53

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

С.В. Кузьмин

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЦЫ АДИАБАТИЧНОСТИ НЕПАРАКСИАЛЬНОГО ПРОБКОТРОНА

ПРЕПРИНТ 88-86

НОВОСИБИРСК

В настоящее время наиболее интенсивно разрабатывается проект полностью аксиально-симметричной амбиполярной ловушки, содержащей в концевой части систему двух пробкотронов. Один из них, называемый обычно МГД-стабилизатором, обеспечивает устойчивость плазмы в системе относительно первой («жесткой») моды МГД-возмущения. Остальные моды МГД-возмущения подавляются за счет КЛР-эффекта в плазме второго, параксиального, пробкотрона и центральной части ловушки [1].

Предлагаемые в качестве МГД-стабилизаторов непараксиальные системы содержат области относительно малого поля с большой кривизной силовых линий [1, 2]. Это, как известно, может приводить к стохастизации движения частиц в системе и, следовательно, значительным потерям плазмы из этой области ловушки. Фактически это означает, что плазма в данном случае занимает пространство не в полном соответствии с магнитной конфигурацией системы (см., например, [1]), что, в свою очередь ведет к изменению условий устойчивости плазмы относительно МГД-возмущений. Для учета величины этого воздействия необходимо знать область динамического (адиабатического) движения частиц в системе.

Эта задача, ввиду ее важности, получила значительное развитие [3]. Однако, в разработанной теории сложность аналитических вычислений настолько высока, что они могут быть выполнены в объеме, необходимом для определения области динамического движения, только для ограниченного набора простейших магнитных конфигураций. Этого заведомо недостаточно для исследования вновь выдвигаемых коцепций МГД-устойчивых магнитных систем. Попытки воспользоваться в этом случае численным моделированием по методу, предложенному в [4], хотя и приводят к успеху, но требуют достаточно простой и адекватной модели магнитного поля. В случае же вычислений с использованием поля, рассчитанного по геометрии токовых катушек, время счета на ЭВМ становится недопустимо большим.

В данной работе показана возможность дополнения теории, описанной в [3], небольшими по временным затратам численными расчетами для получения быстрого и надежного ответа о наличии области адиабатического удержания в пробкотроне произвольной геометрии. Разработанная для этой цели методика описана в разделе 1. Примеры расчета границы адиабатичности частиц в магнитных системах плоского каспа и непараксиального пробкотрона представлены в разделе 2.

1. ОПИСАНИЕ МЕТОДИКИ

Как известно [3], стохастичность движения частиц наступает вследствие резонансного взаимодействия между ларморовским вращением и продольными колебаниями частицы в ловушке. Основными параметрами, характеризующими этот процесс, являются форма силовой линии, по которой движется частица и которую мы будем маркировать величиной магнитного потока ψ, а также синус питч-угла P, определяемый в минимуме поля на силовой линии с данным ψ, и энергия ε частицы. Таким образом, наша задача состоит в определении области динамического движения в пространстве (ε, P, ψ).

Наиболее разработанным и удобным методом исследования динамики частиц в системах с пробочной геометрией является метод приведения дифференциальных уравнений движения частицы к дискретному отображению [3]. В случае непараксиального пробкотрона, имеющего плоскость симметрии, совпадающую с плоскостью минимумов поля на силовых линиях, дискретное отображение для частицы, движущейся вдоль некоторой силовой линии ψ и имеющей энергию ε, записывается наиболее просто:

$$\bar{P} = P + \Delta P,$$
$$\bar{\theta}_0 = \theta_0 + G(\bar{P}) . \tag{1}$$

Здесь $\bar{P}$, P — синусы питч-углов; а $\bar{\theta}_0$, θ_0 — ларморовские фазы частицы при последовательных пролетах минимума поля; ΔP — неадиабатическое изменение синуса питч-угла частицы при пролете минимума поля на силовой линии и $G(P)$ — величина набора ларморовской фазы между двумя последовательными пролетами минимума поля. В этом случае область адиабатического удержания, согласно [3], определяется неравенством

