$-\ln \frac{E}{E_{\text{гр}}} \sim \left(\frac{\rho - R}{\delta}\right)^{3/2}.$$

При дальнейшем увеличении ρ этот масштаб оценочно не меняется, оставаясь величиной порядка единицы:

$$-\ln \frac{E}{E_{\text{гр}}} \sim \rho - R, \quad \rho - R \gg R.$$

Отсутствие у поля E нулей позволяет ввести вместо E не имеющую особенностей функцию

$$y = \tilde{E}/E.$$

С помощью уравнений (1.7), (2.2) нетрудно выразить через нее \tilde{u} :

$$\tilde{u} = -\tilde{\Omega} + E^{-2} \bar{\nabla} (E^2 \bar{\nabla} y). \quad (3.2)$$

Подстановка (3.2) в (2.4) дает замкнутое уравнение для y , представимое в виде

$$\begin{aligned} & \bar{\nabla} [E^2 (E^2 - \Lambda) \bar{\nabla} y] + y E^2 \Delta E^2 + \Lambda \tilde{\Omega} E^2 = \\ & = E^2 \left[\frac{2}{3} \left(\frac{11}{3} - 2\alpha \right) \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{4}{9} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right)^2 \right] [E^{-2} \bar{\nabla} (E^2 \bar{\nabla} y)], \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\Lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{7}{3} - \alpha \right) \left(\frac{4}{3} - \alpha \right). \quad (3.4)$$

Сопоставляя различные члены в левой части (3.3), можно предположить следующие оценки величин Λ и $\tilde{\Omega}$, соответствующих глобальным собственным модам:

$$\Lambda \sim M^2, \quad \tilde{\Omega} \Lambda \sim y_{\text{хар}} \quad (3.5)$$

($y_{\text{хар}}$ — характерное значение функции y). Для таких мод грубо оцененная левая часть уравнения (3.3) превышает правую в M раз. В области $|\rho - R| \ll R$ (где E уже гораздо меньше $E(0)$, а масштаб изменения E еще гораздо больше единицы) первый член левой части (3.3) оценочно велик не только по сравнению с правой частью, но и по сравнению со всеми остальными членами. Фактически это означает, что функция y почти не меняется в нормальном к границе каверны направлении:

$$\bar{\nabla}_n y|_{|\rho - R| \ll R} = o\left(\frac{y}{\Lambda}\right). \quad (3.6)$$

Полученное условие позволяет ставить краевую задачу в одной лишь области применимости уравнения (3.1). Интегрирование (3.3) по внутренности каверны с учетом (3.1) и условия ортогональности

$$\int d^3 \bar{\rho} y E^2 = 0 \quad (3.7)$$

дает $\Lambda \tilde{\Omega} \approx 0$. Более тщательное рассмотрение, основанное на интегрировании (3.3) по всему пространству, показывает, что:

$$\Lambda \tilde{\Omega} = o\left(\frac{y_{\text{хар}}}{M}\right).$$

В пренебрежении малыми поправками уравнение (3.3) имеет во

внутренней части каверны вид

$$\bar{\nabla}[E^2(E^2 - \Lambda)\bar{\nabla}y] - \frac{28}{9}E^2y = 0. \quad (3.8)$$

Решения этого уравнения являются экстремалами функционала

$$\Lambda[y] = \frac{\int d^3\bar{\rho} \left(E^4 |\bar{\nabla}y|^2 + \frac{28}{9} E^2 |y|^2 \right)}{\int d^3\bar{\rho} E^2 |\bar{\nabla}y|^2}, \quad (3.9)$$

откуда сразу следует вещественность и положительность величины Λ . На множестве функций y , удовлетворяющих условию ортогональности (3.7), функционал (3.9) ограничен сверху. Максимальному значению данного функционала Λ_{\max} соответствует минимальное собственное значение α :

$$\alpha_{\min} \approx -(2\Lambda_{\max})^{1/2}.$$

С помощью пробных функций нетрудно показать, что $\Lambda_{\max} > \max_{\bar{\rho}} E^2(\bar{\rho}) = E^2(0)$ и, соответственно, $\alpha_{\min} < \alpha_0$ — в полном согласии с подмеченным в табл. 1 свойством неустойчивых собственных мод.

