

64

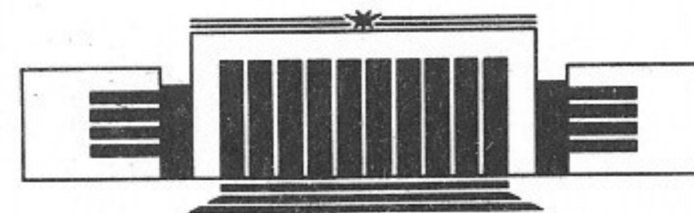
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР



В.И. Ерофеев, В.М. Малкин

КИНЕТИКА СЛАБОТУРБУЛЕНТНЫХ
ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ

ПРЕПРИНТ 88-99



НОВОСИБИРСК

В.И. Ерофеев, В.М. Малкин

Институт ядерной физики
630090, Новосибирск 90, СССР

АННОТАЦИЯ

В кинетическом уравнении для волн обычно учитывается лишь столкновительный член первого не исчезающего порядка по их энергии. Между тем, возникающие в следующих приближениях члены могут становиться главными еще в области энергий, где турбулентность остается слабой. Даже будучи равномерно малыми, эти члены способны сыграть существенную роль, нарушив какой-либо из имеющихся без их учета законов сохранения. При попытках вычисления высших нелинейных членов в кинетическом уравнении для волн возникают расходимости. Несмотря на обилие предлагавшихся в литературе общих схем перенормировки, эффективный способ устранения указанных расходимостей до сих пор не был разработан. В настоящей статье эта задача решена с помощью диаграммной техники Уайльда. При этом выяснена структура интеграла столкновений в любом порядке разложения по энергии волн и уточнены условия применимости кинетического уравнения. В качестве примера использования построенного формализма корректно вычислен кубический столкновительный член для волн с распадным законом дисперсии.

The Kinetics of Weakly Turbulent Wave Fields

V.I. Erofeev, V.M. Malkin

Institute of Nuclear Physics
630090, Novosibirsk, USSR

АБСТРАКТ

Only the first nonvanishing term in the expansion of collision integral in powers of wave energy is usually considered. Nevertheless the higher collisional terms in the wave kinetic equation can be dominant in the energy range, where the turbulence still remain weak. These terms can be essential even when they are smaller than the first one, if they violate some of the conservation laws correct in the first approximation. The previous attempts to calculate higher nonlinear terms in the wave kinetic equation resulted in the divergencies. Up to now there was no effective way to eliminate such divergencies, in spite of abundance of general renormalization schemes proposed in literature. This problem is solved in the present paper with the help of Wyld's diagram technique. As a result the structure of collision integral is clear up in every order of its power expansion in wave energy and conditions of a kinetic equation applicability are specified. The cubic collisional term for waves with the decay dispersion law is calculated correctly as an example of application of this method.

© Институт ядерной физики СО АН СССР

ВВЕДЕНИЕ

В основе теории слабой турбулентности (см., например, [1, 2]) лежит представление о долгоживущих возбуждениях диспергирующей среды — квазичастицах. Временная производная от функции распределения квазичастиц выражается через значения этой функции в тот же момент времени с помощью так называемого интеграла столкновений. Интеграл столкновений вычисляется разложением по одному или нескольким параметрам, пропорциональным энергии турбулентности. Считается, что каждый член разложения соответствует некоторому каналу взаимодействия и может интерпретироваться на языке идущих по данному каналу индуцированных процессов. При наличии в однородной среде квазичастиц только одного сорта, обладающих распадным законом дисперсии, первый не исчезающий член разложения интеграла столкновений порождается трехволновым взаимодействием и имеет вид^{*}

$$\begin{aligned} St_{k_1}^{(2)} = & \int d^3k_2 d^3k_3 (-U_{k_1, k_2, k_3} + U_{k_2, k_1, k_3} + U_{k_3, k_2, k_1}), \\ U_{k_1, k_2, k_3} = & \omega_{k_1, k_2, k_3} \delta^3(k_1 - k_2 - k_3) \delta(\omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3}) \times \\ & \times n_{k_1} n_{k_2} n_{k_3} \left(-\frac{1}{n_{k_1}} + \frac{1}{n_{k_2}} + \frac{1}{n_{k_3}} \right). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь n_k — функция распределения квазичастиц в пространстве

^{*} Подразумевается, что энергии всех волн положительны и процессы рождения волн невозмущенной средой невозможны.

волновых векторов \mathbf{k} , U_{k_1, k_2, k_3} — вклад в подынтегральное выражение распада волны (k_1, ω_{k_1}) на волны (k_2, ω_{k_2}) , (k_3, ω_{k_3}) и противоположного процесса. Имеющиеся в формуле для U_{k_1, k_2, k_3} δ -функции обеспечивают сохранение импульса и энергии квазичастиц. В случае, когда соотношения $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$, $\omega_{k_1} = \omega_{k_2} + \omega_{k_3}$ несовместимы, закон дисперсии ω_k называется нераспадным, и низший по энергии турбулентности вклад в интеграл столкновений дает четырехволновое взаимодействие, в частности, рассеяние двух волн в две. Соответствующий этому процессу член разложения интеграла столкновений имеет вид

$$\begin{aligned} St_{k_1}^{(3)} = & \int d^3k_2 d^3k_3 d^3k_4 \omega_{k_1, k_2, k_3, k_4} \times \\ & \times \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \delta(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3} - \omega_{k_4}) \times \\ & \times n_{k_1} n_{k_2} n_{k_3} n_{k_4} \left(\frac{1}{n_{k_1}} + \frac{1}{n_{k_2}} - \frac{1}{n_{k_3}} - \frac{1}{n_{k_4}} \right). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Формулы (1.1) и (1.2) можно получить с помощью классической теории возмущений, дополненной некоторыми гипотезами о выражении высших корреляционных функций через парные («случайность фаз»). При попытке вычислить или хотя бы оценить данным способом следующие члены разложения интеграла столкновений возникают расходимости (см., например, [3]). Необходимые для их устранения перенормировки до сих пор не были выполнены, хотя принципиальная возможность «строить более точную теорию аналитического описания волновых полей, основанную, например, на диаграммной технике типа Уайльда» упоминалась уже в [3] и даже была реализована в двух важных для теории ленгмюровской турбулентности случаях [4, 5]. Такое положение дел отчасти объяснимо «недостаточным контактом основных работ по перенормировкам и турбулентности в физике плазмы с идеями и методами других областей, особенно динамики жидкости» [6]. Помимо этого, сохранению указанного пробела способствовало распространенное мнение о доминирующей роли процессов низшего порядка по энергии волн во всей области применимости теории слабой турбулентности. Данное мнение оправдано для задач, содержащих всего один малый параметр. При наличии же нескольких параметров первый член разложения интеграла столкновений может содержать дополнительную малость и мажорироваться следующими членами еще в области слабой турбулентности. (Поучительный случай такого рода был исследован с помощью диаграммной тех-

ники Уайльда в [5].) К оценке роли высших нелинейных процессов следует подходить с осторожностью и в условиях, когда они слабы, но нарушают некоторые из имеющихся в первом приближении законов сохранения, например, закон сохранения числа квазичастиц в процессе (1.2). Неконсервативные малые добавки к интегралу столкновений могут сказываться при достаточно продолжительной эволюции волновых полей.

Основной целью настоящей работы является корректный расчет интеграла столкновений квазичастиц в любом порядке по их энергии. Эта задача решается с помощью канонического варианта [7] диаграммной техники Уайльда [8]. Взаимодействие квазичастиц с частицами, в частности, влияние турбулентности на характеристики среды, считается несущественным. Данное ограничение вызвано заметными техническими различиями в описании взаимодействий волна—волна и волна—частица^{*)}. Различие параметров малости этих взаимодействий обеспечивает используемому приближению область применимости.

Прежде, чем перейти к решению поставленной выше задачи, необходимо отметить еще один получивший широкое распространение способ вывода кинетических уравнений. Он состоит в квантовании классического волнового поля, представлении интеграла столкновений в виде разности скоростей прихода квантов в состояние $|\mathbf{k}\rangle$ и их ухода из этого состояния и в возвращении к классическому пределу (см. [10]). Окольность этого пути частично компенсируется эффективностью квантовой теории возмущений. Например, «квантовый» расчет фигурирующих в (1.1) и (1.2) комбинаций функций распределения квазичастиц оказывается нагляднее «классического». При более строгом рассмотрении выясняется, однако, что описанный подход, не избавляя от необходимости перенормировок, привносит в задачу дополнительные проблемы. Простейшим образом они проявляются уже в линейной по амплитуде волн теории рассеяния на случайных неоднородностях среды. Кинетическое уравнение в данном случае, очевидно, является линейным по энергии волн. Между тем скорости прихода волн в состояние $|\mathbf{k}\rangle$ и противоположного процесса содержат нелинейные

^{*)} Проблема корректного вычисления интеграла столкновений остра и для взаимодействия волна-частица. Именно эта проблема породила продолжительную дискуссию о применимости так называемых квазилинейных уравнений, возникающих при удержании первого исчезающего члена в разложении интеграла столкновений квазичастиц с частицами (см., например, [9] и имеющиеся там ссылки).

члены, для доказательства взаимной компенсации которых приходится обращаться к высшим порядкам квантовой теории возмущений (см. [11]).

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Не взаимодействующая со средой система волн является гамильтоновой и описывается уравнением

$$i s \frac{\partial a^s(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta a^{-s}(\mathbf{r}, t)}. \quad (2.1)$$

Здесь и далее для упрощения обозначений рассматривается лишь одна ветвь колебаний. При этом гамильтониан H зависит от двух полевых переменных: амплитуды волн $a(\mathbf{r}, t)$ и комплексно-сопряженной величины $a^*(\mathbf{r}, t)$, нумеруемых значениями «+» и «-» индекса s , соответственно:

$$H = \sum_{n=2}^{\infty} H_n,$$

$$H_n = \frac{1}{n!} \sum_{s_1, s_2, \dots, s_n} \int d^3\mathbf{r}_1 \dots d^3\mathbf{r}_n V^{s_1, \dots, s_n}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) a^{s_1}(\mathbf{r}_1, t) \dots a^{s_n}(\mathbf{r}_n, t). \quad (2.2)$$

В силу предполагаемой стационарности среды, H не зависит от времени явно. Отсутствие временной дисперсии автоматически следует из предположения об отсутствии диссипации. Коэффициенты разложения гамильтониана $V^{s_1, \dots, s_n}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$ можно, не теряя общности, считать симметричными относительно всевозможных перестановок пар $(s_1, \mathbf{r}_1), \dots, (s_n, \mathbf{r}_n)$. Перемена знаков всех индексов s_1, \dots, s_n эквивалентна операции комплексного сопряжения:

$$V^{-s_1, \dots, -s_n}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = [V^{s_1, \dots, s_n}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)]^*.$$

В правую часть уравнения (2.1) обычно добавляют гауссовскую случайную силу $f^s(\mathbf{r}, t)$, описывающую источник тепловых шумов. Кинетическое уравнение для существенно надтепловых колебаний практически не зависит от силы f^s , поэтому ее включение в (2.1) можно рассматривать и как удобный формальный прием. Усреднение по ансамблю реализаций случайной силы f^s обозначается

ниже угловыми скобками. Основными объектами диаграммной техники Уайльда являются парная корреляционная функция

$$N^{s, s'}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = \langle a^s(\mathbf{r}, t) a^{-s'}(\mathbf{r}', t') \rangle \quad (2.3)$$

и функция Грина

$$G^{s, s'}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = \left\langle \frac{\delta a^s(\mathbf{r}, t)}{\delta f^{s'}(\mathbf{r}', t')} \right\rangle. \quad (2.4)$$

Операция комплексного сопряжения этих функций эквивалентна смене знаков индексов s, s' :

$$[N^{s, s'}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t')]^* = N^{-s, -s'}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t'),$$

$$[G^{s, s'}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t')]^* = G^{-s, -s'}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t').$$

Кроме того, парный коррелятор обладает симметрией относительно эрмитова сопряжения:

$$N^{s', s}(\mathbf{r}', t', \mathbf{r}, t) = [N^{s, s'}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t')]^*.$$

Как показывает суммирование бесконечных рядов теории возмущений, функции $N^{s, s'}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t')$ и $G^{s, s'}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t')$ удовлетворяют уравнениям Дайсона:

$$N^{s, s'}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = \sum_{s_1, s'_1} \int d^3\mathbf{r}_1 dt_1 d^3\mathbf{r}'_1 dt'_1 G^{s, s_1}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}_1, t_1) \times \\ \times \Phi^{s_1, s'_1}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}'_1, t'_1) [G^{s', s'_1}(\mathbf{r}', t', \mathbf{r}'_1, t'_1)]^*, \quad (2.5)$$

$$G^{s, s'}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = {}^0G^{s, s'}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') + \sum_{s_1, s_2} \int d^3\mathbf{r}_1 dt_1 d^3\mathbf{r}_2 dt_2 {}^0G^{s, s_1}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}_1, t_1) \times \\ \times \sum_{s'_1, s'_2} V^{s_1, s'_1}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) G^{s_2, s'}(\mathbf{r}_2, t_2, \mathbf{r}', t').$$

Здесь ${}^0G^{s, s'}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t')$ — функция Грина линейной задачи (т. е. уравнения (2.1) с гамильтонианом H_2), а $\Phi^{s, s'}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t')$ и $\sum^{s, s'}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t')$ — так называемые собственно-энергетические функции, для которых надлежащим образом записанные ряды теории возмущений уже не содержат расходящихся на слаботурбулентных волновых полях членов. Уравнения (2.5) можно переписать в более компактной форме, рассматривая фигурирующие в них величины как матричные координатно-временные представления соответствующих операторов:

$$\hat{N} = \hat{G} \hat{\Phi} \hat{G}^+, \quad \hat{G} = {}^0\hat{G} + {}^0\hat{G} \hat{\Sigma} \hat{G}, \quad (2.6)$$

Крест означает эрмитово сопряжение оператора. Операторы \hat{N} и $\hat{\Phi}$ совпадают с \hat{N}^+ и $\hat{\Phi}^+$, т. е. являются эрмитовыми.

Помимо координатно-временного представления основных уравнений (2.6) далее потребуются их представление Фурье. Преобразование Фурье по пространственным координатам удобно определить формулами

$$a_{\mathbf{k}}^s(t) = \int d^3\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} a^s(\mathbf{r}, t),$$

$$V_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n}^{s_1, \dots, s_n} = \int d^3\mathbf{r}_1, \dots, d^3\mathbf{r}_n e^{i(\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1 + \dots + \mathbf{k}_n\mathbf{r}_n)} V^{s_1, \dots, s_n}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n). \quad (2.7)$$

При таком определении фурье-образов операция их комплексного сопряжения эквивалентна смене знаков индексов и волновых векторов:

$$(a_{\mathbf{k}}^s)^* = a_{-\mathbf{k}}^{-s}, \quad (V_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n}^{s_1, \dots, s_n})^* = V_{-\mathbf{k}_1, \dots, -\mathbf{k}_n}^{-s_1, \dots, -s_n}.$$

С помощью (2.7) нетрудно получить из (2.1) уравнение

$$is \frac{\partial a_{\mathbf{k}}^s}{\partial t} = (2\pi)^3 \frac{\delta H}{\delta a_{-\mathbf{k}}^{-s}} \quad (2.8)$$

и представить n -й член разложения гамильтониана по степеням поля в виде

$$H_n = \frac{1}{n!} \sum_{s_1, \dots, s_n} \int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \dots \frac{d^3\mathbf{k}_n}{(2\pi)^3} V_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n}^{s_1, \dots, s_n} a_{\mathbf{k}_1}^{s_1} \dots a_{\mathbf{k}_n}^{s_n}. \quad (2.9)$$

В пространственно-однородной среде коэффициенты $V^{s_1, \dots, s_n}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$ зависят лишь от разностей координат, поэтому фурье-образы $V_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n}^{s_1, \dots, s_n}$ содержат δ -функции:

$$V_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n}^{s_1, \dots, s_n} = (2\pi)^3 U_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n}^{s_1, \dots, s_n} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \dots + \mathbf{k}_n). \quad (2.10)$$

Коэффициент $U_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n}^{s_1, \dots, s_n}$ определен на поверхности $\mathbf{k}_n = -(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_{n-1})$, где он равен фурье-образу функции $V^{s_1, \dots, s_n}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_n, \dots, \mathbf{r}_{n-1} - \mathbf{r}_n, 0)$ по первым $n-1$ аргументам. Содержащее n волновых векторов обозначение $U_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n}^{s_1, \dots, s_n}$ использовано для того, чтобы сохранить симметрию относительно перестановок всех n пар переменных $(s_1, \mathbf{k}_1), \dots, (s_n, \mathbf{k}_n)$.

Учитывая (2.10), квадратичный член разложения гамильтониана можно представить в виде

$$H_2 = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[A_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* + \frac{1}{2} (B_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* a_{-\mathbf{k}}^* + \text{к. с.}) \right],$$

$$A_{\mathbf{k}} = U_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}}^{+, -} = A_{\mathbf{k}}^*, \quad B_{\mathbf{k}} = U_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}}^{-, -} = B_{-\mathbf{k}}.$$

Ниже среда предполагается устойчивой относительно самовозбуждения малых колебаний. При этом коэффициенты $A_{\mathbf{k}}, B_{\mathbf{k}}$ удовлетворяют условию

$$0 < \frac{1}{4} (A_{\mathbf{k}} + A_{-\mathbf{k}})^2 - |B_{\mathbf{k}}|^2 \equiv \Delta_{\mathbf{k}}^2 \quad (\Delta_{\mathbf{k}} > 0),$$

и каноническое преобразование

$$a_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{\left[\frac{1}{2} (A_{\mathbf{k}} + A_{-\mathbf{k}}) + \Delta_{\mathbf{k}} \right] a_{\mathbf{k}} - B_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}}^*}{\left\{ \left[\frac{1}{2} (A_{\mathbf{k}} + A_{-\mathbf{k}}) + \Delta_{\mathbf{k}} \right]^2 - |B_{\mathbf{k}}|^2 \right\}^{1/2}}$$

диагонализует H_2 :

$$H_2 = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^*,$$

$$\omega_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} (A_{\mathbf{k}} - A_{-\mathbf{k}}) + \Delta_{\mathbf{k}}. \quad (2.11)$$

Канонические преобразования, отличающиеся от тождественного лишь малыми по амплитуде волнового поля добавками, не нарушают диагональности H_2 и могут использоваться для упрощения структуры $H_{int} = \sum_{n=3}^{\infty} H_n$ (см., например, [3]).

Если пространственно-однородной является не только среда, но и турбулентность, то δ -функции содержатся также в фурье-образах всевозможных статистических средних:

$$N_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{s, s'}(t, t') = \langle a_{\mathbf{k}}^s(t) a_{-\mathbf{k}'}^{-s'}(t') \rangle = (2\pi)^3 N_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{s, s'}(t, t') \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'),$$

$$G_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{s, s'}(t, t') = (2\pi)^3 \left\langle \frac{\delta a_{\mathbf{k}}^s(t)}{\delta f_{\mathbf{k}'}^{s'}(t')} \right\rangle = (2\pi)^3 G_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{s, s'}(t, t') \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'),$$

$$\Phi_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{s, s'}(t, t') = (2\pi)^3 \Phi_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{s, s'}(t, t') \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'),$$

$$\Sigma_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{s, s'}(t, t') = (2\pi)^3 \Sigma_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{s, s'}(t, t') \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (2.12)$$

Здесь подразумевается, что переход от координатного представле-

ния операторов \hat{N} , \hat{G} и т. д. к их представлению Фурье производится по формулам типа

$$N_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\mathbf{k}'\mathbf{r}'},$$

а функции $N_{\mathbf{k}}^{s, s'}(t, t')$, $G_{\mathbf{k}}^{s, s'}(t, t')$ и т. д. определяются формулами типа

$$N_{\mathbf{k}} = \int d^3\mathbf{r} N(\mathbf{r}, 0) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}.$$

Операция комплексного сопряжения функций

$$N_{\mathbf{k}}^{s, s'}(t, t'), \quad G_{\mathbf{k}}^{s, s'}(t, t'), \quad \Phi_{\mathbf{k}}^{s, s'}(t, t'), \quad \Sigma_{\mathbf{k}}^{s, s'}(t, t'),$$

эквивалентна смене знаков индексов s, s' и волнового вектора \mathbf{k} , например,

$$[G_{\mathbf{k}}^{s, s'}(t, t')]^* = G_{-\mathbf{k}}^{-s, -s'}(t, t').$$

Функции $N_{\mathbf{k}}^{s, s'}(t, t')$ и $\Phi_{\mathbf{k}}^{s, s'}(t, t')$ обладают еще и симметрией относительно эрмитова сопряжения:

$$[N_{\mathbf{k}}^{s, s'}(t, t')]^* = N_{\mathbf{k}}^{s', s}(t', t).$$

Учитывая (2.12), можно упростить основные уравнения (2.5):

$$N_{\mathbf{k}}^{s, s'}(t, t') = \sum_{s_1, s'_1} \int dt_1 dt'_1 G_{\mathbf{k}}^{s, s_1}(t, t_1) \Phi_{\mathbf{k}}^{s_1, s'_1}(t_1, t'_1) [G_{\mathbf{k}}^{s', s'_1}(t', t'_1)]^*, \quad (2.13)$$

$$G_{\mathbf{k}}^{s, s'}(t, t') = {}^0G_{\mathbf{k}}^{s, s'}(t, t') + \sum_{s_1, s_2} \int dt_1 dt_2 {}^0G_{\mathbf{k}}^{s, s_1}(t, t_1) \Sigma_{\mathbf{k}}^{s_1, s_2}(t_1, t_2) G_{\mathbf{k}}^{s_2, s'}(t_2, t'). \quad (2.14)$$

Уравнения (2.13), (2.14) представимы в виде

$$\hat{N}_{\mathbf{k}} = \hat{G}_{\mathbf{k}} \hat{\Phi}_{\mathbf{k}} \hat{G}_{\mathbf{k}}^+, \quad \hat{G}_{\mathbf{k}} = {}^0\hat{G}_{\mathbf{k}} + {}^0\hat{G}_{\mathbf{k}} \hat{\Sigma}_{\mathbf{k}} \hat{G}_{\mathbf{k}}, \quad (2.15)$$

где все операторы действуют в пространстве двухкомпонентных функций времени. Последовательность, в которой производится преобразование Фурье и эрмитово сопряжение при вычислении матричных элементов оператора $\hat{G}_{\mathbf{k}}^+$, не имеет значения, поскольку

$$(\hat{G}^+)_{\mathbf{k}}^{s, s'}(t, t') = G_{-\mathbf{k}}^{-s', -s}(t, t') = [\hat{G}_{\mathbf{k}}^+]^{s, s'}(t, t').$$

Функция Грина линейной задачи удовлетворяет уравнению

$$\left(is \frac{\partial}{\partial t} - \omega_{s\mathbf{k}} \right) {}^0G_{\mathbf{k}}^{s, s'}(t, t') = \delta_{s, s'} \delta(t - t').$$

Его отличное от нуля лишь в области $t > t'$ решение таково:

$${}^0G_{\mathbf{k}}^{s, s'}(t, t') = -is \delta_{s, s'} \Theta(t - t') \exp[-is \omega_{s\mathbf{k}}(t - t')]. \quad (2.16)$$

Воздействуя оператором $\left(is \frac{\partial}{\partial t} - \omega_{s\mathbf{k}} \right)$ на (2.14), можно исключить из этого уравнения «затравочную» функцию Грина (2.16):

$$\left(is \frac{\partial}{\partial t} - \omega_{s\mathbf{k}} \right) G_{\mathbf{k}}^{s, s'}(t, t') = \delta_{s, s'} \delta(t - t') + \sum_{s_1} \int dt_1 \Sigma_{\mathbf{k}}^{s, s_1}(t, t_1) G_{\mathbf{k}}^{s_1, s'}(t_1, t'). \quad (2.17)$$

В случае стационарной турбулентности всевозможные усредненные функции зависят лишь от разностей своих временных аргументов, и уравнения (2.13), (2.17) допускают дальнейшее упрощение: преобразованием Фурье по времени они приводятся к виду

$$N_{\mathbf{k}, \omega}^{s, s'} = \sum_{s_1, s'_1} G_{\mathbf{k}, \omega}^{s, s_1} \Phi_{\mathbf{k}, \omega}^{s_1, s'_1} (G_{\mathbf{k}, \omega}^{s', s'_1})^*, \quad (2.18)$$

$$(s\omega - \omega_{s\mathbf{k}}) G_{\mathbf{k}, \omega}^{s, s'} = \delta_{s, s'} + \sum_{s_1} \Sigma_{\mathbf{k}, \omega}^{s, s_1} G_{\mathbf{k}, \omega}^{s_1, s'}. \quad (2.19)$$

Здесь $N_{\mathbf{k}, \omega}^{s, s'}$, $G_{\mathbf{k}, \omega}^{s, s'}$, $\Phi_{\mathbf{k}, \omega}^{s, s'}$, $\Sigma_{\mathbf{k}, \omega}^{s, s'}$ — определенные по формулам типа

$$\varphi_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \varphi(\tau)$$

фурье-образы зависящих от единственной временной переменной $\tau = t - t'$ функций $N_{\mathbf{k}}^{s, s'}(t, t')$, $G_{\mathbf{k}}^{s, s'}(t, t')$, $\Phi_{\mathbf{k}}^{s, s'}(t, t')$, $\Sigma_{\mathbf{k}}^{s, s'}(t, t')$.