$$(\Delta P)_m \, |dG/dP| \leqslant 1 , \tag{2}$$

где $(\Delta P)_m$ — максимальное резонансное изменение ΔP при различных θ_0. Описаннное неравенство задает возможные синусы питч-углов старта частиц $1 \geqslant P \geqslant P_k$ с энергией ε на силовой линии ψ, при которых они будут удерживаться в ловушке.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением систем, описывающихся преобразованием (1), но здесь отметим, что методика легко может быть распространена на системы, движение частиц в которых сводится к более сложным преобразованиям, чем (1). Для нахождения границы адиабатичности в этом случае необходимо установить динамическую область модели конечных преобразований, т. е. получить аналог неравенства (2).

Величины ΔP и $G(P)$ после усреднения по быстрому ларморовскому вращению даются следующими интегралами по полупериоду продольных колебаний:

$$\Delta P = \int dt \, \frac{v_\parallel^2 \varkappa}{\sqrt{\omega(s)}} \sin\theta , \tag{3}$$
$$G = \int dt \ \omega(s) ,$$

где s — координата вдоль силовой линии ψ, $\omega(s)$ — ларморовская частота, а $\varkappa$ — кривизна на силовой линии ведущего центра частицы, $v_\parallel$ — продольная скорость частицы.

Получение аналитических выражений для интегралов (3) возможно только в случае наличия достаточно простого представления для $\omega(s)$, $\varkappa(s)$ т. е. только для очень ограниченного круга магнитных систем. Чтобы преодолеть это затруднение, мы будем вычислять интегралы (3) по численно проинтегрированной траектории частицы. При этом необходимо учитывать, что в этом случае подынтегральные выражения не усреднены по ларморовскому вращению и, следовательно, содержат несущественные поправочные множители, зависящие от ларморовской фазы θ_0. Для выделения существенной для нас зависимости в численно полученных интегралах (3), которые мы для удобства переобозначим как $\Delta\tilde{P}$ и $\tilde{G}$, рассмотрим их аналитическое выражение с учетом изменения напряженности поля на масштабе ларморовского радиуса. В первом порядке по неоднородности поля имеем

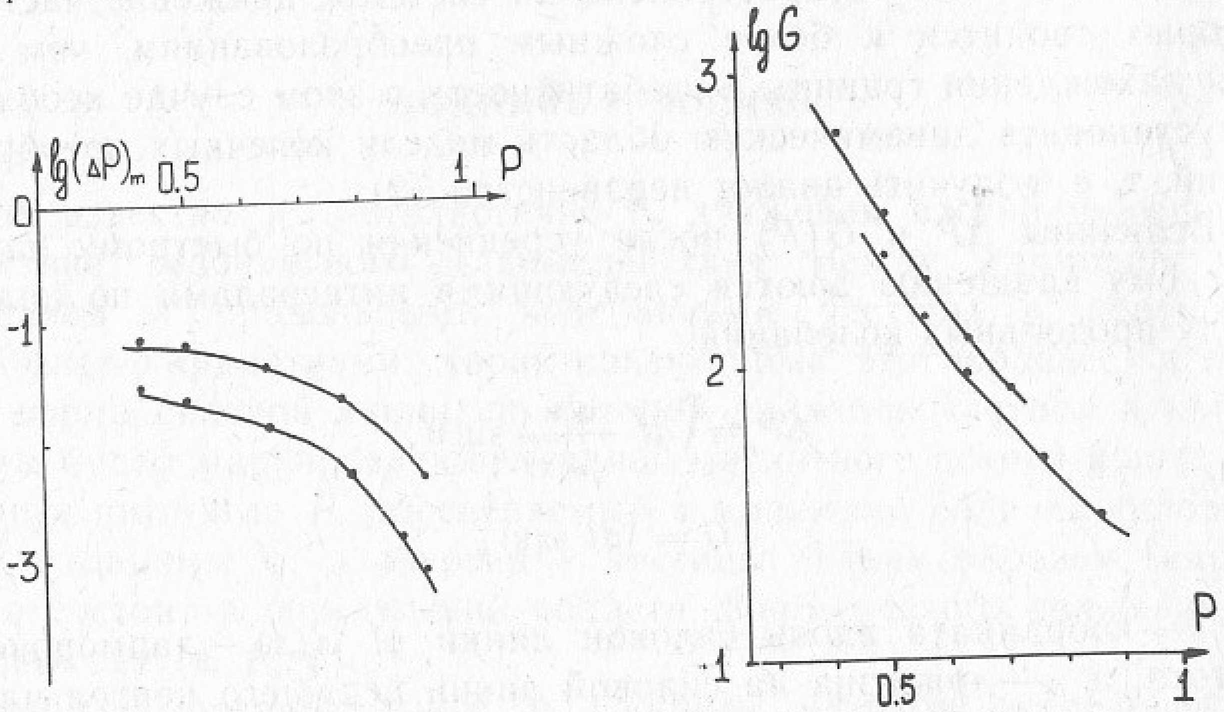
$$\omega(\vec{r}) = \omega(s) + \frac{v_\perp}{\omega(s)} \cdot (\vec{n}\vec{\nabla})\, \omega(s)\,,$$

