

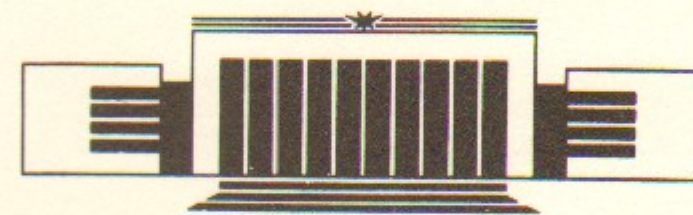


ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

В.В. Вечеславов, Б.В. Чириков

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ В ТЕОРИИ КАМ

ПРЕПРИНТ 88-110



НОВОСИБИРСК

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ В ТЕОРИИ КАМ^{*)}

В.В.Вечеславов, Б.В.Чириков

Институт ядерной физики, 630090, Новосибирск,
СССР

АННОТАЦИЯ

Предложен новый эффективный метод оценки скорости диффузии Арнольда по измеренной ширине хаотического слоя, что позволило исследовать воздействие очень малых возмущений. Для них подтверждена экспоненциальная оценка скорости диффузии. Вместе с тем, получены первые указания на существование широкой области со степенным законом убывания скорости диффузии. Введено понятие КАМ-интегралов движения и показана их высокая точность при слабом возмущении.

^{*)}Статья в сборнике, посвященном 60-летию проф. Ю.Мозера (Цюрих, Швейцария).

В 1892 г., почти 100 лет тому назад, Пуанкаре опубликовал свою знаменитую теорему [1] о несуществовании однозначных аналитических интегралов движения, кроме энергии, у типичной гамильтоновой системы (во внешнем поле, в общем случае – кроме интегралов группы Пуанкаре). Будучи формально правильной, эта теорема вызвала немало недоразумений, во всяком случае среди физиков, которые не придали серьезного значения слову "аналитические" (интегралы). Это казалось очевидным – откуда в простом механическом движении могут появиться какие-то сингулярности? В 1923 г. молодой Ферми опубликовал даже работу [2], в которой он как будто бы доказал, что из теоремы Пуанкаре следует эргодичность движения (на энергетической поверхности). Как физик, однако, он повидимому никогда не доверял этому формальному результату, и в конце жизни решил проверить его с помощью численного моделирования на одном из первых компьютеров [3]. Численный эксперимент не подтвердил "теорему" Ферми. Удивление авторов [3] было столь велико, что они не обратили никакого внимания на явные признаки эргодичности в некоторых вариантах счета (см., например, рис.5 в [3]) и, таким образом, пропустили явление, которое получило впоследствии название динамического хаоса (см. [4]). Зато они открыли удивительную устойчивость нелинейных систем, что послужило толчком к развитию мощных математических методов "конструирования" целых семейств полностью интегрируемых нелинейных уравнений (см., например, [5])^{ж)}. В данном случае речь идет об обычных аналитических интегралах движения, так что все эти полностью интегрируемые системы являются, в соответствии с теоремой Пуанкаре, исключительными.

Загадка теоремы Пуанкаре была окончательно решена изумительно красивой теорией КАМ (Колмогорова-Арнольда-Мозера), одним из создателей которой был профессор Ю.Мозер. Его решающий вклад в теорию связан с рассмотрением действия неаналитического возмущения на полностью интегрируемую систему, включая дискретные отображения. Он посвятил развитию этой теории и ее приложениям большое число работ (см., например, [7]).

^{ж)}В развитии этих методов существенную роль сыграла интегрируемость другой модельной системы – цепочки Тоды, которая была открыта также в численных экспериментах [6].

Согласно теории КАМ достаточно слабое возмущение нелинейной системы сохраняет полный набор интегралов движения для большинства начальных условий. Мера дополнительного множества неустойчивых траекторий стремится к нулю вместе с возмущением, однако, это множество всюду плотно. Оно состоит из тонких хаотических слоев вдоль разрушенных сепаратрис нелинейных резонансов. Подробное описание такой структуры дано, например, в [8].

Задача становится, таким образом, некорректной. Тем не менее, для консервативной системы с двумя степенями свободы ($N=2$) теория гарантирует вечную устойчивость движения в смысле малого изменения невозмущенных интегралов на бесконечном интервале времени (включая и хаотические слои!). Это объясняется тем, что хаотические слои в этом случае изолированы друг от друга инвариантными торами, а неустойчивость движения в них резко ограничена малой толщиной слоя.

Ситуация кардинально изменяется в многомерной системе ($N>2$), где хаотические слои образуют единое связное множество — всюду плотную сеть, или "паутину", охватывающую всю энергетическую поверхность. Хаотическая траектория этого множества подходит сколь угодно близко к любой точке энергетической поверхности, но не является эргодической, так как остается все время на множестве малой меры! Априори, такая замысловатая структура движения кажется совершенно невероятной, во всяком случае для физиков. Теория КАМ помогла им существенно развить воображение, и сейчас описанная выше картина представляется уже естественной и понятной на языке нелинейных резонансов и их взаимодействия. Наиболее важным следствием этой картины является медленное движение траектории по паутине [9], которое оказалось хаотическим и получило название диффузия Арнольда [8].

Задача остается, однако, существенно некорректной. Один из методов регуляризации состоит во введении дополнительного внешнего слабого шума, действие которого усиливается диффузией Арнольда уже для любых начальных условий, причем усиление тем больше, чем слабее шум [8]. Другой метод — ограничение интервала времени, что превращает всюду плотную паутину хаотических слоев в сетку с ячейками конечного размера.

В этой статье мы рассмотрим иную постановку задачи: с какой точностью можно ввести приближенные интегралы в многомерной теории КАМ для произвольных начальных условий? Таким образом мы приходим к новому понятию приближенной интегрируемости, которую мы будем называть КАМ-интегрируемостью [10]. Любые интегралы движения, хотя бы и приближенные, играют важную роль в физике. Классическим примером последних являются адиабатические инварианты. Оказывается, что адиабатическая инвариантность тесно связана с КАМ-интегрируемостью [11]. Как сейчас хорошо известно и будет еще раз продемонстрировано ниже на относительно простой модели, образование хаотических слоев в условиях теории КАМ происходит под действием высокочастотного возмущения, тогда как адиабатическая инвариантность имеет место при низкочастотном возмущении. Ясно, что оба класса задач отличаются только тем, какая из взаимодействующих степеней свободы системы считается возмущаемой, а какая возмущающей. Можно сказать, поэтому, что КАМ-интегрируемость есть "обращенная адиабатичность".

Изменение невозмущенных интегралов движения пропорционально возмущению и, вообще говоря, не очень мало для любых начальных условий. Существенно, однако, что такие относительно большие возмущения не накапливаются со временем и могут быть рассчитаны, в принципе, с большой точностью. Накапливающиеся же изменения определяются только очень медленной диффузией Арнольда, которая и кладет принципиальный предел точности КАМ-интегралов. Другой важной характеристикой этой точности служит ширина хаотических слоев, внутри которых только и может идти диффузия в чисто динамической постановке задачи (без внешнего шума). Обе характеристики связаны между собой: грубо говоря, скорость диффузии пропорциональна квадрату ширины слоя (или кубу ширины при наличии внешнего шума [12]). Именно эта зависимость и будет использована ниже для измерения скорости диффузии в численных экспериментах при очень малом возмущении или, как мы будем говорить, в области Нехорошева (см. [8]). Диффузия определяется здесь резонансами высоких порядков и очень сложным образом зависит от параметров системы и начальных условий движения. Тем не менее в [12] удалось получить простую, хотя и весьма грубую, оценку для скорости диффузии. Нашей основной

целью является исследование возможности распространения этой оценки на значительно более широкую область (слабых) возмущений, а также сравнение ее со строгой оценкой сверху, найденной Нехоршевым [13]. Мы подтверждаем экспоненциальную медленность скорости диффузии и ширины хаотического слоя для достаточно малых возмущений. Вместе с тем, получены первые указания на существование весьма широкой (по возмущению) области со степенным законом убывания скорости диффузии. Это интересное явление требует дальнейших исследований.

В любом случае убывание происходит достаточно быстро, что еще раз показывает высокую точность и качество КАМ-интегралов, а, следовательно, и их важное значение для физики.