Поскольку функции $G_{\mathbf{k}}^{s, s'}(t, t')$ и $\Sigma_{\mathbf{k}}^{s, s'}(t, t')$ равны нулю при $\tau < 0$ и затухают при $\tau \rightarrow \infty$, $G_{\mathbf{k}, \omega}^{s, s'}$ и $\Sigma_{\mathbf{k}, \omega}^{s, s'}$ аналитичны в верхней полуплоскости ω . Эти фурье-образы и их аналитические продолжения в нижнюю полуплоскость обладают симметрией

$$G_{\mathbf{k}, \omega}^{s, s'} = (G_{-\mathbf{k}, -\omega}^{-s, -s'})^*, \quad \Sigma_{\mathbf{k}, \omega}^{s, s'} = (\Sigma_{-\mathbf{k}, -\omega}^{-s, -s'})^*.$$

Такой же и некоторой добавочной симметрией (связанной с эрмитовостью матриц $\|N_{\mathbf{k}, \omega}\|$, $\|\Phi_{\mathbf{k}, \omega}\|$ при вещественных ω) обладают аналитические продолжения функций $N_{\mathbf{k}, \omega}^{s, s'}$, $\Phi_{\mathbf{k}, \omega}^{s, s'}$:

$$N_{\mathbf{k}, \omega}^{s, s'} = (N_{\mathbf{k}, \omega}^{s', s})^* = N_{-\mathbf{k}, -\omega}^{-s', -s}, \quad \Phi_{\mathbf{k}, \omega}^{s, s'} = (\Phi_{\mathbf{k}, \omega}^{s', s})^* = \Phi_{-\mathbf{k}, -\omega}^{-s', -s}.$$

Поставив в соответствие матрицам $\|N_{\mathbf{k}, \omega}\|$, $\|G_{\mathbf{k}, \omega}\|$ и т. д. определенные преобразования двумерного пространства, можно перепи-

сать уравнения (2.18), (2.19) в операторной форме:

$$\hat{N}_{k,\omega} = \hat{G}_{k,\omega} \hat{\Phi}_{k,\omega} (\hat{G}_{k,\omega})^+ \quad (2.20)$$

$$\hat{L}_{k,\omega} \hat{G}_{k,\omega} = \hat{I} \quad (2.21)$$

Здесь \hat{I} — тождественное преобразование, $\hat{L}_{k,\omega}$ — оператор с матричными элементами

$$L_{k,\omega}^{s,s'} = (s\omega - \omega_{s,k}) \delta_{s,s'} - \Sigma_{k,\omega}^{s,s'} \quad (2.22)$$

Как будет понятно из дальнейшего, матрицы $\|\Sigma_{k,\omega}\|$, $\|\Phi_{k,\omega}\|$, $\|G_{k,\omega}\|$, $\|N_{k,\omega}\|$, вообще говоря, не являются диагональными, вследствие чего скалярный вариант диаграммной техники Уайльда [7] оказывается недостаточным для описания однородной стационарной турбулентности даже при наличии всего одной ветви колебаний. Недиagonальные элементы матрицы $\|N_{k,\omega}\|$ имеют смысл так называемых аномальных корреляторов, рассматривавшихся ранее в связи с теорией параметрического возбуждения волн [12, 13]. Необходимость учета аномальных корреляторов в теории слабой турбулентности до настоящего времени оставалась не вполне осознанной.


3. РАЗЛОЖЕНИЯ СОБСТВЕННО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Уравнения предыдущего раздела необходимо дополнить формулами, выражающими собственно-энергетические функции $\hat{\Sigma}$ и $\hat{\Phi}$ через парный коррелятор \hat{N} и функцию Грина \hat{G} . Формулы эти выводятся с помощью диаграммной техники Уайльда. Процедура, аналогичная описанной в [7] для скалярной модели однородной стационарной турбулентности, приводит к следующим диаграммным рядам для $\hat{\Sigma}$ и $\hat{\Phi}$:

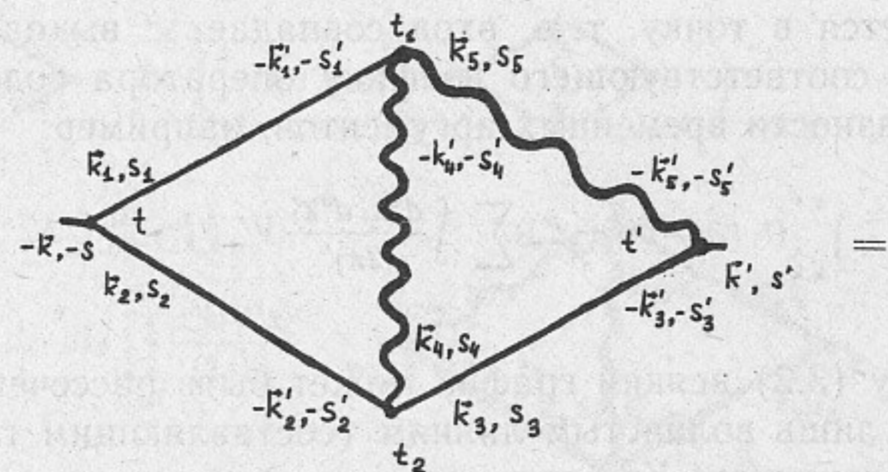
$$\begin{aligned} \hat{\Sigma} = & \frac{1}{2} \text{[diagram 1]} + \frac{1}{2} \text{[diagram 2]} + \text{[diagram 3]} + \frac{1}{8} \text{[diagram 4]} + \\ & + \frac{1}{2} \text{[diagram 5]} + \frac{1}{2} \text{[diagram 6]} + \frac{1}{2} \text{[diagram 7]} + \frac{1}{2} \text{[diagram 8]} + \\ & + \frac{1}{2} \text{[diagram 9]} + \text{[diagram 10]} + \text{[diagram 11]} + \text{[diagram 12]} + \\ & + \text{[diagram 13]} + \text{[diagram 14]} + \text{[diagram 15]} + \text{[diagram 16]} + \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Phi} = & \frac{1}{2} \text{[diagram 1]} + \frac{1}{4} \text{[diagram 2]} + \frac{1}{4} \text{[diagram 3]} + \\ & + \frac{1}{6} \text{[diagram 4]} + \frac{1}{4} \text{[diagram 5]} + \frac{1}{4} \text{[diagram 6]} + \\ & + \frac{1}{2} \text{[diagram 7]} + \frac{1}{2} \text{[diagram 8]} + \text{[diagram 9]} + \\ & + \text{[diagram 10]} + \frac{1}{2} \text{[diagram 11]} + \frac{1}{2} \text{[diagram 12]} + \\ & + \frac{1}{2} \text{[diagram 13]} + \frac{1}{2} \text{[diagram 14]} + \text{[diagram 15]} + \\ & + \text{[diagram 16]} + \text{[diagram 17]} + \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь волнистый отрезок обозначает парную корреляционную функцию \hat{N} , прямолинейный — функцию Грина \hat{G} , точка с n пересекающимися в ней линиями — свертку соответствующих им операторов с n -индексным коэффициентом в разложении гамильтониана по амплитуде поля. Правила «чтения» диаграмм понятны из [7] и

приводимых ниже примеров. Так графику  соответствует оператор, матричные элементы которого в (t, k) -представлении равны

$$\left(\text{[diamond diagram with wavy line]} \right)_{k,k'}^{s,s'}(t,t') = \sum_{\substack{s_1, \dots, s_5 \\ s'_1, \dots, s'_5}} \int dt_1 dt_2 \prod_{i=1}^5 \frac{d^3 k_i d^3 k'_i}{(2\pi)^6} \times$$



$$= \sum_{\substack{s_1, \dots, s_5 \\ s'_1, \dots, s'_5}} \int dt_1 dt_2 \prod_{i=1}^5 \frac{d^3 k_i d^3 k'_i}{(2\pi)^6} V_{-k, k_1, k_2}^{-s, s_1, s_2} V_{-k'_2, k_3, k_4}^{-s'_2, s_3, s_4} V_{-k'_1, -k'_4, k_5}^{-s'_1, -s'_4, s_5} V_{-k'_3, -k'_5, k'}^{-s'_3, -s'_5, s'} \times \\ \times G_{k_1, k'_1}^{s_1, s'_1}(t, t_1) G_{k_2, k'_2}^{s_2, s'_2}(t, t_2) G_{k_3, k'_3}^{s_3, s'_3}(t_2, t') N_{k_4, k'_4}^{s_4, s'_4}(t_2, t_1) N_{k_5, k'_5}^{s_5, s'_5}(t_1, t'). \quad (3.3)$$

Для удобства читателей здесь приведен и вспомогательный график, соответствующий подынтегральному выражению в (3.3). От «входа» (точка t) к «выходу» (точка t') этого графика ведет единственный путь из прямолинейных отрезков, названный в [7] «позвоночником» графика. Составляющие позвоночник отрезки читаются по направлению от входа графика. Остальные прямолинейные отрезки («ребра» графика) читаются по направлению от позвоночника (которое однозначно определено для каждого из них). Волнистые линии можно читать в произвольном направлении, поскольку оператор \hat{N} является эрмитовым, а двум противоположным прочтениям любой линии соответствуют эрмитово-сопряженные друг к другу операторы:


$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \xrightarrow{t} \\ \text{---} \\ \xleftarrow{t'} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} &= G_{k, k'}^{s, s'}(t, t'); \\ \begin{array}{c} \xleftarrow{t} \\ \text{---} \\ \xrightarrow{t'} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} &= G_{-k', -k}^{-s', -s}(t', t) = (G^+)_{k, k'}^{s, s'}(t, t'); \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{t} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \xrightarrow{t'} \\ \text{---} \end{array} &= N_{k, k'}^{s, s'}(t, t'); \\ \begin{array}{c} \xleftarrow{t} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \xleftarrow{t'} \\ \text{---} \end{array} &= N_{-k', -k}^{-s', -s}(t', t) = (N^+)_{k, k'}^{s, s'}(t, t'). \end{aligned}$$

Сформулированные правила чтения в равной мере относятся ко всем графикам ряда (3.1). В том случае, когда позвоночник вырождается в точку, т. е. вход совпадает с выходом, матричные элементы соответствующего графика оператора содержат δ -функцию от разности временных аргументов, например:

$$\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right)_{k, k'}^{s, s'}(t, t') = \delta(t-t') \sum_{s_1, s'_1} \int \frac{d^3 k_1 d^3 k'_1}{(2\pi)^6} V_{-k, k_1, -k'_1}^{-s, s_1, -s'_1, s'_1} N_{k_1, k'_1}^{s_1, s'_1}(t, t). \quad (3.4)$$

В ряду (3.2) всякий график может быть рассечен на две части по одним лишь волнистым линиям (составляющим так называемое основное сечение). Каждая вершина, расположенная левее (правее) основного сечения, соединена со входом (выходом) графика

единственным путем из прямолинейных отрезков, которые следует читать по направлению от входа (выхода) графика. Например,

график  (при той же, что и на вспомогательном

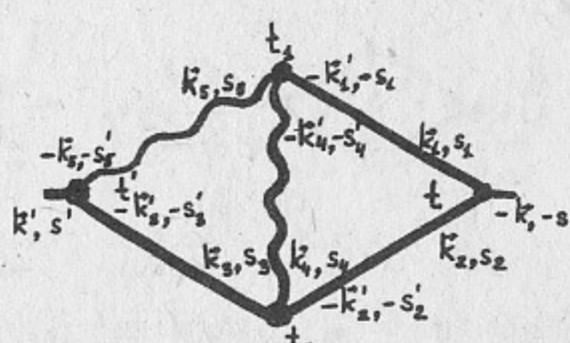
рисунке в (3.3), расстановке времен, волновых векторов и индексов) читается так:

$$\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right)_{k, k'}^{s, s'}(t, t') = \sum_{\substack{s_1, s_2, \dots, s_5 \\ s'_1, s'_2, \dots, s'_5}} \int dt_1 dt_2 \prod_{i=1}^5 \frac{d^3 k_i d^3 k'_i}{(2\pi)^6} \times \\ \times V_{-k, k_1, k_2}^{-s, s_1, s_2} V_{-k'_2, k_3, k_4}^{-s'_2, s_3, s_4} V_{-k'_1, -k'_4, k_5}^{-s'_1, -s'_4, s_5} V_{-k'_3, -k'_5, k'}^{-s'_3, -s'_5, s'} \\ \times G_{k_1, k'_1}^{s_1, s'_1}(t, t_1) G_{-k'_3, -k'_5}^{-s'_3, -s'_5}(t', t_2) N_{k_2, k'_2}^{s_2, s'_2}(t, t_2) N_{k_4, k'_4}^{s_4, s'_4}(t_2, t_1) N_{k_5, k'_5}^{s_5, s'_5}(t_1, t'). \quad (3.5)$$

Разложения (3.1), (3.2), наряду с каждым графиком, содержат его отражение относительно вертикальной плоскости. В разложении (3.2) всякой паре зеркально-симметричных графиков соответствует пара эрмитово-сопряженных друг к другу операторов, например,

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right)_{k, k'}^{s, s'}(t, t') &= \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right)_{-k', -k}^{-s', -s}(t', t) = \\ &= \left[\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right)_{k, k'}^{s, s'}(t, t') \right]^+ \end{aligned} \quad (3.6)$$


Из этого свойства, очевидно, следует эрмитовость оператора $\hat{\Phi}$. Несколько сложнее обстоит дело с графиками (3.1). Аналитическое выражение

$$\begin{aligned} \left[\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right)_{k, k'}^{s, s'}(t, t') \right]^+ &= \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right)_{-k', -k}^{-s', -s}(t', t) = \\ &= \sum_{\substack{s_1, \dots, s_5 \\ s'_1, \dots, s'_5}} \int dt_1 dt_2 \prod_{i=1}^5 \frac{d^3 k_i d^3 k'_i}{(2\pi)^6} \end{aligned} \quad (3.7)$$


отличается от (3.3) только заменой позвоночных функций Грина на эрмитово-сопряженные к ним операторы. Такой же симметрией обладают остальные члены разложения (3.1). В частности, графикам, у которых вход совпадает с выходом, соответствуют эрмитовы операторы. При вычислении эрмитовой ($\hat{\Sigma}^H = \frac{1}{2}(\hat{\Sigma} + \hat{\Sigma}^+)$) или антиэрмитовой ($\hat{\Sigma}^A = \frac{1}{2i}(\hat{\Sigma} - \hat{\Sigma}^+)$) части оператора $\hat{\Sigma}$ указанная симметрия позволяет заменять в каждом из членов разложения (3.1) прямое произведение всех позвоночных функций Грина его эрмитовой или антиэрмитовой частью, соответственно. По-настоящему полезной такая замена оказывается при вычислении $\hat{\Sigma}^A$, которое проводится по той же схеме, что и в [7]. Антиэрмитова часть прямого произведения произвольных операторов удовлетворяет тождеству

$$(\hat{\alpha}_1 \otimes \hat{\alpha}_2 \otimes \dots \otimes \hat{\alpha}_n)^A = \hat{\alpha}_1^A \otimes \hat{\alpha}_2^+ \otimes \hat{\alpha}_3^+ \otimes \dots \otimes \hat{\alpha}_n^+ + \hat{\alpha}_1 \otimes \hat{\alpha}_2^A \otimes \hat{\alpha}_3^+ \otimes \hat{\alpha}_4^+ \otimes \dots \otimes \hat{\alpha}_n^+ + \dots + \hat{\alpha}_1 \otimes \hat{\alpha}_2 \otimes \dots \otimes \hat{\alpha}_{n-1}^A \otimes \hat{\alpha}_n^A. \quad (3.8)$$

С помощью данного тождества каждый член разложения оператора $\hat{\Sigma}^A$, содержащий n позвоночных функций Грина, преобразуется в сумму n новых членов. Для их графического изображения достаточно «размножить» соответствующий исходному члену график (путем последовательного выделения каждой линии его позвоночника) на n новых графиков, поставить в соответствие выделенной (скажем, крестиком) линии антиэрмитову часть функции Грина и читать все, расположенные правее выделенной, линии позвоночника в противоположном первоначально выбранному направлению — от выхода графика, не меняя остальных правил чтения. Например, возникающий при размножении члена (3.3) график

 изображает оператор с матричными элементами

$$\left(\text{diamond graph} \right)_{k, k'}^{s, s'}(t, t') = \sum_{\substack{s_1, \dots, s_5 \\ s'_1, \dots, s'_5}} \int dt_1 dt_2 \prod \frac{d^3 k_i d^3 k'_i}{(2\pi)^6} \times \\ \times V_{-k, k_1, k_2}^{-s, s_1, s_2} V_{-k'_2, k_3, k_4}^{-s'_2, s_3, s_4} V_{-k'_1, -k'_4, k_5}^{-s'_1, -s'_4, s_5} V_{-k'_5, -k'_5, k'}^{-s'_5, -s'_5, s'} \times \\ \times G_{k_1, k'_1}^{s_1, s'_1}(t, t_1) (\hat{G}^A)_{k_2, k'_2}^{s_2, s'_2}(t, t_2) G_{-k'_3, -k_3}^{-s'_3, -s_3}(t', t_2) N_{k_4, k'_4}^{s_4, s'_4}(t_2, t_1) N_{k_5, k'_5}^{s_5, s'_5}(t_1, t'). \quad (3.9)$$

В результате описанной процедуры разложение оператора $\hat{\Sigma}^A$ становится аналогичным разложению (3.2). При последовательном выделении каждой линии основных сечений графиков ряда (3.2) и ее замене на перечеркнутую крестиком прямую линию перечисляются все размноженные графики для $\hat{\Sigma}^A$ (и только они), причем каждый из этих графиков повторяется ровно столько раз, во сколько коэффициент при нем больше коэффициента при соответствующем графике в (3.2). Ввиду того, что общие части соответствующих друг другу графиков для $\hat{\Phi}$ и $\hat{\Sigma}^A$ читаются одинаково, аналитическая формула для $\hat{\Sigma}^A$ может быть получена последовательным выделением каждого из «основных» (т. е. изображаемых линиями основных сечений) парных корреляторов в формуле для $\hat{\Phi}$ и заменой выделенного коррелятора на антиэрмитову часть функции Грина (например, формула (3.9) может быть получена из (3.5)). Эрмитова часть оператора $\hat{\Sigma}$ восстанавливается по его антиэрмитовой части с помощью очевидных соотношений

$$(\hat{\Sigma}^H)_{k, k'}^{s, s'}(t, t') + i(\hat{\Sigma}^A)_{k, k'}^{s, s'}(t, t') \equiv \hat{\Sigma}_{k, k'}^{s, s'}(t, t') = 0, \quad t < t',$$

$$(\hat{\Sigma}^H)_{k, k'}^{s, s'}(t, t') - i(\hat{\Sigma}^A)_{k, k'}^{s, s'}(t, t') \equiv (\hat{\Sigma}^+)^{s, s'}_{k, k'}(t, t') = \Sigma_{k', k}^{s', s}(t', t)^* = 0, \quad t > t',$$

согласно которым

$$(\hat{\Sigma}^H)_{k, k'}^{s, s'}\left(t + \frac{\tau}{2}, t - \frac{\tau}{2}\right) = \Omega_{k, k'}^{s, s'}(t) \delta(\tau) + \\ + i[\Theta(\tau) - \Theta(-\tau)] (\hat{\Sigma}^A)_{k, k'}^{s, s'}\left(t + \frac{\tau}{2}, t - \frac{\tau}{2}\right). \quad (3.10)$$

Первое слагаемое в правой части (3.10) равно сумме всех членов разложения функции $\hat{\Sigma}_{k, k'}^{s, s'}\left(t + \frac{\tau}{2}, t - \frac{\tau}{2}\right)$, соответствующих графикам с вырожденными позвоночниками, и может рассматриваться как матричный элемент оператора

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{2} \text{graph} + \frac{1}{2} \text{graph} + \frac{1}{8} \text{graph} + \dots \quad (3.11)$$

Фурье-образом (3.10) по τ является известное соотношение Крамера — Кронига (см., например, [14]):

$$(\hat{\Sigma}^H)_{k, k', \omega}^{s, s'}(t) = \Omega_{k, k'}^{s, s'}(t) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi - \omega} (\hat{\Sigma}^A)_{k, k', \xi}^{s, s'}(t). \quad (3.12)$$

Перечеркнутый знак интеграла, как обычно, указывает на то, что интеграл понимается в смысле его главного значения.

В случае однородной турбулентности аналитические выражения для собственно-энергетических функций упрощаются путем подстановки в них соотношений (2.10), (2.12) и

$$\Omega_{k, k'}^{s, s'}(t) = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \Omega_k^{s, s'}(t). \quad (3.13)$$

В частности, формула (3.12) приобретает вид

$$(\hat{\Sigma}^H)_{k, \omega}^{s, s'}(t) = \Omega_k^{s, s'}(t) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi - \omega} (\hat{\Sigma}^A)_{k, \xi}^{s, s'}(t), \quad (3.14)$$

а формула (3.5) сводится к следующей:

$$\begin{aligned} & \left(\text{Diagram} \right)_k^{s, s'}(t, t') = \sum_{\substack{s_1, \dots, s_5 \\ s'_1, \dots, s'_5}} \int dt_1 dt_2 \prod_{i=1}^5 \frac{d^3 \mathbf{k}_i}{(2\pi)^3} \times \\ & \times U_{-k, k_1, k_2}^{-s, s_1, s_2} U_{-k_2, k_3, k_4}^{-s_2, s_3, s_4} U_{-k_1, -k_4, k_5}^{-s'_1, -s'_4, s'_5} U_{-k_3, -k_5, k}^{-s'_3, -s'_5, s'} \times \\ & \times (2\pi)^9 \delta^3(-\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \delta^3(-\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \delta^3(-\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4 + \mathbf{k}_5) \times \\ & \times G_{k_1}^{s_1, s'_1}(t, t_1) G_{-k_3}^{-s'_3, -s_3}(t', t_2) N_{k_2}^{s_2, s'_2}(t, t_2) N_{k_4}^{s_4, s'_4}(t_2, t_1) N_{k_5}^{s_5, s'_5}(t_1, t'). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Аналогичные упрощения происходят в случае стационарной турбулентности. Например, (3.15) в случае однородной стационарной турбулентности переходит в формулу

$$\begin{aligned} & \left(\text{Diagram} \right)_q^{s, s'} = \sum_{\substack{s_1, \dots, s_5 \\ s'_1, \dots, s'_5}} \int \prod_{i=1}^5 \frac{d^4 \mathbf{q}_i}{(2\pi)^4} \times \\ & \times U_{-k, k_1, k_2}^{-s, s_1, s_2} U_{-k_2, k_3, k_4}^{-s_2, s_3, s_4} U_{-k_1, -k_4, k_5}^{-s'_1, -s'_4, s'_5} U_{-k_3, -k_5, k}^{-s'_3, -s'_5, s'} \times \\ & \times (2\pi)^{12} \delta^4(-\mathbf{q} + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \delta^4(-\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4) \delta^4(-\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_5 - \mathbf{q}_4) \times \\ & \times G_{q_1}^{s_1, s'_1} G_{-q_3}^{-s'_3, -s_3} N_{q_2}^{s_2, s'_2} N_{q_4}^{s_4, s'_4} N_{q_5}^{s_5, s'_5}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Здесь через \mathbf{q}_i обозначен четырехкомпонентный вектор (\mathbf{k}_i, ω_i) .