где $v_\perp$ — поперечная скорость частицы, $\vec{n}$ — единичный вектор бинормали к направлению вектора поля. Тогда

$$\tilde{G} = G + C_1 \cdot \cos\theta_0\,,$$

$$\Delta\tilde{P} = \Delta P \cdot e^{-C_2 \cos\theta_0} = (\Delta P)_m \cdot \sin\theta_0 \cdot e^{-C_2 \cdot \cos\theta_0}\,,$$

где C_1 и C_2 — не существенные для дальнейшего рассмотрения интегралы, не зависящие от θ_0. Из вида полученных выражений



а *б*

Рис. 1. Сравнение численного расчета с теоретическими формулами для функций: *а* — $\Delta\tilde{P}$ и ΔP при $\theta_0 = \pi/2$; *б* — $\tilde{G}$ и G при $\theta_0 = \pi/2$.

для $\Delta\tilde{P}$ и $\tilde{G}$ видно, что можно получить численные значения усредненых по ларморовскому вращению величин $(\Delta P)_m$ и G за один пролет частицы от пробки до пробки. Для этого достаточно численно проинтегрировать один полупериод продольного движения частицы в ловушке, используя для старта частицы фазу $\theta_0 = \pi/2$ (см. рис. 1).

Всего для получения точки границы адиабатичности $P_k = P_k(\varepsilon, \psi)$ оказывается необходимым проинтегрировать 10—20 периодов продольных колебаний частицы. Малость этой величины позволяет вести интегрирование траектории частицы по магнитному полю, рассчитанному на основе геометрии токовых катушек. Для сравнения укажем, что в методе, предложенном в [4], получение такого же результата требует расчета 5000—10000 продольных колебаний частицы.

2. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ГРАНИЦЫ АДИАБАТИЧНОСТИ.

Для проверки работоспособности описанного метода было рассмотрено движение частицы в поле плоского каспа $\vec{B} = (kx,\ -ky,\ 0)$. Силовые линии этого поля с различными ψ подобны, что позволяет построить границу адиабатичности в виде $P_k = P_k(N)$, где N — безразмерный параметр, характеризующий соотношение между энергией частицы ε и силовой линией ψ, вдоль которой частица движется. Следуя [3], определим $N = \frac{l_0\omega_0}{2v}$, где l_0 — расстояние от точки нулевого поля системы до минимума поля на силовой линии, а ω_0 — ларморовская частота в этой точке. Аналитическое выражение границы адиабатичности в переменных $(P_k,\ N)$ было получено в [5]. Однако вычисленная там величина $(\Delta P)_m$ отличается от полученной в [6], поэтому мы здесь заново проведем вычисление.

