

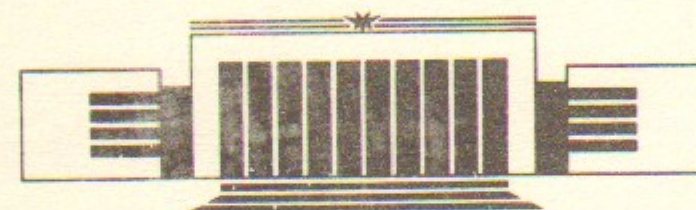


43
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

И.А. Котельников

**ВЛИЯНИЕ НЕСОВЕРШЕНСТВ
МАГНИТНОЙ СИСТЕМЫ
НА ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА
В ДЛИННЫХ СОЛЕНОИДАХ**

ПРЕПРИНТ 88-74



НОВОСИБИРСК

Влияние несовершенств
магнитной системы
на процессы переноса
в длинных соленоидах

И.А. Котельников

Институт ядерной физики
630090, Новосибирск 90, СССР

АННОТАЦИЯ

Исследуется равновесие плазмы и процессы поперечного переноса в соленоидальной части осесимметричных открытых ловушек при наличии дефектов магнитной системы, нарушающих аксиальную симметрию. Найдена форма магнитных поверхностей при произвольном β (отношении газокINETического давления плазмы к магнитному давлению). Построена классификация режимов неоклассического и резонансного переноса, возникающего вследствие нарушения аксиальной симметрии. Получены оценки коэффициентов переноса и указаны ограничения на величину дефектов магнитной системы, гарантирующие, что поперечный перенос является «классическим».

The Effect of Magnetic Field Errors on
the Transport Processes in the Long Solenoids

АБСТРАКТ

The equilibrium of plasma and the transverse transport in the solenoidal cell of the axisymmetric open traps is investigated. The shape of magnetic surfaces in plasma with arbitrary large β (the ratio of the plasma pressure to the magnetic one) is found. The classification of possible regimes of neoclassical and resonant transport is given. The transport coefficients are evaluated and the magnetic field errors limitations providing guarantee that the transport is not greater than the classical one are pointed out.

© Институт ядерной физики СО АН СССР

ВВЕДЕНИЕ

Многие типы открытых ловушек включают в себя как существенный элемент длинный соленоид с однородным магнитным полем. Таковы, в частности, амбиполярная и газодинамическая ловушки. В установках этого типа имеется реальная возможность обеспечить магнитогидродинамическую устойчивость плазмы в полностью аксиально-симметричной геометрии. Если бы аксиальная симметрия была идеальной, то отсутствовали бы каналы потерь, связанные с так называемым «неоклассическим» и «резонансным» переносом (см. обзор [1]). Однако выполнить магнитную систему длинного соленоида с идеальной точностью практически невозможно. Возникающий в этой связи вопрос о влиянии несовершенств магнитной системы на процессы переноса обсуждался ранее в докладе [2], где в сжатой форме были приведены результаты оценок, относящихся к одному из частных случаев. В настоящей работе задача о роли несовершенств магнитной системы рассмотрена с большей подробностью.

В первой части работы найдена равновесная конфигурация плазмы с произвольным β (отношением газокINETического давления к давлению магнитного поля). Во второй части дана классификация режимов неоклассической и резонансной диффузии и получены оценки коэффициентов переноса в соленоидальной части открытых ловушек.

1. РАВНОВЕСИЕ ПЛАЗМЫ ПРИ НАЛИЧИИ ДЕФЕКТОВ МАГНИТНОЙ СИСТЕМЫ

В установках реакторного масштаба между плазмой и магнитными обмотками (катушками) будут помещаться вакуумная камера, бланкет и система защиты обмоток от нейтронного потока. Поэтому радиус катушек по необходимости будет велик по сравнению с радиусом плазмы, и возмущения магнитного поля можно описать в параксиальном приближении, ограничившись несколькими первыми членами разложения магнитного потенциала $\chi(r, \varphi, z)$ по степеням радиуса r :

$$\chi = \int^z dz (H_v + f_0) - \frac{r^2}{4} \frac{d}{dz} (H_v + f_0) + \\ + rf_1 \cos \varphi + rg_1 \sin \varphi + \frac{r^2}{2} f_2 \cos 2\varphi + \frac{r^2}{2} g_2 \sin 2\varphi. \quad (1.1)$$

Здесь введена цилиндрическая система координат (r, φ, z) с осью z , совпадающей с геометрической осью «идеальной» системы; $H_v(z)$ — «идеальное» магнитное поле на геометрической оси. Функции $f_n(z)$, $g_n(z)$ соответственно значению индекса n описывают аксиально-симметричные ($n=0$), дипольные ($n=1$) и квадрупольные ($n=2$) искажения магнитного поля. Аксиально-симметричные искажения (типа гофрировки) превращают соленоидальную часть ловушки в цепочку связанных пробкотронов с близким к единице пробочным отношением. Дипольные искажения [3], представляющие собой перпендикулярное геометрической оси локально однородное магнитное поле, искривляют «магнитную» ось системы («ось плазмы») без нарушения круглой формы магнитных поверхностей. «Магнитная» ось, таким образом, не совпадает с геометрической осью системы. Наконец, квадрупольные искажения [3] приводят к сплющиванию магнитных поверхностей.

Ориентируясь на упомянутые две системы с хорошим продольным удержанием, для простоты будем считать магнитные пробки, запирающие плазму в соленоиде, бесконечно сильными, а саму плазму — изотропной. Тогда магнитные поверхности совпадают с поверхностями постоянного давления $p = \text{const}$ и постоянного удельного объема (см., например, [1])

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl}{B} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{B_z} = \text{const}, \quad (1.2)$$

где интеграл вычисляется вдоль силовых линий между пробками, что условно обозначено бесконечными пределами интегрирования. Форму магнитных поверхностей нетрудно найти из уравнения (1.2) в пределе малого давления плазмы ($\beta = 8\pi p / H_v^2 \ll 1$), так как тогда магнитное поле потенциально и близко к вакуумному $\vec{B}_v = \vec{\nabla} \chi$. Решим эту задачу при произвольном β .

Она заключается в совместном решении уравнения (1.2), уравнений Максвелла

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j}_{\perp} + \vec{j}_{\parallel}), \quad (1.3)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (1.4)$$

и уравнений

$$\vec{j}_{\perp} = \frac{c}{B^2} [\vec{B}, \vec{\nabla} p], \quad (1.5)$$

$$\vec{j}_{\parallel} = 2B \int_{-\infty}^{\chi(r)} \frac{dl}{B} (\vec{j}_{\perp} \cdot \vec{x}), \quad (1.6)$$

связывающих перпендикулярную и параллельную направлению \vec{B} компоненту тока $\vec{j} = \vec{j}_{\perp} + \vec{j}_{\parallel}$ с градиентом давления $\vec{\nabla} p$ и вектором кривизны \vec{x} силовых линий. Соотношения (1.5), (1.6) следуют из уравнений равновесия плазмы

$$\vec{\nabla} p = \frac{1}{c} [\vec{j}, \vec{B}] \quad (1.7)$$

и непрерывности тока $\text{div } \vec{j} = 0$. В уравнении (1.6) интегрирование проводится от любой из пробки (там $\vec{j}_{\parallel} = 0$, так как плазма электроизолирована от торцов установки) до текущей точки \vec{r} .

В случае «идеального» аксиально-симметричного поля $\vec{j}_{\parallel} = 0$ всюду, так как $\vec{j}_{\perp} \cdot \vec{x} = 0$. Учитывая также, что $B_{\varphi} = 0$ и $\vec{B} \cdot \vec{\nabla} p = 0$, и подставляя (1.5) в (1.3), преобразуем уравнения (1.3), (1.4) к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial z} B_r - \frac{\partial}{\partial r} B_z = \frac{4\pi}{B_z} \frac{\partial p}{\partial r},$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_r + \frac{\partial}{\partial z} B_z = 0.$$

Отсюда в параксиальном приближении

$$B_r = h_r^{(1)} = -\frac{1}{r} \int_0^r dr r \frac{\partial}{\partial z} B_0, \quad B_0 = (H_v^2 - 8\pi p)^{1/2},$$

$$B_z = B_0 + h_z^{(2)}, \quad h_z^{(2)} = \frac{1}{B_0} \int_0^r dr B_0 \frac{\partial}{\partial z} h_r^{(1)}. \quad (1.8)$$

Введем обозначение $\rho(r_0, z)$ для радиуса r силовой линии, проходящей в некоторой выбранной (медианной) плоскости $z=0$ на расстоянии r_0 от геометрической оси z . Обратив уравнение силовой линии $r=\rho(r_0, z)$, можно выразить r_0 через r и z : $r_0=r_0(r, z)$. Нетрудно показать, что

$$\frac{\partial r}{\partial r_0} = \frac{\partial}{\partial r_0} \rho(r_0, z) = \frac{1}{\partial r / \partial r_0} \approx \frac{r_0}{\rho} \frac{B_0(r_0, z)}{B_0(\rho, 0)}.$$

Формулы (1.8) пригодны для описания аксиально-симметричного искажения f_0 , если заменить $H_v(z)$ на $H_v(z) + f_0(z)$.