1. Модель

Мы используем ту же модель, что и в [12]. Она описывается гамильтонианом:

$$H(x_i, p_i) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \frac{x_1^4 + x_2^4}{4} - \mu x_1 x_2 - \varepsilon x_1 f(t). \quad (1)$$

Выбор вида невозмущенной системы ($\mu = \varepsilon = 0$) связан с тем, что при сильной нелинейности ($\omega = \beta a$, где ω - частота колебаний; a - их амплитуда; $\beta = 0.8472 \dots$) колебания весьма близки к гармоническим: амплитуды высших гармоник $a_{2n-1}/a \approx \exp(-\pi n)$ [8].

Малые безразмерные параметры возмущения определяются выражениями

$$\tilde{\mu} = \frac{\mu}{a^2}; \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon f}{a^3}; \quad \tilde{\gamma} = \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\mu}} = \frac{\varepsilon f}{\mu a}. \quad (2)$$

Периодическая внешняя сила выбрана в виде:

$$f(t) = \frac{\cos(\Omega t)}{1 - A_0 \cos(\Omega t)} \approx \sum_m \frac{2}{5} e^{-5m} \cos(m \Omega t). \quad (3)$$

Последнее выражение справедливо при $\tilde{\sigma} = (1 - A_0^2)^{1/2} \ll 1$. Мы используем ниже $A_0 = 0.995$; $\tilde{\sigma} \approx 0.1$. Это необходимо для получения достаточно густой сетки внешних резонансов $\omega = m \Omega$, в противном случае скорость диффузии Арнольда становится слишком малой. Мы работали при $\omega/\Omega \approx 5.5$, когда амплитуды ближайших гармоник $f_m \approx 2 \exp(-5m)/\tilde{\sigma} \approx 11.5$.

В качестве ведущего резонанса, вдоль которого идет диффузия Арнольда (см. § 2 ниже), был выбран основной резонанс связи $\omega_1 = \omega_2$. При $\varepsilon = 0$ движение вблизи резонанса представляет собой фазовые колебания, т.е. колебания резонансной фазы $\psi = \theta_1 - \theta_2$, где фазы θ_i описывают движение невозмущенных осцилляторов: $x_i \approx a_i \cos \theta_i$. Фазовые колебания сопровождаются биениями амплитуд a_i и приближенно описываются гамильтонианом "маятника" (подробнее см. в [8]):

$$H_1(\psi, P) \approx \frac{\beta^2}{a_0^2} P^2 - \frac{\mu a_0^2}{2} \cos \psi. \quad (4)$$

Здесь P - импульс, сопряженный ψ ; $a_0 = \bar{a}_1 = \bar{a}_2 = \text{const}$. Положение устойчивого равновесия "маятника" $\psi = 0$ ($H_1 = -\mu a_0^2/2$)

соответствует устойчивой периодической траектории в центре резонанса связи. В окрестности этой траектории фазовые колебания являются гармоническими с частотой $\Omega \mu = \beta \mu^{1/2}$. Малость этой частоты при $\mu \rightarrow 0$ и определяет адиабатичность внешнего возмущения с параметром ε .

Неустойчивое положение "маятника" $\psi = \pi$ ($H_1 = \mu a_0^2/2$)

соответствует неустойчивой периодической траектории, через которую проходит сепаратрисная поверхность (сепаратриса), ограничивающая область нелинейного резонанса в фазовом пространстве. Под действием почти любого сколь угодно слабого возмущения сепаратриса разрушается ("расщепляется"), и в ее окрестности возникает хаотический слой (рис. 1) вдоль которого (перпендикулярно плоскости рисунка) и идет диффузия Арнольда под действием внешнего возмущения ($\varepsilon \neq 0$). Отметим, что хаотический слой резонанса $\omega_1 = \omega_2$ образуется и при $\varepsilon = 0$ за счет других резонансов связи $m_1 \omega_1 = m_2 \omega_2$; $m_1 \neq m_2$ (см. § 4). Однако в этом случае диффузия вдоль резонанса зап-

решена законом сохранения энергии $H = \text{const}$, и при достаточно малом μ имеет место вечная устойчивость движения, упомянутая во введении.

В качестве алгоритма интегрирования мы использовали каноническое отображение $(x_i, p_i) \rightarrow (\bar{x}_i, \bar{p}_i)$, задаваемое производящей функцией

$$G(x_i, \bar{p}_i) = x_1 \bar{p}_1 + x_2 \bar{p}_2 + H(x_i, \bar{p}_i). \quad (5)$$

Каноничность алгоритма и, в частности, точное сохранение фазового объема является решающим при численном моделировании таких тонких явлений как диффузия Арнольда. В дальнейшем время t будем измерять в числе итераций отображения. Точность алгоритма зависит от числа шагов на период основных колебаний $N_1 = 2\pi/\beta a$ и растет с уменьшением амплитуды колебаний a . Предыдущие исследования [8, 12] показали, что вполне достаточно выбрать $a \leq 1/4$ ($N_1 \geq 30$).

Отметим, что переход к отображению эквивалентен введению в исходную модель (1) дополнительного внешнего возмущения $\tilde{F} = a^3$, которое порядка основной силы $(-x^3)$. Тем не менее из-за высокой частоты этого возмущения $2\pi \gg \Omega$ ($= 0.0346$ в нашем случае) вызываемая им диффузия не наблюдаемо мала (см. § 4)! Однако дальнейшее увеличение a существенно затрудняет измерения из-за повышения фона от ограниченных квазипериодических колебаний H . Отметим, что такой фон может быть эффективно подавлен с помощью специального усреднения по времени [14], которое использовалось и в настоящей работе (§ 4).

2. Резонансы первого порядка

Минимальное число резонансов, необходимое для диффузии Арнольда равно трем: один ведущий и два возмущающих. При одном возмущающем резонансе диффузия идет под углом к хаотическому слою и ограничена его небольшой шириной. Иначе можно сказать, что диффузия ограничена тем же самым механизмом, что и ширина слоя.

При умеренном (не слишком малом, см. § 3) возмущении можно ограничиться резонансами первого приближения. В нашей моде-

ли (1) это основной резонанс связи $\omega_1 = \omega_2$, который мы выбрали в качестве ведущего, и два ближайших к нему внешних резонанса $\omega_1 = m\Omega$. При $\omega/\Omega \approx 5.5$ значения $m = 5; 6$.

С другой стороны, возмущение не должно быть и слишком сильным, что привело бы к глобальному хаосу из-за перекрытия резонансов и к значительно более быстрой диффузии. Например, перекрытие внешних резонансов происходит при условии [8]: $\varepsilon \geq a\Omega^2/2\pi^2\beta^2 f_m$, или

$$\lambda \equiv \frac{|\delta\omega|}{\Omega\mu} \leq \pi \left(\frac{\tilde{\nu}_m}{2}\right)^{1/2} = \lambda_1,$$

где λ - параметр адиабатичности, играющий основную роль в проблеме КАМ - интегрируемости (см., введение и ниже); $|\delta\omega| \approx \Omega/2$ - максимальная расстройка от внешних резонансов; $\tilde{\nu}_m = \varepsilon f_m/\mu a$ (см. (2)). Условие (6) не зависит, конечно, на самом деле от μ , но для сравнения с другими режимами движения ниже его удобно записать именно в такой форме. При $\lambda \ll \lambda_1$ скорость диффузии по энергии достигает величины (см., например, [15])

$$D_1 \equiv \frac{(\Delta H)^2}{t} \approx \frac{\pi}{4} \frac{\varepsilon^2 f_m^2 a^2 \omega^2}{\Omega}. \quad (6)$$

В этих условиях КАМ-интегрируемость, конечно, полностью нарушается.

С учетом резонанса связи граница перекрытия повышается (по λ) до

$$\lambda_2 \approx \pi \left[\left(\frac{\tilde{\nu}_m}{2}\right)^{1/2} + \frac{1}{2} \right] = \lambda_1 + \frac{\pi}{2}. \quad (7)$$

При $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ хаотическая компонента движения все еще занимает относительно широкую область между двумя соседними внешними резонансами. Поэтому КАМ-интеграл (в нашей задаче - энергия H) сохраняется во всяком случае не лучше, чем $\Delta H/H \approx 4da/a \sim 4\Omega/\omega \sim 1$. В действительности, изменение

Н еще больше из-за быстрой диффузии Арнольда (см. ниже).