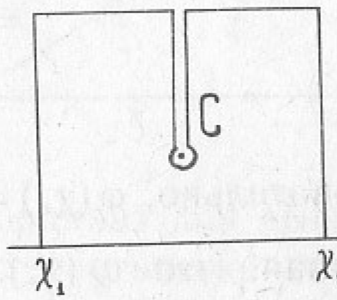


Рис. 2. Контур интегрирования в комплексной плоскости χ.

Как указывалось выше, задача сводится к взятию первого интеграла в (3). Стандартный способ его вычисления заключается в аналитическом продолжении подынтегрального выражения в комплексную плоскость с замыканием контура интегрирования в верхней полуплоскости (см. рис. 2), тогда интегралы по двум крайним прямым отбрасываются как квазипериодическая добавка, интеграл по бесконечно удаленному участку равен нулю, а интеграл по разрезу приводится к виду

$$\int\limits_C \frac{e^{-u}du}{(-u)^p} = \frac{2\pi i}{\Gamma(p)}\,. \qquad (4)$$

В данном случае $u = -i(\theta - \theta_*)$, где θ_* определяется положением особенности магнитного поля $\omega = 0$ в комплексной плоскости χ. Для приведения первого интеграла (3) к виду (4) рассмотрим поведение функции θ вблизи особенности:

$$\theta = \theta_* + \left(\frac{d\theta}{d\chi}\right)\Big|_{\chi=\chi_*}(\chi - \chi_*)$$

где ψ, χ — потоковые координаты магнитного поля. Вспоминая, что

$$\theta = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} dt\, \omega(s) = \theta_0 + \frac{\omega_0}{B_0}\int_0^{\chi}\frac{d\chi}{v_\parallel},$$

можно записать

$$u = -i\frac{\omega_0}{B_0 v}(\chi - \chi_*).$$

Теперь перепишем в координатах ψ, χ выражения для ω и $\varkappa$ в поле плоского каспа

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{\psi}}(\psi^2 + \chi^2)^{1/4},$$

$$\varkappa = \frac{\sqrt{B_0\psi}}{2}(\psi^2 + \chi^2)^{-3/4}.$$

Следовательно, $\omega(\chi_*) = 0$ при $\chi_* = i\psi$ (для верхней полуплоскости). Учитывая, что $v_\parallel(\chi_*) = v$ и $N = \frac{l_0\omega_0}{2v} = \frac{\psi\omega_0}{vB_0}$ преобразуем окончательно первый интеграл (3) к виду

$$\Delta P = (\Delta P)_m \cdot \sin\theta_0,$$

$$(\Delta P)_m = \frac{\pi}{2\cdot\Gamma(9/8)}\left(\frac{N}{2}\right)^{1/8} e^{-NI},$$

$$I = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - P^2(1-\xi^2)^{1/4}}},$$

что отличается от полученного в [5] и с точностью до переобозначений совпадает с полученным в [6]. С учетом сказанного выше граница адиабатичности плоского каспа может быть переписана в

следующем виде:

$$\frac{\left(\frac{N}{2}\right)^{8/9} e^{-NI}}{P^5} = \frac{3\Gamma(9/8)}{64\pi}. \qquad (5)$$

График положения границы адиабатичности, полученный по формуле (5), по данным работы [5] и с помощью описанной методики, показан на рис. 3, где $R = P^{-2}$ — максимальное магнитное пробочное отношение достигаемое частицей при продольных колебаниях.