Переходя к рассмотрению аксиально-несимметричных искажений, следует учесть, что они малы и поэтому достаточно найти поправку к магнитному полю \vec{b} , линейную по искажению вакуумного поля. В таком линейном приближении произвольное искажение магнитного поля является суперпозицией искажений различных типов, каждое из которых можно вычислять по отдельности. Примем также во внимание, что в длинных системах масштаб корреляции искажений l мал как по сравнению с длиной соленоидального участка L , так и по сравнению с длиной пробок $L_m \ll L$. Это позволит распространить результат вычисления \vec{b} на участке соленоидального поля на припробочную область и в итоге разделить решение самосогласованных задач об определении магнитного поля и равновесия плазмы.

Проведем вычисления на примере искажений, которые в вакуумном случае описываются функциями $f_n(z)$. Для ортогональных искажений во всех последующих формулах следует заменить $f_n(z)$ на $g_n(z)$ и $n\varphi$ на $n\varphi - \pi/2$. Параксиальное разложение магнитного

поля при произвольном β будем искать в следующем виде:

$$B_r = h_r^{(1)} + b_r^{(1)} \cos n\varphi,$$

$$B_\varphi = -b_\varphi^{(1)} \sin n\varphi, \quad (1.9)$$

$$B_z = B_0 + h_z^{(2)} + (b_z^{(0)} + b_z^{(2)}) \cos n\varphi,$$

причем при $\beta=0$ $b_r^{(1)} = b_\varphi^{(1)} = f_n(z) r^{n-1}$, $b_z^{(0)} = 0$, $b_z^{(2)} = \frac{r^n}{n} \frac{d}{dz} f_n(z)$.

Верхний индекс в скобках у функций \vec{b} и ξ (см. (1.10)) указывает порядок малости по параметру r/l в отличие от аналогичного индекса у компонент $h_r^{(1)}$, $h_z^{(2)}$, указывающего порядок малости по параметру r/L_m .

При наличии малых искажений магнитные поверхности мало отличаются от «идеальных». Если $a = \rho(a, 0)$ — средний радиус («метка») магнитной поверхности в сечении $z=0$, то расстояние от оси до произвольной точки этой поверхности есть

$$r_\rho(a, \varphi, z) = \rho(a, z) + \xi^{(0)}(a, z) \cos n\varphi, \quad (1.10)$$

где $|\xi^{(0)}| \ll \rho$. Давление плазмы произвольным образом распределено по магнитным поверхностям, т. е. $p = p(a)$, или в другой записи

$$p = p(r_0) - p' \frac{\partial r_0}{\partial r} \xi^{(0)}(r_0, z) \cos n\varphi, \quad (1.11)$$

где $p' = \frac{d}{dr_0} p(r_0)$, а r_0 связан с r, z уравнением $r = \rho(r_0, z)$. Вычислив градиент давления

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial r_0}{\partial r} p' - \frac{\partial r_0}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r_0} \left(p' \frac{\partial r_0}{\partial r} \xi^{(0)} \right) \cos n\varphi,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{n}{r} \frac{\partial r_0}{\partial r} p' \xi^{(0)} \sin n\varphi, \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial r_0}{\partial z} p' - \frac{\partial r_0}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r_0} \left(p' \frac{\partial r_0}{\partial r} \xi^{(0)} \right) \cos n\varphi - p' \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial r_0}{\partial r} \xi^{(0)} \right) \cos n\varphi,$$

из уравнения $\vec{B} \cdot \vec{\nabla} p = 0$ (см. (1.7)) получим

$$\frac{\partial r_0}{\partial z} = -\frac{\partial r_0}{\partial r} \frac{h_r^{(1)}}{B_0 + h_z^{(2)}}, \quad (1.13a)$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial r_0}{\partial r} \xi^{(0)} \right) = \frac{\partial r_0}{\partial r} \frac{b_r^{(1)}(B_0 + h_z^{(2)}) - h_r^{(1)}(b_z^{(0)} + b_z^{(2)})}{(B_0 + h_z^{(2)})^2}. \quad (1.13b)$$

Здесь и ниже d/dz означает дифференцирование при постоянном r_0 в отличие от производной $\partial/\partial z$ при постоянном r . Исключив в (1.12) производные по z с помощью этих соотношений и подставив затем $\vec{\nabla} p$ (1.5), нетрудно найти \vec{j}_\perp :

$$j_{\perp r} = \frac{cp' \frac{\partial r_0}{\partial r}}{(B_0 + h_z^{(2)})^2 + (h_r^{(1)})^2} \left\{ \frac{b_\varphi^{(1)} h_r^{(1)}}{B_0 + h_z^{(2)}} - \frac{n}{r} \xi^{(0)} (B_0 + h_z^{(2)}) \right\} \sin n\varphi,$$

$$j_{\perp \varphi} = \frac{cp'}{B_0 + h_z^{(2)}} \frac{\partial r_0}{\partial r} - \frac{c}{B_0 + h_z^{(2)}} \frac{\partial r_0}{\partial r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r_0} \left(p' \frac{\partial r_0}{\partial r} \xi^{(0)} \right) + p' \frac{b_z^{(0)} + b_z^{(2)}}{B_0 + h_z^{(2)}} \right\} \cos n\varphi,$$

$$j_{\perp z} = \frac{cp' \frac{\partial r_0}{\partial r}}{(B_0 + h_z^{(2)})^2 + (h_r^{(1)})^2} \left\{ \frac{n}{r} \xi^{(0)} h_r^{(1)} + b_\varphi^{(1)} \right\} \sin n\varphi. \quad (1.14)$$

Для продольной составляющей $\vec{j}_\parallel = j_\parallel \cdot \vec{B}/B$ после подстановки

$$\vec{x} \approx \frac{d}{dz} \left(\frac{h_r^{(1)}}{B_0} + \frac{b_r^{(1)}}{B_0} \cos n\varphi, -\frac{b_\varphi^{(1)}}{B_0} \sin n\varphi, 0 \right)$$

в (1.6) и интегрирования по частям получается следующее выражение:

$$j_\parallel = -2j_{\perp z} + 2cB_0 \int_{-\infty}^z \frac{dz}{B_0} \left\{ h_r^{(1)} \frac{d}{dz} \left(\frac{n \xi^{(0)}}{r B_0^2} \frac{\partial r_0}{\partial r} p' \right) + b_\varphi^{(1)} \frac{d}{dz} \left(\frac{p'}{B_0^2} \frac{\partial r_0}{\partial r} \right) \right\}. \quad (1.15)$$

При $l \ll L_m$ в (1.15) можно оставить только первое слагаемое, пренебрегая тем самым частью продольного тока, втекающей на соле-ноидальный участок из припробочных областей. Эта часть в $(L_m/l)^{1/2}$ раз меньше*, чем $j_{\perp z}$. С той же точностью можно считать, что \vec{j}_\parallel направлен вдоль оси z , и отбросить в аксиально-несимметричной части поперечного тока (1.14) слагаемые, содержащие $z_r^{(1)}$ и $h_z^{(2)}$. После этой операции уравнения Максвелла приобретают следующий вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} B_z - \frac{\partial}{\partial z} B_\varphi = -\frac{4\pi p' \frac{\partial r_0}{\partial r}}{B_0} \frac{n}{r} \xi^{(0)} \sin n\varphi,$$

