

35

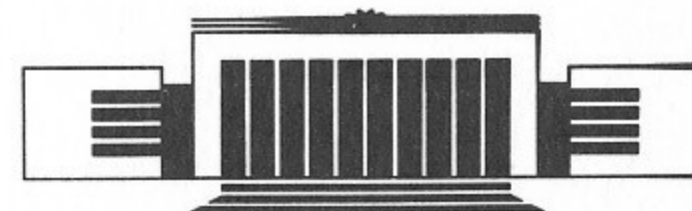
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР



С.В. Кузьмин, Г.В. Ступаков

**ИССЛЕДОВАНИЕ
МГД-УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ
В НЕПАРАКСИАЛЬНЫХ ПРОБКОТРОНАХ**

ПРЕПРИНТ 88-62



НОВОСИБИРСК

Исследование МГД-устойчивости плазмы
в непараксиальных пробкотронах

С.В. Кузьмин, Г.В. Ступаков

Институт ядерной физики
630090, Новосибирск 90, СССР

АННОТАЦИЯ

На основе энергетического принципа Крускала—Обермана исследована устойчивость плазмы относительно желобковых колебаний в двух конфигурациях аксиально-симметричного непараксиального магнитного поля. Первая конфигурация представляет собой приосевую область двух токовых витков, расположенных на расстоянии, равном радиусу витков (катушки Гельмгольца). Вторая конфигурация создается многовитковой магнитной системой и моделирует магнитное поле, получающееся обжатием магнитного потока идеально проводящей оболочкой. Проанализировано влияние на устойчивость распределения давления вдоль силовых линий. Показано, что дестабилизирующим фактором является рост, с радиусом, величины максимального магнитного поля на силовой линии характерный для «толстых» непараксиальных ловушек.

© Институт ядерной физики СО АН СССР

1. ВВЕДЕНИЕ

Распространенным способом стабилизации плазмы в разных типах открытых ловушек в настоящее время является использование квадрупольных пробкотронов с «минимумом B ». Однако ряд принципиальных недостатков, связанных с нарушением аксиальной симметрии в таких системах стимулировали в последнее время поиск осесимметричных открытых конфигураций магнитного поля, в которых плазма была бы устойчива по отношению к МГД-возмущениям (см., например, обзор [1]). Одним из перспективных направлений поиска является обращение к непараксиальным магнитным полям, характеризуемым тем, что поперечный размер плазмы в них сравним с масштабом изменения магнитного поля. Так, в работе [2] было показано, что с помощью непараксиального пробкотрона можно стабилизировать моду $m=1$, соответствующую смещению плазмы как целого, в длинной ловушке. В работах [3, 4] были рассмотрены конфигурации магнитного поля, которые позволяют обеспечить устойчивость резкой границы плазмы.

Настоящая работа продолжает развитие линии, заложенной в [2—4]. Основной упор в ней делается на исследование устойчивости плавных радиальных профилей давления в непараксиальных конфигурациях магнитного поля. Прежде всего нас интересует вопрос о том, можно ли разумным выбором распределения давления вдоль и поперек силовых линий добиться полной устойчивости плазмы по отношению ко всем желобковым возмущениям.

Дальнейший план изложения состоит в следующем. Во втором

разделе сформулированы выражения для потенциальной энергии Крускала-Обермана желобковых возмущений, а также приведены оценки снизу кинетического слагаемого в потенциальной энергии. Здесь же обсуждаются различные критерии устойчивости плазмы. Проблемы, возникающие при попытке отыскать устойчивые профили давления, иллюстрируются в разделе 3 на примере конфигурации пробкотрона с малым пробочным отношением, предложенной в [3]. Вследствие простой геометрии поля в этой задаче удастся далеко продвинуться аналитически. В четвертом разделе приведены результаты исследования устойчивости плазмы в пробкотроне с немалым пробочным отношением, полученные на основе численных расчетов. В пятом разделе содержится обсуждение полученных результатов.

2. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ЖЕЛОБКОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Для исследования устойчивости плазмы в непараксиальном магнитном поле наиболее адекватным является энергетический принцип Крускала-Обермана [5]. В пределе $\beta \ll 1$, когда возмущения в плазме являются потенциальными, энергию возмущения $W_{\text{КО}}$ удобно записать в следующем виде:

$$W_{\text{КО}} = \frac{1}{2} \int d\psi \varphi^2 \omega, \quad (1)$$

где плотность энергии ω задается выражением

$$\omega = \int \frac{d\chi}{r^2 B^4} \left[-\kappa r B \frac{\partial(p_{\parallel} + p_{\perp})}{\partial \psi} + \kappa^2 B \frac{\partial(p_{\parallel} + p_{\perp})}{\partial B} \right] + K; \quad (2)$$

$$K = - \int d\varepsilon d\mu \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \left(\int \frac{v_{\parallel}^2 + \mu B}{r B^2 v_{\parallel}} \kappa d\chi \right)^2 \left(\int \frac{d\chi}{B v_{\parallel}} \right)^{-1};$$