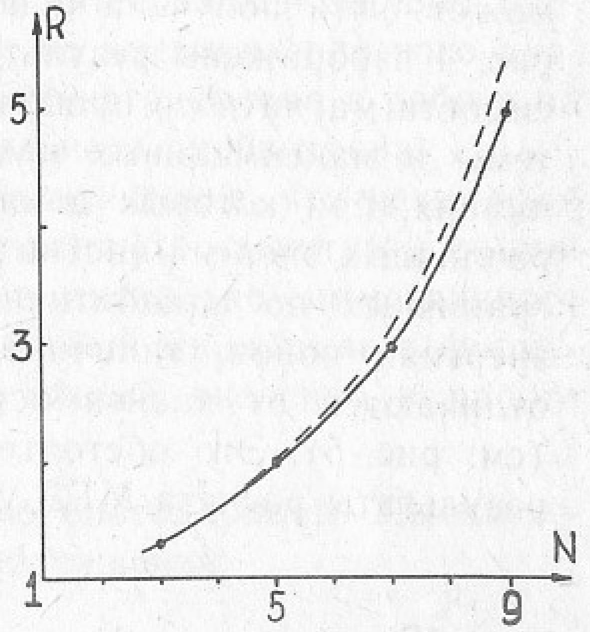


Рис. 3. Граница адиабатичности плоского каспа: сплошная линия — расчет по формуле (5); пунктирная линия — расчет по данным работы [5]; точки — численный расчет.

Заметим, что использование потоковых координат для вычисления $(\Delta P)_m$, предложенное в [6], позволяет теоретически обосновать численно полученный в работе [4] поправочный множитель к формуле границы адиабатичности для аксиально-симметричного (круглого) каспа, описанной в [5]. Для этого выпишем главный, экспоненциальный член $(\Delta P)_m$ в пределе $P \to 0$:

$$(\Delta P)_m \propto \exp\left[-\frac{\omega_0}{B_0 v}\,\mathrm{Im}(\chi_*)\right].$$

В поле $\vec{B} = (kx,\ ky,\ -2kz)$ имеем

$$\chi_* = -3(\psi/8)^{2/3}\cdot 2^{-1/3}\cdot(1 - i\sqrt{3}),$$

что дает

$$(\Delta P)_m \propto \exp\{-N/2^{1/3}\},$$

и, следовательно, $Q = 0.79$, что гораздо ближе к полученному в [4] $Q = 0.77$, чем предложенное в [5] $Q = 0.66$.

В качестве примера использования методики для расчета границы адиабатичности по реальному полю была использована магнитная система, предложенная в [7], в качестве альтернативного МГД-стабилизатора для установки АМБАЛ-М. Она имеет простую геометрию одиночного пробкотрона до некоторого $\psi = \psi_0$, которым мы и ограничимся в нашем рассмотрении. В этой же области $\psi < \psi_0$ плоскость минимумов поля на силовой линии совпадает с плоскостью симметрии и, следовательно, граница адиабатичности может быть получена с помощью описанной выше методики. На рис. 4 изображены результаты расчетов, представленные как зависимости магнитного пробочного отношения на силовых линиях системы и максимальных пробочных отношений на тех же силовых линиях, при которых движение частицы еще адиабатическое для различных энергий частиц в системе. Полученные зависимости для граничных по адиабатичности пробочных отношений $R_k(\psi)$ при энергиях ионов, типичных для реальных проектов, значительно отличаются от зависимости для естественной магнитной пробки (см. рис. 5). Это обстоятельство может существенно повлиять на результаты расчета МГД-устойчивости плазмы в такой системе.