* В отличие от $j_{\perp z}$ она не является осциллирующей случайным образом функцией координаты z . Поэтому поле, создаваемое этой частью j_\parallel , неизменно по направлению и приводит к уходу силовых линий в $(L/L_m)^{1/2}$ раз большему, чем учтенные слагаемые. Однако поправки к магнитному полю, соответствующие уходу силовых линий, пропорциональны квадрату искажения вакуумного поля и поэтому малы.

$$\frac{\partial}{\partial z} B_r - \frac{\partial}{\partial r} B_z = \frac{4\pi p'}{B_0 + h_z^{(2)}} \frac{\partial r_0}{\partial r} - \frac{4\pi}{B_0} \frac{\partial r_0}{\partial r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r_0} \left(p' \frac{\partial r_0}{\partial r} \xi^{(0)} \right) + \frac{b_z^{(0)} + b_z^{(2)}}{B_0} p' \right\} \cos n\varphi, \quad (1.16)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_\varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} B_r = \frac{4\pi p' \frac{\partial r_0}{\partial r}}{B_0} b_\varphi^{(1)} \sin n\varphi,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} B_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} B_z = 0.$$

Используя разложение (1.9), отделяя в (1.16) слагаемые одинакового порядка и учитывая, что дифференцирование по z повышает порядок малости на 1, получаем:

$$-\frac{n}{r} b_z^{(0)} = \frac{n}{r} \xi^{(0)} \frac{\partial}{\partial r} B_0, \quad (1.17a)$$

$$-\frac{\partial}{\partial r} b_z^{(0)} = \frac{1}{B_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(\xi^{(0)} B_0 \frac{\partial}{\partial r} B_0 \right) + \frac{b_z^{(0)}}{B_0} \frac{\partial}{\partial r} B_0, \quad (1.17б)$$

$$-\frac{n}{r} b_z^{(2)} + \frac{\partial}{\partial z} b_\varphi^{(1)} = 0, \quad (1.17в)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} b_r^{(1)} - \frac{\partial}{\partial r} b_z^{(2)} = \frac{b_z^{(2)}}{B_0} \frac{\partial}{\partial r} B_0, \quad (1.17г)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} r b_\varphi^{(1)} - n b_r^{(1)} = -b_\varphi^{(1)} \frac{r}{B_0} \frac{\partial}{\partial r} B_0, \quad (1.17д)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} r b_r^{(1)} - n b_\varphi^{(1)} + r \frac{\partial}{\partial z} b_z^{(0)} = 0. \quad (1.17ж)$$

К этой системе уравнений нужно добавить соотношение (1.13б):

$$b_r^{(1)} = B_0 \frac{\partial r}{\partial r_0} \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial r_0}{\partial r} \xi^{(0)} \right). \quad (1.17з)$$

Может показаться, что избыток уравнений (7 на 5 неизвестных: $b_r^{(1)}$, $b_\varphi^{(1)}$, $b_z^{(0)}$, $b_z^{(2)}$, $\xi^{(0)}$) есть следствие того, что в уравнении магнитной поверхности (1.10) пропущено слагаемое второго порядка по параметру r/l и $\xi^{(0)}$ следует заменить на $\xi^{(0)} + \xi^{(2)}$. Однако такая замена приводит всего лишь к переопределению $\xi^{(0)}$, $b_z^{(0)}$ и $b_z^{(2)}$, тогда как только и имеющие реальный смысл величины $\xi^{(0)} + \xi^{(2)}$ и $b_z^{(0)} + b_z^{(2)}$ остаются неизменными. Два из уравнений (1.17) в действительности являются следствием остальных пяти. Уравнение

(1.17б) обращается в тождество после подстановки в него $b_z^{(0)}$ из (1.17а), а уравнение (1.17г) после подстановки $b_z^{(2)}$ из (1.17в) превращается в производную по z от (1.17д) (так как в рассматриваемом приближении $\frac{\partial}{\partial z} B_0 = 0$ и $\frac{\partial r_0}{\partial z} = 0$). Нетрудно видеть, что через $b_r^{(1)}$ можно выразить все остальные неизвестные функции:

$$\begin{aligned} b_\varphi^{(1)} &= \frac{B_0}{n} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{b_r^{(1)}}{B_0}, \\ b_z^{(2)} &= \frac{r}{n} \frac{\partial}{\partial z} b_\varphi^{(1)}, \\ \xi_0^{(0)} &= \frac{\partial r}{\partial r_0} \left\{ \xi_0^{(0)} + \int_0^z dz \left(\frac{\partial r_0}{\partial r} \frac{b_r^{(1)}}{B_0} \right)_{r=\rho(r_0, z)} \right\}, \\ b_z^{(0)} &= -\xi_0^{(0)} \frac{\partial}{\partial r} B_0, \end{aligned} \quad (1.18)$$

где $\xi_0^{(0)}$ — неопределенная пока функция от $r_0 \approx a$, а $b_r^{(1)}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r} r B_0^2 \frac{\partial}{\partial r} r \frac{b_r^{(1)}}{B_0} = n^2 B_0 b_r^{(1)}, \quad (1.19)$$

причем $b_r^{(1)}$ ограничено при $r \rightarrow 0$ и $b_r^{(1)} \rightarrow r^{n-1} f_n(z)$ при $r \rightarrow \infty$.

В качестве примера рассмотрим плазму с резкой границей, предполагая, что давление плазмы постоянно по ее сечению, т. е. $B_0(r, z) = \sqrt{1-\beta} H_v(z)$ при $r < R(z)$ и $B_0(r, z) = H_v(z)$ при $r > R(z)$, где $R(z) = R(0) [H_v(0)/H_v(z)]^{1/2}$ — радиус плазмы. Граничные условия на поверхности плазмы легко получить непосредственно из уравнения (1.19), интегрируя его по тонкому приповерхностному слою:

$$\left\{ B_0^2 \frac{\partial}{\partial r} r \frac{b_r^{(1)}}{B_0} \right\} = 0, \quad \left\{ \frac{b_r^{(1)}}{B_0} \right\} = 0, \quad (1.20)$$

где фигурные скобки обозначают разность окаймленных ими величин по обе стороны от границы. Первое условие в (1.20) означает непрерывность $B_0 b_\varphi^{(1)}$.

При $\frac{\partial}{\partial r} B_0 = 0$ общим решением уравнения (1.19) является ком-

бинация $C(z)r^{n-1} + \frac{D(z)}{r^{n+1}}$. Функции $C(z)$, $D(z)$ внутри и вне плазмы подбираются так, чтобы были выполнены граничные условия при $r=0$, $r=R(z)$ и $r \rightarrow \infty$:

$$b_r^{(1)} = f_n(z) r^{n-1} \begin{cases} \frac{2\sqrt{1-\beta}}{2-\beta}, & r < R(z), \\ 1 + \frac{\beta}{2-\beta} \left(\frac{R(z)}{r} \right)^{2n}, & r > R(z). \end{cases} \quad (1.21)$$

Возвращаясь к случаю плазмы с произвольным радиальным профилем давления, полезно указать решение при $\beta \ll 1$:

$$b_r^{(1)} = f_n(z) r^{n-1} \left[1 - \frac{1}{r^{2n}} \int_0^r dr \frac{r^{2n}}{B_0} \frac{\partial}{\partial r} B_0 \right]. \quad (1.22)$$

Чтобы найти единственную оставшуюся неизвестной функцию $\xi_0^{(0)}(a)$, нужно вычислить интеграл (1.2) вдоль силовой линии, представив ее уравнение в форме (1.10):

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} dz [B_0 + h_z^{(2)} + (b_z^{(0)} + b_z^{(2)}) \cos n\varphi]_{r=r_\rho(a, \varphi, z)}^{-1},$$

и потребовать, чтобы получающаяся таким образом функция $U(a, \varphi)$ не зависела от φ . После несложных преобразований условие $\frac{\partial}{\partial \varphi} U = 0$ сводится к уравнению

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{dz}{B_0^2} \left[\frac{\partial h_z^{(2)}}{\partial r} \left(\xi_0^{(0)} + \int_0^z dz' \frac{b_r^{(1)}}{B_0} \frac{\partial r_0}{\partial r} \right) + \frac{r}{n^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(B_0 \frac{\partial}{\partial r} r \frac{b_r^{(1)}}{B_0} \right) \right] = 0, \quad (1.23)$$