При $\lambda \geq \lambda_2$ диффузия ограничена относительно узким хаотическим слоем в окрестности сепаратрисы резонанса связи. Ширину слоя удобно измерять в безразмерных единицах (см. (4))

$w = (2H_1 / \mu a_0^2) - 1$. На невозмущенной сепаратрисе $w = 0$, а в центре резонанса $w = -2$. Согласно [8] при $\bar{\nu}_m \leq 1$ полуширина хаотического слоя по резонансам первого приближения

$$w_s \approx 4\pi \bar{\nu}_m \lambda^2 e^{-\pi \lambda / 2}. \quad (8)$$

Если $|\delta\omega| \approx \Omega/2$, т.е. система находится посередине между двумя внешними резонансами, то все три области хаотического слоя (1, 2, 3, рис. 1) имеют одинаковую ширину. В противном случае одна из внешних областей вращения ψ (1 или 2) будет значительно уже другой. Ширина внутренней области колебаний ψ (3), напротив, возрастет примерно вдвое. Это объясняется следующим образом (см. [8]). Изменение w под действием внешнего возмущения происходит в окрестности $\psi \approx 0$, т.е. через период времени

$$T(w) \approx \frac{1}{\Omega \mu} \ln \frac{32}{|w|}, \quad (9)$$

который равен периоду вращения ψ и полупериоду колебаний ψ . В асимметричном случае ($|\delta\omega| \ll \Omega/2$) возмущение действует практически только на одном полупериоде колебаний (и только для одного направления вращения), так что период возмущения для колебаний удваивается, и это приводит к увеличению ширины этой области хаотического слоя. Скорость же диффузии Арнольда в слое резко уменьшается, поскольку она определяется наиболее далеким (по расстройке $|\delta\omega|$) внешним резонансом.

Характерной особенностью соотношения (8) является экспоненциально малая ширина хаотического слоя при малом возмущении, причем это определяется главным образом параметром адиабатичности $\lambda \gg 1$. Отметим, что последний зависит только от малости возмущения, связанного с ведущим резонансом (параметр μ). Зависимость w_s от возмущающих резонансов значительно слабее ($\sim \bar{\nu}_m$).

Ширина хаотического слоя w_s связана простым соотношением

$$w_s \approx \lambda W \quad (10)$$

с расщеплением невозмущенной сепаратрисы $W = (\Delta w)_{max}$, которое, в свою очередь равно максимальному изменению w на периоде T (9).

Расщепление сепаратрисы, приводящее к образованию очень сложной гомоклинической структуры, было известно еще Пуанкаре, который получил и первую экспоненциальную оценку W [1] (§§ 226, 397). В дальнейшем эта проблема исследовалась во многих работах (см., например, [7, 16, 17]).

Хаотический слой гомоклинической структуры был впервые исследован в [18] и затем, более детально, в [8, 19, 20]. Результаты численного моделирования в последних работах (особенно в [19]) хорошо согласуются с простой оценкой вида (8) при не слишком больших λ .

Скорость диффузии Арнольда вдоль резонанса связи (по энергии H) также экспоненциально мала [8]:

$$D_H = \frac{(\Delta H)^2}{t} \approx \frac{\pi^2}{3} \frac{(\epsilon f_m a \omega)^2}{\Omega^2 \mu T_a} e^{-\pi \lambda}, \quad (11)$$

где T_a - средний период движения в хаотическом слое (см. (9)):

$$\Lambda = \Omega \mu T_a = \ln \frac{32e}{w_s} = \Omega \mu T(w_s) + 1. \quad (12)$$

Заметим, что для $\lambda \leq 1$ скорость диффузии Арнольда (11) сравнима с D_1 (6) при перекрытии резонансов.

Сравнивая (11) и (8), получаем основное в этой работе соотношение:

$$\tilde{D} \equiv \frac{D_H \Omega \mu}{(\varepsilon f_m a \omega)^2} \approx C_1 \frac{\tilde{w}_s^2}{\Lambda \lambda^4}; \quad (13)$$

$$\tilde{w}_s \equiv \frac{w_s}{\gamma_m}; \quad C_1 = \frac{1}{48} = C_1^*$$

между безразмерной скоростью диффузии \tilde{D} и приведенной шириной хаотического слоя \tilde{w}_s . Это соотношение непосредственно применимо, однако, только при $\delta\omega \approx \Omega/2$. В противном случае w_s определяется ближайшим внешним резонансом (минимальным $|\delta\omega|$), тогда как скорость диффузии — максимальным $|\delta\omega|$, т.е. скорость существенно уменьшается.

3. Резонансы высших порядков

Диффузия Арнольда впервые наблюдалась в численных экспериментах в работе [21] и детально исследовалась в [8, 22]. Уже в [8] было замечено, что при $\lambda \geq 5$ скорость диффузии начинает заметно превышать простую оценку (11). Качественно это объясняется возмущением от резонансов высоких порядков, тем выше, чем больше λ . Хотя их амплитуды очень малы, они образуют значительно более густую сетку по сравнению с внешними резонансами первого порядка. Это приводит к уменьшению расстройки: $\delta\omega \rightarrow \tilde{\delta\omega} < \delta\omega$, а, следовательно, и к ухудшению адиабатичности $\lambda \rightarrow \tilde{\lambda} < \lambda$. Ясно, что структура движения становится в этой области чрезвычайно сложной, и аналитическая теория может, в лучшем случае, дать лишь грубую оценку порядка величины. Это и было сделано в [8] (см. также [23]):

$$\tilde{D} \sim D_0 \exp(-A\lambda^{1/M}). \quad (14)$$

Здесь M — число линейно независимых (несоизмеримых) невозмущенных частот, образующих резонансы высших порядков; D_0 и A считаются постоянными. В качестве $\lambda = \Omega/2\Omega\mu$ можно принять (в отличие от (11)) его максимальное значение по первому приближению, поскольку $\tilde{\delta\omega}$ слабо зависит от исходного $\delta\omega$ (см. § 4). Согласно (14) эффективный параметр адиабатичности

(ср. (11))

$$\tilde{\lambda} \approx \frac{\tilde{\delta\omega}}{\Omega\mu} \approx \frac{A}{\pi} \lambda^{1/M} \ll \lambda \quad (15)$$

Последнее неравенство определяет границу применимости оценок (14, 15): $\lambda \geq (A/\pi)^{M/(M-1)}$.

Теория, развитая в [8], показывает, что основное соотношение (13) сохраняется по порядку величины для любой системы резонансов, однако, C_1 вообще говоря как-то зависит от параметров системы и может существенно изменяться по величине (§ 4). Из (14, 15) тогда следует, что

$$\tilde{w}_s \sim \left(\frac{\Lambda D_0}{C_1}\right)^{1/2} \tilde{\lambda}^2 e^{-\pi\tilde{\lambda}/2}. \quad (16)$$

Ранее в работе [13] была получена строгая оценка сверху для скорости изменения невозмущенных интегралов движения, которой можно придать вид (14) с параметром (см. [8])

$$M = M_N = \frac{(3N-1)N}{4} + 2 > N, \quad (17)$$

где N — число степеней свободы автономной гамильтоновой системы. Даже при $N=2$ параметр $M_N = 4.5$ существенно превышает найденное в [12] значение $M=2$. Разумеется, это не противоречит верхней границе (17). Однако желательно получить более эффективную оценку скорости диффузии.

В работе [12] измерялась непосредственно скорость диффузии D_H . Из-за ее быстрого убывания с возмущением удалось продвинуться только до $\lambda \approx 10$, несмотря на применение суперкомпьютера CRAY-1. Поэтому в настоящей работе использована другая методика: мы измеряли непосредственно только ширину хаотического слоя w_s , а затем вычисляли D_H , по формуле (13). Разительный выигрыш в скорости счета характеризуется тем, что нам удалось дойти до $\lambda \approx 50$ с помощью персонального компьютера! Обратная сторона медали будет обсуждаться ниже (§ 6).