Проведенное выше доказательство неустойчивости решений с $E^2(0) \gg 1$ не содержит каких-либо предположений о симметрии каверны. Для количественного отыскания величины α_{\min} и ее сопоставления с указанными в табл. 1 значениями целесообразно подробнее рассмотреть центрально-симметричные автомодельные решения с заселенным основным состоянием и большим полем $E(0)$. Внутри каверны такие решения приближенно описываются формулой

$$E^2(\rho) \approx E^2(0) - \frac{14}{27}\rho^2. \quad (3.10)$$

Интересуясь наиболее неустойчивыми собственными модами, можно полагать

$$\Lambda = E^2(0)(1 + \kappa^2), \quad \kappa > 0. \quad (3.11)$$

Удобно также ввести новую переменную ξ :

$$\rho = \sqrt{\frac{27}{14}} E(0) \xi,$$

равную единице на границе каверны. С учетом этих усовершенствований уравнение (3.8) представимо для возмущений с «орбитальным моментом» l в виде

$$\frac{d}{d\xi} \xi^2(1 - \xi^2)(\xi^2 + \kappa^2) \frac{d}{d\xi} y + [6\xi^2 - l(l+1)(\xi^2 + \kappa^2)](1 - \xi^2)y = 0. \quad (3.12)$$

Регулярное при $\xi \rightarrow 0$ решение уравнения (3.12) удобно нормировать условием

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{y}{\xi^l} = 1, \quad (3.13)$$

Краевое условие

$$\left. \frac{dy}{d\xi} \right|_{\xi \rightarrow 1-0} = 0 \quad (3.14)$$

выделяет дискретный набор вещественных значений κ . Все они соответствуют нулевому и единичному «орбитальным моментам», так как при $l \geq 2$ коэффициент при y в (3.12) отрицателен на интервале $(0, 1)$, и, следовательно, условие (3.14) невыполнимо. Наибольшие значения κ для центрально-симметричных и дипольных собственных мод определяются численно:

$$\begin{aligned} \kappa_{\max} &= 0.224 \quad (l=0), \\ \kappa_{\max} &= 0.763 \quad (l=1). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Предположив $\kappa^2 \ll 1$, можно заметно упростить уравнение (3.12) в двух, покрывающих весь интервал $0 < \xi < 1$ областях:

$$\frac{d}{d\xi} \xi^2(\xi^2 + \kappa^2) \frac{d}{d\xi} y + [6\xi^2 - l(l+1)(\xi^2 + \kappa^2)]y = 0, \quad 0 < \xi \ll 1, \quad (3.16)$$

$$\frac{d}{d\xi} \xi^4(1 - \xi^2) \frac{d}{d\xi} y + [6 - l(l+1)]\xi^2(1 - \xi^2)y = 0, \quad \kappa \ll \xi < 1. \quad (3.17)$$

Решение уравнения (3.16) выражается через гипергеометрическую функцию:

$$\begin{aligned} y &= \xi^l F\left(b_l^*, b_l, \frac{3}{2} + l, -\frac{\xi^2}{\kappa^2}\right), \\ b_l &= \frac{1}{4} [2l + 3 + i\sqrt{15 - 4l(l+1)}] \end{aligned} \quad (3.18)$$

и имеет в области $\kappa \ll \xi \ll 1$ асимптотику

$$y \approx 2\xi^l \operatorname{Re} \left[\left(\frac{\kappa^2}{\xi^2} \right)^{b_l} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} + l\right) \Gamma(b_l - b_l^*)}{\Gamma(b_l)^2} \right] \approx$$

$$\approx G \kappa^l \left(\frac{\kappa}{\xi} \right)^{3/2} \sin \left(2 \operatorname{Im} b_l \ln \frac{\xi}{\kappa} + g_l \right), \quad (3.19)$$

$$g_0 \approx 1.279, \quad g_1 \approx 3.101.$$

Решение уравнения (3.17) имеет в той же области асимптотику

$$y \approx \frac{\operatorname{const}}{\xi^{3/2}} \sin(2 \operatorname{Im} b_l \ln \xi + \bar{g}_l), \quad (3.20)$$

$$\bar{g}_0 \approx 1.079, \quad \bar{g}_1 \approx 0.813.$$

Из условия совпадения (3.19) и (3.20) следует

$$\kappa \approx c_l \exp \left[-\frac{2\pi j}{\sqrt{15-4l(l+1)}} \right], \quad j=1, 2, \dots, \quad (3.21)$$