В стационарном (но не обязательно однородном) случае коэффициент при прямом произведении

$$N_{k_1, k'_1, \omega_1}^{s_1, s'_1} N_{k_2, k'_2, \omega_2}^{s_2, s'_2} \dots N_{k_n, k'_n, \omega_n}^{s_n, s'_n}$$

всех основных парных корреляторов в произвольном члене разложения $\Phi_{k, k', \omega}^{s, s'}$ пропорционален δ -функции

$$\delta(-\omega + \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n).$$

Отсюда, в частности, следует, что при условии

$$(\hat{G}^A)_{k, k', \omega}^{s, s'} = \beta \omega N_{k, k', \omega}^{s, s'}, \quad \beta = \text{const}, \quad (3.17)$$

операторы $\hat{\Sigma}^A$ и $\hat{\Phi}$ связаны между собой соотношением

$$(\hat{\Sigma}^A)_{k, k', \omega}^{s, s'} = \beta \omega \Phi_{k, k', \omega}^{s, s'}. \quad (3.18)$$

Верно и обратное: при условии (3.18) операторы \hat{G}^A и \hat{N} связаны друг с другом соотношением (3.17). В этом можно убедиться, представив антиэрмитову часть второго из уравнений (2.6) в форме, аналогичной первому из них*):

$$\hat{G}^A = \hat{G} \hat{\Sigma}^A \hat{G}^+. \quad (3.19)$$

Таким образом, условие (3.17) оказывается совместимым с системой уравнений (2.6) и выделяет частный класс ее решений. Этот вывод, расширяющий аналогичное положение статьи [7], может быть назван обобщенной флуктуационно-диссипативной теоремой.

4. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛН В СЛУЧАЕ ОДНОРОДНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Уравнение (2.21) позволяет явно выразить матрицу $\|G_{k, \omega}\|$ через $\|\Sigma_{k, \omega}\|$:

$$\|G_{k, \omega}\| = \|L_{k, \omega}\|^{-1} = \|R_{k, \omega}\| / D_{k, \omega},$$

* При учете в уравнении для \hat{N} малого слагаемого, пропорционального коррелятору случайной силы f , в (3.19) возникает аналогичная поправка, связанная со слабым затуханием собственных мод линейной задачи, т. е. с наличием малой антиэрмитовой части у оператора ${}^0\hat{G}^{-1}$.

$$R_{k,\omega}^{s,s'} = ss' L_{k,\omega}^{-s',-s} = -(s\omega + \omega_{-s k}) \delta_{s,s'} - ss' \Sigma_{k,\omega}^{-s',-s}, \quad (4.1)$$

$$D_{k,\omega} \equiv \det \|L_{k,\omega}\|.$$

Определитель $D_{k,\omega}$ обладает симметрией $D_{k,\omega} = D_{-k,-\omega}^*$ и может быть представлен в виде

$$D_{k,\omega} = -(\omega - \lambda_{k,\omega}^+) (\omega - \lambda_{k,\omega}^-), \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{k,\omega}^\sigma &= -(\lambda_{-k,-\omega}^{-\sigma})^* = \sigma \left(\omega_{\sigma k} + \Sigma_{k,\omega}^{\sigma,\sigma} - \frac{\Sigma_{k,\omega}^{\sigma,-\sigma} \Sigma_{k,\omega}^{-\sigma,\sigma}}{\sigma \lambda_{k,\omega}^\sigma + \omega_{-\sigma k} + \Sigma_{k,\omega}^{-\sigma,-\sigma}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (\omega_k - \omega_{-k} + \Sigma_{k,\omega}^{+,+} - \Sigma_{k,\omega}^{-,-} + \\ &+ \sigma \left[\frac{1}{4} (\omega_k + \omega_{-k} + \Sigma_{k,\omega}^{+,+} + \Sigma_{k,\omega}^{-,-})^2 - \Sigma_{k,\omega}^{+,-} \Sigma_{k,\omega}^{-,+} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

В пределе бесконечно малой энергии волн собственно-энергетические функции $\hat{\Phi}$ и $\hat{\Sigma}$ равны нулю, а функция $\lambda_{k,\omega}^\sigma$ равна $\sigma \omega_{\sigma k}$. При этом нули определителя $D_{k,\omega}$ (являющиеся полюсами функции Грина) расположены в точках $\omega = \omega_k - i0$ и $\omega = -\omega_{-k} - i0$, что соответствует собственным колебаниям линейной задачи. При малой, но конечной энергии турбулентности у функции Грина имеются близкие к вещественной оси ω полюсы в точках $\omega = \lambda_{k,\omega}^\sigma$ ($\sigma = \pm$), являющихся корнями уравнения $\omega = \lambda_{k,\omega}^\sigma$:

$$\begin{aligned} \lambda_k^\sigma &= \lambda_{k,\lambda_k^\sigma}^\sigma = \sigma \left(\omega_{\sigma k} + \Sigma_{k,\lambda_k^\sigma}^{\sigma,\sigma} - \frac{\Sigma_{k,\lambda_k^\sigma}^{\sigma,-\sigma} \Sigma_{k,\lambda_k^\sigma}^{-\sigma,\sigma}}{\sigma \lambda_k^\sigma + \omega_{-\sigma k} + \Sigma_{k,\lambda_k^\sigma}^{-\sigma,-\sigma}} \right) = \\ &= \sigma \left(\omega_{\sigma k} + \Sigma_{k,\omega}^{\sigma,\sigma} + \sigma \Sigma_{k,\omega}^{\sigma,\sigma} \frac{\partial \Sigma_{k,\omega}^{\sigma,\sigma}}{\partial \omega} - \frac{\Sigma_{k,\omega}^{+,-} \Sigma_{k,\omega}^{-,+}}{\omega_k + \omega_{-k}} + \dots \right) \Big|_{\omega = \sigma \omega_{\sigma k}}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

В силу симметрии $\lambda_k^\sigma = -(\lambda_{-k}^{-\sigma})^*$, вещественная и мнимая части λ_k^σ представимы в виде

$$\bar{\omega}_k^\sigma \equiv \text{Re } \lambda_k^\sigma = \sigma \bar{\omega}_{\sigma k}; \quad \gamma_k^\sigma \equiv -\text{Im } \lambda_k^\sigma = \gamma_{\sigma k}.$$

Величина $\bar{\omega}_k$ имеет смысл перенормированной частоты собственного колебания с волновым вектором k , а γ_k является декрементом затухания данного колебания. Простейшее условие применимости разложения (4.4) состоит в достаточно плавной зависимости $\Sigma_{k,\omega}^{+,+}$ от частоты $|\partial \Sigma_{k,\omega}^{+,+} / \partial \omega|_{\omega = \omega_k} \ll 1$. При оценочно одинаковых вещественной и мнимой частях $\Sigma_{k,\omega}^{+,+}$ это условие сводится к неравенству

$$\gamma \ll \Delta \omega, \quad (4.5)$$

где $\Delta \omega$ — характерный масштаб изменения функции $\Sigma_{k,\omega}^{+,+}$ по частоте. Как будет понятно из дальнейшего, $\Delta \omega$ оценочно совпадает с масштабом изменения функции $N_{k,\omega}^{+,+} \equiv \int \frac{d\omega}{2\pi} N_{k,\omega}^{+,+}$ по переменной ω_k , или, грубо говоря, с частотной шириной спектра турбулентности*). Это позволяет интерпретировать (4.5) как условие малости характерного времени перемешивания фаз волн $(\Delta \omega)^{-1}$ по сравнению со временем жизни квазичастиц γ^{-1} . Остальные компоненты функции $\Sigma_{k,\omega}^{s,s'}$ и функция $\Phi_{k,\omega}^{s,s'}$ также плавно зависят от частоты, т. е. меняются на масштабе порядка $\Delta \omega$. Аналитическое продолжение плавной функции частоты в комплексную плоскость ω не имеет особенностей вплоть до расстояний порядка $\Delta \omega$ от вещественной оси. Следовательно, расположенные на малых по сравнению с $\Delta \omega$ расстояниях от вещественной оси особенности функции Грина $\hat{G}_{k,\omega}$ исчерпываются двумя простыми полюсами. Выделив в каждом из полюсов $\omega = \lambda_k^\sigma$ сингулярную часть функции Грина $\hat{G}_{k,\omega}$, можно представить последнюю в виде суммы

$$\hat{G}_{k,\omega} = {}^c \hat{G}_{k,\omega} + \delta \hat{G}_{k,\omega} \quad (4.6)$$

вклада собственных колебаний

$${}^c \hat{G}_{k,\omega} = \sum_{\sigma} \frac{\hat{R}_k^\sigma}{\omega - \lambda_k^\sigma} \quad (4.7)$$

и плавно зависящего от частоты на всей вещественной оси ω вклада биений $\delta \hat{G}_{k,\omega}$. Вычет функции $\hat{G}_{k,\omega}$ в полюсе $\omega = \lambda_k^\sigma$:

$$\hat{R}_k^\sigma = (\partial D_{k,\omega} / \partial \omega)^{-1} \hat{R}_{k,\omega} |_{\omega = \lambda_k^\sigma} \quad (4.8)$$

пропорционален оператору проектирования двумерного векторного пространства, в котором действует оператор $\hat{L}_{k,\lambda_k^\sigma}$, на одномерное нуль-пространство этого оператора:

$$\hat{R}_k^\sigma = |e_k^\sigma\rangle \langle c_k^\sigma|. \quad (4.9)$$

Здесь использованы восходящие к [15] обозначения $| \rangle$ и $\langle |$ для векторов и дуальных к ним 1-форм; направленные вдоль векторов

*) Подразумевается, что выбрана система отсчета, в которой спектр как целое покоится, т. е. средняя групповая скорость волн равна нулю.

$|e_k^\sigma\rangle$ и $|c_k^\sigma\rangle$ лучи составляют нуль-пространства операторов $\hat{L}_{k,\lambda_k^\sigma}$ и $(\hat{L}_{k,\lambda_k^\sigma})^+$, соответственно:

$$\hat{L}_{k,\lambda_k^\sigma} |e_k^\sigma\rangle = 0, \quad (\hat{L}_{k,\lambda_k^\sigma})^+ |c_k^\sigma\rangle = 0. \quad (4.10)$$

В силу уравнений (4.10), различные компоненты $e_k^{s,\sigma}$, $c_k^{s,\sigma}$ векторов $|e_k^\sigma\rangle$, $|c_k^\sigma\rangle$ связаны между собой соотношениями

$$\begin{aligned} e_k^{-\sigma,\sigma} &= e_k^{\sigma,\sigma} \Sigma_{k,\lambda_k^\sigma}^{-\sigma,\sigma} / L_{k,\lambda_k^\sigma}^{-\sigma,-\sigma}, \\ c_k^{-\sigma,\sigma} &= c_k^{\sigma,\sigma} (\Sigma_{k,\lambda_k^\sigma}^{\sigma,\sigma} / L_{k,\lambda_k^\sigma}^{-\sigma,-\sigma})^*. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Произведение σ -компонент этих векторов фиксируется формулой (4.9):

$$\begin{aligned} (c_k^{\sigma,\sigma})^* e_k^{\sigma,\sigma} &= \sigma (\partial D_{k,\omega} / \partial \omega)^{-1} R_{k,\omega}^{\sigma,\sigma} |_{\omega=\lambda_k^\sigma} = \\ &= \left[1 - \sigma \frac{\partial}{\partial \omega} (\Sigma_{k,\omega}^{\sigma,\sigma} + \Sigma_{k,\omega}^{\sigma,-\sigma} \Sigma_{k,\omega}^{-\sigma,\sigma} / L_{k,\omega}^{-\sigma,-\sigma}) \right]_{\omega=\lambda_k^\sigma}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Фазы величин $e_k^{\sigma,\sigma}$ и $(c_k^{\sigma,\sigma})^*$ можно, не теряя общности, выбрать одинаковыми:

$$e_k^{\sigma,\sigma} / |e_k^{\sigma,\sigma}| = (c_k^{\sigma,\sigma})^* / |c_k^{\sigma,\sigma}|. \quad (4.13)$$

Остающийся произвол в нормировке одного из векторов $|e_k^\sigma\rangle$ и $|c_k^\sigma\rangle$ будет устранен ниже требованием структурной симметрии интеграла столкновений. При этом, разумеется, будут соблюдены условия

$$e_k^{s,\sigma} = (e_{-k}^{-s,-\sigma})^*, \quad c_k^{s,\sigma} = (c_{-k}^{-s,-\sigma})^*. \quad (4.14)$$

Обозначив через \hat{e}_k и \hat{c}_k операторы, матричные элементы которых равны $e_k^{s,\sigma}$ и $c_k^{s,\sigma}$, соответственно, можно переписать формулы (4.7), (4.9) в виде

$${}^c \hat{G}_{k,\omega} = \hat{e}_k \hat{g}_{k,\omega} \hat{c}_k^+, \quad (4.15)$$

где $\hat{g}_{k,\omega}$ — оператор с матричными элементами

$$g_{k,\omega}^{\sigma,\sigma'} = \frac{\sigma}{\omega - \lambda_k^\sigma} \delta_{\sigma,\sigma'}. \quad (4.16)$$

Как явствует из (4.15), (4.16), преобразование

$$\hat{G}_{k,\omega} = \hat{e}_k \hat{G}_{k,\omega} \hat{c}_k^+ \quad (4.17)$$

диагонализует вклад собственных колебаний в функцию Грина. Поскольку операторы \hat{e}_k , \hat{c}_k фактически не зависят от случайной силы $f_k^s(t) \equiv \int d\mathbf{r} f^s(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, (4.17) можно считать следствием замен

$$a_k^s(t) = \sum_\sigma e_k^{s,\sigma} \tilde{a}_k^\sigma(t); \quad \tilde{f}_k^\sigma(t) = \sum_s (\hat{c}_k^+)^{\sigma,s} f_k^s(t).$$

Соответствующее первой из них преобразование парного коррелятора имеет вид

$$\hat{N}_{k,\omega} = \hat{e}_k \hat{N}_{k,\omega} \hat{e}_k^+. \quad (4.18)$$

Модифицированная парная корреляционная функция $\hat{N}_{k,\omega}$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \hat{N}_{k,\omega} &= \hat{G}_{k,\omega} \hat{\Phi}_{k,\omega} (\hat{G}_{k,\omega})^+, \\ \hat{\Phi}_{k,\omega} &= \hat{c}_k^+ \hat{\Phi}_{k,\omega} \hat{c}_k. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Ввиду глубокой аналогии между разложениями операторов $\hat{\Phi}_{k,\omega}$ и $(\hat{\Sigma}^A)_{k,\omega}$, модифицированную собственно-энергетическую функцию $\hat{\Sigma}_{k,\omega}$ целесообразно определить формулой

$$\hat{\Sigma}_{k,\omega} = \hat{c}_k^+ \hat{\Sigma}_{k,\omega} \hat{c}_k. \quad (4.20)$$

Если подобным образом преобразовать оператор $\hat{\Omega}_k$:

$$\hat{\Omega}_k = \hat{c}_k^+ \hat{\Omega}_k \hat{c}_k, \quad (4.21)$$

то линейное соотношение (3.14) между эрмитовой и антиэрмитовой частями $\hat{\Sigma}_{k,\omega}$ сохранит свой вид при переходе к модифицированным функциям:

$$\hat{\Sigma}_{k,\omega}^H = \hat{\Omega}_k + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi - \omega} \hat{\Sigma}_{k,\omega}^A. \quad (4.22)$$

Специальное обозначение ${}^A \hat{G}_{k,\omega}$ потребуется ниже для аналогичной $\hat{N}_{k,\omega}$ функции

$${}^A \hat{G}_{k,\omega} = \hat{G}_{k,\omega} \hat{\Sigma}_{k,\omega}^A (\hat{G}_{k,\omega})^+, \quad (4.23)$$

связанной с $(\hat{G}^A)_{k,\omega}$ преобразованием

$$(\hat{G}^A)_{k,\omega} = \hat{e}_k^A \hat{G}_{k,\omega} \hat{e}_k^+ \quad (4.24)$$

Во избежание недоразумений следует заметить, что $\hat{G}_{k,\omega}$, вообще говоря, не совпадает с антиэрмитовой частью оператора $\hat{G}_{k,\omega}$ даже при вещественных значениях ω .

Все введенные выше модифицированные функции обладают такими же свойствами симметрии, как исходные. Например,

$$\hat{G}_{k,\omega}^{\sigma,\sigma'} = (\hat{G}_{-k,-\omega}^{-\sigma,-\sigma'})^*; \quad \hat{N}_{k,\omega}^{\sigma,\sigma'} = (\hat{N}_{k,\omega}^{\sigma',\sigma})^* = N_{-k,-\omega}^{-\sigma',-\sigma}$$

При разделении функции Грина $\hat{G}_{k,\omega}$ на вклады собственных колебаний $\hat{g}_{k,\omega}$ и биений $\delta\hat{G}_{k,\omega}$ парный коррелятор $\hat{N}_{k,\omega}$ распадается на четыре слагаемых:

$$\begin{aligned} \hat{N}_{k,\omega} = & \hat{n}_{k,\omega} + \hat{g}_{k,\omega} \hat{\Phi}_{k,\omega}(\delta\hat{G}_{k,\omega})^+ + \\ & + \delta\hat{G}_{k,\omega} \hat{\Phi}_{k,\omega}(\hat{g}_{k,\omega})^+ + \delta\hat{G}_{k,\omega} \hat{\Phi}_{k,\omega}(\delta\hat{G}_{k,\omega})^+ \end{aligned} \quad (4.25)$$

Первое из них,

$$\hat{n}_{k,\omega} \equiv \hat{g}_{k,\omega} \hat{\Phi}_{k,\omega}(\hat{g}_{k,\omega})^+, \quad (4.26)$$

учитывает взаимную корреляцию собственных колебаний, второе и третье — корреляцию между собственными колебаниями и биениями, четвертое — между биениями. Диагональные матричные элементы оператора $\hat{n}_{k,\omega}$,

$$n_{k,\omega}^{\sigma,\sigma} = \frac{\tilde{\Phi}_{k,\omega}^{\sigma,\sigma}}{(\omega - \lambda_k^\sigma)(\omega - (\lambda_k^\sigma)^*)} = \frac{\tilde{\Phi}_{k,\omega}^{\sigma,\sigma}}{2i\gamma_k^\sigma} \left[\frac{1}{\omega - (\lambda_k^\sigma)^*} - \frac{1}{\omega - \lambda_k^\sigma} \right], \quad (4.27)$$

являются автокорреляционными функциями собственных колебаний, а его недиагональные элементы:

$$n_{k,\omega}^{\sigma,-\sigma} = -\frac{\tilde{\Phi}_{k,\omega}^{\sigma,-\sigma}}{(\omega - \lambda_k^\sigma)(\omega + \lambda_{-k}^\sigma)} = \frac{\tilde{\Phi}_{k,\omega}^{\sigma,-\sigma}}{\lambda_k^\sigma + \lambda_{-k}^\sigma} \left(\frac{1}{\omega + \lambda_{-k}^\sigma} - \frac{1}{\omega - \lambda_k^\sigma} \right), \quad (4.28)$$

описывают обычно называемую «аномальной» взаимную корреляцию собственных колебаний с равными по величине и противоположно направленными волновыми векторами.

Аналогичные (4.25) — (4.28) формулы для модифицированной антиэрмитовой части функции Грина получаются заменой $\hat{\Phi}_{k,\omega}$ на

$(\hat{\Sigma}^A)_{k,\omega}$:

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{k,\omega}^A = & \hat{\eta}_{k,\omega} + \hat{g}_{k,\omega} \hat{\Sigma}_{k,\omega}^A(\delta\hat{G}_{k,\omega})^+ + \\ & + \delta\hat{G}_{k,\omega} \hat{\Sigma}_{k,\omega}^A(\hat{g}_{k,\omega})^+ + \delta\hat{G}_{k,\omega} \hat{\Sigma}_{k,\omega}^A(\delta\hat{G}_{k,\omega})^+, \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\hat{\eta}_{k,\omega} \equiv \hat{g}_{k,\omega} \hat{\Sigma}_{k,\omega}^A(\hat{g}_{k,\omega})^+,$$

$$\eta_{k,\omega}^{\sigma,\sigma} = \frac{(\hat{\Sigma}^A)_{k,\omega}^{\sigma,\sigma}}{2i\gamma_k^\sigma} \left[\frac{1}{\omega - (\lambda_k^\sigma)^*} - \frac{1}{\omega - \lambda_k^\sigma} \right],$$

$$\eta_{k,\omega}^{\sigma,-\sigma} = \frac{(\hat{\Sigma}^A)_{k,\omega}^{\sigma,-\sigma}}{\lambda_k^\sigma + \lambda_{-k}^\sigma} \left[\frac{1}{\omega + \lambda_{-k}^\sigma} - \frac{1}{\omega - \lambda_k^\sigma} \right].$$

Модифицированные собственно-энергетические функции можно вычислять непосредственно с помощью диаграммной техники. Правила вычислений понятны из преобразований (4.17) — (4.21), (4.24). В частности, соответствующий (3.9) член разложения оператора $\hat{\Sigma}_{k,\omega}^A$ дается формулой

$$\left(\text{Diagram} \right)_q^{\sigma,\sigma'} = \sum_{\substack{\sigma_1, \dots, \sigma_5 \\ \sigma'_1, \dots, \sigma'_5}} \int \prod_{i=1}^5 \frac{d^4 q_i}{(2\pi)^4}$$

$$\begin{aligned} & \times \tilde{U}_{-k|k_1, k_2}^{-\sigma_1, \sigma_2} \tilde{U}_{k_3| -k_2, k_4}^{\sigma_3, -\sigma_4} \tilde{U}_{-k_1| -k_4, k_5}^{-\sigma'_1, -\sigma'_4} \tilde{U}_{-k_3| -k_5, k}^{-\sigma'_3, \sigma'_5} \times \\ & \times (2\pi)^{12} \delta^4(-q + q_1 + q_2) \delta^4(-q_2 + q_3 + q_4) \delta^4(-q_1 - q_4 + q_5) \times \\ & \times \tilde{G}_{q_1}^{\sigma_1, \sigma'_1} \tilde{G}_{-q_1}^{-\sigma'_3, -\sigma_3} A \tilde{G}_{q_2}^{\sigma_2, \sigma'_2} \tilde{N}_{q_1}^{\sigma_4, \sigma'_4} \tilde{N}_{q_1}^{\sigma_5, \sigma'_5} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Аналогичным образом преобразуются и другие члены разложения операторов $\hat{\Phi}_{k,\omega}$, $(\hat{\Sigma}^A)_{k,\omega}$, $\hat{\Omega}_k$. Модифицированная вершинная функция $\tilde{U}_{k_1|k_2, \dots, k_n}^{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n}$ связана с исходной соотношением

$$\tilde{U}_{k_1|k_2, \dots, k_n}^{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n} = \sum_{s_1, \dots, s_n} c_{k_1}^{s_1, \sigma_1} e_{k_2}^{s_2, \sigma_2} \dots e_{k_n}^{s_n, \sigma_n} U_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{s_1, s_2, \dots, s_n} \quad (4.31)$$

Отделенная вертикальной чертой пара индексов (σ_1) соответствует единственной прямой линии, «входящей» в данную вершину, т. е. стыкующейся с ней своим вторым по направлению чтения концом. Как видно из (4.31), модифицированная вершинная функция симметрична по всем парам индексов, кроме первой.