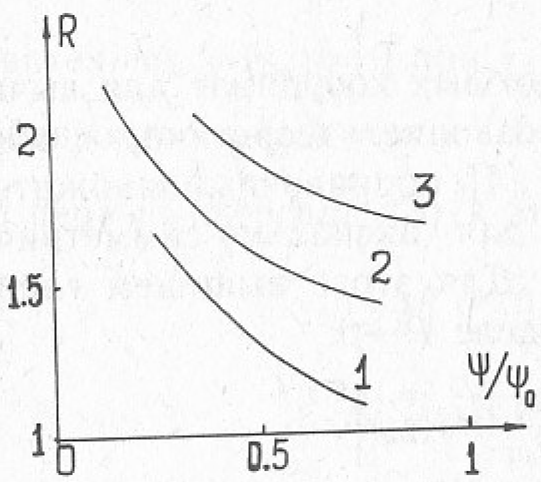


Рис. 4. Граница адиабатичности непараксиального пробкотрона для различных энергий ионов: *1* — $\varepsilon = 24$ КэВ; *2* — $\varepsilon = 6$ КэВ; *3* — $\varepsilon = 3$ КэВ.

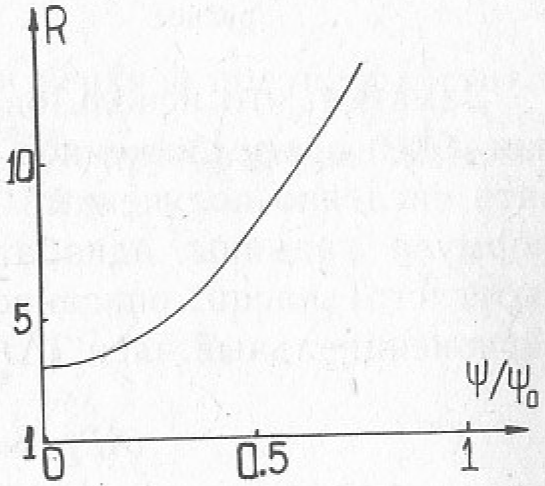


Рис. 5. Магнитное пробочное отношение непараксиального пробкотрона.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитие теории нелинейных колебаний и ее приложения к движению частиц в магнитных ловушках позволило создать достаточно надежные критерии, определяющие в пространстве параметров старта частицы области динамического и стохастического движения.Однако получение формульного выражения критерия представляет сложную теоретическую задачу. В результате области адиабатичности движения частиц были исследованы только в ряде модельных магнитных систем, имеющих простое аналитическое описание магнитного поля. Дополнение теоретического критерия численными расчетами входящих в него интегралов позволяет проводить исследования магнитных систем, не имеющих простого аналитического описания, что и было продемонстрировано в работе на примере магнитной системы непараксиального пробкотрона.

Дополнительно были получены аналитические уточнения для границ адиабатичности ранее исследованных магнитных систем плоского и круглого каспов. В случае аксиально-симметричного каспа это позволило обосновать поправочный множитель в формуле для границы адиабатичности, полученный численно в работе [4].

В заключение автор выражает свою благодарность Лысянскому П.Б. за многочисленные полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Димов Г.И., Лысянский П.Б.* Препринт ИЯФ СО АН СССР 86-102. Новосибирск, 1986.
2. *Рютов Д.Д., Ступаков Г.В.* Физика плазмы, 1986, т.12, с.1413.
3. *Чириков Б.В.* В сб.: Вопросы теории плазмы, 1984, т.13, с.3.
4. *Кузьмин С.В., Лысянский П.Б.* Препринт ИЯФ СО АН СССР 88-5. Новосибирск, 1988.
5. *Чириков Б.В.* Препринт ИЯФ СО АН СССР 85-86. Новосибирск, 1985.
6. *Howard J.E.* Phys. Pluids, 1971, v.14, N11, p.2378
7. *Кузьмин С.В., Лысянский П.Б.* Доклад на Звенигородской конференции по физике плазмы и УТС, 1988.

С.В. Кузьмин

Определение границы адиабатичности непараксиального пробкотрона

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 23 мая 1988 г.
Подписано в печать 20.06. 1988 г. МН 08409
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1,1 печ.л., 0,9 уч.-изд.л.
Тираж 180 экз. Бесплатно. Заказ № 86

Набрано в автоматизированной системе на базе фотонаборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и отпечатано на ротапринте Института ядерной физики СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.