$$c_0 \approx 0.219, \quad c_1 \approx 0.523.$$

Предположение $\kappa^2 \ll 1$ с неплохой точностью выполняется уже при $j=1$. Удержание малой поправки κ^2 в (3.11) не является превышением точности уравнения (3.8) при $j \ll \ln M$. Таким образом, количество собственных мод, более неустойчивых, чем квазимоды ($\Lambda > E^2(0)$), оценочно равно $\ln M$. Согласно табл. 1, при $M=3$ имеется по одной такой моде с $l=0$ и $l=1$. Соответствующие им показатели неустойчивости α отличаются от вычисленных по формулам (3.15), (3.11), (3.4) всего на 1%.

4. ТОЧЕЧНЫЙ СПЕКТР В АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕЖИМАХ С НЕЗАСЕЛЕННЫМ ОСНОВНЫМ СОСТОЯНИЕМ

Результаты численного исследования устойчивости центрально-симметричных автомоделных решений с заселенными первым ($N=1$) или вторым ($N=2$) возбужденными состояниями и не очень большим порядковым номером M собраны в табл. 2. Все эти решения, кроме первого ($N=1, M=1$), неустойчивы, причем отчетливо прослеживается тенденция к увеличению вместе с номером M количества неустойчивых собственных мод и максимальных значений показателя $-\operatorname{Re} \alpha$. Табл. 2 целесообразно дополнить исследованием предельного случая $N \gg 1$.

N	M	α_0	l	Z_l	α
1	1	$-1.64 \cdot 10^{-3}$	0	1	
			1	1	
			≥ 2	0	
	2	$-\frac{4}{3} - 8.60 \cdot 10^{-4}$	0	4	$-1.316, -0.43 \pm 3.3i$
			1	4	$-1.14, -0.25 \pm 3.3i$
			2	3	$-1.80 \pm 0.26i, -0.077$
			≥ 3	0	
	3	$-\frac{8}{3} - 3.38 \cdot 10^{-4}$	0	5	$-2.600, -1.326, -1.32 \pm 4.3i$
			1	5	$-2.538, -1.7, -1.20 \pm 3.4i$
2			3	$-1.39 \pm 0.055i, -0.010$	
3			3	$-2.96 \pm 0.11i, -0.83$	
4			3	$-1.28, -0.5 \pm 2.31i$	
≥ 5			0		
2	1	$-2.10 \cdot 10^{-5}$	0	3	$-0.118 \pm 1.95i$
			1	3	$-1.17, -0.041$
			≥ 2	0	
	2	$-\frac{4}{3} - 7.83 \cdot 10^{-6}$	0	4	$-1.331, -0.86 \pm 3.62i$
			1	6	$-0.77, -0.029 \pm 1.37i$
			2	3	$-30.2, -1.33, -0.015$
			3	2	$-0.078 \pm 1.86i$
	≥ 4	0			
	3	$-\frac{8}{3} - 2.6 \cdot 10^{-7}$	0	5	$-2.647, -1.88 \pm 4.89i, -1.33$
			1	5	$-2.064, -1.72 \pm 4.63i, -1.54$
			2	6	$-1.33, -0.95, -0.52 \pm 7.29i, -0.22 \pm 1.5i$
			3	3	$-45.3, -2.02, -0.70$
4			3	$-1.33 \pm 2.54i, -0.029$	
≥ 5	0				

Центрально-симметричные автомодельные решения с большими номерами заселенного связанного состояния были найдены в [4]. Вследствие малости «энергии связи» высоковозбужденных состояний с $N \gg E(0) \sim M$ по сравнению с глубиной каверны, форма последней практически не зависит от N . В этом смысле функция

$$\hat{u}(\hat{\rho}) = \rho_*^2 u(\rho) \quad (\hat{\rho} \equiv \rho/\rho_*), \quad (4.1)$$

где $\rho_*^{-2} \gg 1$ — максимальная глубина каверны, является универсальной. Асимптотика $\hat{u}(\hat{\rho})$ при $\hat{\rho} \gg 1$ имеет вид

$$\hat{u}(\hat{\rho}) \approx -\frac{3}{2} \frac{E^2(0)}{\hat{\rho}^2}. \quad (4.2)$$