где интеграл вычисляется по траектории $r = \rho(a, z)$. Нетрудно проверить, что последним слагаемым в подынтегральном выражении можно пренебречь. Оставшиеся члены пропорциональны $\frac{\partial}{\partial r} h_z^{(2)}$ и поэтому равны нулю на участке однородного поля (см. (1.8)). С другой стороны, при $L_m \ll L$ изменением функции

$$\int_0^z dz' \frac{b_r^{(1)}}{B_0} \frac{\partial r_0}{\partial r}$$

в припробочной области также можно пренебречь, так как (для случайной зависимости $b_r^{(1)}$ от z) оно в $(L/L_m)^{1/2}$ меньше величины этой функции на концах соленоидального участка $z = \pm L/2$. Если к тому же «идеальные» пробки одинаковы, то

$$\xi_0^{(0)} = -\frac{1}{2} \left\{ \int_0^{L/2} dz \left(\frac{b_r^{(1)}}{B_0} \frac{\partial r_0}{\partial r} \right)_{r=\rho(a,z)} - \int_{-L/2}^0 dz \left(\frac{b_r^{(1)}}{B_0} \frac{\partial r_0}{\partial r} \right)_{r=\rho(a,z)} \right\}. \quad (1.24)$$

Соотношение (1.24) завершает решение задачи об определении магнитного поля и равновесия плазмы с произвольно большим β . Из него следует, что в плазме с резкой границей смещение и сплющивание магнитных поверхностей пропорционально $(1-\beta/2)^{-1}$ (см. (1.21)) и в пределе $\beta \rightarrow 1$ в 2 раза больше, чем при $\beta \ll 1$. Таким образом, увеличение β не приводит к катастрофической порче равновесной конфигурации. Этот вывод остается в силе и в случае произвольного радиального профиля давления плазмы.

2. НЕОКЛАССИЧЕСКИЙ И РЕЗОНАНСНЫЙ ПЕРЕНОС

Несовершенства магнитной системы превращают первоначально однородное магнитное поле длинного соленоида в цепочку неглубоких, слегка изогнутых и сплюснутых пробкотронов. Дрейфовые блуждания частиц в искривленном магнитном поле приводят к их уходу с исходной магнитной поверхности и возникновению эффектов типа резонансной или неоклассической диффузии (см. обзор [1]). Поэтому диффузионные потери плазмы даже при наличии весьма малых искажений могут стать больше, чем в процессах «классического» переноса, характеризующегося тем, что за один «акт рассеяния» частица смещается на расстояние порядка ларморовского радиуса. Поскольку преимущество осесимметричных открытых ловушек перед прочими заключается как раз в малости поперечных потерь, естественно потребовать, чтобы дефекты магнитной системы не приводили к возрастанию коэффициентов

поперечного переноса выше их «классических» значений. Именно, потребуем, чтобы коэффициент неоклассической и резонансной температуропроводности (примерно равный коэффициенту диффузии) был не больше коэффициента «классической» температуропроводности*) $\chi^{cl} \sim r_L^2 \nu$, где ν — частота рассеяния, r_L — ларморовский радиус тепловых частиц (электронов или ионов). Указанный критерий удобно детализировать в виде ограничений на безразмерные среднеквадратичные отклонения B_ψ и B_z от средних значений азимутальной ($\langle B_\psi \rangle = 0$) и продольной ($\langle B_z \rangle = B_0$) компонент магнитного поля:

$$b_\perp = \langle \left(\frac{B_\psi}{B_0} \right)^2 \rangle^{1/2} \sim \frac{I_n}{B_0} \left(\frac{R}{l} \right)^{n-1}, \quad n=1,2, \quad (2.1)$$

$$b_\parallel = \langle \left(\frac{B_z}{B_0} - 1 \right)^2 \rangle^{1/2} \sim \frac{R}{l} b_\perp + \frac{I_0}{B_0},$$

где R — радиус плазмы. Полезно отметить, что $1+b_\parallel$ есть среднее пробочное отношение цепочки пробкотронов на соленоидальном участке ловушки.

При исследовании неоклассических процессов переноса достаточно проследить только за движением ларморовского центра частицы. Учет ларморовского вращения соответствует учету «классических» процессов. В дрейфовом приближении движение частицы складывается из движения вдоль силовой линии с продольной скоростью v_\parallel , градиентного, центробежного и электрического дрейфа:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = v_\parallel \frac{\vec{B}}{B} \pm \frac{v_\perp^2}{2\omega_B B^2} [\vec{B}, \nabla B] \pm \frac{v_\perp^2}{\omega_B B} [\vec{B}, \vec{\kappa}] + \frac{c}{B^2} [\vec{B}, \nabla \psi], \quad (2.2)$$

где $\omega_B = |e|B/mc$, верхний знак соответствует ионам, нижний — электронам, а электрический потенциал ψ , как и давление в изотропной плазме, зависит только от метки магнитной поверхности: $\psi = \psi(a)$, $\rho = \rho(a)$. Исключив из уравнений движения (2.2) градиент магнитного поля с помощью соотношения

$$\nabla_\perp \left(\rho + \frac{B^2}{8\pi} \right) = \frac{B^2}{4\pi} \vec{\kappa},$$

получим уравнение

*) Коэффициент классической диффузии ионов в $(m_i/m_e)^{1/2}$ раз меньше, чем χ_i^{cl} .

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \pm \frac{(v_{\perp}^2 + 2v_{\parallel}^2)}{2\omega_B \mathcal{B}} [\vec{B}, \vec{\kappa}] + \frac{c}{B^2} [\vec{B}, \vec{\nabla}\psi] \mp \frac{2\pi m c v_{\perp}^2}{|e| B^4} [\vec{B}, \vec{\nabla}p],$$

в котором только первое слагаемое описывает уход частицы с магнитной поверхности $a = \text{const}$, так как только оно имеет проекцию на нормаль $\vec{\nabla}a$. Поэтому удобно в цилиндрической системе координат (r, φ, z) вместо радиальной координаты r выбрать метку магнитной поверхности a . Тогда в соленоидальной части ловушки уравнения движения приобретают следующий вид:

$$\frac{da}{dt} = \mp \frac{v_{\perp}^2 + 2v_{\parallel}^2}{2\omega_B} \kappa_{\varphi}, \quad (2.3a)$$

$$a \frac{d\varphi}{dt} = \pm \frac{v_{\perp}^2 + 2v_{\parallel}^2}{2\omega_B} \kappa_r + \frac{c}{B} \left[\frac{d\psi}{da} \mp \frac{2\pi m v_{\perp}^2}{|e| B^2} \frac{dp}{da} \right], \quad (2.3b)$$

$$\frac{dz}{dt} = v_{\parallel}, \quad (2.3b)$$

где

$$\kappa_{\varphi} \approx \frac{d}{dz} \frac{B_{\varphi}}{B_0} \sim \frac{b_{\perp}}{l}, \quad \kappa_r \approx \frac{d}{dz} \frac{B_r}{B_0} \sim \frac{b_{\perp}}{l} + \frac{R b_{\parallel}}{l^2}$$

есть малая кривизна силовых линий, обусловленная дефектами магнитной системы.

Из-за наличия радиального электрического поля и радиальной неоднородности магнитного поля (в плазме с конечным β) азимутальная скорость $u = a \frac{d\varphi}{dt}$, как правило, значительно больше скорости радиального дрейфа $v_{dr} = \frac{da}{dt}$. Исключение составляет случай, когда электрический и магнитный дрейф (два последних слагаемых в (2.3б)) взаимно сокращаются. При обычном направлении градиентов электрического потенциала и давления, когда $\frac{d\psi}{da} < 0$ и $\frac{dp}{da} < 0$, сокращение невозможно для электронов и происходит для ионов с поперечной энергией $mv_{\perp}^2/2$, близкой к

$$\frac{mv_{\perp}^2}{2} = \frac{e}{4\pi} B^2 \frac{d\psi/da}{dp/da}. \quad (2.4)$$

Эта энергия порядка T_e/β , так как

$$\frac{d\psi}{da} \sim - \frac{T_e}{|e|R}, \quad \frac{dp}{da} \sim - \frac{\beta}{R} \frac{H_0^2}{8\pi}, \quad (2.5)$$

где T_e — температура электронов.