Для записи правой части (4.30) (как и любого другого члена разложения операторов $\hat{\Phi}_{k,\omega}$, $\hat{\Sigma}_{k,\omega}^A$, $\hat{\Omega}_k$) в терминах модифицированных собственно-энергетических функций следует выразить через

них величины λ_k^σ , $e_k^{s,\sigma}$, $c_k^{s,\sigma}$. Это будет сделано ниже и превратит разложения операторов $\hat{\Phi}_{k,\omega}$, $(\hat{\Sigma}^A)_{k,\omega}$, $\hat{\Omega}_k$ в замкнутую систему уравнений. Возможность ее редукции к кинетическому уравнению для волн связана с тем обстоятельством, что количество интегрирований в любом члене указанных разложений достаточно для ликвидации всех содержащихся в подынтегральном выражении δ -функций и резких зависимостей от частот. При надлежащем выборе переменных (возможном всюду, за исключением некоторых особых точек) каждый резонанс интегрируется по отклонению от его центра с плавно зависящим от данного отклонения весом. В нулевом приближении по параметру $\gamma/\Delta\omega$ результат такого интегрирования сохраняется при заменах

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{k,\omega}^{\sigma,\sigma'} &\rightarrow \sigma \delta_{\sigma,\sigma'} (\omega - \tilde{\omega}_k^\sigma + i0)^{-1}, \\ {}^A \tilde{G}_{k,\omega}^{\sigma,\sigma'} &\rightarrow -\pi \sigma \delta_{\sigma,\sigma'} (\omega - \tilde{\omega}_k^\sigma), \\ \tilde{N}_{k,\omega}^{\sigma,\sigma'} &\rightarrow 2\pi \delta_{\sigma,\sigma'} \delta(\omega - \tilde{\omega}_k^\sigma) n_k^\sigma, \end{aligned} \quad (4.32)$$

где

$$n_k^\sigma \equiv \frac{\tilde{\Phi}_{k,\tilde{\omega}_k^\sigma}^{\sigma,\sigma}}{2\gamma_k^\sigma} = n_{-k}^{-\sigma} \equiv n_{\sigma k}. \quad (4.33)$$

После замен (4.32) все члены разложений операторов $\hat{\Phi}_{k,\omega}$, $(\hat{\Sigma}^A)_{k,\omega}$, $\hat{\Omega}_k$ выражаются через интегралы от функций n_k с точностью до малых по параметру $\gamma/\Delta\omega$ добавок. Итерируя систему уравнений, которой удовлетворяют перечисленные операторы, можно асимптотически выразить их через нулевое приближение. При этом формула (4.33) превратится в замкнутое «кинетическое» уравнение для «функции распределения квазичастиц» n_k . То же самое, разумеется, осуществимо и при любом другом определении n_k , отличающемся от (4.33) малыми по параметру $\gamma_N/\Delta\omega$ поправками. Ясно, однако, что подобные вариации n_k незначительны для структуры «интеграла столкновений»

$$F_k \equiv \tilde{\Phi}_{k,\tilde{\omega}_k}^{+,+} - 2n_k \gamma_k. \quad (4.34)$$

Для придания кинетическому уравнению более симметричной формы:

$$0 = F_k = \tilde{\Phi}_{k,\tilde{\omega}_k}^{+,+} + 2n_k (\hat{\Sigma}^A)_{k,\tilde{\omega}_k}^{+,+} \quad (4.35)$$

следует задать оставшуюся до сих пор неопределенной нормировку вектора $|c_k\rangle$ условием

$$\gamma_k^\sigma = -\sigma (\hat{\Sigma}^A)_{k,\tilde{\omega}_k^\sigma}^{\sigma,\sigma} = -\sigma \text{Im} \tilde{\Sigma}_{k,\tilde{\omega}_k^\sigma}^{\sigma,\sigma}. \quad (4.36)$$

Вклад в интеграл столкновений (4.35) всех графиков (3.2), содержащих по n линий в основных сечениях, и соответствующих графиков для $(\hat{\Sigma}^A)_{k,\omega}$ имеет вид

$$\begin{aligned} {}^{(n)}F_k &= \sum_{\substack{\sigma_1, \dots, \sigma_n \\ \sigma'_1, \dots, \sigma'_n}} \int \prod_{i=1}^n d^4 q_i \delta^4(-q + q_1 + \dots + q_n) |_{q=(k,\tilde{\omega}_k)} W_{q_1, \dots, q_n}^{\sigma_1, \sigma'_1; \dots; \sigma_n, \sigma'_n} \times \\ &\times \{ \tilde{N}_{q_1}^{\sigma_1, \sigma'_1} \dots \tilde{N}_{q_n}^{\sigma_n, \sigma'_n} + 2n_k [({}^A \hat{G})_{q_1}^{\sigma_1, \sigma'_1} \tilde{N}_{q_2}^{\sigma_2, \sigma'_2} \dots \tilde{N}_{q_n}^{\sigma_n, \sigma'_n} + \dots + \\ &+ \tilde{N}_{q_1}^{\sigma_1, \sigma'_1} \dots \tilde{N}_{q_{n-1}}^{\sigma_{n-1}, \sigma'_{n-1}} ({}^A \hat{G})_{q_n}^{\sigma_n, \sigma'_n}] \}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

С помощью формул (4.25), (4.23) правая часть (4.37) разделяется на основной вклад

$$\begin{aligned} {}^{(n)}\bar{F}_k &= \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_n} \int \prod_{i=1}^n d^4 q_i \delta^4(-q + q_1 + \dots + q_n) |_{q=(k,\tilde{\omega}_k)} W_{q_1, \dots, q_n}^{\sigma_1, \sigma_1; \dots; \sigma_n, \sigma_n} \times \\ &\times \{ n_{q_1}^{\sigma_1, \sigma_1} \dots n_{q_n}^{\sigma_n, \sigma_n} + 2n_k [\eta_{q_1}^{\sigma_1, \sigma_1} n_{q_2}^{\sigma_2, \sigma_2} \dots n_{q_n}^{\sigma_n, \sigma_n} + \dots + \\ &+ n_{q_1}^{\sigma_1, \sigma_1} \dots n_{q_{n-1}}^{\sigma_{n-1}, \sigma_{n-1}} \eta_{q_n}^{\sigma_n, \sigma_n}] \} \end{aligned} \quad (4.38)$$

и сумму малых по параметру $\gamma_N/\Delta\omega$ добавок, каждая из которых получается заменой одной или нескольких пар функций $\tilde{N}_{q_i}^{\sigma_i, \sigma'_i}$, $({}^A \hat{G})_{q_i}^{\sigma_i, \sigma'_i}$ в (4.37) на их отклонения от $n_{q_i}^{\sigma_i, \sigma_i} \delta_{\sigma_i, \sigma'_i}$, $\eta_{q_i}^{\sigma_i, \sigma_i} \delta_{\sigma_i, \sigma'_i}$. Повторно разлагая операторы $\hat{\Phi}_{k,\omega}$, $(\hat{\Sigma}^A)_{k,\omega}$ в формулах для этих отклонений, можно представить каждую добавку к (4.38) в виде суммы членов, подобных (4.37), но имеющих более высокий, чем n , порядок. Учет новых членов сводится к переопределению коэффициентов $W_{q_1, \dots, q_p}^{\sigma_1, \sigma_1; \dots; \sigma_p, \sigma_p}$ с $p > n$. Последовательное проведение данной процедуры в порядке возрастания n позволяет асимптотически свести интеграл столкновений к сумме членов типа (4.38). В каждом из них функции $n_{q_i}^{\sigma_i, \sigma_i}$, $\eta_{q_i}^{\sigma_i, \sigma_i}$ можно заменить формальными рядами:

$$\begin{aligned} n_{q_i}^{\sigma_i, \sigma_i} &= \frac{\tilde{\Phi}_{q_i}^{\sigma_i, \sigma_i}}{\gamma_k^{\sigma_i}} \text{Im} \frac{1}{\omega - \tilde{\omega}_k^{\sigma_i} - i\gamma_k^{\sigma_i}} \rightarrow 2\pi \delta(\omega - \tilde{\omega}_k^{\sigma_i}) n_{\sigma_i, k} - \\ &- \tilde{\Phi}_{q_i}^{\sigma_i, \sigma_i} \text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i\gamma_k^{\sigma_i})^{n-1}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \omega^n} \frac{1}{\omega - \tilde{\omega}_k^{\sigma_i} - i0}, \end{aligned}$$

$$\eta_q^{\sigma, \sigma} = \frac{(\hat{\Sigma}^A)_q^{\sigma, \sigma}}{\gamma_k^{\sigma}} \operatorname{Im} \frac{1}{\omega - \tilde{\omega}_k^{\sigma} - i\gamma_k^{\sigma}} \rightarrow -\pi\sigma\delta(\omega - \tilde{\omega}_k^{\sigma}) - (\hat{\Sigma}^A)_q^{\sigma, \sigma} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i\gamma_k^{\sigma})^{n-1}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \omega^n} \frac{1}{\omega - \tilde{\omega}_k^{\sigma} - i0}. \quad (4.39)$$

Законность таких замен обосновывается предшествовавшими (4.32) рассуждениями. Интегрирование символа $\frac{\partial^n}{\partial \xi^n} \frac{1}{\xi - i0}$ по ξ с плавно зависящим от ξ весом проводится по формуле

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi U(\xi) \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} \frac{1}{\xi - i0} = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{1}{\xi - i0} \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} U(\xi).$$

С помощью процедуры, вполне аналогичной использовавшейся при переходе от разложения интеграла столкновений на члены (4.37) к его разложению на члены типа (4.38), можно осуществить переход от функций $n_q^{\sigma, \sigma}$, $\eta_q^{\sigma, \sigma}$ к первым слагаемым в правых частях (4.39). В результате такого перехода интеграл столкновений приобретает вид

$$F_k = \sum_{n=2}^{\infty} {}^{(n)}\tilde{F}_k,$$

$${}^{(n)}\tilde{F}_k = \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_n} \prod_{i=1}^n d^3k_i \delta^3(-\mathbf{k} + \sigma_1\mathbf{k}_1 + \dots + \sigma_n\mathbf{k}_n) \delta(-\tilde{\omega}_k + \sigma_1\tilde{\omega}_{k_1} + \dots + \sigma_n\tilde{\omega}_{k_n}) \times \\ \times W_{k_1, \dots, k_n}^{\sigma_1, \dots, \sigma_n} \{n_{k_1} \dots n_{k_n} - n_k [\sigma_1 n_{k_2} \dots n_{k_n} + \dots + n_{k_1} \dots n_{k_{n-1}} \sigma_n]\}. \quad (4.40)$$

Полученное выражение для n -го столкновительного члена, на первый взгляд, имеет ту же структуру, что и в отсутствие низших резонансов. В действительности, однако, «вероятности» $W_{k_1, \dots, k_n}^{\sigma_1, \dots, \sigma_n}$ всех нелинейных процессов, кроме низшего, содержат символы, приобретающие количественный смысл лишь после определенных манипуляций над выражением (4.40), например, после интегрирований по частям в надлежащим образом выбранных переменных. Это плата за формальное сохранение структуры (4.40) и отголосок устраненных с помощью диаграммной техники расходимостей.

В заключение настоящего раздела будет рассмотрен отложенный выше вопрос о выражении величин λ_k^{σ} , $e_k^{s, \sigma}$, $c_k^{s, \sigma}$ через модифи-

цированную собственнно-энергетическую функцию $\hat{\Sigma}_{k, \omega}$. Формула (4.36) позволяет исключить из перечисленных величин мнимую часть λ_k^{σ} . В силу второго уравнения (4.10) имеют место тождества:

$$\langle c_k^{\sigma} | (\hat{L}_{k, \lambda_k^{\sigma'}})^+ | c_k^{\sigma'} \rangle = 0, \\ \langle c_k^{\sigma} | \hat{L}_{k, \lambda_k^{\sigma'}} | c_k^{\sigma'} \rangle = 0, \quad (4.41)$$

Их разность представима в виде

$$\sum_s s(c_k^{s, \sigma})^* c_k^{s, \sigma'} = \frac{\tilde{\Sigma}_{k, \lambda_k^{\sigma'}}^{\sigma, \sigma'} - (\tilde{\Sigma}_{k, \lambda_k^{\sigma'}}^{\sigma', \sigma})^*}{\lambda_k^{\sigma} - (\lambda_k^{\sigma'})^*} \equiv \sigma\delta_{\sigma, \sigma'} + P_k^{\sigma, \sigma'}, \quad (4.42)$$

где $P_k^{\sigma, \sigma'}$ — малая по параметру $\gamma/\Delta\omega$ поправка. Малость $P_k^{\sigma, \sigma'}$ при $\sigma' = -\sigma$ понятна непосредственно из (4.42), а при $\sigma' = \sigma$ проверяется с помощью формулы

$$P_k^{\sigma, \sigma} = \operatorname{Im} [\tilde{\Sigma}_{k, \lambda_k^{\sigma}}^{\sigma, \sigma} - \tilde{\Sigma}_{k, \tilde{\omega}_k^{\sigma}}^{\sigma, \sigma}] / \operatorname{Im} \lambda_k^{\sigma} = \\ = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n (\gamma_k^{\sigma})^n}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1}}{\partial \omega^{n+1}} \tilde{\Sigma}_{k, \omega}^{\sigma, \sigma} \Big|_{\omega = \tilde{\omega}_k^{\sigma}} = \frac{\partial}{\partial \omega} \operatorname{Re} \tilde{\Sigma}_{k, \omega}^{\sigma, \sigma} + O\left(\frac{\gamma^2}{(\Delta\omega)^2}\right) \Big|_{\omega = \tilde{\omega}_k^{\sigma}}. \quad (4.43)$$

В совокупности тождества (4.41) эквивалентны соотношению

$$(c_k^{s, \sigma})^* c_k^{s, \sigma'} \equiv A_k^{s, \sigma, \sigma'} = (\omega_k + \omega_{-k})^{-1} \times \\ \times [(\lambda_k^{\sigma} + s\omega_{-s k})(\sigma\delta_{\sigma, \sigma'} + P_k^{\sigma, \sigma'}) - \tilde{\Sigma}_{k, \lambda_k^{\sigma'}}^{\sigma, \sigma'}]. \quad (4.44)$$

Величины $A_k^{s, \sigma, \sigma'}$ зависят только от λ_k^{\pm} , $\hat{\Sigma}_{k, \omega}$ и, очевидно, обладают свойствами

$$A_k^{s, \sigma, \sigma'} = (A_k^{s, \sigma', \sigma})^*; \quad A_k^{s, \sigma, \sigma} A_k^{s, \sigma', \sigma'} = |A_k^{s, \sigma, \sigma'}|^2. \quad (4.45)$$

С учетом (4.36) второе свойство по существу представляет собой связь между вещественной частью λ_k^{σ} и $\hat{\Sigma}_{k, \omega}$:

$$\tilde{\omega}_k^{\sigma} = \sigma\omega_{\sigma k} + (\sigma + P_k^{\sigma, \sigma})^{-1} \left[\operatorname{Re} \tilde{\Sigma}_{k, \lambda_k^{\sigma}}^{\sigma, \sigma} + (\omega_k + \omega_{-k}) \frac{|A_k^{-\sigma, \sigma, -\sigma}|^2}{A_k^{-\sigma, -\sigma, -\sigma}} \right] = \\ = \sigma\omega_{\sigma k} + \sigma \operatorname{Re} \tilde{\Sigma}_{k, \omega}^{\sigma, \sigma} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega} |\tilde{\Sigma}_{k, \omega}^{\sigma, \sigma}|^2 + \frac{\sigma |\tilde{\Sigma}_{k, \omega}^{\sigma, -\sigma}|^2}{\omega_k + \omega_{-k}} + O\left(\frac{\gamma^3}{(\Delta\omega)^2}\right) \Big|_{\omega = \tilde{\omega}_k^{\sigma}}. \quad (4.46)$$

Помимо этого, соотношение (4.44) позволяет выразить недиагональные матричные элементы оператора \hat{c}_k через диагональные и вычислить абсолютные величины последних:

$$(c_k^{-\sigma, \sigma})^* = A_k^{-\sigma, \sigma, -\sigma} / c_k^{-\sigma, -\sigma},$$

$$|c_k^{\sigma, \sigma}|^2 = A_k^{\sigma, \sigma, \sigma} = 1 + \sigma P_k^{\sigma, \sigma} + \frac{|A_k^{\sigma, \sigma, -\sigma}|^2}{A_k^{-\sigma, -\sigma, -\sigma}}. \quad (4.47)$$

Для дальнейших вычислений полезны оператор \hat{b}_k , переводящий \hat{c}_k в \hat{e}_k :

$$\hat{e}_k = \hat{c}_k \hat{b}_k \quad (4.48)$$

и обратный к $\hat{G}_{k, \omega}$ оператор $\hat{L}_{k, \omega}$:

$$\hat{L}_{k, \omega} = \hat{c}_k^+ L_{k, \omega} \hat{e}_k. \quad (4.49)$$

Матричные элементы последнего

$$\tilde{L}_{k, \omega}^{\sigma, \sigma'} = \langle c_k^\sigma | \hat{L}_{k, \omega} | e_k^{\sigma'} \rangle$$

обращаются в нуль при частотах $\omega = \lambda_k^\sigma$ и $\omega = \lambda_k^{\sigma'}$:

$$\tilde{L}_{k, \lambda_k^\sigma}^{\sigma, \sigma'} = 0, \quad \tilde{L}_{k, \lambda_k^{\sigma'}}^{\sigma, \sigma'} = 0. \quad (4.50)$$

Кроме того, из определения вычета модифицированной функции Грина в полюсе $\omega = \lambda_k^\sigma$:

$$\lim_{\omega \rightarrow \lambda_k^\sigma} (\omega - \lambda_k^\sigma) \tilde{G}_{k, \omega}^{\sigma, \sigma} = \sigma \delta_{\sigma, \sigma'}$$

следует соотношение

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \tilde{L}_{k, \omega}^{\sigma, \sigma} \Big|_{\omega = \lambda_k^\sigma} = \sigma. \quad (4.51)$$

Объединение (4.51) с разностью тождеств (4.50) можно записать единой формулой

$$\sum_s s (c_k^{s, \sigma})^* e_k^{s, \sigma} = \sigma \delta_{\sigma, \sigma'} + S_k^{\sigma, \sigma'} \quad (4.52)$$

Здесь введено обозначение $S_k^{\sigma, \sigma'}$:

$$S_k^{\sigma, \sigma'} \equiv \bar{S}_{k, \lambda_k^\sigma, \lambda_k^{\sigma'}}, \quad \bar{S}_{k, \omega, \omega'} = \frac{\bar{\Sigma}_{k, \omega}^{\sigma, \sigma'} - \bar{\Sigma}_{k, \omega'}^{\sigma, \sigma'}}{\omega - \omega'}, \quad (4.53)$$

$$\bar{\Sigma}_{k, \omega}^{\sigma, \sigma'} \equiv \langle c_k^\sigma | \hat{\Sigma}_{k, \omega} | e_k^{\sigma'} \rangle.$$

Величины $\bar{S}_{k, \omega, \omega'}^{\sigma, \sigma'}$ являются матричными элементами оператора

$$\hat{S}_{k, \omega, \omega'} = \hat{S}_{k, \omega, \omega'} b_k, \quad \hat{S}_{k, \omega, \omega'} \equiv \frac{\hat{\Sigma}_{k, \omega} - \hat{\Sigma}_{k, \omega'}}{\omega - \omega'} \quad (4.54)$$

С помощью формул (4.54), (4.53), (4.48) и (4.42) можно исключить из тождества (4.52) все неизвестные величины, кроме $b_k^{\sigma, \sigma'}$:

$$\sum_{\sigma_1} [\delta_{\sigma, \sigma_1} + \sigma (P_k^{\sigma, \sigma_1} - \bar{S}_{k, \lambda_k^\sigma, \lambda_k^{\sigma_1}}^{\sigma, \sigma_1})] b_k^{\sigma_1, \sigma'} = \delta_{\sigma, \sigma'} \quad (4.55)$$

и, разрешив полученное уравнение, выразить \hat{b}_k через $\hat{\Sigma}_{k, \omega}$

$$b_k^{\sigma_1, \sigma} = [\delta_{\sigma_1, \sigma} - \sigma_1 (P_k^{-\sigma_1, -\sigma} - \bar{S}_{k, \lambda_k^{\sigma_1}, \lambda_k^\sigma}^{-\sigma_1, -\sigma})] / Q_k^\sigma,$$

$$Q_k^\sigma \equiv [1 + \sigma (P_k^{\sigma, \sigma} - \bar{S}_{k, \lambda_k^\sigma, \lambda_k^\sigma}^{\sigma, \sigma})] [1 - \sigma (P_k^{-\sigma, -\sigma} - \bar{S}_{k, \lambda_k^\sigma, \lambda_k^\sigma}^{-\sigma, -\sigma})] +$$

$$+ (P_k^{\sigma, -\sigma} - \bar{S}_{k, \lambda_k^\sigma, \lambda_k^\sigma}^{\sigma, -\sigma}) (P_k^{-\sigma, \sigma} - \bar{S}_{k, \lambda_k^\sigma, \lambda_k^\sigma}^{-\sigma, \sigma}). \quad (4.56)$$

Зная \hat{b}_k , нетрудно вычислить по формулам (4.48), (4.47) и (4.13) все матричные элементы операторов \hat{c}_k и \hat{e}_k :

$$(c_k^{\sigma, \sigma})^* = |c_k^{\sigma, \sigma}| \left[\frac{b_k^{\sigma, \sigma} + (A_k^{\sigma, -\sigma, \sigma})^* b_k^{-\sigma, \sigma} / |c_k^{\sigma, \sigma}|^2}{|b_k^{\sigma, \sigma} + (A_k^{\sigma, -\sigma, \sigma})^* b_k^{-\sigma, \sigma} / |c_k^{\sigma, \sigma}|^2|} \right]^{1/2} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \sigma \frac{\partial}{\partial \omega} \bar{\Sigma}_{k, \omega}^{\sigma, \sigma} \Big|_{\omega = \bar{\omega}_k^\sigma} + O\left(\frac{\gamma^2}{(\Delta \omega)^2}\right),$$

$$(c_k^{-\sigma, \sigma})^* = A_k^{-\sigma, \sigma, -\sigma} / c_k^{-\sigma, -\sigma} = -\frac{\bar{\Sigma}_{k, \bar{\omega}_k^\sigma}^{\sigma, -\sigma}}{\omega_k + \omega_{-k}} + O\left(\frac{\gamma^2}{\omega_k \Delta \omega}\right),$$

$$e_k^{\sigma, \sigma} = c_k^{\sigma, \sigma} b_k^{\sigma, \sigma} + c_k^{\sigma, -\sigma} b_k^{-\sigma, \sigma} = 1 + \frac{1}{2} \sigma \frac{\partial}{\partial \omega} \bar{\Sigma}_{k, \omega}^{\sigma, \sigma} \Big|_{\omega = \bar{\omega}_k^\sigma} + O\left(\frac{\gamma^2}{(\Delta \omega)^2}\right),$$

$$e_k^{-\sigma, \sigma} = c_k^{-\sigma, -\sigma} b_k^{-\sigma, \sigma} + c_k^{-\sigma, \sigma} b_k^{\sigma, \sigma} = -\frac{\bar{\Sigma}_{k, \bar{\omega}_k^\sigma}^{-\sigma, \sigma}}{\omega_k + \omega_{-k}} + O\left(\frac{\gamma^2}{\omega_k \Delta \omega}\right). \quad (4.57)$$

С помощью (4.52) и какого-либо из тождеств (4.50) можно выразить $\hat{L}_{k, \omega}$ через оператор $\hat{S}_{k, \omega, \omega'}$ (выражение которого через $\hat{\Sigma}_{k, \omega}$ уже известно — см. (4.54)) и, попутно, явно выделить нули функций $\tilde{L}_{k, \omega}^{\sigma, \sigma'}$:

$$\tilde{L}_{k, \omega}^{\sigma, \sigma'} = \sigma (\omega - \lambda_k^\sigma) \delta_{\sigma, \sigma'} - (\omega - \lambda_k^\sigma) (\omega - \lambda_k^{\sigma'}) T_{k, \omega}^{\sigma, \sigma'},$$

$$T_{k, \omega}^{\sigma, \sigma'} \equiv \frac{\bar{S}_{k, \lambda_k^\sigma, \omega}^{\sigma, \sigma'} - \bar{S}_{k, \lambda_k^{\sigma'}, \omega}^{\sigma, \sigma'}}{\omega - \lambda_k^{\sigma'}} = \frac{\bar{S}_{k, \omega, \lambda_k^\sigma}^{\sigma, \sigma'} - \bar{S}_{k, \omega, \lambda_k^{\sigma'}}^{\sigma, \sigma'}}{\lambda_k^\sigma - \lambda_k^{\sigma'}}. \quad (4.58)$$