$\varphi(\psi)$ обозначает возмущение электростатического потенциала; ψ — магнитный поток внутри данной магнитной поверхности, играющий роль радиальной координаты; $f = f(\varepsilon, \mu, \psi)$ — функция распределения частиц, нормированная условием

$$n = \frac{1}{m} \int d\varepsilon d\mu \frac{B}{v_{\parallel}} f$$

(n — плотность частиц), а $\varepsilon = v^2/2$, $\mu = v_{\perp}^2/2B$. В формуле (2) роль

продольной координаты играет магнитный потенциал χ , $\vec{B} = \nabla \chi$, а интегрирование по χ ведется от пробки до пробки. Здесь и ниже под $\partial/\partial B$ подразумевается производная, взятая вдоль силовой линии (при фиксированном ψ).

Напомним, что энергетический принцип Крускала — Обермана выводится [5] в предположении, что

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right)_{\mu} < 0. \quad (3)$$

Это неравенство часто называют условием монотонности. Ниже оно будет предполагаться выполненным; тем самым из рассмотренных исключаются распределения давления, создаваемые плещущимися ионами (см. подробнее в [2]).

Кинетическое слагаемое в ω , куда явно входит функция распределения f , обозначено через K . В силу условия монотонности (3) оно положительно. Для того, чтобы избежать двукратного интегрирования (по переменным ε, μ) и тем самым упростить вычисление $W_{\text{КО}}$, полезно оценить K сверху и снизу в терминах давлений p_{\parallel} и p_{\perp} . Оценку сверху дает, например, энергия, вычисленная по модели Чу — Голдбергера — Лоу [6], в пренебрежении продольным смещением

$$W_{\text{КО}} \leq W_{\text{CGL}} = \frac{1}{2} \int d\psi \varphi^2 \int \frac{d\chi}{r B^4} \left[-\kappa r B \frac{\partial(p_{\parallel} + p_{\perp})}{\partial \psi} + \kappa^2 (4p_{\parallel} + 3p_{\perp}) \right]. \quad (4)$$

Однако для целей настоящей работы больший интерес представляет нижняя граница $W_{\text{КО}}$, поскольку ее положительность гарантирует устойчивость плазмы. Согласно работе Холла и Макнамары [7],

$$K \geq K_1 = \frac{\left(\int \frac{d\chi \kappa}{r B^3} \left[\frac{5}{2} (p_{\parallel} + p_{\perp}) - B \frac{\partial(p_{\parallel} + p_{\perp})}{\partial B} \right] \right)^2}{\frac{3}{2} \int \frac{d\chi}{B^2} \left(\frac{5}{2} p_{\parallel} - B \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial B} \right)}, \quad (5)$$

где $p_{\parallel} = (2p_{\perp} + p_{\parallel})/3$. Несколько более простое выражение можно получить, если воспользоваться методом, изложенным в [8]:

$$K \geq K_2 = - \frac{\left(\int \frac{d\chi \kappa}{r} \frac{\partial}{\partial B} \frac{p_{\perp}}{B^3} \right)^2}{\int \frac{d\chi}{B} \frac{\partial}{\partial B} \frac{p_{\perp}}{B^2}}, \quad (6)$$

Приведенные выше формулы позволяют для заданной магнитной конфигурации оценить $W_{\text{КО}}$, если известны функции $p_{\parallel}(\psi, B)$ и $p_{\perp}(\psi, B)$. Ниже мы будем считать, что распределение давления в ловушке имеет вид

$$p_{\parallel} + p_{\perp} = p_0(\psi) P\left(\frac{B}{B_m}\right), \quad (7)$$

где $B_m = B_m(\psi)$ обозначает максимальное магнитное поле на данной силовой линии. Функция P , удовлетворяющая условию $P(1) = 0$, задает профиль давления вдоль каждой силовой линии, а амплитуда $p_0(\psi)$ описывает, как меняется давление при переходе от одной силовой линии к другой. Заметим, что, в силу уравнения продольного равновесия,

$$\frac{\partial p_{\parallel}}{\partial B} = \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{B}, \quad (8)$$

задание суммы $p_{\parallel} + p_{\perp}$ позволяет однозначно определить каждое слагаемое. Так, например, из (7), (8) следует, что

$$p_{\parallel} = p_0 \frac{B^2}{B_m^2} \int_{B/B_m}^1 dx \frac{P(x)}{x^3}. \quad (9)$$

Подставляя (7) в (2), после простых преобразований можно записать ω в следующем виде:

$$\omega = -I_1 \frac{\partial p_0}{\partial \psi} + I_2 p_0 \frac{\partial \ln B_m}{\partial \psi} + K, \quad (10)$$

где

$$I_1 = \int \frac{d\chi}{rB^3} \kappa P, \quad (11)$$

$$I_2 = \frac{1}{B_m} \int \frac{d\chi}{rB^2} \kappa P',$$

а P' обозначает производную функции P по своему аргументу. Для типичных распределений давления, с которыми мы будем иметь дело, $P' < 0$, в соответствии с тем, что на силовой линии суммарное давление убывает с ростом магнитного поля.