Для M -го автомодельного решения величина $E^2(0)$ отличается от левой границы интервала (2.14) лишь экспоненциально малой по параметру $N/M \gg 1$ добавкой, с точностью до которой

$$E^2(0) \approx \frac{2}{3} M \left(\frac{4}{3} M + 1 \right).$$

Поведение поля E в области $\rho_* \ll \rho \ll 1$ приближенно описывается следующими двумя формулами:

$$\begin{aligned} E &\approx A \left(\frac{\rho_*}{\rho} \right)^{1/2} \sin \left\{ \left[\frac{3}{2} E^2(0) - \frac{1}{4} \right]^{1/2} \ln \frac{\rho}{\rho_*} + \varphi_* \right\} \approx \\ &\approx \frac{B}{\rho^{1/2}} \sin \left\{ \left[\frac{3}{2} E^2(0) - \frac{1}{4} \right]^{1/2} \ln \rho + \varphi \right\}, \quad (4.3) \\ &0 < \varphi, \varphi_* < \pi. \end{aligned}$$

Первая формула (с фиксированными значениями A и φ_*) относится к регулярному в центре каверны, а вторая (с фиксированной фазой φ) — к убывающему при $\rho \rightarrow \infty$ решению уравнений (1.7), (1.8). Условие совпадения обеих формул (4.3) определяет дискретный набор значений ρ_* :

$$\rho_*^{-2} \equiv \max_{\rho} [-u(\rho)] = C \exp \left\{ \frac{2\pi N}{\sqrt{\frac{3}{2} E^2(0) - \frac{1}{4}}} \right\}. \quad (4.4)$$

Здесь $C \sim 1$ — число, зависящее от M . Согласно (4.1) — (4.4), глубина каверны в центральной области ($\rho \sim \rho_*$) экспоненциально растет, а величина поля E в энергосодержащей области ($\rho \sim 1$)

экспоненциально убывает при увеличении параметра $N/M \gg 1$.

В расположении задаваемых уравнениями (2.2) — (2.4) собственных значений α при $N/M \gg 1$ также прослеживаются простые закономерности. В частности, всегда имеются собственные значения, совпадающие с точностью до экспоненциально малых по параметру N/M поправок с отрицательными членами последовательности α_p^- (см. (2.13)) (в этом можно убедиться, пользуясь рекуррентными соотношениями между коэффициентами разложений функций \tilde{E} и \tilde{u} по степеням ρ^2 вблизи центра каверны). Близость $E^2(0)$ к левой границе интервала (2.14) позволяет переписать формулу (2.13) в виде

$$\alpha_p^- \approx \frac{2}{3} [p + 2(1 - M)]. \quad (4.5)$$

При $M \geq 2$ величина $\alpha_0^- \leq -4/3$ отрицательна и отлична от $-2/3$ и -1 . Следовательно, соответствующее автомодельное решение неустойчиво. Случай $M=1$ требует более подробного рассмотрения. Приступая к нему, можно упростить уравнение (2.2) для неустойчивой собственной моды \tilde{E} в областях $\rho \gg \rho_*$ и $\rho \ll 1$:

$$\left(-1 + \Delta + \frac{7}{3\rho^2} \right) \tilde{E} \approx \tilde{\Omega} E, \quad \rho \gg \rho_*; \quad (4.6)$$

$$(\Delta - u) \tilde{E} \approx \tilde{u} E, \quad \rho \ll 1. \quad (4.7)$$

В уравнении (4.6) использована асимптотика (4.2) с $E^2(0) = 14/9$; член $\tilde{u} E$ опущен потому, что при $\text{Re } \alpha < 0$ функция \tilde{u} убывает в области $\rho \gg \rho_*$ быстрее, чем $u(\rho)$, тогда как \tilde{E} и E убывают одинаково быстро. При получении (4.7) учтены имеющие место в области $\rho \ll 1$ неравенства $|u| \gg 1$, $|u\tilde{E}| \gg |\tilde{\Omega} E|$. Регулярное в центре каверны и нормированное условием (2.9) (при $l \geq 1$) либо (2.18) (при $l=0$), решение \tilde{E} (4.7) и второго уравнения (2.8) аналитически зависит от комплексного параметра α . При $l=0$ данное решение имеет в области $\rho_* \ll \rho \ll 1$ асимптотику

$$\begin{aligned} \tilde{E} &\approx \tilde{A}(\alpha) \left(\frac{\rho_*}{\rho} \right)^{1/2} \sin \left[\frac{5}{2\sqrt{3}} \ln \frac{\rho}{\rho_*} + \tilde{\varphi}_*(\alpha) \right], \quad (4.8) \\ &-\pi < \text{Re } \tilde{\varphi}_*(\alpha) \leq \pi. \end{aligned}$$