Данная форма записи удобна для обращения $\hat{L}_{k, \omega}$ и вычисления

матричных элементов модифицированной функции Грина биений $\delta \hat{G}_{k, \omega} = \hat{G}_{k, \omega} - \hat{g}_{k, \omega}$:

$$\begin{aligned} \delta \hat{G}_{k, \omega}^{\sigma, \sigma'} &= [\sigma \sigma' T_{k, \omega}^{\sigma, \sigma'} + \sigma(\omega - \lambda_k^-) \delta_{\sigma, \sigma'} \det \|T_{k, \omega}\|] / Q_{k, \omega}, \\ Q_{k, \omega} &= 1 + (\omega - \lambda_k^-) T_{k, \omega}^{-, -} - \\ &- (\omega - \lambda_k^+) T_{k, \omega}^{+, +} - (\omega - \lambda_k^-)(\omega - \lambda_k^+) \det \|T_{k, \omega}\|, \\ \det \|T_{k, \omega}\| &= T_{k, \omega}^{+, +} T_{k, \omega}^{-, -} - T_{k, \omega}^{+, -} T_{k, \omega}^{-, +}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Как видно из (4.59), функция Грина биений не только плавно зависит от частоты на всей вещественной оси ω , но и равномерно мала там по параметру $(\gamma/\Delta\omega)$:

$$|\delta \hat{G}_{k, \omega}^{\sigma, \sigma'}| \ll \frac{1}{\Delta\omega} \frac{\gamma}{\Delta\omega}, \quad |\delta G_{k, \omega}^{\sigma, -\sigma}| \ll \frac{1}{\omega_k + \omega_{-k}} \frac{\gamma}{\Delta\omega}.$$

5. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛН В СЛУЧАЕ ОДНОРОДНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В данном случае для выражения функции Грина \hat{G}_k через собственно-энергетическую функцию $\hat{\Sigma}_k$ приходится решать уравнение (2.17) или, что то же самое, обращать оператор

$$\hat{G}_k^{-1} = {}^0\hat{G}_k^{-1} - \hat{\Sigma}_k \equiv \hat{L}_k, \quad (5.1)$$

матричные элементы которого во временном представлении равны

$$L_k^{s, s'}(t, t') = \left(is \frac{\partial}{\partial t} - \omega_{s, k} \right) \delta_{s, s'} \delta(t - t') - \Sigma_k^{s, s'}(t, t'). \quad (5.2)$$

Первое слагаемое в (5.2) локально по времени, а второе — равно нулю при $t < t'$ и затухает с декрементом порядка $\Delta\omega$ при увеличении разности своих аргументов $t - t'$. Поэтому оператором \hat{L}_k можно воздействовать на произвольные не слишком быстро возрастающие при $t \rightarrow -\infty$ двухкомпонентные функции времени. Поведение $G_k^{s, s'}(t, t')$ в асимптотической области $t - t' \gg (\Delta\omega)^{-1}$ определяется слабо затухающими со временем функциями из нуль-пространства оператора \hat{L}_k . Они имеют смысл собственных колебаний среды и удовлетворяют уравнению

$$(\hat{L}_k \bar{\Psi}_k^\sigma)^s = \left(is \frac{\partial}{\partial t} - \omega_{s, k} \right) \Psi_k^{s, \sigma} - \sum_{s_1} \int dt_1 \Sigma_k^{s, s_1}(t, t_1) \Psi_k^{s_1, \sigma}(t_1) = 0. \quad (5.3)$$

Первый верхний индекс в обозначении $\Psi_k^{s, \sigma}(t)$ нумерует компоненты собственной функции $\bar{\Psi}_k^\sigma(t)$, осциллирующей с частотой, близкой к $\sigma\omega_{s, k}$. Эта функция определяется уравнением (5.3) с точностью до произвольного численного множителя. Подстановка в (5.3)

$$\bar{\Psi}_k^\sigma(t) = e_k^\sigma(t) \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt_1 \lambda_k^\sigma(t_1) \right] \quad (5.4)$$

приводит к уравнению

$$\left[is \frac{\partial}{\partial t} + s \lambda_k^\sigma(t) - \omega_{s, k} \right] e_k^{s, \sigma}(t) = \sum_{s_1} \int dt_1 \Sigma_k^{s, s_1}(t, t_1) e_k^{s_1, \sigma}(t_1) \exp \left[i \int_{t_1}^t dt_2 \lambda_k^\sigma(t_2) \right]. \quad (5.5)$$

Необходимые для однозначного определения $e_k^{s, \sigma}(t)$ и $\lambda_k^\sigma(t)$ дополнительные условия будут сформулированы ниже, причем таким образом, чтобы эти функции обладали естественной симметрией

$$e_k^{s, \sigma}(t) = (e_{-k}^{-s, -\sigma}(t))^*, \quad \lambda_k^\sigma(t) = -(\lambda_{-k}^{-\sigma}(t))^*, \quad (5.6)$$

а в стационарном случае — переходили в свои аналоги, рассмотренные в предыдущем разделе. Второе из свойств (5.6) позволяет представить вещественную и мнимую части $\lambda_k^\sigma(t)$ в виде

$$\bar{\omega}_k^\sigma(t) \equiv \text{Re} \lambda_k^\sigma(t) = \sigma \bar{\omega}_{\sigma, k}(t), \quad \gamma_k^\sigma(t) \equiv -\text{Im} \lambda_k^\sigma(t) = \gamma_{\sigma, k}(t). \quad (5.7)$$

Отклонения функций $\lambda_k^\sigma(t)$ и $e_k^{s, \sigma}(t)$ от даваемых линейной теорией значений $\sigma\omega_{s, k}$ и $\delta_{s, \sigma}$ изменяются за то же характерное время T , что и спектр турбулентности. Для существенно нестационарной турбулентности T оценочно совпадает со временем взаимодействия волн γ^{-1} . Стремясь к единообразному описанию всевозможных спектров, в том числе стационарного, для которого $T = \infty$, следует считать T независимой величиной из интервала

$$T \gg \gamma^{-1}. \quad (5.8)$$

Вклад собственных колебаний в $G_k^{s, s'}(t, t')$ можно разложить по функциям $\Psi_k^{s, \sigma}(t)$:

$${}^c G_k^{s, s'}(t, t') = \sum_{\sigma} e_k^{s, \sigma}(t) g_k^\sigma(t, t') (c_k^{s', \sigma}(t'))^*,$$

$$g_k^\sigma(t, t') = -i\sigma\theta(t-t') \exp\left[-i \int_{t'}^t dt_1 \lambda_k^\sigma(t_1)\right]. \quad (5.9)$$

Коэффициенты $c_k^{s', \sigma}(t')$ подбираются так, чтобы вклад биений:

$$\delta G_k^{s, s'}(t, t') \equiv G_k^{s, s'}(t, t') - {}^c G_k^{s, s'}(t, t') \quad (5.10)$$

не имел долгоживущих асимптотик, т. е. затухал в области $t-t' \gg (\Delta\omega)^{-1}$ с декрементом порядка $\Delta\omega$. Подействовав на (5.10) слева оператором \hat{L}_k , нетрудно получить уравнение для функции $\delta G_k^{s, s'}(t, t')$:

$$\hat{L}_k \delta \hat{G}_k = \hat{f} - \hat{L}_k {}^c \hat{G}_k, \quad (5.11)$$

где \hat{f} — единичный оператор. Условие разрешимости уравнения (5.11) на классе достаточно быстро затухающих с ростом $t-t'$ функций $\delta G_k^{s, s'}(t, t')$ естественным образом формулируется в терминах не слишком быстро возрастающих со временем функций $\bar{\Psi}_k^\sigma(t)$ из нуль-пространства эрмитово-сопряженного к \hat{L}_k оператора \hat{L}_k^+ . Уравнение для этих функций:

$$0 = (\hat{L}_k^+ \bar{\Psi}_k^\sigma)^s(t) \equiv \left(is \frac{\partial}{\partial t} - \omega_{sk} \right) \bar{\Psi}_k^{s, \sigma}(t) - \sum_{s_1} \int dt_1 \Sigma_k^{s_1, s}(t_1, t) {}^* \bar{\Psi}_k^{s_1, \sigma}(t_1), \quad (5.12)$$

имеет два решения, мажорируемых при $t \rightarrow \infty$ экспонентой с показателем, много меньшим $t\Delta\omega$. Они представимы в виде

$$\bar{\Psi}_k^\sigma(t) = \bar{e}_k^\sigma(t) \exp\left[-i \int_{t_0}^t dt_1 \lambda_k^\sigma(t_1) {}^*\right], \quad (5.13)$$

где вектор $\bar{e}_k^\sigma(t)$ уже не содержит быстрых осцилляций, а в стационарном случае и вовсе не зависит от времени. При заданной функции $\lambda_k^\sigma(t)$ этот вектор с точностью до произвольного численного множителя фиксируется уравнением

$$\begin{aligned} & \left[is \frac{\partial}{\partial t} + s\lambda_k^\sigma(t) {}^* - \omega_{sk} \right] \bar{e}_k^{s, \sigma}(t) = \\ & = \sum_{s_1} \int dt_1 \left\{ \Sigma_k^{s_1, s}(t_1, t) \exp\left[i \int_{t_1}^t \lambda_k^\sigma(t_2) dt_2 \right] \right\} {}^* \bar{e}_k^{s_1, \sigma}(t_1). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Для вывода условий разрешимости уравнения (5.11) следует скалярно умножить его слева на вектор-функцию $\bar{\Psi}_k^\sigma$. Левая часть возникающего при этом равенства обращается в нуль:

$$\begin{aligned} & (\bar{\Psi}_k^\sigma, \hat{L}_k \delta \hat{G}_k)^{s'}(t') \equiv \sum_s \int dt \bar{\Psi}_k^{s, \sigma}(t) {}^* (\hat{L}_k \delta \hat{G}_k)^{s, s'}(t, t') = \\ & = \sum_{s_1} \int dt_1 \left[(\hat{L}_k^+ \bar{\Psi}_k^\sigma)^{s_1}(t_1) \right] {}^* \delta G_k^{s_1, s'}(t_1, t') = 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Произведенное при перебросе воздействия оператора \hat{L}_k с $\delta \hat{G}_k$ на $\bar{\Psi}_k^\sigma$ интегрирование по частям законно лишь при достаточно быстром убывании функции $\delta G_k^{s, s'}(t, t')$ с ростом $t-t'$. Поэтому ясно, что для требуемого поведения $\delta G_k^{s, s'}(t, t')$ необходимо обращение в нуль правой части обсуждаемого равенства, т. е. условие

$$\bar{\Psi}_k^{s', \sigma}(t') {}^* = (\bar{\Psi}_k^\sigma, \hat{L}_k \hat{g}_k)^{s'}(t'). \quad (5.16)$$

Последнее можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \bar{e}_k^{s', \sigma}(t') {}^* = \sum_{\sigma'} U_k^{\sigma, \sigma'}(t') c_k^{s', \sigma'}(t') {}^*, \\ & U_k^{\sigma, \sigma'}(t') \equiv \sigma' \left\{ \sum_s \bar{e}_k^{s, \sigma}(t') {}^* e_k^{s, \sigma'}(t') - \right. \\ & \left. - i \sum_{s, s_1} \int_{t'}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{t'} dt_1 \bar{e}_k^{s, \sigma}(t) {}^* \Sigma_k^{s_1, s}(t, t_1) e_k^{s_1, \sigma'}(t_1) \times \right. \\ & \left. \times \exp\left[i \int_{t'}^t dt_2 \lambda_k^\sigma(t_2) + i \int_{t_1}^{t'} dt_2 \lambda_k^{\sigma'}(t_2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Прямым вычислением нетрудно проверить, что функция $U_k^{\sigma, \sigma'}(t)$ удовлетворяет тождеству

$$\left[i \frac{\partial}{\partial t} - \lambda_k^\sigma(t) + \lambda_k^{\sigma'}(t) \right] U_k^{\sigma, \sigma'}(t) = 0, \quad (5.19)$$

из которого при $\sigma = \sigma'$ следует

$$\frac{\partial U_k^{\sigma, \sigma}(t)}{\partial t} = 0, \quad (5.20)$$

а при $\sigma' = -\sigma$, ввиду плавной зависимости $U_k^{\sigma, \sigma'}(t)$ от времени,

$$U_k^{\sigma, -\sigma}(t) = 0. \quad (5.21)$$

Надлежащим выбором численного множителя в определении каждого из векторов $\bar{e}_k^\sigma(t)$ можно сделать матрицу $\|U_k(t)\|$ единичной:

$$U_k^{\sigma, \sigma'}(t) = \delta_{\sigma, \sigma'}. \quad (5.22)$$

При этом, в силу (5.17), коэффициент $c_k^{s, \sigma}(t)$ совпадет с $\bar{e}_k^{s, \sigma}(t)$:

$$c_k^{s, \sigma}(t) = \bar{e}_k^{s, \sigma}(t) = \bar{e}_{-k}^{-s, -\sigma}(t)^* = c_{-k}^{-s, -\sigma}(t)^*,$$

а формула (5.9) окажется представимой в виде

$${}^c G_k^{s, s'}(t, t') = -i \sum_{\sigma} \sigma \Theta(t-t') \Psi_k^{s, \sigma}(t) \bar{\Psi}_k^{s', \sigma}(t')^*. \quad (5.23)$$

Согласно (5.9), преобразование

$$G_k^{s, s'}(t, t') = \sum_{\sigma, \sigma'} e_k^{s, \sigma}(t) \tilde{G}_k^{\sigma, \sigma'}(t, t') c_k^{s', \sigma'}(t')^* \quad (5.24)$$

диагонализует по верхнему индексу вклад собственных колебаний в функцию Грина:

$${}^c \tilde{G}_k^{\sigma, \sigma'}(t, t') = g_k^\sigma(t, t') \delta_{\sigma, \sigma'} \equiv g_k^{\sigma, \sigma'}(t, t'). \quad (5.25)$$

Соответствующее (5.24) преобразование парной корреляционной функции \hat{N}_k имеет вид

$$N_k^{s, s'}(t, t') = \sum_{\sigma, \sigma'} e_k^{s, \sigma}(t) \tilde{N}_k^{\sigma, \sigma'}(t, t') e_k^{s', \sigma'}(t')^*. \quad (5.26)$$

Модифицированный парный коррелятор \hat{N}_k удовлетворяет уравнению

$$\hat{N}_k = \hat{G}_k \hat{\Phi}_k \hat{G}_k^+, \quad (5.27)$$

где

$$\tilde{\Phi}_k^{\sigma, \sigma'}(t, t') = \sum_{s, s'} c_k^{s, \sigma}(t)^* \Phi_k^{s, s'}(t, t') c_k^{s', \sigma'}(t'). \quad (5.28)$$

Аналогичными (5.28) формулами следует определить функции $\tilde{\Sigma}_k^{\sigma, \sigma'}(t, t')$ и $\tilde{\Omega}_k^{\sigma, \sigma'}(t)$:

$$\tilde{\Sigma}_k^{\sigma, \sigma'}(t, t') = \sum_{s, s'} c_k^{s, \sigma}(t)^* \Sigma_k^{s, s'}(t, t') c_k^{s', \sigma'}(t'),$$

$$\tilde{\Omega}_k^{\sigma, \sigma'}(t) = \sum_{s, s'} c_k^{s, \sigma}(t)^* \Omega_k^{s, s'}(t) c_k^{s', \sigma'}(t). \quad (5.29)$$

Антиэрмитова часть функции Грина должна преобразоваться по тому же закону (5.26), что и парный коррелятор:

$$(\hat{G}_k^A)^{s, s'}(t, t') = \sum_{\sigma, \sigma'} e_k^{s, \sigma}(t)^A \tilde{G}_k^{\sigma, \sigma'}(t, t') e_k^{s', \sigma'}(t')^*,$$

$${}^A \hat{G}_k \equiv \hat{G}_k \hat{\Sigma}_k^A \hat{G}_k^+. \quad (5.30)$$

Индекс A в обозначении ${}^A \hat{G}_k$ поставлен слева для того, чтобы отличать этот оператор от, вообще говоря, не совпадающей с ним антиэрмитовой части \hat{G}_k^A оператора \hat{G}_k .

Модифицированные функции обладают такими же, как исходные, свойствами симметрии. В частности,

$$\tilde{G}_k^{\sigma, \sigma'}(t, t') = \tilde{G}_{-k}^{-\sigma, -\sigma'}(t, t')^*,$$

$$\tilde{N}_k^{\sigma, \sigma'}(t, t') = \tilde{N}_k^{\sigma', \sigma}(t', t)^* = \tilde{N}_{-k}^{-\sigma', -\sigma}(t', t).$$

При разделении функции Грина \hat{G}_k на вклады собственных колебаний и биений:

$$\hat{G}_k = \hat{g}_k + \delta \hat{G}_k$$

парный коррелятор \hat{N}_k распадается на четыре слагаемых, имеющих тот же, что и в стационарном случае, смысл:

$$\hat{N}_k = \hat{n}_k + \hat{g}_k \hat{\Phi}_k \delta \hat{G}_k^+ + \delta \hat{G}_k \hat{\Phi}_k \hat{g}_k^+ + \delta \hat{G}_k \hat{\Phi}_k \delta \hat{G}_k^+. \quad (5.31)$$

Взаимная корреляционная функция собственных колебаний \hat{n}_k задается формулой

$$n_k^{\sigma, \sigma'}(t, t') \equiv (\hat{g}_k \hat{\Phi}_k \hat{g}_k^+)^{\sigma, \sigma'}(t, t') =$$

$$= \sigma \sigma' \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t'} dt_1' \tilde{\Phi}_k^{\sigma, \sigma'}(t_1, t_1') \exp \left[-i \int_{t_1}^t dt_2 \lambda_k^\sigma(t_2) + i \int_{t_1'}^{t'} dt_2 \lambda_k^{\sigma'}(t_2)^* \right]. \quad (5.32)$$

Аналогичным соотношениям удовлетворяет оператор ${}^A \hat{G}_k$:

$${}^A \hat{G}_k = \hat{\eta}_k + \hat{g}_k \hat{\Sigma}_k^A \delta \hat{G}_k^+ + \delta \hat{G}_k \hat{\Sigma}_k^A \hat{g}_k^+ + \delta \hat{G}_k \hat{\Sigma}_k^A \delta \hat{G}_k^+, \quad (5.33)$$

$$\eta_k^{\sigma, \sigma'}(t, t') \equiv (\hat{g}_k \hat{\Sigma}_k^A \hat{g}_k^+)^{\sigma, \sigma'}(t, t') =$$

$$= \sigma \sigma' \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^t dt_1' (\hat{\Sigma}_k^A)^{\sigma, \sigma'}(t_1, t_1') \exp \left[-i \int_{t_1}^t dt_2 \lambda_k^\sigma(t_2) + i \int_{t_1'}^t dt_2 \lambda_k^{\sigma'}(t_2)^* \right]. \quad (5.34)$$

Считая формулы, выражающие $\lambda_k^\sigma(t)$, $e_k^{s, \sigma}(t)$, $c_k^{s, \sigma}(t)$ через $\hat{\Sigma}_k^A$, известными (они будут получены ниже), можно вычислять операторы $\hat{\Phi}_k$, $\hat{\Sigma}_k^A$, $\hat{\Omega}_k$ непосредственно с помощью диаграммной техники. Например, соответствующий (3.9) член разложения оператора $\hat{\Sigma}_k^A$ имеет вид:

$$\left(\text{Diagram} \right)_k^{\sigma, \sigma'}(t, t') = \sum_{\substack{\sigma_1, \dots, \sigma_5 \\ \sigma_1', \dots, \sigma_5'}} \int dt_1 dt_2 \prod_{i=1}^5 \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} \times \\ \times \tilde{U}_{-k|k_1, k_2}^{-\sigma_1, \sigma_2}(t) \tilde{U}_{k_3|k_2, k_4}^{-\sigma_2, \sigma_4}(t_2) \tilde{U}_{-k_1|k_4, k_5}^{-\sigma_4, \sigma_5}(t_1) \tilde{U}_{-k_3|k_5, k}^{-\sigma_5, \sigma'}(t') \times \\ \times (2\pi)^9 \delta(-k + k_1 + k_2) \delta(-k_2 + k_3 + k_4) \delta(-k_1 - k_4 + k_5) \times \\ \times \tilde{G}_{k_1}^{\sigma_1, \sigma_1'}(t, t_1) \tilde{G}_{-k_3}^{-\sigma_2, -\sigma_2'}(t', t_2) {}^A \tilde{G}_{k_2}^{\sigma_2, \sigma_2'}(t, t_2) \tilde{N}_{k_4}^{\sigma_4, \sigma_4'}(t_2, t_1) \tilde{N}_{k_5}^{\sigma_5, \sigma_5'}(t_1, t'). \quad (5.35)$$

Модифицированная вершинная функция $\tilde{U}_{k_1|k_2, \dots, k_n}^{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n}(t)$ связана с исходной соотношением

$$\tilde{U}_{k_1|k_2, \dots, k_n}^{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n}(t) = \sum_{s_1, \dots, s_n} c_{k_1}^{s_1, \sigma_1}(t) e_{k_2}^{s_2, \sigma_2}(t) \dots e_{k_n}^{s_n, \sigma_n}(t) U_{k_1, \dots, k_n}^{s_1, \dots, s_n}. \quad (5.36)$$

Если в (5.35) или любом другом члене разложений $\hat{\Phi}_k$, $\hat{\Sigma}_k^A$, $\hat{\Omega}_k$ выполнить все интегрирования по волновым векторам, то под знаком интеграла получится функция от всех приписываемых вершинам моментов времени, затухающая с декрементом порядка $\Delta\omega$ при увеличении разности любой пары своих аргументов. Причина такой квазилокальности по времени разложений собственно-энергетических функций (являющейся, очевидно, более сильным свойством, чем предполагавшееся выше быстрое затухание $\Sigma_k^{s, s'}(t, t')$ с ростом $t-t'$) состоит в осцилляциях подынтегрального выражения. Входящие в него сомножителями функции $\tilde{G}_k^{\sigma, \sigma'}(t, t')$, $\tilde{N}_k^{\sigma, \sigma'}(t, t')$, ${}^A \tilde{G}_k^{\sigma, \sigma'}(t, t')$ при $\tau \equiv t-t' > 0$ осциллируют по τ с частотой, близкой к $\sigma\omega_{\sigma k}$; в области $\tau < 0$, где первая функция равна нулю, остальные осциллируют с частотой, близкой к $-\sigma'\omega_{\sigma' k}$. При заданной «конфигурации» своих временных аргументов подынтегральное выражение осциллирует по всем их независимым разностям, число которых на единицу меньше числа вершин графика, с вполне опре-

деленными частотами, зависящими от волновых векторов. После ликвидации всех δ -функций количество оставшихся интегрирований по компонентам волновых векторов все еще превышает количество вершин, поэтому частоты осцилляций подынтегрального выражения можно выбрать в качестве новых независимых переменных. Сместив пути интегрирований по ним в комплексную плоскость на расстояния порядка $\Delta\omega$ от вещественной оси^{*)}, нетрудно убедиться в квазилокальности результата интегрирований. Свойство квазилокальности, т. е. близости всех внутренних и внешних времен в каждом члене разложений собственно-энергетических функций, сохраняется при подстановке в них формул (5.31), (5.33) для \hat{N}_k , ${}^A \hat{G}_k$ и повторном разложении $\hat{\Phi}_k$, $\hat{\Sigma}_k^A$ в трех последних слагаемых этих формул, а также в недиагональных матричных элементах первых слагаемых, замененных выражениями (5.32), (5.34). С диагональными матричными элементами операторов \hat{n}_k и $\hat{\eta}_k$ поступать подобным образом нельзя из-за принципиальной нелокальности выражений (5.32), (5.34) при $\sigma' = \sigma$. Нелокальные выражения целесообразно упростить, выделив из функций $n_k^{\sigma, \sigma'}(t, t')$, $\eta_k^{\sigma, \sigma'}(t, t')$ небольшие поправки:

$$n_k^{\sigma, \sigma'}(t, t') = \tilde{n}_k^{\sigma, \sigma'}(t, t') + \delta n_k^{\sigma, \sigma'}(t, t'), \\ \eta_k^{\sigma, \sigma'}(t, t') = \tilde{\eta}_k^{\sigma, \sigma'}(t, t') + \delta \eta_k^{\sigma, \sigma'}(t, t'). \quad (5.37)$$