4. Численный эксперимент

Основное численное моделирование системы (1) проводилось по описанному в § 1 алгоритму при следующих значениях параметров:

$$\varepsilon/\mu = 0.01; \quad \Omega = 0.0346; \quad A_0 = 0.995 \quad (f_m \approx 11.5);$$

$$a = 0.225; \quad \omega/\Omega = 5.5; \quad |\delta\omega| \approx \Omega/2; \quad \bar{T}_m = 0.5$$

Параметры μ и λ изменялись в широких пределах:

$$200 \leq \frac{1}{\sqrt{\mu}} \leq 2500; \quad 4 \leq \lambda \leq 50. \quad (18)$$

При $\lambda \geq 20$ счет производился с двойной точностью (20 десятичных разрядов).

Начальные условия движения выбирались внутри хаотического слоя. При больших λ для этого недостаточно положить $\alpha_1 = \alpha_2$, $\psi = \pi$, как в [12]. Попадание в слой определялось по переходу от вращения ψ к колебаниям или наоборот.

Основной измеряемой величиной служил период движения в слое $T(w)$, из которого по формуле (9) вычислялось текущее значение ширины слоя w . Для уменьшения ошибки измеренного значения T применялось специальное усреднение (§ 1) резонансной фазы ψ .

Разница соседних значений w удовлетворительно описывается простым соотношением [8]:

$$\Delta w \approx W \sin \varphi, \quad (19)$$

$$W^2 \approx 2 (\Delta w)^2.$$

Здесь φ — значение некоторой резонансной фазы в момент времени, когда $\psi = 0$. В хаотическом слое φ изменяется случайно, поэтому можно ожидать, что максимальное $\Delta w_{max} \approx W \approx (2 (\Delta w)^2)^{1/2}$. На самом деле среднее отношение

$\Delta w_{max} / ((\Delta w)^2)^{1/2} \approx 2$. Подобная аномалия наблюдалась также в [8] (§ 6.1) и объясняется, по видимому, редкими большими флуктуациями. Мы использовали величину $(\Delta w)^2$, как более надежную, вычисляя W в (13) по формуле (19). В конечном счете это сказывается лишь на значении подгоночной постоянной C_1 (см. (21) ниже).

Фактическая ширина хаотического слоя w_m определялась по минимальному периоду $T(w_m)$, который удовлетворительно согласуется со средним периодом T_a (12): $\langle \Omega \mu (T_a - T(w_m)) \rangle \approx 1.14$. Для нахождения полной ширины слоя w_s вводилась поправка на медленную диффузию у границы слоя (см. (4.49) в [8]):

$$\frac{w_s}{w_m} \approx 1 + \left(\frac{100}{n}\right)^{0.4} \approx 2, \quad (20)$$

где $n = t/T_a$ — среднее число периодов за полное время движения t . Мы полагали обычно $n \approx 100$.

Все измеренные величины усреднялись по 10 траекториям, чтобы подавить большие флуктуации, характерные для хаотического движения с границей хаоса на краях слоя [24].

Для вычисления $\delta\omega$ проводилось прямое измерение частот ω_1, ω_2 , поскольку точность соотношения $\omega = \beta a$ оказалась недостаточной.

Скорость диффузии находилась по формуле (13), где вместо λ подставлялась $\bar{\lambda} = w_s/W$ (10). Для этого нужно определить вначале параметр C_1 , который считался постоянным. Это было сделано по данным [12] в интервале $\lambda \approx 3.7 \div 8$. Среднее значение по 11 точкам

$$\langle \log C_1 \rangle = 0.55 \pm 0.27; \quad C_1 \approx 3.6 \quad (21)$$

Здесь указан среднеквадратичный разброс десятичного логарифма C_1 . Систематическое изменение C_1 с λ не наблюдается. Полученное значение C_1 почти в 200 раз превышает $C_1^* \approx 1/50$ (13), что отчасти связано, по видимому, с большим числом возмущающих резонансов высших порядков (см. также ниже, рис.4).

При $\lambda > 8$ скорость диффузии \bar{D} вычислялась по формуле (13) с C_1 из (21). Результаты основной серии измерений

с $\alpha = 0.225$ ($\delta\omega = 0.0156$) приведены на рис.2. Прямая представляет зависимость (14) с $M=2$ и параметрами $D_0 \approx 2.0$; $A \approx 5.60$, полученными подгонкой по методу наименьших квадратов. Это можно сравнить со значениями $D_0 \approx 26$; $A \approx 7.9$ в [12]. Ввиду грубости оценки (14) согласие можно считать удовлетворительным (см. также ниже, рис.4). Более того, разброс точек на рис.2 представляется неожиданно малым. Это объясняется, повидимому, тем, что в этой серии измерений изменялся только один параметр μ .

На рис.3 показана зависимость скорости диффузии от другого параметра - приведенной расстройки $\delta = 1 - (2|\delta\omega|/\Omega)$. Значение $\delta = 0$ соответствует положению системы точно посередине между двумя внешними резонансами, а $\delta = 1$ - попаданию в один из них. Горизонтальная прямая - оценка (14) с подгоночными параметрами, отвечающими рис.2.

На рис.3 приведены данные для двух значений параметра возмущения $1/\sqrt{\mu} = 600$; 300 . В первом случае помимо основной внешней силы (3) показаны результаты и для двух других видов возмущения: а) двухчастотная сила с $\Omega_1 = 5\Omega$; $\Omega_2 = 6\Omega$; $\Omega_2/\Omega_1 = 6/5$ и теми же амплитудами (3), т.е. из всего спектра силы (3) оставлены две ближайшие гармоники; б) сила с двумя независимыми частотами $\Omega_1 = 0.17004762$; $\Omega_2 = 0.21055238$; $\Omega_2/\Omega_1 = 1.2381966$, амплитуды те же. Все три варианта хорошо согласуются между собой и демонстрируют существенную зависимость скорости диффузии от расстройки $\delta\omega$. Зависимость связана, повидимому, с изменением плотности резонансов высоких порядков, а, следовательно, и величины $\delta\omega$. В наибольшей степени это проявляется в очень узком интервале $\delta \lesssim 10^{-3}$, т.е. вблизи резонанса низкого (второго) порядка $2\omega = \Omega_1 + \Omega_2$. Действительно, простые арифметические соображения показывают, что в этой области плотность резонансов высоких гармоник $\sim m$ падает как $1/m$. Аналогичное поведение имеет место и вблизи внешних резонансов первого порядка, $\delta \approx 1$. В остальной области $\delta\omega$ зависимость $\bar{D}(\delta)$ значительно слабее, так что грубая оценка (14) с независимым от δ параметром A сохраняет силу.

Значения скорости диффузии при $\delta \approx 0$ дают также верхнюю границу возможного фона. Последний оказывается, таким образом,

меньше наблюдаемого эффекта по крайней мере на 4 порядка независимо от λ .

Интересно отметить, что при $\varepsilon = 0$ рассчитанная по формуле (13) скорость диффузии (фиктивная, см. § 1) падает на 11 порядков. Дискретность же алгоритма счета (5) вызывает дополнительную диффузию (по оценке (14)) со скоростью $\bar{D} \sim 10^{-10}$ (!) из-за очень большого значения параметра адиабатичности $\lambda = \pi/\beta\sqrt{\mu} \approx 800$ при $1/\sqrt{\mu} = 500$.

На рис.4 представлена зависимость эффективного параметра адиабатичности $\tilde{\lambda} = \omega_s/W = \omega_s / (2(\Delta\omega)^2)^{1/2}$ (10,19) от $\lambda = \Omega/252\mu$. Видно, что при $\lambda \geq 15$ действительно достигается (в пределах флуктуаций) асимптотическое соотношение (15) (горизонтальная прямая). С другой стороны, во всей области $\lambda \leq 10$ исследованной в [12], соотношение (15) выполняется плохо. Возможно, что именно с этим связано неожиданно большое значение подгоночной постоянной C_1 (21), полученное по данным [12]. Повидимому, в этом же состоит и объяснение anomalously малой скорости диффузии для $1/\sqrt{\mu} = 300$ на рис.3 (за исключением максимального $\delta = 0.1$, что соответствует основному варианту на рис.2).

Наши результаты подтверждают величину основного параметра оценки (14) $M=2$, найденное в [12]. Это значение объяснялось в [12] присутствием двух независимых частот Ω и ω (на резонансе связи $\omega_1 = \omega_2 = \omega$). Такое объяснение качественно подтверждается резким падением скорости диффузии при $\delta \approx 0$ (рис.3), когда частоты становятся соизмеримыми: $\omega/\Omega = 1/2$ и $M=1$ (см. также § 5).