Плазма будет устойчивой относительно любых возмущений, если ω всюду положительно. В этом случае мы будем говорить об абсолютной устойчивости плазмы. Другой критерий устойчивости,

который также обсуждается в настоящей работе, был введен в работе [2]. Он соответствует ситуации, когда изучаемый пробкотрон присоединен к длинному соленоиду и эффекты конечного ларморовского радиуса ионов делают единственно возможным смещение плазмы как целого (мода $m=1$). Тогда радиальная собственная функция ϕ пропорциональна $\psi^{1/2}$ [2] и подстановка $\phi^2 \propto \psi$ в (1) позволяет провести интегрирование по частям в первом слагаемом в (10), что дает

$$W_{\text{КО}} = \frac{1}{2} \int d\psi \phi^2 p_0 \tilde{\omega}, \quad (12)$$

$$\tilde{\omega} \equiv \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \psi I_1 + I_2 \frac{\partial \ln B_m}{\partial \psi} + K.$$

Если $\tilde{\omega}$ положительно в некотором интервале значений ψ , то любое распределение давления $p_0(\psi)$, равное нулю вне этого интервала, будет заведомо устойчиво по отношению к моде $m=1$. В этом случае мы, вслед за [2], будем называть область, где $\tilde{\omega} > 0$, кольцом устойчивости.

Наконец, упомянем еще об одном критерии устойчивости. Он относится к внешней границе плазмы, на которой p_0 обращается в нуль. Если на этой силовой линии $dp_0/d\psi$ отлично от нуля (очевидно, $dp_0/d\psi < 0$), то, как следует из (10), ω здесь будет положительно только при условии, что

$$I_1 > 0. \quad (13)$$

Таким образом, условие $I_1 > 0$ является критерием устойчивости внешней границы плазмы.

В следующем разделе мы применим выведенные критерии устойчивости к плазме, удерживаемой в пробкотроне, создаваемом катушками Гельмгольца.

3. ПРОБКОТРОН, СОЗДАВАЕМЫЙ КАТУШКАМИ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Рассмотрим пробкотрон, который создается двумя круговыми витками радиуса R с равными токами, расположенными на расстоянии L . Если L велико по сравнению с R , то расстояние между максимумами поля на оси фактически совпадает с L . Будем теперь сближать катушки. С уменьшением L расстояние между максиму-

мами поля также уменьшается и обращается в нуль при $L=R$ (катушки Гельмгольца). В этот момент оба максимума поля на оси сливаются, превращая минимум поля в центре системы в максимум. Однако на внеосевых силовых линиях по-прежнему сохраняется распределение магнитного поля, характерное для открытой ловушки, — локальный минимум B в экваториальной плоскости и два максимума B на некотором расстоянии от этой плоскости.

Если витки сблизить еще немного, то максимумы поля исчезнут не только на оси, но также в приосевой области, однако пробкотронное распределение поля сохранится на силовых линиях, несколько удаленных от оси. Таким образом, конфигурация магнитного поля, создаваемая катушками Гельмгольца, является пограничной (и в этом смысле типичной), поскольку она разделяет пробкотроны с односвязной областью удержания и ловушки, в которых приосевая область не заполнена плазмой.

Имея в виду сказанное выше, мы рассмотрим устойчивость плавных профилей давления плазмы, удерживаемой в приосевой области катушек Гельмгольца на расстояниях от оси, малых по сравнению с R . В этой области пробочное отношение k мало отличается от единицы, $k-1 \ll 1$. Как было показано в [3], здесь имеются относительно большие области благоприятной кривизны, которые позволяют обеспечить устойчивость внешней границы плазмы. Малость пробочного отношения в этой задаче позволяет далеко продвинуться аналитически.

Вблизи центра системы можно воспользоваться разложением магнитного поля в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} B_z &= B_0 - \tau \left(\frac{1}{3} z^4 - z^2 r^2 + \frac{1}{8} r^4 \right) \\ B_r &= \tau \left(\frac{2}{3} z^3 r - \frac{1}{2} z r^3 \right) \end{aligned} \quad (14)$$

где B_0 — поле в точке $r=z=0$, а $\tau = -\frac{1}{8} \partial^4 B / \partial z^4$ (производная вычисляется в начале координат). Для того, чтобы было легко следить за порядком малости величин, удобно считать положительный параметр τ формально малой величиной, отражающей близость точки r, z к началу координат. Уравнение силовой линии поля (14) задается выражением

$$r = r_0 + \frac{\tau}{2B_0} \left(\frac{1}{3} z^4 r_0 - \frac{1}{2} z^2 r_0^3 \right), \quad (15)$$

где r_0 — координата точки пересечения силовой линии с экваториальной плоскостью, а кривизна равна

$$\kappa \simeq \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2\tau}{B_0} \left(z^2 r_0 - \frac{1}{4} r_0^3 \right). \quad (16)$$