Формулы для $\tilde{n}_k^{\sigma, \sigma'}(t, t')$, $\tilde{\eta}_k^{\sigma, \sigma'}(t, t')$ получаются из (5.32), (5.34) заменой области интегрирования $t_1 < t$, $t_1' < t'$ на область $t_1 + t_1' < t + t'$ и могут быть представлены в виде

$$\tilde{n}_k^{\sigma, \sigma'}\left(t + \frac{\tau}{2}, t - \frac{\tau}{2}\right) = n_k^{\sigma, \sigma'}(t) \exp[-i\varphi_k^{\sigma, \sigma'}(t, \tau)], \\ \tilde{\eta}_k^{\sigma, \sigma'}\left(t + \frac{\tau}{2}, t - \frac{\tau}{2}\right) = \eta_k^{\sigma, \sigma'}(t) \exp[-i\varphi_k^{\sigma, \sigma'}(t, \tau)]. \quad (5.38)$$

Здесь

$$\varphi_k^{\sigma, \sigma'}(t, \tau) \equiv \int_t^{t+\tau/2} d\tilde{t} \lambda_k^\sigma(\tilde{t}) + \int_{t-\tau/2}^t d\tilde{t} \lambda_k^{\sigma'}(\tilde{t})^*,$$

^{*)} Это можно сделать ввиду плавной зависимости предэкспонент от частот осцилляций, если только якобиан перехода к новым переменным не имеет особенностей. Избавиться от последних не удастся вблизи порогов появления новых каналов взаимодействия. Поэтому для колебаний с околороговыми волновыми векторами приводимое ниже кинетическое уравнение, строго говоря, неприменимо.

$$n_k^\sigma(t) \equiv \int_{-\infty}^t \Phi_k^\sigma(\bar{t}) \exp\left[-2 \int_{\bar{t}}^t d\bar{t} \gamma_k^\sigma(\bar{t})\right] d\bar{t},$$

$$\Phi_k^\sigma(\bar{t}) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\tau} \tilde{\Phi}_k^{\sigma, \sigma}\left(\bar{t} + \frac{\bar{\tau}}{2}, \bar{t} - \frac{\bar{\tau}}{2}\right) \exp[i\varphi_k^\sigma(\bar{t}, \bar{\tau})], \quad (5.39)$$

$$\eta_k^\sigma(t) \equiv \int_{-\infty}^t d\bar{t} {}^A \Sigma_k^\sigma(\bar{t}) \exp\left[-2 \int_{\bar{t}}^t d\bar{t} \gamma_k^\sigma(\bar{t})\right],$$

$${}^A \Sigma_k^\sigma(\bar{t}) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\tau} (\hat{\Sigma}_k^A)^{\sigma, \sigma}\left(\bar{t} + \frac{\bar{\tau}}{2}, \bar{t} - \frac{\bar{\tau}}{2}\right) \exp[i\varphi_k^\sigma(\bar{t}, \bar{\tau})].$$

Поправки $\delta n_k^\sigma(t, t')$, $\delta \eta_k^\sigma(t, t')$ равны (с обратным знаком) интегралам по разности областей $t_1 + t'_1 < t + t'$ и $t_1 < t$, $t'_1 < t'$ от тех же, что и (5.32), (5.34), выражений. Для дальнейшего удобно записать эти интегралы в следующей форме:

$$\delta n_k^\sigma(t, t') = - \int_{-\infty}^t d\bar{t} \int_0^{(t-\bar{t})/2} d\xi \tilde{\Phi}_k^{\sigma, \sigma}(\bar{t} + \xi, t' + \xi) \times$$

$$\times \exp\left\{-i \int_{\bar{t}}^t d\bar{t} \lambda_k^\sigma(\bar{t}) + i \int_0^{\xi} d\bar{\xi} [\lambda_k^\sigma(\bar{t} + \bar{\xi}) - \lambda_k^\sigma(t' + \bar{\xi})^*]\right\} -$$

$$- \int_{-\infty}^{t'} d\bar{t} \int_0^{(t'-\bar{t})/2} d\xi \Phi_k^{\sigma, \sigma}(t + \xi, \bar{t} + \xi) \times$$

$$\times \exp\left\{i \int_{\bar{t}}^{t'} d\bar{t} \lambda_k^\sigma(\bar{t})^* + i \int_0^{\xi} d\bar{\xi} [\lambda_k^\sigma(t + \bar{\xi}) - \lambda_k^\sigma(\bar{t} + \bar{\xi})^*]\right\}. \quad (5.40)$$

(Аналогичная формула для $\delta \eta_k^\sigma(t, t')$ получается из (5.40) заменой $\tilde{\Phi}_k$ на $\hat{\Sigma}_k^A$.) В существенной для вычисления собственно-энергетических функций области $|t - t'| \ll (\Delta\omega)^{-1}$ поправки $\delta n_k^\sigma(t, t')$, $\delta \eta_k^\sigma(t, t')$ малы по сравнению с $\tilde{n}_k^\sigma(t, t')$, $\tilde{\eta}_k^\sigma(t, t')$ и, подобно корреляторам собственных колебаний с биениями, могут быть исключены из разложений собственно-энергетических функций, которые в результате окажутся квазилокально по времени выраженными через функции $n_k^\sigma(t)$ и $\eta_k^\sigma(t)$. Последние удовлетворяют простым эволюционным уравнениям

$$\frac{\partial n_k^\sigma(t)}{\partial t} = \Phi_k^\sigma(t) - 2\gamma_k^\sigma(t) n_k^\sigma(t), \quad \frac{\partial \eta_k^\sigma(t)}{\partial t} = {}^A \Sigma_k^\sigma(t) - 2\gamma_k^\sigma(t) \eta_k^\sigma(t). \quad (5.41)$$

При условии

$$\gamma_k^\sigma(t) = -\sigma {}^A \Sigma_k^\sigma(t) \quad (5.42)$$

(уменьшающем допущенный ранее произвол в определениях величин $e_k^{\sigma, \sigma}(t)$, $c_k^{\sigma, \sigma}(t)$, $\lambda_k^\sigma(t)$) функция $\eta_k^\sigma(t)$ является в действительности постоянной:

$$\eta_k^\sigma(t) = -\frac{\sigma}{2}, \quad (5.43)$$

и (5.41) превращается в замкнутое уравнение для функции

$$n_k^\sigma(t) = n_{-k}^{-\sigma}(t) \equiv n_{\sigma k}(t), \quad (5.44)$$

$$\frac{\partial n_k(t)}{\partial t} = \Phi_k^+(t) + 2 {}^A \Sigma_k^+(t) n_k(t) \equiv F_k(t). \quad (5.45)$$

В стационарном случае (5.45) совпадает с полученным в предыдущем разделе кинетическим уравнением. Нестационарность приводит к появлению в интеграле столкновений $F_k(t)$ новых слагаемых, возможность придания которым формы (4.40) нуждается в исследовании.

Вклад в $F_k(t)$ всех содержащих по n основным линиям графиков (3.2) и соответствующих графиков для $\hat{\Sigma}_k^A$ представим в виде

$${}^{(n)} F_k(t) = \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp[i\varphi_k^+(t, \tau)] \sum_{\substack{\sigma_1, \dots, \sigma_n \\ \sigma_1, \dots, \sigma_n}} \int \prod_{i=1}^n dt_i d\tau_i d^3 k_i \times$$

$$\times \sum_{\alpha, \beta} {}^\alpha V_{k_1, \dots, k_n}^{\sigma_1, \dots, \sigma_n}\left(t + \frac{\tau}{2}, t_1 + \frac{\tau_1}{2}, \dots, t_n + \frac{\tau_n}{2}\right) \times$$

$$\times {}^\beta V_{k_1, \dots, k_n}^{\sigma_1, \dots, \sigma_n}\left(t - \frac{\tau}{2}, t_1 - \frac{\tau_1}{2}, \dots, t_n - \frac{\tau_n}{2}\right) \delta^3(-\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n) \times$$

$$\times \left\{ \tilde{N}_{k_1}^{\sigma_1, \sigma_1}\left(t_1 + \frac{\tau_1}{2}, t_1 - \frac{\tau_1}{2}\right) \dots \tilde{N}_{k_n}^{\sigma_n, \sigma_n}\left(t_n + \frac{\tau_n}{2}, t_n - \frac{\tau_n}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + 2n_k(t) \left[{}^A \tilde{G}_{k_1}^{\sigma_1, \sigma_1}\left(t_1 + \frac{\tau_1}{2}, t_1 - \frac{\tau_1}{2}\right) \tilde{N}_{k_2}^{\sigma_2, \sigma_2}\left(t_2 + \frac{\tau_2}{2}, t_2 - \frac{\tau_2}{2}\right) \dots \right] \right\}$$

$$\times \tilde{N}_{k_n}^{\sigma_n, \sigma'_n} \left(t_n + \frac{\tau_n}{2}, t_n - \frac{\tau_n}{2} \right) + \dots + \tilde{N}_{k_1}^{\sigma_1, \sigma'_1} \left(t_1 + \frac{\tau_1}{2}, t_1 - \frac{\tau_1}{2} \right) \dots \times \\ \times \tilde{N}_{k_{n-1}}^{\sigma_{n-1}, \sigma'_{n-1}} \left(t_{n-1} + \frac{\tau_{n-1}}{2}, t_{n-1} - \frac{\tau_{n-1}}{2} \right) \left. \right\} \tilde{G}_{k_n}^{\sigma_n, \sigma'_n} \left(t_n + \frac{\tau_n}{2}, t_n - \frac{\tau_n}{2} \right) \left. \right\} \quad (5.46)$$

Коэффициенты ${}^\alpha V_{k_1, \dots, k_n}^{\sigma_1, \dots, \sigma_n}(t, t_1, \dots, t_n)$ (имеющие смысл перенормированных $n+1$ -волновых вершинных функций) отличаются от нуля при $t > t_1, \dots, t_n$ и плавно зависят от t при фиксированных разностях $t - t_i$ ($i=1, \dots, n$). Индекс α нумерует всевозможные графики для перенормированных вершин, т. е. всевозможные расположенные левее основного сечения половинки содержащих по n основных линий графиков (3.2). Суммирование в (5.46) проводится по тем парам значений α и β , при которых «склеенный» из половинок α и β график не содержит слабо связанных (т. е. отделяемых перерезанием двух линий) фрагментов. Интегрирование в (5.46) фактически проводится по области

$$t - t_1, \dots, t - t_n, |\tau|, |\tau_1|, \dots, |\tau_n| \ll (\Delta\omega)^{-1},$$

так как вне ее интеграл по волновым векторам затухает с декрементом порядка $\Delta\omega$. Исключив с помощью формул (5.31) — (5.34) из интеграла столкновений аномальные корреляторы, корреляторы биений с собственными колебаниями и друг с другом, а также аналогичные составляющие операторов ${}^A \hat{G}_k$, можно свести $F_k(t)$ к сумме членов, получающихся из (5.46) дополнительной перенормировкой вершин и заменой функций

$$\tilde{N}_k^{\sigma, \sigma'} \left(t_i + \frac{\tau_i}{2}, t_i - \frac{\tau_i}{2} \right), \quad {}^A \tilde{G}_k^{\sigma, \sigma'} \left(t_i + \frac{\tau_i}{2}, t_i - \frac{\tau_i}{2} \right)$$

на

$$n_k^{\sigma, \sigma'} \left(t_i + \frac{\tau_i}{2}, t_i - \frac{\tau_i}{2} \right) \delta_{\sigma, \sigma'}, \quad \eta_k^{\sigma, \sigma'} \left(t_i + \frac{\tau_i}{2}, t_i - \frac{\tau_i}{2} \right) \delta_{\sigma, \sigma'},$$

соответственно. Следующий шаг состоит в исключении из интеграла столкновений поправок

$$\delta n_k^{\sigma} \left(t_i + \frac{\tau_i}{2}, t_i - \frac{\tau_i}{2} \right),$$

$$\delta \eta_k^{\sigma} \left(t_i + \frac{\tau_i}{2}, t_i - \frac{\tau_i}{2} \right)$$

с помощью (5.40) и аналогичной формулы для $\delta \eta_k^{\sigma}(t, t')$. Проведя в этих формулах разложение по ξ вблизи точки $\xi=0$ и явно выполнив интегрирование по ξ , можно сохранить прежний вид столкновительных членов и на данном этапе (с точностью до еще одного их переопределения и еще одной перенормировки вершин):

$${}^{(n)} \bar{F}_k(t) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_n} \int d\tau \prod_{i=1}^n dt_i d\tau_i d^3 k_i \delta^3(-k + k_1 + \dots + k_n) \times \\ \times \sum_{\alpha, \beta} {}^\alpha \bar{V}_{k_1, \dots, k_n}^{\sigma_1, \dots, \sigma_n} \left(t + \frac{\tau}{2}, t_1 + \frac{\tau_1}{2}, \dots, t_n + \frac{\tau_n}{2} \right) \times \\ \times {}^\beta \bar{V}_{k_1, \dots, k_n}^{\sigma_1, \dots, \sigma_n} \left(t - \frac{\tau}{2}, t_1 - \frac{\tau_1}{2}, \dots, t_n - \frac{\tau_n}{2} \right) \{ n_{k_1}^{\sigma_1}(t_1) \dots n_{k_n}^{\sigma_n}(t_n) + 2n_k(t) \times \\ \times [\eta_{k_1}^{\sigma_1}(t_1) n_{k_2}^{\sigma_2}(t_2) \dots n_{k_n}^{\sigma_n}(t_n) + \dots + n_{k_1}^{\sigma_1}(t_1) \dots n_{k_{n-1}}^{\sigma_{n-1}}(t_{n-1}) \eta_{k_n}^{\sigma_n}(t_n)] \} \times \\ \times \exp \left[i\varphi_k^+(t, \tau) - i \sum_{i=1}^n \varphi_{k_i}^{\sigma_i}(t_i, \tau_i) \right]. \quad (5.47)$$

Для дальнейшего показателю экспоненты в (5.47) удобно придать несколько иную форму:

$$\varphi_k^+(t, \tau) - \sum_{i=1}^n \varphi_{k_i}^{\sigma_i}(t_i, \tau_i) = \varphi_k^+(t, \tau) - \sum_{i=1}^n \varphi_{k_i}^{\sigma_i}(t, \tau) + \\ + \sum_{i=1}^n \left[\int_{t_i + \tau_i/2}^{t + \tau/2} d\tilde{t} \lambda_{k_i}^{\sigma_i}(\tilde{t}) - \int_{t_i - \tau_i/2}^{t - \tau/2} d\tilde{t} \lambda_{k_i}^{\sigma_i}(\tilde{t})^* + 2i \int_{t_i}^t d\tilde{t} \gamma_{k_i}^{\sigma_i}(\tilde{t}) \right]. \quad (5.48)$$

Возникающие при подстановке (5.48) в (5.47) комбинации

$$n_{k_i}^{\sigma_i}(t_i) \exp \left[-2 \int_{t_i}^t d\tilde{t} \gamma_{k_i}^{\sigma_i}(\tilde{t}) \right], \quad \eta_{k_i}^{\sigma_i}(t_i) \exp \left[-2 \int_{t_i}^t d\tilde{t} \gamma_{k_i}^{\sigma_i}(\tilde{t}) \right]$$

следует, пользуясь (5.39), разложить в ряды по степеням разности $t_i - t$:

$$n_{k_i}^{\sigma_i}(t_i) \exp \left[-2 \int_{t_i}^t d\tilde{t} \gamma_{k_i}^{\sigma_i}(\tilde{t}) \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= n_{k_i}^{\sigma_i}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t_i-t)^n}{n!} \left[\frac{\partial}{\partial t} + 2\gamma_{k_i}^{\sigma_i}(t) \right]^{n-1} \Phi_{k_i}^{\sigma_i}(t), \\
&\eta_{k_i}^{\sigma_i}(t_i) \exp \left[-2 \int_{t_i}^t d\tilde{t} \gamma_{k_i}^{\sigma_i}(\tilde{t}) \right] = \\
&= \eta_{k_i}^{\sigma_i}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t_i-t)^n}{n!} \left[\frac{\partial}{\partial t} + 2\gamma_{k_i}^{\sigma_i}(t) \right]^{n-1} A_{\Sigma_{k_i}^{\sigma_i}}(t). \quad (5.49)
\end{aligned}$$

Учитывая формулы (5.48), (5.49) и тождество

$$t_i - t = \frac{1}{2} \left[t_i + \frac{\tau_i}{2} - \left(t + \frac{\tau}{2} \right) + t_i - \frac{\tau_i}{2} - \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right],$$

можно, не теряя структурных особенностей интеграла столкновений, перейти в нем от величин $n_{k_i}^{\sigma_i}(t_i)$, $\eta_{k_i}^{\sigma_i}(t_i)$ к $n_{k_i}^{\sigma_i}(t)$, $\eta_{k_i}^{\sigma_i}(t)$. При этом производятся очередные переопределения столкновительных членов и вершинных функций, причем последние приобретают малую добавку, плавно зависящую от внешнего времени t :

$$F_k(t) = \sum_n {}^{(n)}\tilde{F}_k(t), \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned}
{}^{(n)}\tilde{F}_k(t) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_n} \int d\tau \prod_{i=1}^n dt_i d\tau_i d^3 k_i \delta^3(-\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n) \times \\
&\times \sum_{\alpha, \beta} \alpha \tilde{V}_{k_1, \dots, k_n}^{\sigma_1, \dots, \sigma_n} \left(t, t + \frac{\tau}{2}, t_1 + \frac{\tau_1}{2}, \dots, t_n + \frac{\tau_n}{2} \right) \times \\
&\times \beta \tilde{V}_{k_1, \dots, k_n}^{\sigma_1, \dots, \sigma_n} \left(t, t - \frac{\tau}{2}, t_1 - \frac{\tau_1}{2}, \dots, t_n - \frac{\tau_n}{2} \right) \times \\
&\times \{ n_{k_1}^{\sigma_1}(t) \dots n_{k_n}^{\sigma_n}(t) + 2n_k(t) [\eta_{k_1}^{\sigma_1}(t) n_{k_2}^{\sigma_2}(t) \dots n_{k_n}^{\sigma_n}(t) + \dots + n_{k_1}^{\sigma_1}(t) \dots n_{k_{n-1}}^{\sigma_{n-1}}(t) \eta_{k_n}^{\sigma_n}(t)] \} \times \\
&\times \exp \left\{ i \left[\varphi_k^+(t, \tau) - \sum_{i=1}^n \varphi_{k_i}^{\sigma_i}(t, \tau) + \sum_{i=1}^n \int_{t_i+\tau/2}^{t+\tau/2} d\tilde{t} \lambda_{k_i}^{\sigma_i}(\tilde{t}) - \sum_{i=1}^n \int_{t_i-\tau/2}^{t-\tau/2} d\tilde{t} \lambda_{k_i}^{\sigma_i}(\tilde{t})^* \right] \right\}. \quad (5.51)
\end{aligned}$$

Запись столкновительного члена ${}^{(n)}\tilde{F}_k(t)$ заметно упростится, если формально выполнить в (5.51) интегрирования по внутренним временам и ввести символы

$${}^{\alpha} V_{k_1, \dots, k_n}^{\sigma_1, \dots, \sigma_n}(\bar{t}, t) \equiv \int \prod_{i=1}^n dt_i {}^{\alpha} \tilde{V}_{k_1, \dots, k_n}^{\sigma_1, \dots, \sigma_n}(\bar{t}, t, t_1, \dots, t_n) \exp \left[i \sum_{i=1}^n \int_{t_i}^{\bar{t}} d\tilde{t} \lambda_{k_i}^{\sigma_i}(\tilde{t}) \right], \quad (5.52)$$

(количественный смысл которым придают интегрирования по волновым векторам):

$$\begin{aligned}
{}^{(n)}\tilde{F}_k(t) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_n} \int d\tau \prod_{i=1}^n d^3 k_i \delta^3(-\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n) \times \\
&\times \sum_{\alpha, \beta} \alpha \tilde{V}_{k_1, \dots, k_n}^{\sigma_1, \dots, \sigma_n} \left(t, t + \frac{\tau}{2} \right) \beta \tilde{V}_{k_1, \dots, k_n}^{\sigma_1, \dots, \sigma_n} \left(t, t - \frac{\tau}{2} \right) \times \\
&\times \{ n_{k_1}^{\sigma_1}(t) \dots n_{k_n}^{\sigma_n}(t) + 2n_k(t) [\eta_{k_1}^{\sigma_1}(t) n_{k_2}^{\sigma_2}(t) \dots n_{k_n}^{\sigma_n}(t) + \dots + \\
&+ n_{k_1}^{\sigma_1}(t) \dots n_{k_{n-1}}^{\sigma_{n-1}}(t) \eta_{k_n}^{\sigma_n}(t)] \} \exp \left\{ i \left[\varphi_k^+(t, \tau) - \sum_{i=1}^n \varphi_{k_i}^{\sigma_i}(t, \tau) \right] \right\}. \quad (5.53)
\end{aligned}$$

Далее надо провести разложения по τ с помощью формулы

$$\varphi_k^{\sigma}(t, \tau) = \omega_k^{\sigma}(t) \tau + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau^{2m}}{2^{2m} (2m)!} \left[-2i \frac{\partial^{2m-1} \gamma_k^{\sigma}(t)}{\partial t^{2m-1}} + \frac{\tau}{2m+1} \frac{\partial^{2m} \omega_k^{\sigma}(t)}{\partial t^{2m}} \right],$$

вспомнить, что функции $\eta_{k_i}^{\sigma_i}(t)$ в действительности являются постоянными, равными $-\sigma_i/2$, и заменить переменные интегрирования k_i на $\sigma_i k_i$. В результате получится

$$\begin{aligned}
{}^{(n)}\tilde{F}_k(t) &= \sum_{p=0}^{\infty} {}^{(p,n)}\tilde{F}_k(t), \\
{}^{(p,n)}\tilde{F}_k(t) &= \frac{\partial^p}{\partial \omega^p} \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_n} \int \prod_{i=1}^n d^3 k_i \delta^3(-\mathbf{k} + \sigma_1 \mathbf{k}_1 + \dots + \sigma_n \mathbf{k}_n) \times \\
&\times \delta(-\omega + \sigma_1 \tilde{\omega}_{k_1}(t) + \dots + \sigma_n \tilde{\omega}_{k_n}(t)) {}^{(p)} W_{k_1, \dots, k_n}^{\sigma_1, \dots, \sigma_n}(t) \times \\
&\times \{ n_{k_1}(t) \dots n_{k_n}(t) - n_k(t) [\sigma_1 n_{k_2}(t) \dots n_{k_n}(t) + \dots + n_{k_1}(t) \dots n_{k_{n-1}}(t) \sigma_n] \} \Big|_{\omega = \tilde{\omega}_k(t)}, \quad (5.54) \\
{}^{(0)} W_{k_1, \dots, k_n}^{\sigma_1, \dots, \sigma_n}(t) &= \frac{2\pi}{n!} \sum_{\alpha, \beta} \alpha \tilde{V}_{\sigma_1 k_1, \dots, \sigma_n k_n}^{\sigma_1, \dots, \sigma_n} (t, t) \beta \tilde{V}_{\sigma_1 k_1, \dots, \sigma_n k_n}^{\sigma_1, \dots, \sigma_n} (t, t)^*,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1) W_{k_1, \dots, k_n}^{\sigma_1, \dots, \sigma_n}(t) &= \frac{2\pi}{n!} \operatorname{Im} \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^\alpha \tilde{V}_{\sigma_1, k_1, \dots, \sigma_n, k_n}^{\sigma_1, \dots, \sigma_n}(\bar{t}, t)}{\partial t^\alpha} \beta \tilde{V}_{\sigma_1, k_1, \dots, \sigma_n, k_n}^{\sigma_1, \dots, \sigma_n}(\bar{t}, t)^* \Big|_{\bar{t}=t}, \\
(2) W_{k_1, \dots, k_n}^{\sigma_1, \dots, \sigma_n}(t) &= \frac{2\pi}{n!} \operatorname{Re} \sum_{\alpha, \beta} \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^\alpha \tilde{V}_{\sigma_1, k_1, \dots, \sigma_n, k_n}^{\sigma_1, \dots, \sigma_n}(\bar{t}, t)}{\partial t^\alpha} \frac{\partial^\beta \tilde{V}_{\sigma_1, k_1, \dots, \sigma_n, k_n}^{\sigma_1, \dots, \sigma_n}(\bar{t}, t)^*}{\partial t^\beta} - \right. \\
&\quad \left. - \alpha \tilde{V}_{\sigma_1, k_1, \dots, \sigma_n, k_n}^{\sigma_1, \dots, \sigma_n}(\bar{t}, t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \beta \tilde{V}_{\sigma_1, k_1, \dots, \sigma_n, k_n}^{\sigma_1, \dots, \sigma_n}(\bar{t}, t)^* \right] \Big|_{\bar{t}=t} + \\
&\quad + \frac{1}{4} \left[\frac{\partial \gamma_k(t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \gamma_{k_i}(t)}{\partial t} \right] W_{k_1, \dots, k_n}^{\sigma_1, \dots, \sigma_n}(t), \quad (5.55)
\end{aligned}$$

Порожденные нестационарностью добавки ${}^{(p,n)}\tilde{F}_k(t)$ ($p=1, 2, \dots$) к столкновительному члену ${}^{(0,n)}\tilde{F}_k(t)$, как нетрудно показать, содержат по сравнению с ним дополнительную малость: $(\gamma/\Delta\omega)^m (T\Delta\omega)^{-m}$ при $p=2m$ или $(\gamma/\Delta\omega)^m (T\Delta\omega)^{-m-1}$ при $p=2m+1$ ($m=1, 2, \dots$). Это правило не распространяется на добавку ${}^{(1,n)}\tilde{F}_k(t)$, которая является величиной такого же, как и ${}^{(2,n)}\tilde{F}_k(t)$, порядка $\frac{\gamma}{\Delta\omega} (T\Delta\omega)^{-1} {}^{(0,n)}\tilde{F}_k(t)$ (а не $(T\Delta\omega)^{-1} {}^{(0,n)}\tilde{F}_k(t)$), поскольку лишь малая по параметру $\gamma/\Delta\omega$ часть коэффициента $\alpha \tilde{V}_{k_1, \dots, k_n}^{\sigma_1, \dots, \sigma_n}$ меняется со временем.