Таким образом, теоретическое значение M (см. (14)) казалось бы подтверждается. Тогда можно было бы ожидать, что при двух независимых частотах Ω_1, Ω_2 внешнего возмущения $M=3$, и скорость диффузии должна существенно возрасти. Однако этого не наблюдается (рис.3, □). В следующем параграфе делается попытка объяснить это противоречие.

5. Слабая адиабатичность?

Наша гипотеза состоит в том, что постоянная A в оценке (14) на самом деле растет с M . Предположим, что эта зависимость приблизительно линейная, т.е. $A = BM$, где теперь B считается постоянной. Тогда для $\lambda = 12$ (рис.3, □) расчетные скорости диффузии при $M=2$ и $M=3$ отличаются лишь незначительно. Более того, из данных на рис.2 следует $B \approx 2.80$, что близко к $B = \pi$ при $M=1$ (см. формулу (11)).

Для модифицированной оценки $\tilde{D} \sim D_0 \exp(-BM\lambda^{1/M})$ кривые зависимости $\tilde{D}(\lambda)$ при разных M будут теперь пересекаться. Это означает, в частности, что скорость диффузии при $\tilde{M} < M$ может быть больше, чем при фактическом значении M . Такая повышенная скорость диффузии может осуществляться за счет возмущающих резонансов, образованных комбинацией меньшего числа частот \tilde{M} . Например, при достаточно малых λ всегда существует область, где диффузия определяется резонансами первого порядка (11), т.е. $\tilde{M} = 1$ для любого M . Поэтому для каждого λ нужно найти такое $\tilde{M}(\lambda) \leq M$, при котором скорость диффузии будет максимальной.

В результате зависимость $\tilde{D}(\lambda)/D_0$ будет представлять из себя последовательность функций $\exp(-B\tilde{M}\lambda^{1/\tilde{M}})$ с разными $\tilde{M} \leq M$. Ввиду грубости оценки можно заменить эту последовательность ее огибающей (при $\tilde{M} < M$), которая строится следующим образом. Будем считать функцию $\tilde{M}(\lambda)$ непрерывной и найдем ее из условия $\partial \tilde{D}(\lambda, \tilde{M}) / \partial \tilde{M} = 0$,

откуда $\tilde{M} = \ln \lambda$. Подставляя это соотношение в выражение для $\tilde{D}(\lambda, \tilde{M})$, получим для огибающей простое выражение:

$$\tilde{D} \sim D_0 \lambda^{-Be}, \quad (22)$$

где $e = 2.718\dots$. Такое медленное убывание скорости диффузии будет справедливо, однако, только пока $\tilde{M} < M$, т.е. при $\lambda < \lambda_m = e^M$, после чего зависимость становится экспоненциальной. Закон (22) и есть слабая адиабатичность.

Таким образом, если наша гипотеза справедлива, то оценка скорости диффузии Арнольда принимает вид:

$$\tilde{D} \sim \begin{cases} D_0 \lambda^{-Be} & \lambda \leq e^M; \\ D_0 \exp(-BM\lambda^{1/M}) & \lambda \geq e^M, \end{cases} \quad (23)$$

Отметим, что обе кривые $\tilde{D}(\lambda)$ касаются в точке $\lambda = e^M$.

На рис.5 данные рис.2 (+) представлены в двойном логарифмическом масштабе. Прямая - степенная зависимость (23) с подгонными параметрами $D_0 \approx 1.6$; $B \approx 2.84$. Последняя величина очень близка к значению $B \approx 2.80$ по данным рис.2. Кривые на рис.5 представляют экспоненциальную зависимость (23) для $M=1, 2, 3$. Квадратами показаны случаи с минимальной расстройкой $\delta < 10^{-3}$ (см. рис.3), для которых ожидается $M=1$ (§ 4).

Для дополнительной проверки принятой гипотезы мы произвели измерение скорости диффузии в случае двух независимых частот Ω_1, Ω_2 (см. § 4, ожидается $M=3$) и $\lambda = |\Omega_1 - \Omega_2| / 2\Omega_{\mu} = 35.4$ ($1/\sqrt{\mu} = 1500$). При этом значении $\lambda > e^3 \approx 20$ оценки (23) для $M=2$ и $M=3$ отличаются почти на 3 порядка. Действительно, измеренные величины $-\log \tilde{D}$ лежат в интервале 13.8 ± 9.6 (среднее $-\langle \log \tilde{D} \rangle = 11.9$), тогда как оценка (23) дает 14.3 ($M=2$) и 11.8 ($M=3$). Значительный разброс \tilde{D} связан с зависимостью от расстройки $\delta = 0.00084 \pm 0.085$ (ср. рис.3). Отметим, что при $\delta = 0$ скорость диффузии падает до величины $-\log \tilde{D} = 16.8$, что сравнимо с оценкой для $M=2$.

Разумеется, приведенные выше соображения и данные есть лишь предварительные указания на существование области слабой адиабатичности. Гипотетическое соотношение $A = BM$ не вытекает непосредственно и из простой теории [8] и требует более аккуратного вычисления плотности резонансов высоких порядков. В целом, этот интересный вопрос остается пока открытым.

6. Заключительные замечания

Основным результатом наших исследований явилось подтверждение экспоненциальной оценки (14) в широкой области значений параметра адиабатичности λ (рис.2). Наиболее важным из нерешенных вопросов нам представляется выяснение соотношения простой эмпирической оценки (14) и строгой оценки сверху Нехоршева (см. (17)). Чем объясняется их различие? Не связано ли это с тем, что обследованные нами значения λ все еще недостаточно велики? В более общей форме можно поставить вопрос, ограничена ли область применимости (14) по λ сверху?

С другой стороны, мы определенно знаем, что эта область ограничена снизу, причем не только перекрытием резонансов (§ 2). Уже в работе [12] наблюдалось отклонение от зависимости (14) при $\lambda \leq 4$, которое можно было бы грубо объяснить изменением параметра M от значения $M=2$ ($\lambda \geq 4$) до $M=1$ ($\lambda \leq 4$). В настоящей работе мы выдвигаем гипотезу, обобщающую такое поведение на произвольные M (§ 5). Отсюда мы приходим к неожиданному заключению о существовании области "слабой адиабатичности", в которой скорость диффузии падает только как некоторая степень параметра адиабатичности (23). Ширина этой области по λ быстро растет с M , и ее детальное изучение заслуживает самого серьезного внимания.

Продвижение в область больших λ стало возможным благодаря новому методу оценки скорости диффузии по толщине хаотического слоя. Разительное преимущество этого метода демонстрируется тем, что нам удалось дойти до $\lambda = 50$, используя всего лишь (хороший) персональный компьютер, тогда как при прямом измерении скорости диффузии на суперкомпьютере CRAY-1 пришлось удовлетвориться скромной областью $\lambda \leq 10$. Однако новый метод также имеет свои ограничения: он отказывает (по крайней мере в существующем виде), если в системе образуются модуляционные хаотические слои, скорость диффузии в которых никак не связана с их шириной [25]. Более точно, применимость нового метода ограничена условием $\lambda > \lambda_{mod}$, где λ_{mod} — некоторое критическое значение, при котором образуется модуляционный слой.

Даже в области слабой адиабатичности изменение невозмущенных интегралов движения достаточно быстро падает с возмущением. Это еще раз подтверждает высокую точность КАМ-интегралов и их важное значение для физики. Вместе с тем полученные оценки могут оказаться полезными в тех особых случаях, когда даже очень медленная диффузия является существенной, как, например, в динамике астероидов или встречных пучков заряженных частиц, особенно, тяжелых (см., например, [26]).

Мы пользуемся случаем еще раз отметить важность международного научного сотрудничества, большой вклад в которое внес проф. Ю.Мозер.