Пользуясь малостью пробочного отношения k , мы упростим выражения для оценок (5), (6) кинетического слагаемого K в потенциальной энергии (2). Для этого учтем, что в пробкотроне с малым пробочным отношением k продольное давление мало по сравнению с поперечным, $p_{\parallel} \sim (k-1)p_{\perp}$, что позволяет пренебречь величиной p_{\parallel} . Кроме того, заметим, что $\partial p_{\perp} / \partial B \sim p_{\perp} (B_m - B_{\min}) \gg \gg p_{\perp} / B$, поэтому всюду в (5), (6) достаточно оставить только производные от давления по B . В результате обе оценки (5), (6) сводятся к следующей:

$$K \geq \tilde{K} = -\frac{1}{r_0^2 B_0^3} \frac{\left(\int d\chi \kappa \frac{\partial p_{\perp}}{\partial B} \right)^2}{\int d\chi \frac{\partial p_{\perp}}{\partial B}} \simeq -\frac{p_0}{r_0^2 B_0^3} \frac{\left(\int dz \kappa P' \right)^2}{\int dz P'}. \quad (17)$$

Дальнейшие вычисления проведем в предположении, что функция P в соотношении (7) имеет вид

$$P = \left(1 - \frac{B}{B_m} \right)^n, \quad (18)$$

где показатель n характеризует скорость спада давления от центра к пробкам. Будем считать, что $n > 0,5$, поскольку в противном случае угловая функция распределения ионов имеет особенность на границе конуса потерь (см. Приложение).

Учитывая, что с нужной точностью в качестве модуля B можно взять величину B_z , легко найти, что максимальное поле на данной силовой линии равно

$$B_m = B_0 + \frac{5}{8} \tau r_0^4. \quad (19)$$

Подставляя (18), (19) в (10), (11), (17), переходя от интегрирования по χ к интегрированию по переменной $\zeta \equiv z/r_0$, $d\chi = B_0 r_0 d\zeta$, и учитывая, что $r \simeq r_0$, $B \simeq B_0$, выражение (10) можно преобразо-

вать к следующему виду:

$$\omega \geq \omega_1 = cr_0^{4n+1} \left(-ar_0 \frac{dp_0}{dr_0} + bp_0 \right), \quad (20)$$

где константы c , a , b задаются выражениями:

$$c = 3^n \cdot 2^{1-2n} B_0^{-(n+4)} \tau^{n+1},$$

$$a = \int_0^{\zeta_m} d\zeta uv^n, \quad (21)$$

$$b = -\frac{10}{3} n \int_0^{\zeta_m} d\zeta uv^{n-1} + \frac{8}{3} n \left(\int_0^{\zeta_m} d\zeta uv^{n-1} \right)^2 \left(\int_0^{\zeta_m} d\zeta v^{n-1} \right)^{-1},$$

$$u(\zeta) = \zeta^2 - \frac{1}{4}, \quad v(\zeta) = 1 - \frac{4}{3} \left(\zeta^2 - \frac{1}{3} \zeta^4 \right), \quad \zeta_m = \sqrt{\frac{3}{2}},$$

Графики зависимостей коэффициентов a и b от показателя n изображены на рис. 1. Как видно из этого рисунка, коэффициент a положителен при $n < 0,75$ и отрицателен при больших n , тогда как коэффициент b меняет знак с отрицательного на положительный при $n = 1,75$.

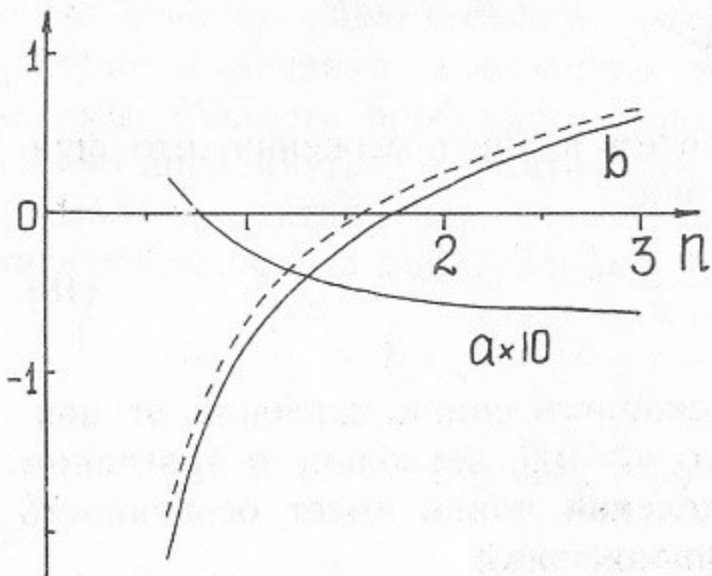


Рис. 1. Зависимости коэффициентов a и b от показателя n (сплошные линии). Пунктиром показан график величины b , вычисленной на основе точного выражения для кинетического члена K .

Обращает на себя внимание относительная малость величины a по сравнению с b .