Для завершения вывода кинетического уравнения остается квазилокально по времени выразить функции $\lambda_k^\sigma(t)$, $e_k^{s,\sigma}(t)$, $c_k^{s,\sigma}(t)$ через $(\tilde{\Sigma}_k^A)^{\sigma, \sigma'}(t, t')$ или, что более удобно, через фурье-образ

$$(\tilde{\Sigma}_k^A)^{\sigma, \sigma'}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau (\tilde{\Sigma}_k^A)^{\sigma, \sigma'}\left(t + \frac{\tau}{2}, t - \frac{\tau}{2}\right) e^{i\omega\tau}. \quad (5.56)$$

В силу аналогичного (3.14) соотношения Крамерса—Кронига, вместе с $(\tilde{\Sigma}_k^A)^{\sigma, \sigma'}(t)$ можно считать известной и функцию $(\tilde{\Sigma}_k^A)^{\sigma, \sigma'}(t)$. Мнимая часть $\lambda_k^\sigma(t)$, связанная формулой (5.42) с ${}^A\Sigma_k^\sigma(t)$, просто выражается через $(\tilde{\Sigma}_k^A)^{\sigma, \sigma'}(t) = \operatorname{Im} \tilde{\Sigma}_k^{\sigma, \sigma'}(t)$ и вещественную часть $\lambda_k^\sigma(t)$:

$$\begin{aligned}
\lambda_k^\sigma(t) &= \left\{ -\sigma \operatorname{Im} \tilde{\Sigma}_k^{\sigma, \sigma'}(t) - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \operatorname{Im} \tilde{\Sigma}_k^{\sigma, \sigma'}(t)}{\partial \omega^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\omega}_k^\sigma(t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \omega} \right] \times \right. \\
&\quad \left. \times \operatorname{Im} \tilde{\Sigma}_k^{\sigma, \sigma'}(t) + O\left(\frac{\gamma^2}{T^2(\Delta\omega)^3}\right) \right\} \Big|_{\omega=\tilde{\omega}_k^\sigma(t)}. \quad (5.57)
\end{aligned}$$

Обобщением на нестационарный случай тождеств (4.41) служат вытекающие из (5.14) соотношения:

$$\begin{aligned}
\sum_s c_k^{s,\sigma}(t) \left[is \frac{\partial}{\partial t} + s \lambda_k^{\sigma'}(t)^* - \omega_{s,k} \right] c_k^{s,\sigma'}(t) &= \tilde{\Sigma}_k^{\sigma', \sigma}(t)^*, \\
\sum_s c_k^{s,\sigma'}(t) \left[-is \frac{\partial}{\partial t} + s \lambda_k^\sigma(t) - \omega_{s,k} \right] c_k^{s,\sigma}(t) &= \tilde{\Sigma}_k^{\sigma, \sigma'}(t), \quad (5.58)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Sigma}_k^{\sigma, \sigma'}(t) &\equiv \int dt_1 \tilde{\Sigma}_k^{\sigma, \sigma'}(t_1, t) \exp \left[i \int_{t_1}^t d\tilde{t} \lambda_k^\sigma(\tilde{t}) \right] = \\
&= \left\{ 1 - \frac{i}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \lambda_k^\sigma(t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \omega} \right] \frac{\partial}{\partial \omega} + O\left(\frac{1}{T^2 \Delta\omega^2}\right) \right\} \tilde{\Sigma}_k^{\sigma, \sigma'}(t) \Big|_{\omega=\lambda_k^\sigma(t)}.
\end{aligned}$$

Разность соотношений (5.58)

$$\left[i \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_k^{\sigma'}(t)^* - \lambda_k^\sigma(t) \right] \sum_s c_k^{s,\sigma}(t) c_k^{s,\sigma'}(t) = \tilde{\Sigma}_k^{\sigma', \sigma}(t)^* - \tilde{\Sigma}_k^{\sigma, \sigma'}(t) \quad (5.59)$$

можно, не нарушая временной квазилокальности, проинтегрировать по времени и представить в аналогичном (4.42) виде

$$\sum_s z c_k^{s,\sigma}(t)^* c_k^{s,\sigma'}(t) = \sigma \delta_{\sigma, \sigma'} + P_k^{\sigma, \sigma'}(t). \quad (5.60)$$

Для недиагональных компонент $P_k^{\sigma, \sigma'}(t)$ непосредственно из (5.59) получается

$$\begin{aligned}
P_k^{\sigma, -\sigma}(t) &= [\lambda_k^\sigma(t) + \lambda_{-k}^\sigma(t)]^{-1} \left[\tilde{\Sigma}_k^{\sigma, -\sigma}(t) - \tilde{\Sigma}_{-k}^{\sigma, -\sigma}(t) + i \frac{\partial}{\partial t} P_k^{\sigma, -\sigma}(t) \right] = \\
&= (\omega + \omega')^{-1} \left\{ 1 + i \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \lambda_k^\sigma}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \omega} + \frac{\partial \lambda_{-k}^\sigma}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \omega'} \right] \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} + \frac{\partial}{\partial \omega'} \right) + \frac{1}{\omega + \omega'} \right] \times \right. \\
&\quad \left. \times \left[\tilde{\Sigma}_k^{\sigma, -\sigma}(t) - \tilde{\Sigma}_{-k}^{\sigma, -\sigma}(t) \right] + O\left(\frac{1}{T^2(\Delta\omega)^2}\right) \right\} \Big|_{\omega=\lambda_k^\sigma(t), \omega'=\lambda_{-k}^\sigma(t)}. \quad (5.61)
\end{aligned}$$

На первый взгляд отсутствующая возможность сохранения временной квазилокальности при интегрировании диагональных компонент (5.59) связана с тождеством (5.43), учет которого приводит к следующей формуле для $P_k^{\sigma, \sigma}(t)$:

$$P_k^{\sigma, \sigma}(t) = -2 \operatorname{Re} \int_0^\infty d\tau \int_0^\tau d\xi (\tilde{\Sigma}_k^A)^{\sigma, \sigma}\left(t + \frac{\xi + \tau}{2}, t + \frac{\xi - \tau}{2}\right) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \exp \left[i\varphi_k^\sigma \left(t + \frac{\sigma \tau}{2}, \tau \right) + \int_0^\tau d\xi \tilde{\gamma}_k^\sigma \left(t + \frac{\sigma \xi}{2} \right) \right] = \\ & = -\operatorname{Im} \left\{ \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \gamma} + \frac{1}{4} \frac{\partial \gamma_k^\sigma}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} - \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\omega}_k^\sigma}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial \gamma \partial \omega} + \right. \right. \\ & \left. \left. + O \left(\frac{1}{T^2 (\Delta \omega)^2} \right) \right] \frac{\tilde{\Sigma}_{k, \omega - i\gamma}^{\sigma, \sigma} - \tilde{\Sigma}_{k, \omega}^{\sigma, \sigma}}{\gamma} \right\} \Big|_{\omega = \omega_k^\sigma(t), \gamma = \gamma_k^\sigma(t)} \end{aligned} \quad (5.62)$$

(переходящей при $(T\Delta\omega)^{-1} \rightarrow 0$ в (4.43)). Обобщением (4.44) служит соотношение

$$\begin{aligned} & c_k^{s, \sigma}(t) * c_k^{s', \sigma'}(t) \equiv A_k^{s, \sigma, \sigma'}(t) = (\omega_k + \omega_{-k})^{-1} \times \\ & \times \left\{ [\lambda_k^\sigma(t) + s\omega_{-s k}] [\sigma \delta_{\sigma, \sigma'} + P_k^{\sigma, \sigma'}(t)] - \tilde{\Sigma}_k^{\sigma, \sigma'}(t) - i \sum_{s'} s' c_k^{s', \sigma'}(t) \frac{\partial}{\partial t} c_k^{s, \sigma}(t)^* \right\} \end{aligned} \quad (5.63)$$

Свойства (4.45) величин $A_k^{s, \sigma, \sigma'}$ и вытекающие из определения последних формулы (4.47) переносятся на нестационарный случай без изменений. Аналогичное (4.46) уравнение для вещественной части функции $\lambda_k^\sigma(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} & \tilde{\omega}_k^\sigma(t) = \sigma \omega_{\sigma k} + [\sigma + P_k^{\sigma, \sigma}(t)]^{-1} \times \\ & \times \left\{ \operatorname{Re} \tilde{\Sigma}_k^{\sigma, \sigma}(t) + (\omega_k + \omega_{-k}) \frac{|A_k^{-\sigma, \sigma, -\sigma}(t)|^2}{A_k^{-\sigma, -\sigma, -\sigma}(t)} + \operatorname{Im} \sum_s s c_k^{s, \sigma}(t) * \frac{\partial}{\partial t} c_k^{s, \sigma}(t) \right\}. \end{aligned} \quad (5.64)$$

В нулевом приближении по параметру $(T\Delta\omega)^{-1}$ отсюда получается прежняя формула для $\tilde{\omega}_k^\sigma$.

Нестационарным аналогом соотношения (4.52) является тождество (5.22), в чем нетрудно убедиться, вспомнив определение (5.18) величины $U_k^{\sigma, \sigma'}(t)$ и придав (5.22) форму

$$\sigma \left[\sum_s s c_k^{s, \sigma}(t) * e_k^{s, \sigma'}(t) - S_k^{\sigma, \sigma'}(t) \right] = \delta_{\sigma, \sigma'}, \quad (5.65)$$

$$S_k^{\sigma, \sigma'}(t) \equiv i \int_t^\infty dt_1 \int_{-\infty}^t dt_2 \tilde{\Sigma}_k^{\sigma, \sigma'}(t_1, t_2) \exp \left[i \int_t^{t_1} d\tilde{t} \lambda_k^\sigma(\tilde{t}) + i \int_t^{t_2} d\tilde{t} \lambda_k^{\sigma'}(\tilde{t}) \right], \quad (5.66)$$

$$\tilde{\Sigma}_k^{\sigma, \sigma'}(t, t') \equiv \sum_{s, s'} c_k^{s, \sigma}(t) * \Sigma_k^{s, s'}(t, t') e_k^{s', \sigma'}(t').$$

Введя матрицу перехода от функций $e_k^{s, \sigma}(t)$ к функциям $c_k^{s, \sigma}(t)$ опре-

делением

$$e_k^{s, \sigma}(t) = \sum_{\sigma_1} c_k^{s, \sigma_1}(t) b_k^{\sigma_1, \sigma}(t), \quad (5.67)$$

можно переписать формулы (5.66) в виде:

$$\tilde{\Sigma}_k^{\sigma, \sigma'}(t, t') = \sum_{\sigma_1} \tilde{\Sigma}_k^{\sigma, \sigma_1}(t, t') b_k^{\sigma_1, \sigma'}(t'),$$

$$S_k^{\sigma, \sigma'}(t) = \sum_{\sigma_1} \sum_{n=0}^{\infty} {}^{(n)}S_k^{\sigma, \sigma_1, \sigma'}(t) \frac{\partial^n}{\partial t^n} b_k^{\sigma_1, \sigma'}(t). \quad (5.68)$$

Коэффициенты ${}^{(n)}S_k^{\sigma, \sigma_1, \sigma'}(t)$ зависят лишь от функций $\tilde{\Sigma}_k^{\sigma, \sigma'}(t)$ и $\lambda_k^\sigma(t)$:

$$\begin{aligned} & {}^{(n)}S_k^{\sigma, \sigma_1, \sigma'}(t) \equiv \frac{i^n}{n!} \int_t^\infty dt_1 \int_{-\infty}^t dt_2 \tilde{\Sigma}_k^{\sigma, \sigma_1}(t_1, t_2) (t_2 - t)^n \times \\ & \times \exp \left[i \int_t^{t_1} d\tilde{t} \lambda_k^\sigma(\tilde{t}) + i \int_t^{t_2} d\tilde{t} \lambda_k^{\sigma'}(\tilde{t}) \right] = \frac{i^n}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial \omega'} \right)^n \times \\ & \times \left\{ 1 - \frac{i}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \lambda_k^\sigma(t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \omega} \right] \frac{\partial}{\partial \omega} + \frac{i}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \lambda_k^{\sigma'}(t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \omega'} \right] \frac{\partial}{\partial \omega'} + \right. \\ & \left. + O \left(\frac{1}{T^2 (\Delta \omega)^2} \right) \right\} \tilde{S}_{k, \omega, \omega'}^{\sigma, \sigma_1}(t) \Big|_{\substack{\omega = \lambda_k^\sigma(t) \\ \omega' = \lambda_k^{\sigma'}(t)}}, \\ & \tilde{S}_{k, \omega, \omega'}^{\sigma, \sigma'}(t) \equiv \frac{\tilde{\Sigma}_k^{\sigma, \sigma'}(t) - \tilde{\Sigma}_k^{\sigma, \sigma'}(t)}{\omega - \omega'}. \end{aligned} \quad (5.69)$$

При заданных $\tilde{\Sigma}_k^{\sigma, \sigma'}(t)$ и $\lambda_k^\sigma(t)$ (5.65) представляет собой уравнение для функции $b_k^{\sigma_1, \sigma'}(t)$:

$$\sum_{\sigma_1} \left\{ \delta_{\sigma, \sigma_1} + \sigma \left[P_k^{\sigma, \sigma_1}(t) - \sum_{n=0}^{\infty} {}^{(n)}S_k^{\sigma, \sigma_1, \sigma'}(t) \frac{\partial^n}{\partial t^n} \right] \right\} b_k^{\sigma_1, \sigma'}(t) = \delta_{\sigma, \sigma'}. \quad (5.70)$$

Решение этого уравнения строится итерациями, а в нулевом приближении по параметру $(T\Delta\omega)^{-1}$ совпадает с найденным в предыдущем разделе (см. (4.56)).

Необходимую для однозначного определения функций $e_k^{s, \sigma}(t)$ и $c_k^{s, \sigma}(t)$ связь между фазами компонент $e_k^{\sigma, \sigma}(t)$ и $c_k^{\sigma, \sigma}(t)^*$ удобно, как и в стационарном случае, задать условием (4.13). При этом остаются неизменными формулы (4.57), позволяющие выразить функции

$e_k^{s,\sigma}(t)$ и $c_k^{s,\sigma}(t)$ через $\tilde{\omega}_k^\sigma(t)$ и $\tilde{\Sigma}_{k,\omega}^{\sigma,\sigma'}(t)$. Подстановка соответствующих выражений в (5.64) замыкает уравнение для $\tilde{\omega}_k^\sigma(t)$. Вычисление этой функции (а с нею и остальных искоемых функций) производится последовательными приближениями. В частности, линейные по параметру $(T\Delta\omega)^{-1}$ добавки к формулам предыдущего раздела для λ_k^σ , $e_k^{s,\sigma}$, $c_k^{s,\sigma}$ имеют вид:

$$^{(1)}\lambda_k^\sigma(t) = O\left(\frac{\gamma^2}{T(\Delta\omega)^2}\right),$$

$$^{(1)}c_k^{\sigma,\sigma}(t)^* = \frac{\sigma}{8} \frac{\partial^3}{\partial t \partial \omega^2} \operatorname{Im} \tilde{\Sigma}_{k,\omega}^{\sigma,\sigma}(t) \Big|_{\omega=\tilde{\omega}_k^\sigma} + O\left(\frac{\gamma^2}{T(\Delta\omega)^3}\right),$$

$$^{(1)}c_k^{-\sigma,\sigma}(t)^* = \frac{i}{\omega_k + \omega_{-k}} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\Sigma}_{k,\omega}^{\sigma,-\sigma}(t)}{\partial t} - \frac{\sigma \tilde{\Sigma}_{k,\omega}^{\sigma,-\sigma}(t)}{\omega_k + \omega_{-k}} \right] \Big|_{\omega=\tilde{\omega}_k^\sigma} + O\left(\frac{\gamma^2}{T(\Delta\omega)^3}\right),$$

$$^{(1)}e_k^{\sigma,\sigma}(t) = -\frac{\sigma}{8} \frac{\partial^3}{\partial t \partial \omega^2} \operatorname{Im} \tilde{\Sigma}_{k,\omega}^{\sigma,\sigma}(t) \Big|_{\omega=\tilde{\omega}_k^\sigma} + O\left(\frac{\gamma^2}{T(\Delta\omega)^3}\right), \quad (5.71)$$

$$^{(1)}e_k^{-\sigma,\sigma}(t) = \frac{i}{\omega_k + \omega_{-k}} \frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\Sigma}_{k,\omega}^{-\sigma,\sigma}(t)}{\partial \omega} + \frac{\sigma \tilde{\Sigma}_{k,\omega}^{-\sigma,\sigma}(t)}{\omega_k + \omega_{-k}} \right] \Big|_{\omega=\tilde{\omega}_k^\sigma} + O\left(\frac{\gamma^2}{T(\Delta\omega)^3}\right).$$

Зная $\lambda_k^\sigma(t)$, $e_k^{s,\sigma}(t)$, $c_k^{s,\sigma}(t)$, можно вычислять интеграл столкновений непосредственно в терминах модифицированных функций. Нужно для такого расчета выражение модифицированной функции Грина биений $\delta \hat{G}_k$ через $\hat{\Sigma}_k$ восстанавливается по известному результату воздействия на $\delta \hat{G}_k$ обратного к \hat{G}_k оператора \hat{L}_k . Матричные элементы последнего связаны с матричными элементами оператора \hat{L}_k преобразованием

$$\tilde{L}_k^{\sigma,\sigma'}(t, t') = \sum_{s, s'} c_k^{s,\sigma}(t)^* L_k^{s, s'}(t, t') e_k^{s', \sigma'}(t') \quad (5.72)$$

и могут быть представлены в виде

$$\tilde{L}_k^{\sigma,\sigma'}(t, t') = \left\{ [\sigma \delta_{\sigma, \sigma'} + S_k^{\sigma, \sigma'}(t)] \left[i \frac{\partial}{\partial t} - \lambda_k^{\sigma'}(t) \right] + \tilde{\Sigma}_k^{\sigma, \sigma'}(t) \right\} \times \\ \times \delta(t - t') - \tilde{\Sigma}_k^{\sigma, \sigma'}(t, t'), \quad (5.73)$$

$$\tilde{\Sigma}_k^{\sigma, \sigma'}(t) \equiv \int dt_1 \tilde{\Sigma}_k^{\sigma, \sigma'}(t, t_1) \exp \left[i \int_{t_1}^t d\tilde{t} \lambda_k^{\sigma'}(\tilde{t}) \right] =$$

$$= \left[1 + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \lambda_k^{\sigma'}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \omega} \right) \frac{\partial}{\partial \omega} + O\left(\frac{1}{T^2(\Delta\omega)^2}\right) \right] \tilde{\Sigma}_{k,\omega}^{\sigma, \sigma'}(t) \Big|_{\omega=\lambda_k^{\sigma'}(t)}$$

Фурье-образ $\tilde{\Sigma}_{k,\omega}^{\sigma, \sigma'}(t)$ функции $\tilde{\Sigma}_k^{\sigma, \sigma'}\left(t + \frac{\tau}{2}, t - \frac{\tau}{2}\right)$ по τ связан с $\tilde{\Sigma}_{k,\omega}^{\sigma, \sigma'}(t)$ соотношением

$$\tilde{\Sigma}_{k,\omega}^{\sigma, \sigma'}(t) = \sum_{\sigma_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{\partial^n \tilde{\Sigma}_{k,\omega}^{\sigma, \sigma_1}(t)}{\partial \omega^n} \frac{\partial^n b_k^{\sigma_1, \sigma'}(t)}{\partial t^n}.$$

При данном выше определении функции Грина собственных колебаний, удовлетворяющая уравнению

$$\hat{L}_k \delta \hat{G}_k = \hat{f} - \hat{L}_k \hat{g}_k \quad (5.74)$$

функция $\delta \tilde{G}_k^{\sigma, \sigma'}(t, t')$ затухает с декрементом порядка $\Delta\omega$ по мере увеличения разности $t - t'$. Для плавно зависящего от t и ω при всех вещественных значениях ω фурье-образа функции $\delta \tilde{G}_k^{\sigma, \sigma'}(t, t - \tau)$ по τ :

$$\delta \tilde{G}_{k,\omega}^{\sigma, \sigma'}(t) \equiv \int_0^{\infty} d\tau \delta \tilde{G}_k^{\sigma, \sigma'}(t, t - \tau) e^{i\omega\tau} \quad (5.75)$$

из (5.74) получается уравнение

$$\sum_{\sigma_1} \left\{ [\sigma \delta_{\sigma, \sigma_1} + S_k^{\sigma, \sigma_1}(t)] \left[i \frac{\partial}{\partial t} + \omega - \lambda_k^{\sigma_1}(t) \right] + \tilde{\Sigma}_k^{\sigma, \sigma_1}(t) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \frac{\partial^n - \tilde{\Sigma}_{k,\omega}^{\sigma, \sigma_1}(t)}{\partial \omega^n} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \right\} \times \\ \times \delta \tilde{G}_{k,\omega}^{\sigma_1, \sigma'}(t) = \sigma' [S_k^{\sigma, \sigma'}(t) - S_k^{\sigma, \sigma'}(t)]. \quad (5.76)$$

Здесь введены обозначения

$$-\tilde{\Sigma}_{k,\omega}^{\sigma, \sigma'}(t) \equiv \int_0^{\infty} d\tau \tilde{\Sigma}_k^{\sigma, \sigma'}(t, t - \tau) e^{i\omega\tau} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{\partial^{2n}}{\partial \omega^n \partial t^n} \tilde{\Sigma}_{k,\omega}^{\sigma, \sigma'}(t),$$

$$S_k^{\sigma, \sigma'}(t) \equiv i \int_0^{\infty} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tilde{\Sigma}_k^{\sigma, \sigma'}(t, t - \tau_1) \exp \left[i\omega\tau_2 + i \int_{\tau_2}^{\tau_1} d\tilde{\tau} \lambda_k^{\sigma'}(t - \tilde{\tau}) \right] =$$

$$= \left\{ 1 + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} + \frac{\partial}{\partial \omega'} \right) \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \lambda_k^{\sigma'}(t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \omega'} \right] + \frac{i}{2} \frac{\partial \lambda_k^{\sigma'}(t)}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial \omega \partial \omega'} + \right.$$

$$+ O\left(\frac{1}{T^2(\Delta\omega)^2}\right) \left\{ \bar{S}_{k,\omega,\omega'}^{\sigma,\sigma'}(t) \Big|_{\omega'=\lambda_k^{\sigma'}(t)} ; \right. \\ \left. \bar{S}_{k,\omega,\omega'}^{\sigma,\sigma'}(t) \equiv \frac{\bar{\Sigma}_{k,\omega}^{\sigma,\sigma'}(t) - \bar{\Sigma}_{k,\omega'}^{\sigma,\sigma'}(t)}{\omega - \omega'} \right. \quad (5.77)$$

В нулевом приближении по параметру $(T\Delta\omega)^{-1}$ (5.76) сводится к уравнению

$$\sum_{\sigma_1} \tilde{L}_{k,\omega}^{\sigma,\sigma_1}(t) {}^{(0)}\delta\tilde{G}_{k,\omega}^{\sigma,\sigma'}(t) = \sigma' [\omega - \lambda_k^{\sigma'}(t)] T_{k,\omega}^{\sigma,\sigma'}(t). \quad (5.78)$$

Фигурирующие в нем функции $\tilde{L}_{k,\omega}^{\sigma,\sigma'}(t)$, $T_{k,\omega}^{\sigma,\sigma'}(t)$ выражаются через $\bar{S}_{k,\omega,\omega'}^{\sigma,\sigma'}(t)$ по формулам (4.58). Решение уравнения (5.78) дается формулами (4.59). Поправки, которыми $\delta\tilde{G}_{k,\omega}^{\sigma,\sigma'}(t)$ отличается от ${}^{(0)}\delta\tilde{G}_{k,\omega}^{\sigma,\sigma'}(t)$, могут быть найдены итерациями. В частности, линейная по параметру $(T\Delta\omega)^{-1}$ поправка оказывается следующей:

$${}^{(1)}\delta\tilde{G}_{k,\omega}^{\sigma,\sigma'}(t) = i\sigma\sigma' \frac{\partial}{\partial t} \left\{ [\omega - \lambda_k^{\sigma'}(t)]^{-1} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial\omega} + \frac{\partial}{\partial\lambda'} \right) \bar{S}_{k,\omega,\lambda'}^{\sigma,\sigma'}(t) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{\partial}{\partial\lambda'} \right) \bar{S}_{k,\lambda,\lambda'}^{\sigma,\sigma'}(t) + \frac{\partial \bar{S}_{k,\lambda,\lambda'}^{\sigma,\sigma'}(t)}{\partial\lambda} - T_{k,\omega}^{\sigma,\sigma'}(t) \right] \right\} \Big|_{\substack{\lambda=\lambda_k^{\sigma}(t) \\ \lambda'=\lambda_k^{\sigma'}(t)}} + \\ + O\left(\frac{\gamma^{(0)}\delta G_{k,\omega}^{\sigma,\sigma'}(t)}{T(\Delta\omega)^2}\right). \quad (5.79)$$

Как и положено, она плавно зависит от частоты на всей вещественной оси ω .