ЛИТЕРАТУРА:

1. H.Poincaré. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Paris, 1892, §§ 81-83.
2. E.Fermi. Phys. Z. 24 (1923) 261.
3. E.Fermi, J.Pasta and S.Ulam. Studies of Nonlinear Problems I. LA-1940, Los Alamos, 1955; Collected Works of E.Fermi. Univ. of Chicago Press, 1965, Vol.2, p.978.
4. Ф.М.Израйлев, Б.В.Чириков. ДАН СССР 166 (1966) 57.
5. N.Zabusky, J. Comput. Physics 43 (1981) 195.
6. J.Ford, S.D.Stoddard and J.S.Turner. Prog. Theor. Phys. 50 (1973) 1547.
7. J.Moser. Stable and Random Motions in Dynamical Systems with special emphasis on celestial mechanics. Princeton Univ. Press, 1973.
8. B.V.Chirikov. Phys. Reports 52 (1979) 263.
9. В.И.Арнольд. ДАН СССР 156 (1964) 9; Проблема устойчивости и эргодические свойства классических динамических систем. Тр. Межд. конгресса математиков, Москва, 1966, с.387.
10. B.V.Chirikov. The Nature and Properties of the Dynamical Chaos. Preprint INP 82-152, Novosibirsk, 1982.
11. B.V.Chirikov. Proc. R. Soc. Lond. A 413 (1987) 145.
12. B.V.Chirikov, J.Ford and F.Vivaldi. Some Numerical Studies of Arnold Diffusion in a Simple Model. A.I.P. Conf. Proc. 57 (1979) 323.
13. Н.Н.Нехорошев. УМН 32: 6 (1977) 5; Тр. семинара им. И.Г. Петровского, М.: МГУ, 1979, вып.5, с.5.
14. Ф.Вивальди и др. Модуляционная диффузия в нелинейных колебательных системах. Тр. 9-й Межд. конф. по нелинейным колебаниям. Киев, 1981, т.2, с.80.
15. Б.В.Чириков, Д.Л.Шепелянский. ЖТФ 52 (1982) 238.
16. В.К.Мельников. ДАН СССР 144 (1962) 747.
17. В.Ф.Лазуткин. Расщепление сепаратрис для стандартного семейства преобразований, сохраняющих площадь. Проблемы ма-

темат. Физики 12 (1986) 137.

18. N.N.Filonenko, R.Z.Sagdeev and G.M.Zaslavsky. Nuclear Fusion 7 (1967) 253;
Г.М.Заславский, Н.Н.Филоненко. ЖЭТФ 54 (1968) 1590.
19. B.V.Chirikov. Lecture Notes in Physics 179 (1982) 29.
20. D.F.Escande. Phys. Reports 121 (1985) 165.
21. Г.В.Гадияк, Ф.М.Израйлев, Б.В.Чириков. Численные эксперименты по универсальной неустойчивости в нелинейных колебательных системах (диффузия Арнольда). Тр. 7-й Межд. конференции по нелинейным колебаниям, Берлин, 1975, т.П, I, с. 315.
22. J.L.Tennyson, M.A.Lieberman and A.J.Lichtenberg. Diffusion in Near-Integrable Hamiltonian Systems with Three Degrees of Freedom. A.I.P. Conf. Proc. 57 (1979) 272.
23. Б.В.Чириков. Физика плазмы 4 (1978) 521.
24. B.V.Chirikov and D.L.Shepelyansky. Physica D 13 (1984) 395.
25. B.V.Chirikov, M.A.Lieberman, D.L.Shepelyansky and F.M.Vivaldi. Physica D 14 (1985) 289.
26. M.Month and J.C.Herrera, Eds. Nonlinear Dynamics and the Beam-Beam Interaction. A.I.P. Conf. Proc., 1979, N 57.

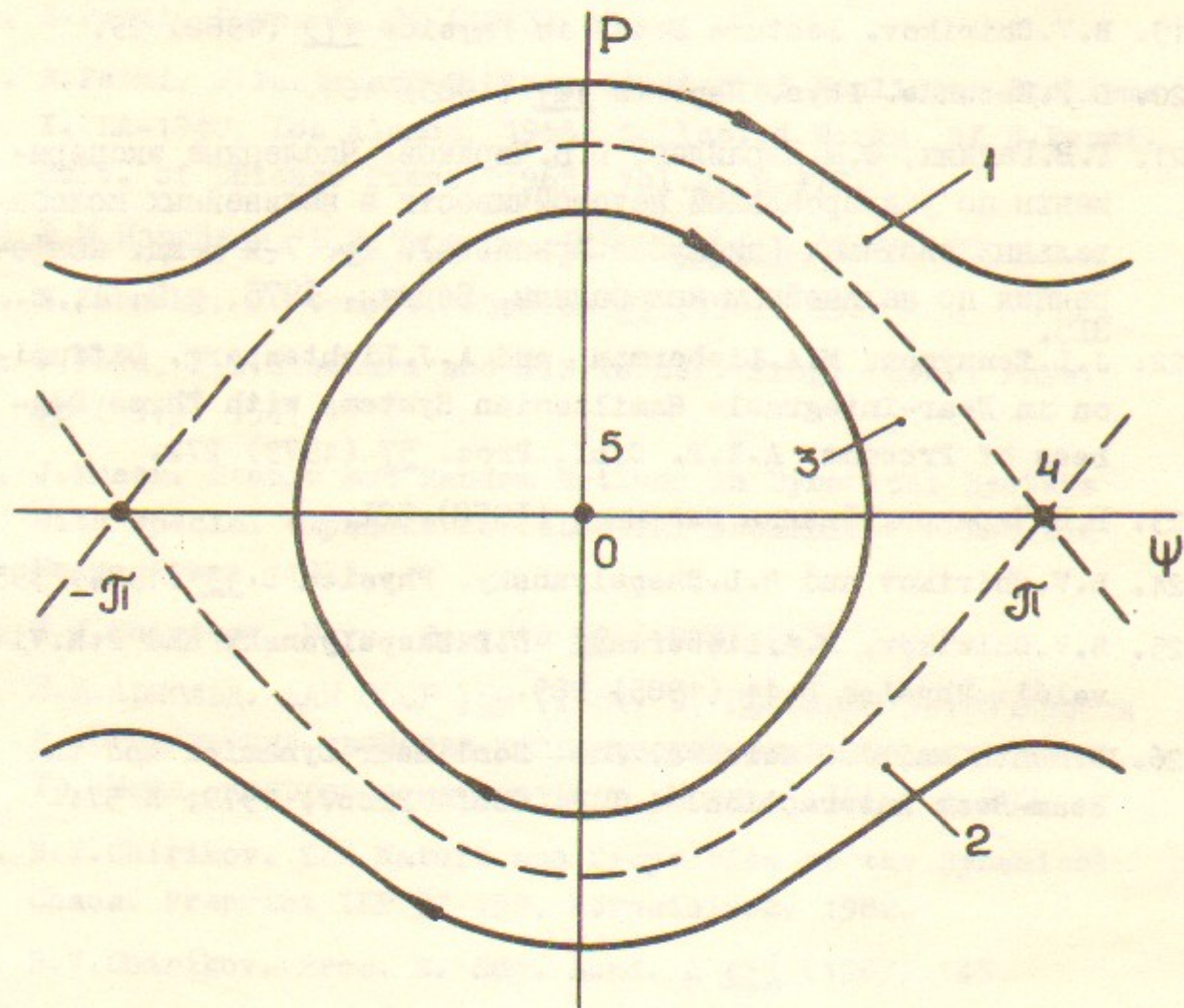


Рис.1. Схема хаотического слоя нелинейного резонанса связи $\omega_1 = \omega_2$ для модели (1) (см. (4)): 1,2 - области вращения резонансной фазы ψ в противоположные стороны; 3 - область колебаний ψ ; 4 - неустойчивая периодическая траектория; 5 - устойчивая периодическая траектория (начало координат); стрелки на границах слоя показывают направление движения; пунктир - невозмущенная сепаратриса.