Обсудим условия достижения абсолютной устойчивости плазмы в зависимости от величины и знаков коэффициентов a и b . Очевидно, что наиболее благоприятный для устойчивости случай соответствовал бы положительным a и b . Тогда, как следует из (20), любой профиль давления, в котором $p_0(r_0)$ растет не быстрее чем

$r_0^{b/a}$ (и тем более монотонно убывающие p_0), был бы устойчивым. Однако, как видно из рис. 1, в нашем случае a и b одновременно не являются положительными. В области $0,5 < n < 0,75$, где $a > 0$,

$b < 0$, абсолютная устойчивость достигается на профилю p_0 , убывающих с ростом r_0 быстрее чем $r_0^{-|b/a|}$. Такие профили являются неудовлетворительными, поскольку $p_0 \rightarrow \infty$ при $r_0 \rightarrow 0$. Здесь надо отметить, что само по себе обращение функции p_0 в бесконечность при $r_0 \rightarrow 0$ не запрещено, поскольку давление плазмы p_{\perp} связано с p_0 соотношением (7), что вместе с (18) дает для значения p_{\perp} в экваториальной плоскости (где p_{\perp} максимально) следующее соотношение

$$p_{\perp} = \left(\frac{3}{4} \tau \right)^n p_0 r_0^{4n}. \quad (22)$$

Таким образом, если бы отношение $|b/a|$ было бы меньше $4n$, то зависимость $p_0 \propto r_0^{-|b/a|}$ соответствовала бы конечным значениям p_{\perp} на оси и была бы допустимой. Однако, как следует из рис. 1, в рассматриваемой области с большим запасом $|b/a| > 4n$.

Обратимся теперь к интервалу $n > 1,75$, где $a < 0$, $b > 0$. Здесь абсолютно устойчивым профилям соответствуют функции p_0 , убывающие не быстрее, чем $r_0^{-|b/a|}$. Учитывая (22), мы приходим к заключению, что p_{\perp} должно убывать с ростом r_0 медленнее, чем $r_0^{4n-|b/a|}$. Однако, поскольку в этой области $4n > |b/a|$, то последнее означает, что давление p_{\perp} фактически должно возрастать с радиусом, что, разумеется, неприемлемо.

Итак, мы приходим к заключению, что для рассматриваемой геометрии магнитного поля при любом n не удастся подобрать такой профиль магнитного поля, который был бы абсолютно устойчивым по отношению ко всем желобковым модам.

Отрицательным оказывается также ответ на вопрос о возможности стабилизации моды $m=1$ в рассматриваемой ловушке. Действительно, легко показать, что критерий положительности $\tilde{\omega}$ (12) в нашем случае сводится к неравенству

$$4(n+1)a + b > 0. \quad (23)$$

Это неравенство не выполняется ни при каких n для зависимостей a и b , изображенных на рис. 1.

В заключение этого раздела, напомним, что коэффициент b в выражении для энергии (20) вычислен с помощью оценки снизу (17) кинетического члена K . Для рассмотренной задачи можно провести также и точное вычисление K , найдя предварительно функцию распределения ионов по питч-углам по заданному профилю давления вдоль силовой линии. Соответствующие формулы

приведены в Приложении, а результат точного вычисления b показан на рис. 1 пунктирной линией. Как видно, он дает лишь незначительное уточнение оценки (17) и не меняет изложенные выше выводы.

4. НЕПАРАКСИАЛЬНЫЙ ПРОБКОТРОН

Из примера, описанного в предыдущем разделе, видно, что задача отыскания абсолютно устойчивых профилей давления, характеризуемых тем, что плазменная область отделена от материальной стенки вакуумным промежутком (на границе с вакуумом давление плазмы обращается в нуль), не имеет простого решения. Однако в реальной ситуации плазма в ловушке может быть окружена областью плазменного гало [9], простирающейся вплоть до стенки камеры. При этом давление плазмы на стенке отлично от нуля, хотя и составляет малую долю от максимального давления в центре. В такой ситуации разумной является постановка задачи, в которой поиск устойчивых профилей давления ведется в предположении, что давление на границе плазмы отлично от нуля. Разумеется, такие профили могут представлять практический интерес, только если давление на границе оказывается достаточно малым.

В этом разделе приведены результаты расчетов устойчивости плазмы в описанной выше постановке применительно к конфигурации поля, предложенной в [4]. Форма силовых линий изображена на рис. 2. В отличие от работы [4], где подобное поле рассматривалось как результат обжатия магнитного потока идеально проводящей оболочкой, конфигурация, изображенная на рис. 2, создается 19 токовыми витками, показанными на рисунке. Величина тока в каждом витке подбиралась таким образом, чтобы граничные силовые линии пробкотрона шли почти параллельно линии, вдоль которой расположены витки (эта линия показана на рис. 2 штрихами). Получающееся таким образом магнитное поле близко к тому, которое создавалось бы идеальной проводящей поверхностью, сечение которой задается штриховой линией.