6. КУБИЧНЫЙ СТОЛКНОВИТЕЛЬНЫЙ ЧЛЕН ДЛЯ ВОЛН С РАСПАДНЫМ ЗАКОНОМ ДИСПЕРСИИ

Полезным для практики и для демонстрации возможностей построенного формализма примером является расчет второго исчезающего члена разложения интеграла столкновений в условиях, когда первый исчезающий член квадратичен по энергии волн. Как видно из формул (5.54), (5.55) и следующих за ними оценок, речь идет о вычислении столкновительных членов ${}^{(0,2)}\tilde{F}_k(t)$ и ${}^{(0,3)}\tilde{F}_k(t)$ для волн с распадным законом дисперсии. В столкновительном члене ${}^{(0,2)}\tilde{F}_k(t)$ вероятность процесса и перенормированную частоту требуется учесть с точностью до линейных по энергии

волн поправок, а в ${}^{(0,3)}\tilde{F}_k(t)$ — только в нулевом приближении. Перенормированная частота с достаточной точностью дается формулами

$$\tilde{\omega}_k(t) = \omega_k + \text{Re} \tilde{\Sigma}_{k,\omega_k}^{+,+}(t), \quad (6.1)$$

$$\tilde{\Sigma}_{k,\omega}^{\sigma,\sigma'}(t) = \frac{1}{2} \left(\text{diagram} \right)_k^{\sigma,\sigma'}(t) + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi - \omega - i0} \left(\text{diagram} \right)_{k,\xi}^{\sigma,\sigma'}(t) = \\ = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} n_{k_1}(t) \sum_{\sigma_1} \left(U_{-k,k,\sigma_1k_1,-\sigma_1k_1}^{-\sigma,\sigma,\sigma_1,-\sigma_1} - \frac{1}{\omega_0} \sum_{\sigma_2} U_{-k,k,0}^{-\sigma,\sigma,\sigma_2} U_{0,\sigma_1k_1,-\sigma_1k_1}^{-\sigma_2,\sigma_1,-\sigma_1} \right) - \\ - \sum_{\sigma_1,\sigma_2} \int \frac{d^3k_1 d^3k_2}{(2\pi)^3} \delta^3(-k + \sigma_1k_1 + \sigma_2k_2) \frac{\sigma_2 n_{k_1}(t)}{\sigma_1\omega_{k_1} + \sigma_2\omega_{k_2} - \omega - i0} \left| U_{-k,\sigma_1k_1,\sigma_2k_2}^{-\sigma,\sigma_1,\sigma_2} \right|^2. \quad (6.2)$$

Невозмущенная частота бесконечно длинноволновых собственных колебаний ω_0 считается здесь и далее отличной от нуля. При $\omega_0=0$ и $U_{-k,k,0}^{\sigma,\sigma_1,\sigma_2} \neq 0$ длинноволновые собственные моды следует описывать динамически, так как в данном случае длинноволновая турбулентность, строго говоря, не является слабой при сколь угодно малой ее энергии (что, впрочем, еще не исключает возможность эффективного описания такой турбулентности пертурбативными методами (см., например, [4])).

Для отыскания вероятностей трехволнового и четырехволнового процессов ${}^{(0)}W_{k_1,k_2}^{\sigma_1,\sigma_2}(t)$ и ${}^{(0)}W_{k_1,k_2,k_3}^{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3}$ достаточно проследить за перенормировками вершин, произведенными при выражении $\Phi_k^+(t)$ через функцию распределения квазичастиц $n_k(t)$ во время вывода формул (5.54), (5.55). При склеивании произвольных половинок графиков (3.2), имеющих две основных линии, слабо связанных фрагментов не возникает. Поэтому сумма таких графиков представляема в виде

$${}_2\hat{\Phi} = \frac{1}{2} \text{diagram} \quad (6.3)$$

Входящие в перенормированную трехволновую вершину графики:

$$1 \text{---} \begin{matrix} 2 \\ \diagup \\ \diagdown \\ 3 \end{matrix} = \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} + \frac{1}{2} \text{diagram} + \frac{1}{2} \text{diagram}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 3 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \text{---} \\ 1 \quad 3 \end{array} \right) + \\
& + \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 3 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \text{---} \\ 1 \quad 3 \end{array} \right) + \dots
\end{aligned} \quad (6.4)$$

нумеруются различными значениями индекса α (или β) в формуле (5.46) с $n=2$. При $n=2$ суммирование в (5.46) проводится по всем без исключения значениям α и β . Соответствующая (6.4) аналитическая формула восстанавливается по обычным правилам чтения графиков. Работая в терминах модифицированных функций, левой части (6.4) следует поставить в соответствие модифицированную перенормированную вершинную функцию

$$\left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 3 \end{array} \right)_{k_1|k_2, k_3}^{\sigma_1|\sigma_2, \sigma_3}(t_1, t_2, t_3),$$

а первому графику в правой части (6.4) — функцию $\bar{U}_{k_1|k_2, k_3}^{\sigma_1|\sigma_2, \sigma_3}(t_1) \times \delta(t_2 - t_1) \delta(t_3 - t_1)$. Согласно (5.36) и (4.57), $\bar{U}_{k_1|k_2, k_3}^{\sigma_1|\sigma_2, \sigma_3}(t)$ с достаточной для решаемой задачи точностью дается формулой

$$\begin{aligned}
\bar{U}_{k_1|k_2, k_3}^{\sigma_1|\sigma_2, \sigma_3}(t) = & U_{k_1, k_2, k_3}^{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}(t) \left[1 + \frac{1}{2} \sigma_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} \bar{\Sigma}_{k_1, \omega_1}^{\sigma_1, \sigma_1}(t)^* + \right. \\
& + \frac{1}{2} \sigma_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2} \bar{\Sigma}_{k_2, \omega_2}^{\sigma_2, \sigma_2}(t) + \left. \frac{1}{2} \sigma_3 \frac{\partial}{\partial \omega_3} \bar{\Sigma}_{k_3, \omega_3}^{\sigma_3, \sigma_3}(t) \right] - \frac{\bar{\Sigma}_{k_1, \omega_1}^{\sigma_1, -\sigma_1}(t)^* U_{k_1, k_2, k_3}^{-\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}}{\omega_{k_1} + \omega_{-k_1}} - \\
& - \frac{U_{k_1, k_2, k_3}^{\sigma_1, -\sigma_2, \sigma_3} \bar{\Sigma}_{k_2, \omega_2}^{-\sigma_2, \sigma_2}(t)}{\omega_{k_2} + \omega_{-k_2}} - \frac{U_{k_1, k_2, k_3}^{\sigma_1, \sigma_2, -\sigma_3} \bar{\Sigma}_{k_3, \omega_3}^{-\sigma_3, \sigma_3}(t)}{\omega_{k_3} + \omega_{-k_3}} \Big|_{\substack{\omega_i = \sigma_i \omega_{\sigma_i k_i} \\ i=1, 2, 3}},
\end{aligned} \quad (6.5)$$

где $\bar{\Sigma}_{k, \omega}^{\sigma, \sigma'}$ по-прежнему удовлетворяет (6.2). В остальных слагаемых правой части (6.4) модифицированные вершинные функции можно считать равными исходным.

При переходе от разложения интеграла столкновений (5.46) к разложению (5.51) дополнительных перенормировок трехволновой вершины не происходит. Поэтому вероятность трехволнового процесса ${}^{(0)}W_{k_1, k_2}^{\sigma_1, \sigma_2}(t)$ представима в виде

$${}^{(0)}W_{k_1, k_2}^{\sigma_1, \sigma_2}(t) = \frac{1}{2} 2\pi |\bar{V}_{\sigma_1 k_1, \sigma_2 k_2}^{\sigma_1, \sigma_2}(t)|^2, \quad (6.6)$$

где $\bar{V}_{k_1, k_2}^{\sigma_1, \sigma_2}(t)$ — определенная в соответствии с (5.52) «амплитуда вероятности»:

$$\begin{aligned}
\bar{V}_{k_1, k_2}^{\sigma_1, \sigma_2}(t) = & \int dt_1 dt_2 \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 0 \quad 2 \end{array} \right)_{-k|k_1, k_2}^{-|\sigma_1, \sigma_2}(t, t_1, t_2) \Big|_{k=k_1+k_2} \times \\
& \times \exp \left[i \int_{t_1}^t d\tilde{t} \lambda_{k_1}^{\sigma_1}(\tilde{t}) + i \int_{t_2}^t d\tilde{t} \lambda_{k_2}^{\sigma_2}(\tilde{t}) \right].
\end{aligned} \quad (6.7)$$

С точностью до линейных по энергии турбулентности поправок включительно:

$$\begin{aligned}
\bar{V}_{\sigma_1 k_1, \sigma_2 k_2}^{\sigma_1, \sigma_2}(t) = & \bar{U}_{-k|\sigma_1 k_1, \sigma_2 k_2}^{-|\sigma_1, \sigma_2}(t) + \frac{1}{2} \sum_{\sigma_3} \int \frac{d^3 k_3}{(2\pi)^3} n_{k_3}(t) \times \\
& \times \left(U_{-k, \sigma_1 k_1, \sigma_2 k_2, \sigma_3 k_3}^{-, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, -\sigma_3} - \frac{1}{\omega_0} \sum_{\sigma_4} U_{-k, \sigma_1 k_1, \sigma_2 k_2, 0}^{-, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_4} U_{0, \sigma_3 k_3, -\sigma_3 k_3}^{-\sigma_4, \sigma_3, -\sigma_3} \right) + \\
& + \hat{S} \sum_{\sigma_3, \sigma_4} \int \frac{d^3 k_3 d^3 k_4}{(2\pi)^3} \delta^3(\sigma_2 k_2 - \sigma_3 k_3 - \sigma_4 k_4) U_{-k, \sigma_1 k_1, \sigma_3 k_3, \sigma_4 k_4}^{-, \sigma_1, \sigma_3, \sigma_4} U_{\sigma_2 k_2, -\sigma_3 k_3, -\sigma_4 k_4}^{\sigma_2, -\sigma_3, -\sigma_4} \times \\
& \times \frac{\sigma_4 n_{k_3}(t)}{\sigma_2 \omega_{k_2} - \sigma_3 \omega_{k_3} - \sigma_4 \omega_{k_4} + i0} + \hat{S} \sum_{\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5} \int \frac{d^3 k_3 d^3 k_4 d^3 k_5}{(2\pi)^3} \times \\
& \times \delta^3(\sigma_1 k_1 + \sigma_3 k_3 - \sigma_4 k_4) \delta^3(\sigma_2 k_2 - \sigma_3 k_3 - \sigma_5 k_5) \times \\
& \times U_{-k, \sigma_4 k_4, \sigma_5 k_5}^{-, \sigma_4, \sigma_5} U_{-\sigma_4 k_4, \sigma_1 k_1, \sigma_3 k_3}^{-\sigma_4, \sigma_1, \sigma_3} U_{-\sigma_5 k_5, \sigma_2 k_2, \sigma_3 k_3}^{-\sigma_5, \sigma_2, -\sigma_3} n_{k_3}(t) \times \\
& \times \frac{\sigma_4}{\sigma_1 \omega_{k_1} + \sigma_3 \omega_{k_3} - \sigma_4 \omega_{k_4} + i0} \frac{\sigma_5}{\sigma_2 \omega_{k_2} - \sigma_3 \omega_{k_3} - \sigma_5 \omega_{k_5} + i0} \Big|_{k=\sigma_1 k_1 + \sigma_2 k_2}.
\end{aligned} \quad (6.8)$$

Здесь \hat{S} — оператор суммирования по циклическим перестановкам трех пар независимых переменных:

$$\left(\begin{array}{c} - \\ -k \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_1 k_1 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{c} \sigma_2 \\ \sigma_2 k_2 \end{array} \right).$$

Сумма графиков (3.2), имеющих три основных линии, не может быть представлена в аналогичном (6.3) виде

$${}_3\Phi = \frac{1}{3!} \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} \quad (6.9)$$

посредством введения перенормированной четырехволновой вершины

$$1 \begin{array}{c} 2 \\ \vdots \\ 4 \end{array} 3 = 1 \begin{array}{c} 2 \\ \vdots \\ 4 \end{array} 3 + \left(\begin{array}{c} 2 \\ \vdots \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \vdots \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \vdots \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \vdots \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \vdots \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \vdots \\ 4 \end{array} \right) \quad (6.10)$$

поскольку при подстановке (6.10) в (6.9) к перечисленным в (3.2) добавляется лишний график

$$\frac{1}{2} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad (6.11)$$

содержащий слабо связанный фрагмент. Данный график естественным образом возникает при первой итерации уравнения

$$\text{---} = \frac{1}{2} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad (6.12)$$

Такая же итерационная процедура осуществляется при переходе от (5.46) к (5.51), но не полностью, а лишь в той мере, в какой она не приводит к нарушению временной квазилокальности выражений. Проводимую при указанном переходе дополнительную перенормировку четырехволновой вершины можно восстановить путем надлежащего прочтения графика (6.11). Специфика этого прочтения, символизируемая охватывающей слабо связанный фрагмент графика (6.11) штриховой линией, состоит в изъятии из обычного способом получаемого выражения существенно нелокального по времени слагаемого, уже учтенного в трехволновом столкновительном члене. В рассматриваемом здесь приближении вероятность четырехволнового процесса не зависит от времени и может вычисляться без учета нестационарности турбулентности. Упомянувшееся выше «существенно нелокальное по времени» слагаемое в переводе на язык стационарной теории означает «содержащее малый знаменатель γ » (а в пределе $\gamma \rightarrow 0$ — расходимость). Такое слагаемое имеется только в выражении для проитерированного нормального коррелятора (см. первое слагаемое в формуле (4.39) для $n_q^{\sigma, \sigma}$). После изъятия этого слагаемого вклад нормальной корреляции собственных колебаний в соответствующее слабо связанному фрагменту графика (6.11) выражение оказывается равным

$$\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right)_{\text{норм}}^{\sigma, \sigma} = -\tilde{\Phi}_q^{\sigma, \sigma} \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\mathcal{P}}{\omega - \sigma \omega_{\sigma, k}}, \quad (6.13)$$

где символ \mathcal{P} напоминает о предстоящем интегрировании по час-

тям и взятии интеграла в смысле главного значения. При подстановке в (6.11) невозмущенной функции Грина и обычном прочтении слабо связанного фрагмента вместо (6.13) получилось бы выражение

$$\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right)_{\text{норм}}^{\sigma, \sigma} = \frac{\tilde{\Phi}_q^{\sigma, \sigma}}{(\omega - \sigma \omega_{\sigma, k})^2}, \quad (6.14)$$

интеграл от которого по частоте расходится. Договорившись устранять такие расходимости с помощью символического равенства

$$\frac{1}{\xi^2} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\mathcal{P}}{\xi}, \quad (6.15)$$

можно формально сохранить обычный способ прочтения графика (6.11), придать смысл соотношению (6.9) и условно представить вероятность четырехволнового процесса в виде:

$${}^{(0)}W_{k_1, k_2, k_3}^{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3} = \frac{1}{3!} 2\pi \left| \tilde{V}_{\sigma_1 k_1, \sigma_2 k_2, \sigma_3 k_3}^{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3} \right|^2, \quad (6.16)$$

где «амплитуда вероятности» $\tilde{V}_{\sigma_1 k_1, \sigma_2 k_2, \sigma_3 k_3}^{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}$ совпадает со значением перенормированной вершинной функции (6.10) на так называемой энергетической поверхности:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{\sigma_1 k_1, \sigma_2 k_2, \sigma_3 k_3}^{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3} &= \left(\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 0 \text{---} \text{---} 2 \\ \text{---} \\ 3 \end{array} \right)_{-q, \sigma_1 q_1, \sigma_2 q_2, \sigma_3 q_3}^{-, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3} \Big|_{q = \sum_{i=1}^3 \sigma_i q_i, \omega_i = \omega_k} = \\ &= U_{-k, \sigma_1 k_1, \sigma_2 k_2, \sigma_3 k_3}^{-, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3} + \hat{S} \sum_{\sigma'} \frac{\sigma' U_{-k, \sigma_1 k_1, \sigma' k'}^{-, \sigma_1, \sigma'} U_{-\sigma' k', \sigma_2 k_2, \sigma_3 k_3}^{-, \sigma', \sigma_2, \sigma_3}}{\sigma_3 \omega_{k_3} + \sigma_2 \omega_{k_2} - \sigma' \omega_{k_1} + i0} \Big|_{k = \sum_{i=1}^3 \sigma_i k_i, \sigma' k' = \sum_{i=2}^3 \sigma_i k_i} \end{aligned} \quad (6.17)$$

(оператор \hat{S} обозначает суммирование по трем циклическим перестановкам индексов «1», «2», «3»). Нетрудно видеть, что нуждающиеся в раскрытии по формуле (6.15) особенности вносятся в (6.16) квадратами модулей всех содержащихся в (6.17) слагаемых, кроме первого, и связаны с трехволновыми резонансами. В отсутствие таковых, т. е. при нераспадном законе дисперсии волн, формула (6.16) имеет не только символическое, но и буквальное значение и совпадает с общеизвестной. На границе между распадным и нераспадным случаями (где «прорезается» новый канал взаимодействия волн) кинетическое уравнение, строго говоря, неприменимо при сколь угодно малой энергии турбулентности.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной итог настоящей работы составляет разложение интеграла столкновений (5.54), дополненное формулами для всех входящих в него величин. Предопределенность структуры данного разложения при надлежащем выборе функции распределения квазичастиц значительно облегчает вычисление высших столкновительных членов: задача сводится к отысканию перенормированных вершинных функций и собственных частот, что позволяет использовать все преимущества наглядного «полуквантового» метода и в то же время избавиться от его изъянов. В случае стационарной турбулентности удается даже сохранить обычно предполагаемую на основе квантовой аналогии структуру столкновительных членов. Правда, вероятности всех нелинейных процессов, кроме низшего, утрачивают при этом количественный смысл из-за введения в них символов, не являющихся в обычном понимании интегрируемыми. Символы эти вводятся исключительно для придания столкновительным членам желаемой структуры и «расшифровываются» по строго определенным правилам, позволяющим вернуться к не содержащим никаких расходимостей выражениям, естественным образом возникающим при корректном расчете. Искусственно создаваемые для стандартизации интеграла столкновений расходимости связаны с вкладами в высшие столкновительные члены резонансов более низкого порядка.

В случае нестационарной турбулентности желаемую структуру интеграла столкновений не удастся сохранить даже формально. Качественное объяснение этого состоит в следующем. Собственные колебания турбулентной среды, т. е. квазичастицы, формируются не только средой, но и турбулентностью. Связанная с турбулентностью перенормировка собственного колебания изменяется за то же характерное время T , что и спектр турбулентности. В существенно нестационарном случае, когда $T \sim \gamma^{-1}$, квазичастицы успевают заметно перестроиться за время своей жизни γ^{-1} . Сопоставив это с положенным в основу «полуквантового» метода интуитивным представлением о квазичастицах, можно счесть удивительным не столько наличие в интеграле столкновений (5.54) слагаемых ${}^{(p,n)}\tilde{F}_k(t)$ с $p \geq 1$, сколько их структурное сходство с эталонными столкновительными членами ${}^{(0,n)}\tilde{F}_k(t)$. При недостаточно тщательном выборе функции распределения квазичастиц ничего подобного не получилось бы; более того, отклонившись от сделанного выбора

хотя бы на малую, но существенно нелокальную по времени поправку, пришлось бы встретиться с такой нелокальностью интеграла столкновений, которая устранима лишь разложением по параметру $(\gamma T)^{-1}$. Здесь находится благодатная почва для «опровержений» теории слабой турбулентности. Проблема эта, как теперь понятно, является технической и полностью исчезает при адекватном описании турбулентности.

Принципиальные, а не технические, трудности обнаруживаются вблизи порогов появления новых каналов взаимодействия волн, где нарушается временная квазилокальность разложений собственно-энергетических функций. Соответствующие волны нуждаются в динамическом или квазидинамическом описании.

Авторы благодарны В.Е. Захарову и В.С. Львову за стимулирующий интерес к работе и полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кадомцев Б.Б. Турбулентность плазмы.—В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып.4. М.: Атомиздат, 1964, с.188.
2. Галеев А.А., Сагдеев Р.З. Нелинейная теория плазмы.—В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып.7. М.: Атомиздат, 1973, с.3.
3. Захаров В.Е. Изв. ВУЗов.—Радиофизика, 1974, т.17, с.431.
4. Малкин В.М. Физика плазмы, 1982, т.8, с.357; Препринт ИЯФ СО АН СССР № 158, Новосибирск, 1980.
5. Малкин В.М. ЖЭТФ, 1982, т.83, с.88.
6. Кроммес Д.А. Перенормировки в физике плазмы.—В сб.: Основы физики плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1984, т.2, с.174.
7. Захаров В.Е., Львов В.С. Изв. ВУЗов—Радиофизика, 1975, т.18, с.1470.
8. Wyld H.W. Ann. of Phys., 1961, v.14, p.143.
9. Laval G., Pesme Д., Phys. Fluids, 1983, v.26, p.52.
10. Веденов А.А. Введение в теорию слаботурбулентной плазмы.—В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып.3. М.: Атомиздат, 1963, с.203.
11. Стурман Б.И. УФН, 1984, т.144, с.497.
12. Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С. УФН, 1974, т.114, с.609.
13. Львов В.С. ЖЭТФ, 1975, т.69, с.2079; Препринт Института автоматики и электрометрии СО АН СССР, 1982, № 190.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. М.: Наука, 1964, § 125.
15. Дирак П.А.М. Принципы квантовой механики. М.: Физматгиз, 1960.

В.И. Ерофеев, В.М. Малкин

Кинетика слаботурбулентных волновых полей

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 5 февраля 1988 г.
Подписано в печать 13.07.1988 г. МН 00465
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 3,9 печ.л., 3,0 уч.-изд.л.
Тираж 230 экз. Бесплатно. Заказ № 99

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и
отпечатано на ротапинтере Института ядерной физики
СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*