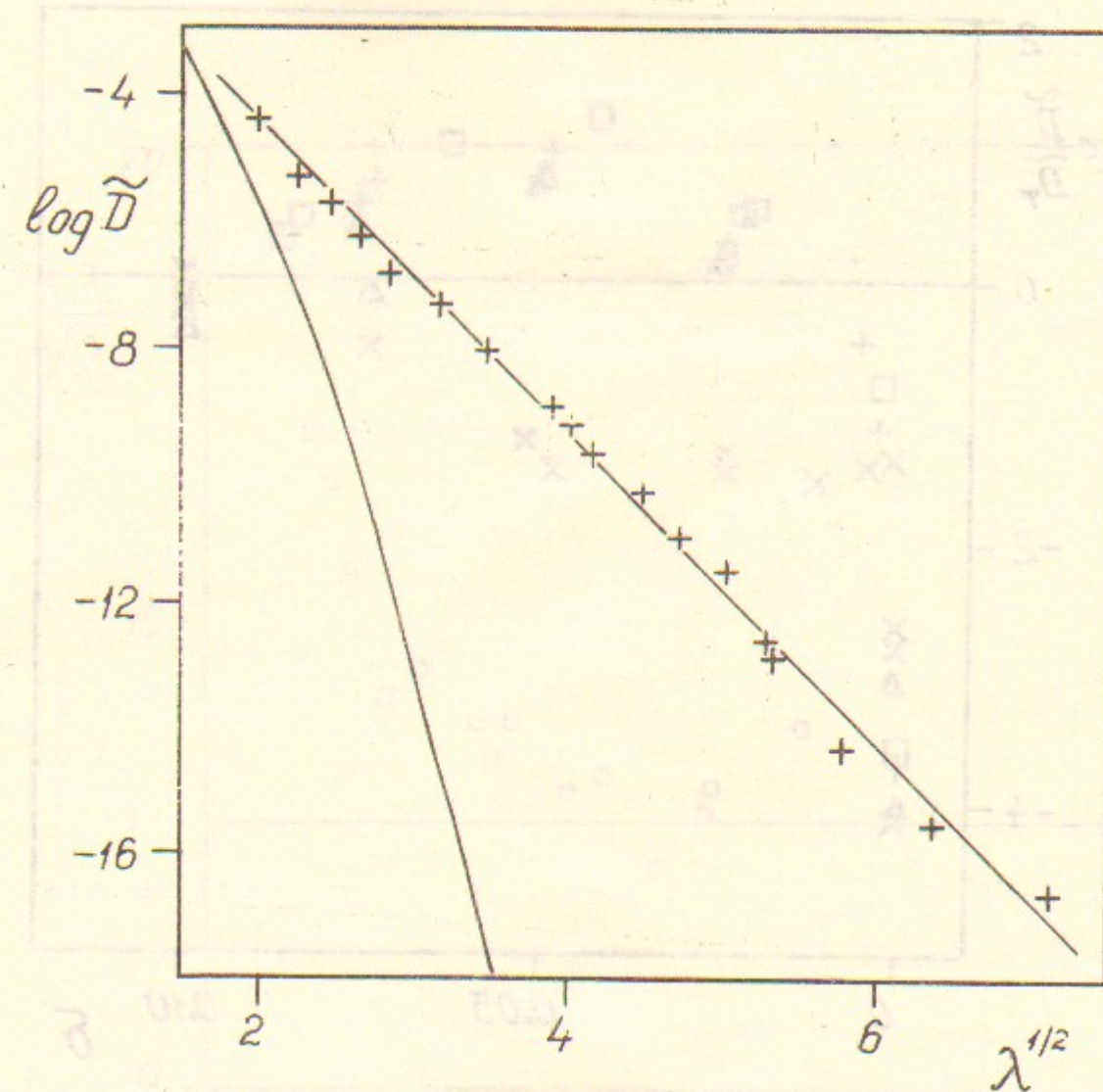


Рис.2. Основные результаты численных экспериментов (+) для модели (1): прямая - подгонка оценки (14) с $M=2$; $\lambda = \Omega / 25\Omega_M$; кривая - теория первого приближения (11); логарифм - десятичный.

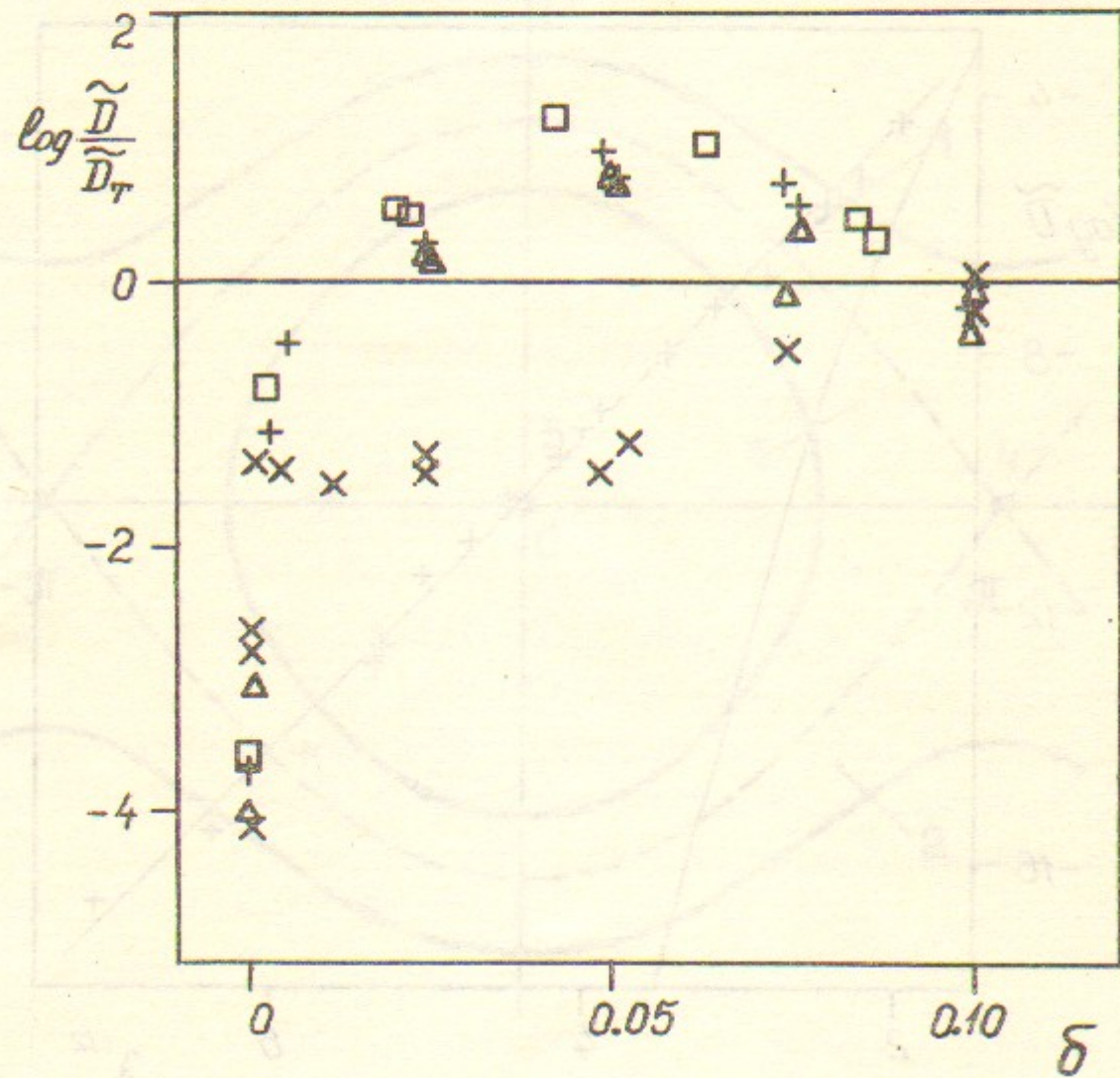


Рис.3. Зависимость скорости диффузии \tilde{D} (13) от приведенной расстройки $\delta = 1 - 2|\delta\omega|/\Omega$:

- (X) - $1/\sqrt{\mu} = 300$, возмущение (3);
- (+) - $1/\sqrt{\mu} = 600$, возмущение (3);
- (Δ) - " - , две гармоники $\Omega_2/\Omega_1 = 6/5$;
- (□) - " - , независимые Ω_1, Ω_2 ;
- \tilde{D}_T - оценка (14) с $\delta\omega = \Omega/2$.