Величина максимального магнитного поля B_m на данной силовой линии меняется по радиусу (см. рис. 3), соответственно, пробочное отношение возрастает от величины 1,01 на оси до примерно 2,5 вблизи токовых витков. Существенно изменяется также положение точек максимума поля при движении в радиальном направлении (см. рис. 2).

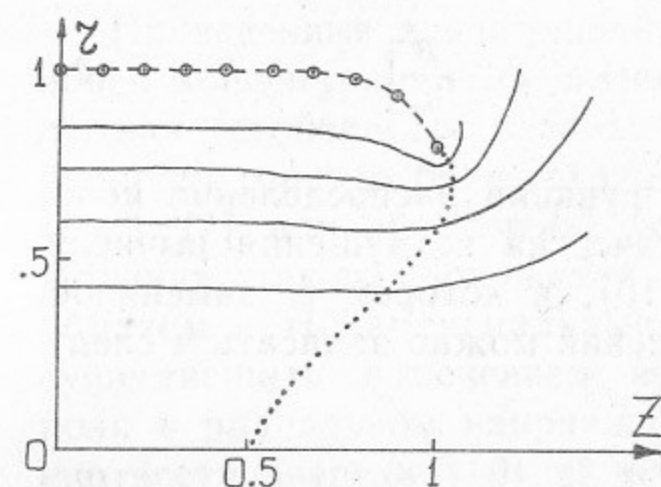


Рис. 2. Геометрия магнитного поля непараксиального пробкотрона. Поле создается токовыми витками, показанными кружками расположенными вдоль штриховой линии симметрично оси ординат (на рисунке показана половина пробкотрона). Сплошные линии изображают магнитные силовые линии, а пунктирная линия состоит из точек локальных максимумов поля на силовых линиях.

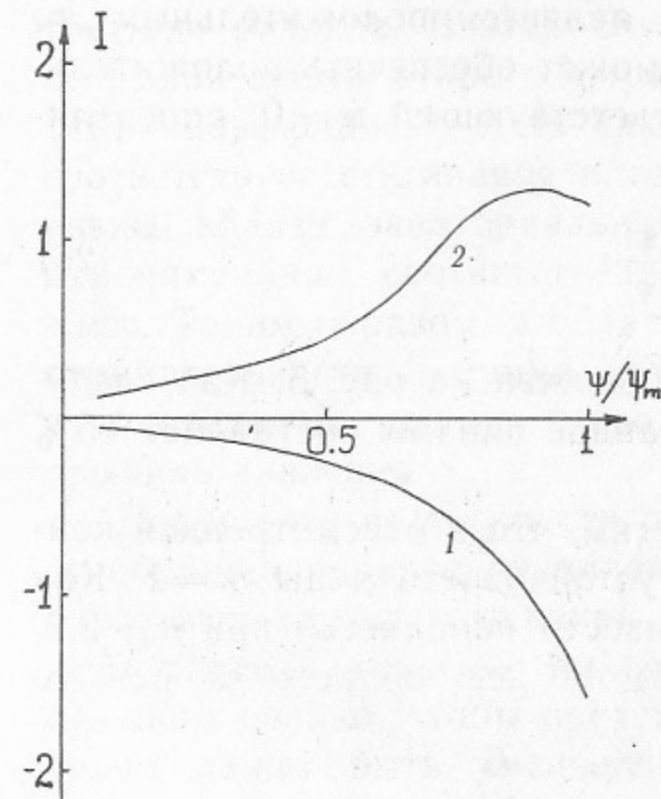


Рис. 4. Зависимости I_1 (кривая 1) и I_3 (кривая 2) от ψ . Значения I_1, I_3 нормированы на величину $P\left(\frac{B_{\min}}{B_m}\right)$.

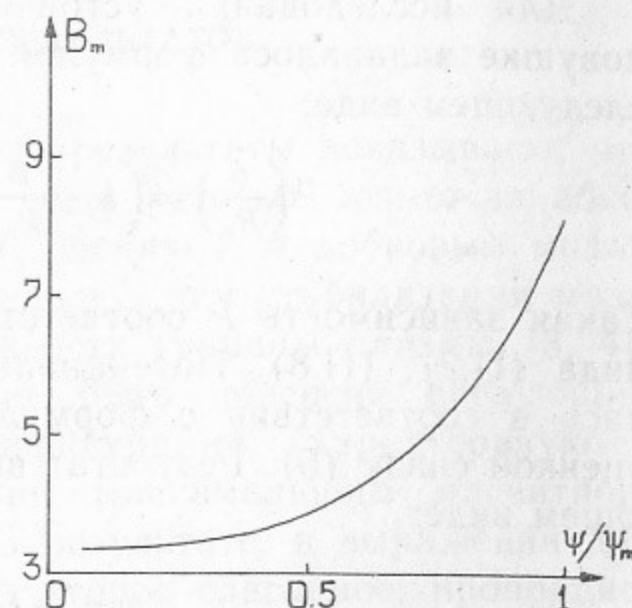


Рис. 3. Зависимость $B_m(\psi)$. Величина ψ_m соответствует крайней силовой линии, изображенной на рис. 2.