В. РЕЖИМ ВРАЩАТЕЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ

Оценим сначала вклад в поперечные потери тех частиц, которые, имея большую азимутальную скорость u беспрепятственно обходят (вращаются) вокруг оси плазмы. Наряду с электронами к этому сорту частиц относится большая часть ионов, для которых не существенно указанное выше сокращение. Быстрое азимутальное вращение, усредняя скорость радиального дрейфа v_{dr} , уменьшает размах радиальных блужданий. Поэтому потери по ионному каналу, как показано в следующем пункте Б, создаются в основном ионами с малой азимутальной скоростью, которые двигаются по «банановым» траекториям, не обходя вокруг оси плазмы. Впрочем, если температура ионов T_i мала по сравнению с T_e/β , сокращение азимутального дрейфа имеет место только для надтепловых ионов, которые при максвелловском распределении составляют экспоненциально малую (порядка $\exp(-T_e/\beta T_i)$) долю всех ионов. В этом случае как по электронному, так и по ионному каналу осуществляется режим вращательной диффузии. Переходя к его анализу, условимся не конкретизировать сорт частиц (ионы или электроны) и использовать единые обозначения, опуская индексы «i» и «e». Тогда

$$v_{dr} \sim \frac{r_L v_T}{l} b_{\perp}, \quad u \sim \frac{r_L v_T}{R} \zeta, \quad (2.6)$$

где v_T и $r_L = v_T/\omega_B$ — скорость и ларморовский радиус тепловых частиц, а

$$\zeta = \zeta_e \sim 1, \quad \zeta = \zeta_i \sim \max\left(\frac{R}{l} b_{\perp}, \frac{R^2}{l^2} b_{\parallel}, \frac{T_e}{T_i}, \beta\right), \quad (2.7)$$

соответственно, для электронов и ионов.

Наибольшее радиальное смещение с исходной магнитной поверхности испытывают частицы, имеющие настолько малую продольную скорость v_{\parallel} , что они заперты между локальными максимумами магнитного поля (локальными пробками), которые разби-

вают соленоидальный участок ловушки на цепочку пробкотронов:

$$v_{\parallel} < v_{tr} = v_{\perp} b_{\parallel}^{1/2} \sim v_T b_{\parallel}^{1/2}. \quad (2.8)$$

Действительно, поскольку знак кривизны в соседних пробкотронах нескоррелирован, радиальный дрейф, вообще говоря, меняет направление всякий раз, как частица проникает в другой пробкотрон, пролетая расстояние порядка его длины (порядка масштаба корреляции l). В отличие от пролетных у запертых частиц скорость радиального дрейфа изменяет направление только тогда, когда частица сделает примерно половину (если искажение дипольное) или четверть оборота (если квадрупольное) вокруг оси плазмы.

Дальнейшие рассуждения зависят от того, успеет ли запертая частица за один пролет между локальными пробками сделать половину (четверть) оборота вокруг оси плазмы. Оценивая время пролета как l/v_{tr} , находим, что угол поворота запертой частицы $(u/R)(l/v_{tr})$ равен $\delta\varphi/b_{\parallel}^{1/2}$, где

$$\delta\varphi \sim \frac{r_L l}{R^2} \zeta \quad (2.9)$$

есть угол поворота частицы с продольной скоростью v_{\parallel} порядка v_T . Если $l \sim 10^2$ см, $R \sim 10$ см, $r_{Li} \sim 1$ см, $\zeta_i \sim \zeta_e \sim 1$, то $\delta\varphi \sim 1$ для ионов и $\delta\varphi \sim 10^{-2}$ для электронов. Поэтому для ионов типичным является случай $\delta\varphi > b_{\parallel}^{1/2}$, а для электронов уже при небольшом искажении ($b_{\parallel} \gtrsim 10^{-4}$) оказывается, что $\delta\varphi < b_{\parallel}^{1/2}$.

В.1 Режим $\delta\varphi < b_{\parallel}^{1/2}$

В.1.1. Если частота рассеяния ν настолько мала, что за время пребывания в запертом состоянии b_{\parallel}/v частица успевает несколько раз обойти вокруг оси плазмы, т. е. $b_{\parallel}/v > R/u$, то размах радиальных блужданий равен расстоянию, на которое частица уходит с исходной магнитной поверхности за время обхода R/u :

$$\Delta a \sim v_{dr} \frac{R}{u} \sim r_L \frac{b_{\perp}}{\delta\varphi}. \quad (2.10)$$

Оценивая коэффициент температуропроводности χ как произведение $(\Delta a)^2$ на эффективную частоту рассеяния ν/b_{\parallel} и на долю запертых частиц $b_{\parallel}^{1/2}$, получаем

$$\chi \sim r_L^2 \nu \frac{b_{\perp}^2}{b_{\parallel}^{1/2} \delta\varphi^2} \quad \left[\nu < \frac{v_T}{l} b_{\parallel} \delta\varphi \right].$$

Удивительным образом оказывается, что поперечные потери возрастают при уменьшении b_{\parallel} вплоть до минимального возможного значения $b_{\parallel} \sim b_{\perp} R/l$ (см. (2.1)).

В.1.2. В случае $b_{\parallel}/v < R/u$ за время пребывания в запертом состоянии частица успевает сместиться с исходной поверхности на меньшее расстояние порядка $v_{dr} b_{\parallel}/v$. Соответственно уменьшаются поперечные потери:

$$\chi \sim \frac{r_L^2 v_T^2}{l^2 \nu} b_{\perp}^2 b_{\parallel}^{3/2} \quad \left[\frac{v_T}{l} b_{\parallel} \delta\varphi < \nu < \frac{v_T}{l} b_{\parallel}^{3/2} \right].$$

В квадратных скобках указан интервал, в котором справедлива полученная оценка. В данном случае, как и в некоторых других, смысл верхней границы интервала разъясняется в следующих пунктах.

В.1.3. Наконец, если частота рассеяния настолько велика, что тепловые частицы рассеиваются на угол порядка $b_{\parallel}^{1/2}$ быстрее, чем за один пролет между локальными пробками, т. е. $b_{\parallel}/v < l/v_{tr}$, то диффузионный поток создается в основном пролетными частицами (впрочем, при $\nu > b_{\parallel} v_{tr}/l$ деление на запертые и пролетные частицы теряет смысл). Роль эффективной частоты рассеяния в этом случае играет величина $\nu_{eff} \sim \nu (v_T/v_{\parallel})^2$, а основной вклад в диффузионный поток вносят частицы со скоростью v_{\parallel} такой, что $\nu_{eff}^{-1} \sim l/v_{\parallel}$, т. е. $v_{\parallel} \sim v_* = v_T (\nu l/v_T)^{1/3}$. Действительно, если $v_{\parallel} > v_*$, то радиальные блуждания частиц уменьшаются из-за сокращения радиальных смещений в соседних пробкотронах. Перемножая ν_{eff} , квадрат размаха блужданий $(v_{dr} l/v_*)^2$ и долю частиц v_*/v_T , эффективно участвующих в переносе, находим, что коэффициент температуропроводности не зависит от частоты рассеяния:

$$\chi \sim \frac{r_L^2 v_T}{l} b_{\perp}^2 \quad \left[\frac{v_T}{l} b_{\parallel}^{3/2} < \nu < \frac{v_T}{l} \right].$$

При $\nu > v_T/l$ неклассические эффекты несущественны, так как шаг классической диффузии r_L заведомо больше расстояния $r_L b_{\perp}$, на которое может сместиться частица с $v_{\parallel} \sim v_T$ за один пролет между локальными пробками.

В.2. Режим $\delta\varphi > b_{\parallel}^{1/2}$

В.2.1. При $\delta\varphi > b_{\parallel}^{1/2}$ запертые частицы совершают оборот вокруг оси плазмы быстрее, чем за один пролет между локальными максимумами магнитного поля. Если к тому же период оборота R/u меньше времени рассеяния в пролетные частицы b_{\parallel}/v , то диффузионные потоки оцениваются так же, как в режиме В.1.1:

$$\chi \sim r_L^2 v \frac{b_{\perp}^2}{b_{\parallel}^{1/2} \delta\varphi^2} \quad \left[v < \frac{v_T}{l} b_{\parallel}^{3/2} \right].$$

В.2.2. При $v/b_{\parallel} > v_{tr}/l$ наибольшие блуждания совершают частицы с продольной скоростью $v_{\parallel} \sim v_* = v_T (vl/v_T)^{1/3}$. Однако, в отличие от режима В.1.3 величину блужданий ограничивает вращение, а не рассеяние, т. е. $\Delta a \sim v_{dr} R/u$. Поэтому

$$\chi \sim v_{eff} (\Delta a)^2 \frac{v_*}{v_T} \sim \frac{r_L^2 v_T}{l \delta\varphi^2} \left(\frac{vl}{v_T} \right)^{2/3} b_{\perp}^2 \quad \left[\frac{v_T}{l} b_{\parallel}^{3/2} < v < \frac{v_T}{l} \min(1, \delta\varphi^3) \right],$$

где $v_{eff} \sim v (v_T/v_*)^2 \sim v_* / l$ — эффективная частота рассеяния, а v_*/v_T — доля частиц, совершающих наибольшие блуждания.