Убывающее при $\rho \rightarrow \infty$ центрально-симметричное решение $\tilde{E}/\tilde{\Omega}$ уравнения (4.6) определено с точностью до прибавления функции E , умноженной на произвольную постоянную. Последняя находит-

ся из условия ортогональности $\int d^3\vec{\rho} E\tilde{E} = 0$, основной вклад в которое дает область $\rho \sim 1$. Фиксированное таким образом решение обладает в области $\rho_* \ll \rho \ll 1$ асимптотикой

$$\tilde{E} = \tilde{\Omega} \tilde{B} \rho^{-1/2} \sin\left(\frac{5}{2\sqrt{3}} \ln \rho + \tilde{\varphi}\right) \quad (4.9)$$

с известными амплитудой \tilde{B} и фазой $\tilde{\varphi}$. Собственные значения α определяются из условия совпадения формул (4.8) и (4.9) и являются нулями аналитической функции

$$\chi(\alpha) = \tilde{A}(\alpha) \sin[\tilde{\varphi}_*(\alpha) - \tilde{\varphi} - (\varphi_* - \varphi)]. \quad (4.10)$$

Эта функция не имеет полюсов в левой полуплоскости α , что позволяет вычислять количество расположенных там же нулей $\chi(\alpha)$ по формуле

$$Z_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\beta \frac{d}{d\beta} \arg \chi(i\beta). \quad (4.11)$$

Численный расчет дает $Z_0 = 3$. Помимо -1 , собственными значениями являются

$$\alpha \approx -0.235 \pm i 1.973. \quad (4.12)$$

Таким образом, центрально-симметричные автомодельные решения с $N \gg 1$ оказываются неустойчивыми и при $M=1$. Полезно заметить, что дипольные собственные моды могут обладать более высокими, чем 0.235, показателями роста. При $l=1$ регулярное в центре каверны решение уравнения (4.7) и убывающее при $\rho \rightarrow \infty$ решение уравнения (4.6) описываются формулами

$$\begin{aligned} \tilde{E} &\approx A_1(\alpha) \left(\frac{\rho_*}{\rho}\right)^{1/2} \sin\left[\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \frac{\rho}{\rho_*} + \varphi_{1*}(\alpha)\right], \quad -\pi < \operatorname{Re} \varphi_{1*}(\alpha) \leq \pi; \\ \tilde{E} &\approx B_1 \rho^{-1/2} \sin\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \rho + \varphi_1\right), \quad 0 < \varphi_1 < \pi, \end{aligned} \quad (4.13)$$

которые совпадают в нулях аналитической функции

$$\chi_1(\alpha) = A_1(\alpha) \sin\left[\varphi_{1*}(\alpha) - \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \rho_* - \varphi_1\right].$$

С помощью соотношения

$$\varphi - \varphi_* + \frac{5}{2\sqrt{3}} \ln \rho_* = \pi N$$

(см. (4.3), (4.4)) можно явно выделить зависимость функции $\chi_1(\alpha)$ от номера N :

$$\chi_1(\alpha) = A_1(\alpha) \sin\left[\varphi_{1*}(\alpha) - \varphi_1 - \frac{1}{5}(\varphi_* - \varphi + \pi N)\right]. \quad (4.14)$$

Все пять типов асимптотического ($N \gg 1$) дипольного спектра в области $\operatorname{Re} \alpha < 0$ (кроме общего для всех случаев собственного значения $\alpha = -2/3$) перечислены в табл. 3.