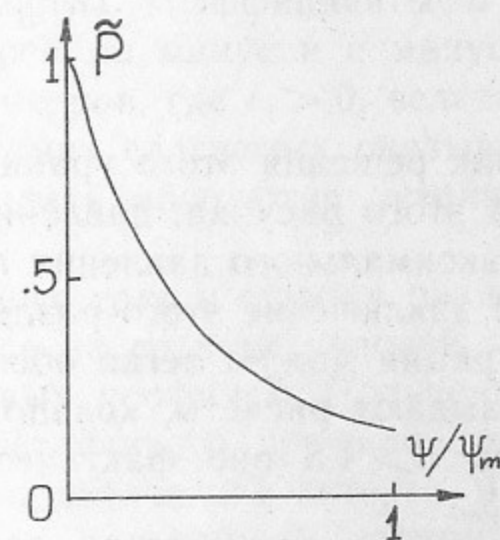


Рис. 5. Критический профиль давления $\bar{p}_0(\psi)$.

Для исследования устойчивости распределение давления в ловушке задавалось формулой (7), где функция P выбиралась в следующем виде:

$$P\left(\frac{B}{B_m}\right) = \left(1 - \frac{B}{B_m}\right)^n \left[2\left(n + \frac{3}{2}\right) - \frac{B}{B_m}\right]. \quad (24)$$

Такая зависимость P соответствует функции распределения ионов вида (П.2), (П.8). Потенциальная энергия возмущения вычислялась в соответствии с формулой (10), в которой K заменялось оценкой снизу (5). Результат вычислений можно записать в следующем виде:

$$\omega = -I_1 \frac{d\bar{p}}{d\psi} + I_3 \frac{\bar{p}}{\psi_m}, \quad (25)$$

где $\bar{p} = p_0 P\left(\frac{B_{\min}}{B_m}\right)$. Величина \bar{p} задает распределение давления плазмы в экваториальной плоскости пробкотрона. Входящие в (25) функции $I_1(\psi)$ и $I_3(\psi)$ зависят от показателя n , их графики при $n=9,5$ изображены на рис. 4. Как видно из этого рисунка, I_1 является отрицательным, что означает дестабилизирующий вклад первого слагаемого в (25) при монотонно убывающем p_0 . Однако поскольку второе слагаемое в (25) является положительным, то при не очень быстром спаде p_0 , оно может обеспечить положительность ω . Критический профиль, соответствующий $\omega=0$, определяется уравнением

$$\frac{d \ln \bar{p}}{d\psi} = \frac{I_3(\psi)}{I_1(\psi)}; \quad (26)$$

график решения этого уравнения изображен на рис. 5. Как следует из этого рисунка, давление на границе плазмы составляет 15% от максимального давления на оси.

В заключение этого раздела отметим, что в рассмотренной конфигурации можно легко обеспечить устойчивость моды $m=1$. Как показывают расчеты, кольцо устойчивости появляется при $n > 2,5$, а при $n > 4,5$ оно фактически занимает всю область от оси до $\psi = \psi_m$.

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Приведенные в настоящей работе результаты показывают, что поиск конфигураций магнитного поля, в которых возможна абсолютная устойчивость плазмы по отношению к желобковым модам является гораздо более сложной задачей, чем стабилизация моды $m=1$ [2] или обеспечение устойчивости границы плазмы [3, 4]. Причина такого положения может быть пояснена следующим образом. Непараксиальные конфигурации характеризуются существенным изменением величины максимального магнитного поля в радиальном направлении. В результате, в выражении для плотности энергии (10) появляется второе слагаемое, пропорциональное радиальной производной от B_m . В рассмотренных выше примерах величина B_m возрастает с радиусом, так что эта производная является положительной. В то же время, в интеграл I_2 , как следует из формулы (11) при учете условия $P' < 0$, положительный вклад вносят области неблагоприятной кривизны ($\kappa < 0$) и наоборот. Поэтому требование положительности величин I_2 и I_1 (напомним, что в I_1 положительный вклад вносят области благоприятной кривизны) являются в определенном смысле взаимно противоположными, что наиболее ясно следует из результатов третьего раздела. В этом случае знак I_1 определяет коэффициент a , а знак суммы второго и третьего (положительного) слагаемых в (10) — коэффициент b . И как видно из рис. 2, с ростом n (чему соответствует стягивание плазмы в область неблагоприятной кривизны вблизи экваториальной плоскости) коэффициенты a и b изменяют знак, соответственно, с плюса на минус и с минуса на плюс. Таким образом, в области параметров, где $I_1 > 0$, вследствие отрицательности I_2 сумма двух последних слагаемых оказывается отрицательной, что не позволяет создать абсолютно устойчивый профиль давления.