В.2.3. При $v_{eff} > u/R$, т. е. при $v > v_T \delta\varphi^3 / l$ размах блужданий ограничен рассеянием: $\Delta a \sim v_{dr} / v_{eff}$. Следовательно,

$$\chi \sim \frac{r_L^2 v_T}{l} b_{\perp}^2 \quad \left[\frac{v_T}{l} \delta\varphi^3 < v < \frac{v_T}{l} \right].$$

Интервал, где справедлива последняя оценка, исчезает, если $\delta\varphi > 1$, но это означает, что неоклассические эффекты существенны при частоте рассеяния ν , значительно меньшей, чем v_T/l (см. В.1.3).

Суммируя полученные оценки (рис. 1), можно утверждать, что $\chi/\chi^{cl} \leq b_{\perp}^2 / b_{\parallel}^{1/2} \delta\varphi^2$ при всех ν . Таким образом, условие

$$\frac{b_{\perp}^2}{b_{\parallel}^{1/2} \delta\varphi^2} < 1$$

гарантирует малость неоклассических и резонансных эффектов при любой частоте рассеяния. Отсюда при $\delta\varphi \sim 10^{-2}$ (электроны), $b_{\parallel} \sim b_{\perp} \frac{R}{l}$ и $\frac{R}{l} \sim 10^{-1}$ получаем ограничение $b_{\perp} < 10^{-3}$.

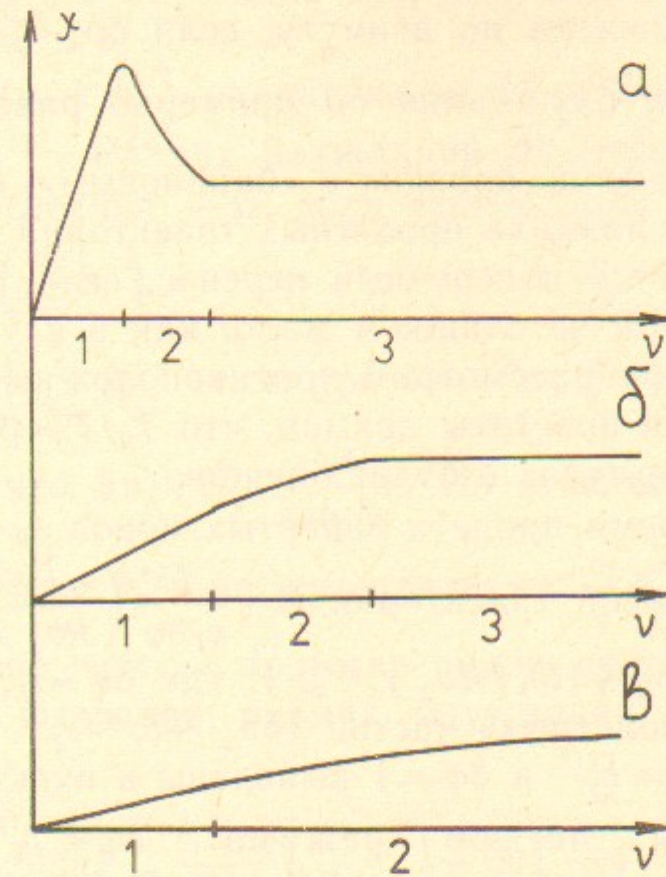


Рис. 1. Примерный график зависимости $\chi(\nu)$ в режиме вращательной диффузии: а) при $\delta\varphi < b_{\parallel}^{1/2}$; б) $b_{\parallel}^{1/2} < \delta\varphi < 1$; в) $\delta\varphi > 1$. Нумерация интервалов по частоте рассеяния ν соответствует младшему разряду нумерации пунктов В.

Б. БАНАНОВЫЙ РЕЖИМ ДИФфуЗИИ

Оценим теперь диффузионный поток ионов, имеющих малую азимутальную скорость вследствие сокращения электрического и магнитного дрейфа. Рассмотрим сначала движение запертых частиц ($v_{\parallel} < v_{tr}$). Если азимутальная скорость u при $a = a_*$ обращается в нуль для ионов, имеющих поперечную скорость $v_{\perp} = v_{\perp*}$, то у таких же ионов, находящихся на близком расстоянии $a = a_* + \delta a$, по порядку величины

$$u \sim \frac{r_L v_T}{R} \zeta \frac{\delta a}{R}$$

(для краткости индекс «i» опущен). Период обхода таких ионов вокруг оси плазмы R/u значительно больше, чем у ионов с $\delta v_{\perp} \equiv |v_{\perp} - v_{\perp*}| \sim v_{\perp}$. Если δa настолько мало, что формально $R/u > \delta a / v_{dr}$, движение иона ограничено по азимуту. Размах δa_b таких «банановых» (ограниченных по азимуту) траекторий определяется из условия $R/u \sim \delta a_b / v_{dr}$:

$$\delta a_b \sim R \left(\frac{R}{l} \frac{b_{\perp}}{\zeta} \right)^{1/2} \sim \left(\frac{r_L R b_{\perp}}{\delta\varphi} \right)^{1/2} \quad (2.11)$$

Траектория ограничена по азимуту, если $\delta v_{\perp} \ll \delta v_b \sim v_T \delta a_b / R$. При $\delta v_{\perp} > \delta v_b$ размах блужданий δa примерно равен $\frac{R^2 b_{\perp}}{l \xi} \frac{v_T}{\delta v_{\perp}}$. Для траекторий, достаточно близких к «банановым», δa , $k a$ и δa_b , значительно больше размаха пролетных траекторий (2.10). Соответственно увеличивается поперечный перенос, если, разумеется, число «банановых» ионов не слишком мало, как в случае $T_e/\beta \gg T_i$ (см. пункт В). Поэтому рассмотрим противоположный случай $T_e/\beta \ll T_i$ и, более того, для простоты примем, что $T_e/T_i \sim \beta \sim 1$. Тогда $\xi_i \sim 1$ и в дальнейших формулах ξ будет опущено.

Сравнивая время пролета запертых ионов $t_{ir} \sim l/v_{ir}$ с периодом обхода по банановой траектории $t_b \sim \frac{l}{v_T \delta \varphi} \left(\frac{l}{R b_{\perp}} \right)^{1/2}$, находим, что они равны при $\delta \varphi \sim (l b_{\parallel} / R b_{\perp})^{1/2} \geq 1$, где $\delta \varphi \sim r_L l / R^2$ — угол поворота «дважды пролетных» частиц ($\delta v_{\perp} \sim v_{\parallel} \sim v_T$). Другие характерные значения $\delta \varphi = b_{\parallel}^{1/2}$ и $\delta \varphi = 1$ выявлены в пункте В. Таким образом, возможны четыре режима: $\delta \varphi < b_{\parallel}^{1/2}$, $b_{\parallel}^{1/2} < \delta \varphi < 1$, $1 < \delta \varphi < (l b_{\parallel} / R b_{\perp})^{1/2}$, $\delta \varphi > (l b_{\parallel} / R b_{\perp})^{1/2}$. Первые два из них удобно рассматривать совместно.