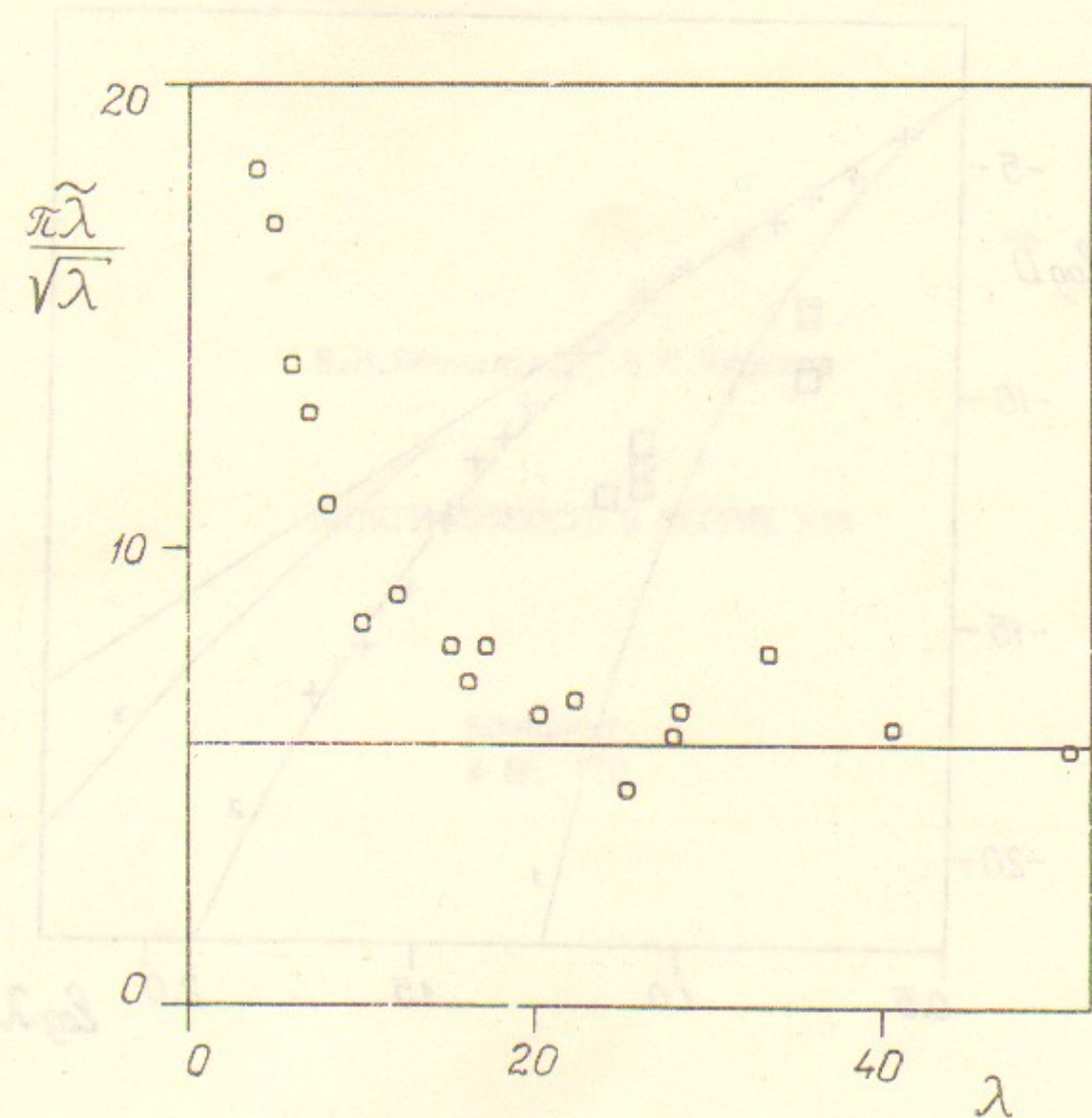


Рис.4. Зависимость эффективного параметра адиабатичности $\tilde{\lambda}$ от λ для основной серии численных экспериментов (рис.2). Прямая - ожидаемая зависимость (15) с $M=2$ и подгоночным значением $A = 5.60$ из рис.2.

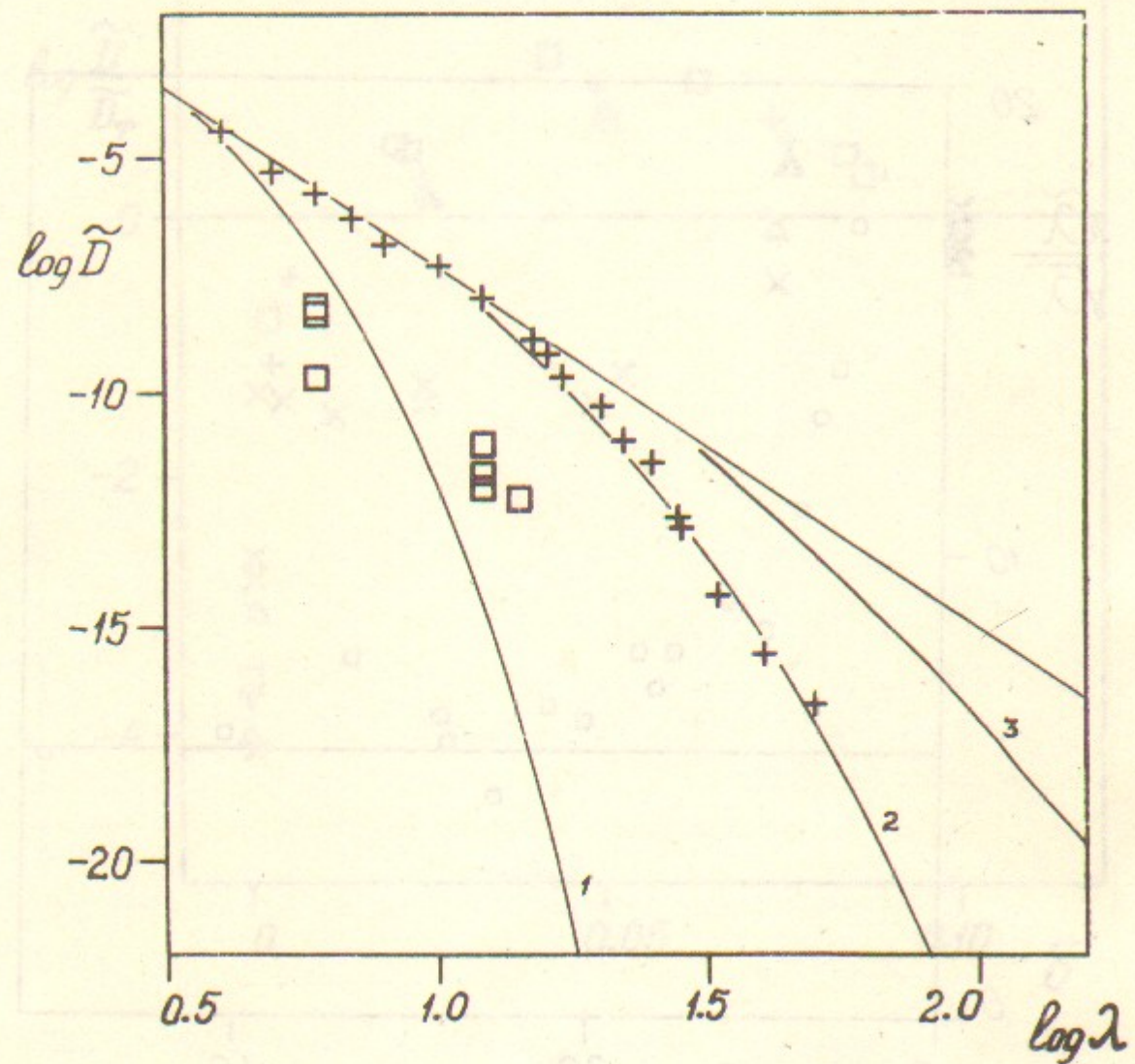


Рис.5. Гипотетическая область слабой адиабатичности (23):
 прямая - степенная зависимость; кривые - экспоненциаль-
 ные зависимости с $M = 1, 2, 3$ (цифры у кривых; (+) -
 данные рис.2 ($M=2$); (square) - случаи с $\delta=0$ (рис.3,
 $M=1$).

В.В.Вечеславов, Б.В.Чириков

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ В ТЕОРИИ КАМ

Препринт
 № 88-110

Работа поступила - 15 июня 1988 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
 Подписано к печати 26.08.1988г. МН 08446
 Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.2,0 печ.л., 1,6 учетно-изд.л.
 Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 110.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90