Допущение возможности плазменного гало и отказ в разделе 4 от обращения давления плазмы в нуль на границе силовой линии упрощают задачу отыскания устойчивых профилей. Полученное в этом разделе давление на границе устойчивого профиля, хотя и слишком велико, чтобы представлять практический интерес, несомненно может быть уменьшено в ходе дальнейшей оптимизации магнитного поля.

В заключение авторы выражают благодарность П.Б. Лысянскому за полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В пределе малых пробочных отношений в выражении для K (2) можно пренебречь v_1^2 по сравнению с μB и положить $r \simeq r_0$, $B \simeq B_0$. В результате получим

$$K = - \frac{1}{\sqrt{2} r_0^2} \int d\varepsilon d\mu \mu^2 \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \left(\int \frac{x dz}{\sqrt{\varepsilon - \mu B}} \right)^2 \left(\int \frac{dz}{\sqrt{\varepsilon - \mu B}} \right)^{-1} \quad (\text{П.1})$$

Будем считать, что функция распределения f представима в виде

$$f(\varepsilon, \mu) = g(\varepsilon) G(\xi), \quad (\text{П.2})$$

где переменная ξ определяется соотношением

$$\xi = \frac{\mu B_m}{\varepsilon} - 1; \quad (\text{П.3})$$

она изменяется в интервале $0 \leq \xi \leq k-1$. Учитывая малость этого интервала, приближенно можно положить

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \simeq -g \frac{G'}{\varepsilon}, \quad (\text{П.4})$$

где штрих обозначает дифференцирование функции G по аргументу. Переходя в (П.1) от интегрирования по ε, μ к интегрированию по ε, ξ и вводя обозначение

$$t = 1 - \frac{B}{B_m}, \quad (\text{П.5})$$

запишем (П.1) в следующем виде

$$K = \frac{1}{\sqrt{2} r_0^2 B_0^3} \int_0^{k-1} d\xi G' \frac{\left(\int \frac{x dz}{\sqrt{t-\xi}} \right)^2}{\int \frac{dz}{\sqrt{t-\xi}}} \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{3/2} g(\varepsilon). \quad (\text{П.6})$$

По известной функции распределения (П.2) можно определить распределение давления p_\perp вдоль силовой линии. В рассматриваемом здесь пределе малых пробочных отношений зависимость p_\perp от t определяется формулой

$$p_\perp(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t d\xi \frac{G(\xi)}{\sqrt{t-\xi}} \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{3/2} g(\varepsilon). \quad (\text{П.7})$$

Поскольку p_\perp связано с G преобразованием Абеля, то по заданной функции $p_\perp(t)$ можно восстановить $G(\xi)$. Так, в интересующем нас случае степенной зависимости (18), соответствующей давлению $p_\perp = p_0 t^n$, как можно убедиться,

$$G(\xi) = \xi^{n-1/2}. \quad (\text{П.8})$$

Действительно, подстановка (П.8) в (П.7) и вычисление интеграла по ξ дает нужную зависимость p_\perp от t , а также позволяет определить коэффициент p_0 :

$$p_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} \int d\varepsilon \varepsilon^{3/2} g(\varepsilon). \quad (\text{П.9})$$

Подстановка этого выражения в (П.6) позволяет исключить интеграл по энергии, а учет зависимостей (14), (16) дает окончательно

$$K = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} c r_0^{4n+1} \int_0^1 dx x^{n-3/2} \frac{\left(\int \frac{(\xi^2 - 1/4) d\xi}{\sqrt{1 - \frac{4}{3}(\xi^2 - \frac{1}{3}\xi^4) - x}} \right)^2}{\int \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \frac{4}{3}(\xi^2 - \frac{1}{3}\xi^4) - x}}},$$

где константа c определена соотношением (21).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ryutov D.D. Plasma Phys. and Contr. Fus., 1986, v.28, p.191.
2. Рютов Д.Д., Ступаков Г.В. Письма в ЖЭТФ, 1985, т.42, с.29; Физика плазмы, 1986, т.12, с.1413.
3. Ступаков Г.В. Письма в ЖЭТФ, 1987, т.45, с.213; Физика плазмы, 1988, т.14, с.161.
4. Ступаков Г.В. Письма в ЖТФ, 1987, т.13, с.1227.
5. Kruskal M.D., Oberman C.R. Phys. Fluids, 1985, v.1, p.275.
6. Chew G.F., Goldberger M.L., Low F.E. Proc. R. Soc. (London), 1956, Ser. A236, p.112.
7. Hall L.S., McNamara B. Phys. Fluids, 1975, v.18, p.552.
8. Walstead A.E. Phys. Fluids, 1982, v.25, p.1358.
9. Simonen T.C., editor. Summary of TMX-U Results: 1984, v.1.

С.В. Кузьмин, Г.В. Ступаков

**Исследование МГД-устойчивости плазмы
в непараксиальных пробкотронах**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 10 марта 1988 г.
Подписано в печать 5.05. 1988 г. МН 08308
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1,7 печ.л., 1,4 уч.-изд.л.
Тираж 180 экз. Бесплатно. Заказ № 62

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и
отпечатано на ротапринтере Института ядерной физики
СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*