Б.1. Режим $\delta \varphi < 1$

Б.1.1. При малой частоте рассеяния ν поперечные потери связаны, в основном, с диффузией запертых «банановых» ионов. Так как $\delta v_b < v_{ir}$, эффективная частота рассеяния иона из класса «банановых» частиц $\nu_{eff} = \nu / \min(b_{\parallel}, \delta v_b^2 / v_T^2)$ равна $\nu (v_T / \delta v_b)^2$. При $\nu_{eff} < t_b^{-1}$ размах блужданий равен «толщине» банановых траекторий δa_b . Учитывая, что доля «банановых» ионов примерно равна $(\delta v_b / v_T) (v_{ir} / v_T)$, получаем

$$\chi \sim \nu_{eff} \delta a_b^2 \frac{\delta v_b v_{ir}}{v_T^2} \sim \nu R^2 \left(\frac{R}{l} b_{\perp} b_{\parallel} \right)^{1/2} \left[\nu < \frac{v_T}{l} \delta \varphi \left(\frac{R}{l} b_{\perp} \right)^{3/2} \right].$$

Б.1.2. Если $\nu (v_T / \delta v_b)^2 > t_b^{-1}$, размах блужданий «банановых» ионов уменьшается пропорционально ν^{-1} . Следовательно, уменьшается их вклад в диффузионные потери. При $b_{\parallel} / \nu > t_{ir}$ диффузионный поток создается по-прежнему в основном запертыми частицами ($v_{\parallel} < v_{ir}$), но теми из них, траектории которых не ограничены по азимуту ($\delta v_{\perp} > \delta v_b$). Число таких частиц (т. е. δv_{\perp}) можно найти, приравняв частоту обхода $\Omega = \frac{r_L v_T}{R^2} \frac{\delta v_{\perp}}{v_T}$ к эффективной частоте рассеяния $\nu (v_T / \delta v_{\perp})^2$ на угол $\delta v_{\perp} / v_T$, если $\delta v_{\perp} / v_T < b_{\parallel}^{1/2}$, или

к эффективной частоте рассеяния ν / b_{\parallel} из запертых частиц в пролетные, если $\delta v_{\perp} / v_T > b_{\parallel}^{1/2}$.

В случае $\delta v_{\perp} / v_T < b_{\parallel}^{1/2}$ из равенства $\Omega \sim \nu (v_T / \delta v_{\perp})^2$ получаем $\delta v_{\perp} / v_T \sim (\nu l / v_T \delta \varphi)^{1/3}$. Размах блужданий δa равен v_{dr} / Ω , эффективная частота рассеяния — Ω , доля частиц — $\delta v_{\perp} v_{ir} / v_T^2$. Следовательно, $\chi \sim r_L v_T b_{\parallel}^{1/2} \left(\frac{R}{l} b_{\perp} \right)^2$.

В случае $\delta v_{\perp} / v_T > b_{\parallel}^{1/2}$ (т. е. при $\nu > \frac{v_T}{l} \delta \varphi b_{\parallel}^{3/2}$), приравнявая Ω к ν / b_{\parallel} , находим, что $\delta v_{\perp} / v_T \sim \frac{\nu l}{v_T b_{\parallel} \delta \varphi}$. Из этой оценки формально

следует, что при $\delta \varphi < b_{\parallel}^{1/2}$ на интервале $\nu < \frac{v_T}{l} b_{\parallel}^{3/2}$ величина δv_{\perp} может стать больше, чем v_T , но тогда нужно считать, что $\delta v_{\perp} \sim v_T$. Учитывая это и вычисляя размах блужданий v_{dr} / Ω , получаем окончательно

$$\chi \sim r_L v_T b_{\parallel}^{1/2} \left(\frac{R}{l} b_{\perp} \right)^2 \min \left(1, \frac{v_T b_{\parallel} \delta \varphi}{l \nu} \right) \left[\frac{v_T}{l} \delta \varphi \left(\frac{R}{l} b_{\perp} \right)^{3/2} < \nu < \frac{v_T}{l} b_{\parallel}^{3/2} \right].$$

Если $\delta \varphi < b_{\parallel}^{1/2}$, на интервале $\frac{v_T}{l} \delta \varphi b_{\parallel} < \nu < \frac{v_T}{l} b_{\parallel}^{3/2}$ коэффициент температуропроводности убывает пропорционально ν^{-1} и совпадает с оценкой χ в режиме вращательной диффузии (ср. В.1.2), т. е. эффект сокращения азимутального дрейфа не существует.

Б.1.3. При $\nu > \frac{v_T}{l} b_{\parallel}^{3/2}$ в процессы переноса эффективно включаются пролетные ионы ($v_{\parallel} > v_{ir}$), причем только те из них, время пролета которых l / v_{\parallel} не превышает период обхода по азимуту Ω^{-1} :

$$\frac{v_{\parallel}}{l} \sim \frac{r_L v_T}{R^2} \frac{\delta v_{\perp}}{v_T}. \quad (2.12)$$

Отсюда $v_{\parallel} / \delta v_{\perp} \sim \delta \varphi < 1$. Следовательно, $\nu_{eff} \sim \nu \left(\frac{v_T}{v_{\parallel}} \right)^2$. Приравнявая ν_{eff} к v_{\parallel} / l , получаем $v_{\parallel} = v_* \sim v_T (\nu l / v_T)^{1/3}$. Перемножая теперь ν_{eff} , $\delta a^2 \sim (v_{dr} l / v_*)^2$ и долю эффективно диффундирующих ионов $v_* \delta v_{\perp} / v_T^2$, находим

$$\chi \sim r_L v_T \left(\frac{R}{l} b_{\perp} \right)^2 \left(\frac{\nu l}{v_T} \right)^{1/3} \left[\frac{v_T}{l} b_{\parallel}^{3/2} < \nu < \frac{v_T}{l} \delta \varphi^3 \right],$$

где верхняя граница интервала ($v \sim \frac{v_T}{l} \delta\varphi^3$) получена из ограничения $\delta v_{\perp} / v_T < 1$. При $\delta\varphi < b_{\parallel}^{1/2}$ указанный интервал исчезает, а режим Б.1.2 состыкуется с режимом Б.1.4 при $v \sim \frac{v_T}{l} b_{\parallel}^{3/2}$ (ср. В.2.2 и В.2.3).

Б.1.4. При $v > \frac{v_T}{l} \delta\varphi^3$ осуществляется режим вращательной диффузии В.2.3, так как $\delta v_{\perp} \sim v_T$.

$$\text{Б.2. Режим } 1 < \delta\varphi < \left(\frac{l}{R} \frac{b_{\parallel}}{b_{\perp}}\right)^{1/2}$$

В отличие от случая $\delta\varphi < 1$, когда в интервале $v < \frac{v_T}{l} b_{\parallel}^{3/2}$ диффузионный поток создавался, главным образом, запертыми ионами, теперь это утверждение (вместе с полученными выше оценками) справедливо только при $v < \frac{v_T}{l} \frac{b_{\parallel}^{3/2}}{\delta\varphi^2}$:

Б.2.1.

$$\chi \sim v R^2 \left(\frac{R}{l} b_{\perp} b_{\parallel}\right)^{1/2} \left[v < \frac{v_T}{l} \delta\varphi \left(\frac{R}{l} b_{\perp}\right)^{3/2}\right],$$

Б.2.2.

$$\chi \sim r_L v_T b_{\parallel}^{1/2} \left(\frac{R}{l} b_{\perp}\right)^2 \left[\frac{v_T}{l} \delta\varphi \left(\frac{R}{l} b_{\perp}\right)^{3/2} < v < \frac{v_T}{l} \frac{b_{\parallel}^{3/2}}{\delta\varphi^2}\right].$$

Б.2.3. При $v > \frac{v_{\parallel}}{l} \frac{b_{\parallel}^{3/2}}{\delta\varphi^2}$ основной вклад в диффузионный поток вносят пролетные ионы. Действительно. Из равенства (2.12) теперь заключаем, что $\frac{v_{\parallel}}{\delta v_{\perp}} \sim \delta\varphi > 1$. Поэтому $v_{eff} \sim v \left(\frac{v_T}{\delta v_{\perp}}\right)^2$ (при $\delta\varphi < 1$ было $v_{eff} \sim v \left(\frac{v_T}{v_{\parallel}}\right)^2$). Приравнявая v_{eff} к $\frac{v_{\parallel}}{l} \sim \frac{\delta v_{\perp}}{l} \delta\varphi$, получаем:

$$\frac{\delta v_{\perp}}{v_T} \sim \left(\frac{v l}{v_T \delta\varphi}\right)^{1/3}, \quad \frac{v_{\parallel}}{v_T} \sim \left(\frac{v l}{v_T} \delta\varphi^2\right)^{1/3}.$$

Следовательно,

$$\chi \sim r_L v_T \left(\frac{R}{l} b_{\perp}\right)^2 \left(\frac{v l}{v_T} \delta\varphi^2\right)^{1/3} \left[\frac{v_T}{l} \frac{b_{\parallel}^{3/2}}{\delta\varphi^2} < v < \frac{v_T}{l}\right].$$