Таблица 3

$N \pmod{5}$	Z_1	α
0	2	-0.085
1	4	-0.286, $0.215 \pm 1.2i$
2	5	-1.176, $-0.10 \pm 1.03i$, -0.056
3	3	-2.10, 0.065
4	3	-5.33, -0.072

5. ВЫВОДЫ И ОБОБЩЕНИЯ

В рассмотренных выше случаях заселенным считалось только одно из бесконечного набора имеющихся в автомодельной каверне связанных состояний, т. е. речь шла об «одномодовых» режимах скалярного коллапса. Семейство одномодовых центрально-симметричных автомодельных режимов параметризовалось с помощью двух целых чисел: номера $N=0, 1, 2, \dots$ заселенного связанного состояния и номера $M=1, 2, 3, \dots$ члена последовательности имеющихся при заданном N автомодельных решений, расположенных в порядке возрастания величины $E^2(0)$. В данном семействе устойчивыми относительно произвольных малых возмущений оказались лишь два решения: $(N=0, M=1)$ и $(N=1, M=1)$.

Вывод о неустойчивости автомодельных решений с $M \geq 2$, т. е. с

$$E^2(0) > \frac{44}{9}, \quad (5.1)$$

распространяется на многомодовые центрально-симметричные, а при $E^2(0) \gg 1$ или $N \gg 1$ — и на несимметричные автомодельные режимы скалярного коллапса. По всей видимости, критерий неустойчивости (5.1) является совершенно общим, хотя полностью доказать это пока не удалось. Примечательно, что максимальный показатель неустойчивости у всех исследованных автомодельных решений, подчиняющихся критерию (5.1), превышает максимальный показатель роста квазимод:

$$\max(-\operatorname{Re} \alpha) > -\alpha_0 = \left[2E^2(0) + \frac{1}{4}\right]^{1/2} - \frac{1}{2} - \frac{4}{3}. \quad (5.2)$$

Более пестрая картина обнаруживается при взгляде на автомодельные решения с

$$\frac{14}{9} < E^2(0) < \frac{44}{9}, \quad (5.3)$$

среди которых имеются как устойчивые, так и неустойчивые. В настоящее время неясно, ведет ли неустойчивость центрально-симметричных решений с $N \geq 2$, $M=1$ к установлению несимметричных автомодельных решений с теми же N , либо к распаду коллапсирующей каверны на несколько новых каверн с более низкими номерами заселенных состояний. В этой связи полезно заметить, что неустойчивость удовлетворяющих условию (5.3) автомодельных решений с большими номерами заселенных состояний стабилизируется уже при очень незначительном заселении основного состояния. Действительно, форма каверны вполне определяется значениями величины E^2 в той области, где эта величина оценочно совпадает со своим максимальным значением. Размер указанной области (который того же порядка, что у области локализации основного состояния) экспоненциально мал по сравнению с размером области локализации N -го возбужденного состояния. Поэтому, уже начиная с экспоненциально малых по параметру N отношений энергий волн, захваченных в основное и N -е возбужденное состояния, максимальная плотность энергии E^2 , а значит и динамика коллапса, целиком определяется находящимися в основном состоянии волнами.

В заключение следует указать основные результаты настоящей работы. Они состоят в доказательстве существования устойчивых относительно бесконечно малых возмущений автомодельных режимов скалярного коллапса и в отыскании необходимого условия

устойчивости (5.3), резко сужающего класс подлежащих исследованию решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буднева О.Б., Захаров В.Е., Сынах В.С. Физика плазмы, 1975, т.1, с.606.
2. Захаров В.Е. ЖЭТФ, 1972, т.62, с.1745.
3. Захаров В.Е., Щур Л.Н. ЖЭТФ, 1981, т.81, с.2019.
4. Малкин В.М., Худик В.Н. ЖЭТФ, 1987, т.92, с.2076.
5. Дегтярев Л.М., Копя-Овдиенко А.М. Физика плазмы, 1984, т.10, с.9.
6. Малкин В.М. ЖЭТФ, 1984, т.87, с.433.

В.М. Малкин, В.Н. Худик

**Точечный спектр в задаче
об устойчивости автомодельного
скалярного коллапса**

Ответственный за выпуск С.Г. Попов

Работа поступила 5 февраля 1988 г.
Подписано в печать 21.09.88 г. МН 08517.
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2,0 печ.л., 1,7 уч.-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ № 128

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и
отпечатано на ротапинтере Института ядерной физики
СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*