Полученная оценка сравнивается с Б.2.2 при $v \sim \frac{v_T}{l} \frac{b_{\parallel}^{3/2}}{\delta\varphi^2}$, когда $v_{\parallel} \sim v_T \left(\frac{v l}{v_T} \delta\varphi^2\right)^{1/3}$ приближается к v_{lr} .

$$\text{Б.3. Режим } \delta\varphi > \left(\frac{l}{R} \frac{b_{\parallel}}{b_{\perp}}\right)^{1/2}$$

Б.3.1. При $\delta\varphi > \left(\frac{l}{R} \frac{b_{\parallel}}{b_{\perp}}\right)^{1/2}$ за один пролет запертая частица успевает сделать более одного оборота по банановой траектории, так как $t_{lr} > t_b$. Поэтому интервал, на котором диффузионный поток создается запертыми «банановыми» ионами, определяется теперь условием $v \left(\frac{v_T}{\delta v_b}\right)^2 < t_{lr}^{-1}$, а не $v \left(\frac{v_T}{\delta v_b}\right)^2 < t_b^{-1}$, как в режиме Б.1 и Б.2:

$$\chi \sim v R^2 \left(\frac{R}{l} b_{\perp} b_{\parallel}\right)^{1/2} \left[v < \frac{v_T}{l} b_{\parallel}^{1/2} \left(\frac{R}{l} b_{\perp}\right)\right].$$

Б.3.2. Если $\frac{v_T}{l} b_{\parallel}^{1/2} \left(\frac{R}{l} b_{\perp}\right) < v < \frac{v_T}{l} \delta\varphi \left(\frac{R}{l} b_{\perp}\right)^{3/2}$, вклад запертых ионов, двигающихся по банановым траекториям, по-прежнему можно оценить по формуле Б.3.1, но вклад пролетных ионов оказывается больше. В самом деле, ион, летящий со скоростью $v_{\parallel} \sim l v \left(\frac{v_T}{\delta v_b}\right)^2 > v_{lr}$, за время пролета l/v_{\parallel} вдоль искажения магнитного поля (между локальными пробками), как и запертые частицы, смещается на расстояние порядка δa_b . Эффективная частота рассеяния $v (v_T / \delta v_b)^2$ для этих и запертых ионов одинакова, а число пролетных частиц в v_{\parallel} / v_{lr} раз больше. Следовательно,

$$\chi \sim \frac{R^2 l}{v_T} v^2 \left(\frac{R}{l} b_{\perp}\right)^{-1/2} \left[\frac{v_T}{l} b_{\parallel}^{1/2} \left(\frac{R}{l} b_{\perp}\right) < v < \frac{v_T}{l} \delta\varphi \left(\frac{R}{l} b_{\perp}\right)^{3/2}\right].$$

Б.3.3. При $v (v_T / \delta v_b)^2 > t_b^{-1}$ этот режим переходит в режим Б.2.3:

$$\chi \sim r_L v_T \left(\frac{R}{l} b_{\perp}\right)^2 \left(\frac{v l}{v_T} \delta\varphi^2\right)^{1/3} \left[\frac{v_T}{l} \delta\varphi \left(\frac{R}{l} b_{\perp}\right)^{3/2} < v < \frac{v_T}{l}\right].$$

Суммируя полученные оценки (рис. 2), нетрудно показать, что в режиме «банановой» диффузии

$$\frac{\chi}{\chi^{cl}} \leq \left(\frac{R}{r_L}\right)^2 \left(\frac{R}{l} b_{\perp} b_{\parallel}\right)^{1/2} \max \left(1, \delta\varphi \left(\frac{R}{l} \frac{b_{\perp}}{b_{\parallel}}\right)^{1/2}\right).$$

Потребовав, чтобы правая сторона этого неравенства была меньше единицы, получаем абсолютное ограничение на величину дефектов магнитной системы, гарантирующее, что поперечная теплопроводность является «классической» при любой частоте рассеяния. Например, для дейтериевой компоненты плазмы при

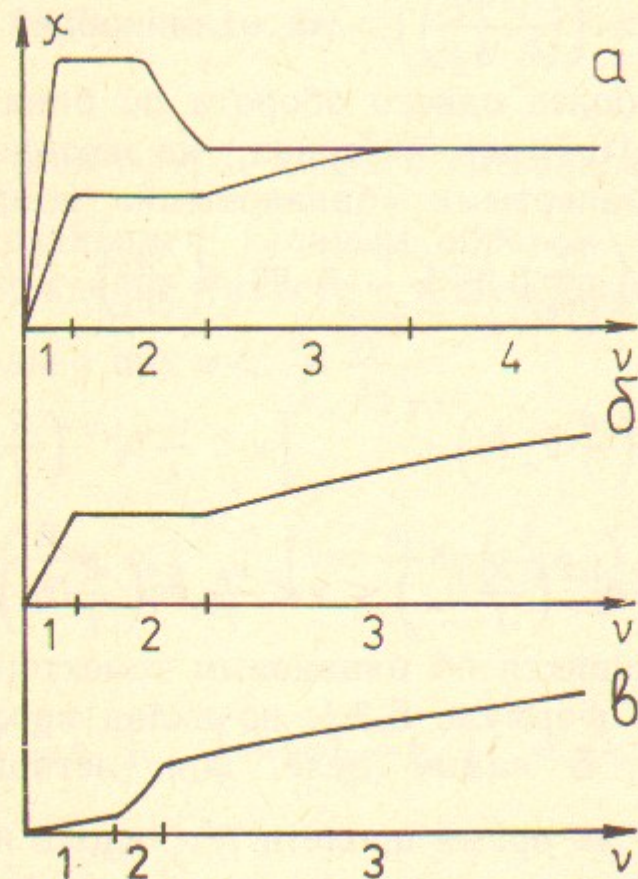


Рис. 2. Примерный график зависимости $\chi(\nu)$ в режиме банановой диффузии: а) верхняя кривая — при $\delta\varphi < b_{\parallel}^{1/2}$, нижняя — при $b_{\parallel}^{1/2} < \delta\varphi < 1$; б) $1 < \delta\varphi < \left(\frac{l}{R} \frac{b_{\parallel}}{b_{\perp}}\right)^{1/2}$; в) $\delta\varphi > \left(\frac{l}{R} \frac{b_{\parallel}}{b_{\perp}}\right)^{1/2}$. Нумерация интервалов по частоте рассеяния ν соответствует младшему ряду нумерации пунктов Б.

$R=10$ см, $l=10^2$ см, $T_i=10$ кэВ, $B>1$ Т получаем ограничение

$$\sqrt{b_{\perp} b_{\parallel}} < 0,1 \left(\frac{B}{1 \text{ Т}}\right)^{-2},$$

которое не кажется очень жестким даже при $B=3 \div 4$ Т. Однако коэффициент классической диффузии ионов (и электронов) в

$(m_i/m_e)^{1/2}$ раз меньше, чем χ_i^{cl} . Во столько же раз будет жестче ограничение на величину $\sqrt{b_{\perp} b_{\parallel}}$, если потребовать, чтобы дефекты магнитной системы не приводили к увеличению поперечных потерь частиц по сравнению с классическими.

Другой важный вывод заключается в том, что, увеличивая магнитное поле, далеко не во всех режимах неклассического и резонансного переноса удастся значительно уменьшить поперечные потери. Уменьшение может происходить медленнее, чем по закону B^{-2} , соответствующему классическому переносу. Необходимо уменьшать относительную величину искажений b_{\perp} .

Автор благодарен Д.Д. Рютову за постановку задачи и участие в ее решении на начальном этапе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рютов Д.Д., Ступаков Г.В. Вопросы теории плазмы, т.13/Под ред. Б.Б. Кадомцева. М.: Энергоатомиздат, 1984, с.74.
2. Kotel'nikov I.A., Mirnov V.V., Nagornij V.P., Ryutov D.D. Proc. Tenth Int. Conf. Plasma Phys. & Cont. Nucl. Fusion Research, IAEA, London, v.2, p.309.
3. Hooper E.B., Jr. Nucl. Technol./Fusion, v.3, 1983, p.137.

И.А. Котельников

**Влияние несовершенств
магнитной системы
на процессы переноса
в длинных соленоидах**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 9 марта 1988 г.
Подписано в печать 20.05. 1988 г. МН 08336
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2,2 печ.л., 1,8 уч.-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ № 74

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и
отпечатано на ротапринтере Института ядерной физики
СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*