

33

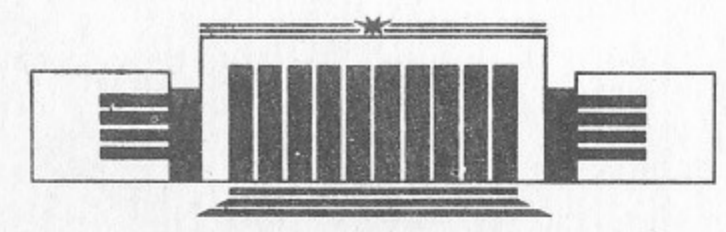
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР



А.Л. Герасимов, Н.С. Диканский

**ФАЗОВАЯ КОНВЕКЦИЯ  
ПРИ ВСТРЕЧНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ  
И ВРЕМЯ ЖИЗНИ ПУЧКОВ  
В ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННЫХ НАКОПИТЕЛЯХ  
I. КАТАЛОГ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗОНАНСОВ**

ПРЕПРИНТ 88-60



НОВОСИБИРСК

## ВВЕДЕНИЕ

Для большинства существующих электрон-позитронных накопителей время жизни пучков, в основном, ограничивается эффектами встречи, т. е. эффектами многократного воздействия поперечного электромагнитного поля одного пучка на частицы «встречного» пучка. Существует несколько различных механизмов, посредством которых эффекты встречи влияют на поведение бетатронных колебаний на больших временах и приводят к потерям частиц на стенках вакуумной камеры. Среди наиболее известных механизмов такого рода можно назвать перекрытие нескольких чисто «пучковых» резонансов [1], перекрытие синхробетатронных сателлитов одного резонанса [2—4], «каналирование» частиц вдоль резонанса [5], резонансные колебания большой амплитуды [6], и когерентные колебания [7]. Заметим, что все перечисленные механизмы, кроме последнего, связаны так или иначе с нелинейными резонансами, возбуждаемыми фиксированным полем встречного пучка.

При отсутствии когерентных колебаний плотности сталкивающихся пучков, «равновесное» распределение плотности частиц в пучке, устанавливающееся на больших временах, целиком определяется движением отдельных частиц. Установление равновесного распределения происходит в основном под влиянием воздействия на частицы «тепловых» сил — диссипативной составляющей, определяемой наличием синхротронного излучения, и шумовой состав-

ляющей, вызванной квантовыми флуктуациями этого излучения, а также рассеянием на остаточном газе. Без учета воздействия «тепловых» сил, которые во многих случаях могут считаться малыми, движение отдельных частиц является гамильтоновым, и релаксация к равновесному распределению отсутствует.

В рамках настоящей работы мы не рассматриваем однократное рассеяние на большие углы на остаточном газе, приводящее к негауссовским «хвостам» функции распределения [8], поскольку нашей целью является демонстрация нового механизма образования, при воздействии эффектов встречи, негауссовских хвостов при наличии только «классической» диффузии под влиянием шумов от квантовых флуктуаций синхротронного излучения. Во второй и третьей частях будет показано, что в определенных случаях этот механизм приводит к более сильному эффекту, чем указанный первым, и время жизни пучка ограничивается именно им.

Конечное время жизни пучка в накопителе связано с наличием границы (апертуры), поглощающей частицы с большими амплитудами бетатронных колебаний. Вместо равновесного распределения в этом случае следует рассматривать квазиравновесное (с конечным временем жизни). Известно, однако, что для систем исследуемого типа квазиравновесное распределение мало отличается от равновесного во всем пространстве, за исключением области координат, близких к поглощающей границе [9, 10]. Задача нахождения времени жизни квазиравновесного распределения при наличии поглощающих границ и задача нахождения равновесного распределения без учета таких границ тесно связаны между собой и при слабом шуме решаются одним методом [9].

Для нахождения зависимости времени жизни пучка от параметров накопителя необходимо полное описание гамильтоновых траекторий частиц (без учета «тепловых» сил). В «идеальном» накопителе без эффектов встречи гамильтоново движение частицы сводится к линейным гармоническим колебаниям с синхротронной частотой в продольном направлении и к линейным гармоническим колебаниям с «невозмущенными» бетатронными частотами в горизонтальных и вертикальных плоскостях. При столкновении со встречным пучком частица получает почти мгновенный «толчок», который является сильно нелинейным. Столкновения со встречным пучком (эффекты встречи) приводят к нелинейности поперечных колебаний и их связи друг с другом. В первом приближении, когда интенсивность встречного пучка мала и рабочая точка удалена от резонансов низкого порядка, влияние взаимодействия со встреч-

ным пучком сводится к появлению нелинейной зависимости (пропорциональной интенсивности пучка) частот поперечных колебаний от их амплитуд. При большей интенсивности, либо когда рабочая точка близка к резонансам низкого порядка, в системе возбуждаются изолированные нелинейные резонансы, которые создают периодический обмен энергией между поперечными степенями свободы. При еще больших интенсивностях резонансы могут перекрываться, образуя стохастические области, движение в которых носит диффузионный характер. В «идеальном» накопителе (см. ниже) при реально достижимых значениях интенсивностей пучков нелинейные резонансы остаются с высокой точностью изолированными и образования стохастических областей не происходит [1, 11].

В экспериментальных условиях всегда существует большое количество факторов, носящих паразитный характер и значительно осложняющих динамику. Среди наиболее важных факторов такого рода можно назвать смещение центров сталкивающихся пучков друг относительно друга (остаточное разведение), нелинейность ведущего поля накопителя (называемая далее «машинной») и наличие различного рода синхротронных модуляций, связанных с конечной длиной пучка по отношению к поперечной  $\beta$ -функции в месте встречи, ненулевым хроматизмом или дисперсионной функцией в месте встречи [2, 3]. Все эти «неидеальности» приводят к появлению дополнительных резонансов, и, вообще говоря, способствуют образованию стохастических областей. Так, например, вопрос о возможности перекрытия синхротронных сателлитов главного резонанса и образования стохастических областей подробно исследовался в [4]. В третьей части настоящей работы получены (с помощью численно-аналитических методов) некоторые данные о возможности образования стохастических областей под влиянием первых двух типов «неидеальностей» (без синхротронных модуляций). Из этих данных следует, что для реально используемых параметров накопителей (в отсутствие синхротронных модуляций) образование стохастических областей не происходит, и вся динамика может быть хорошо описана в терминах изолированных нелинейных резонансов. Об этом же свидетельствуют экспериментальные данные, приведенные в [6, 8], где в зависимостях скорости счета гибнущих частиц (обратная величина к времени жизни) от бетатронных частот отчетливо видны, при не слишком высоких значениях токов, отдельные пики при резонансных значениях частот. Таким образом, для аналитического описания процессов, огра-

ничающих время жизни пучков в электрон-позитронных накопителях, в настоящей работе мы будем считать, что гамильтонова часть динамики может быть целиком описана в рамках понятия изолированного нелинейного резонанса.

Нахождение равновесного распределения частиц в пучке по заданным характеристикам нелинейных резонансов и тепловым характеристикам (поперечным температурам и декременту затухания) представляет собой отдельную, далеко не простую задачу. Подчеркнем, во избежание недоразумений, что система не является равновесной в обычном смысле статистической физики как из-за наличия зависящей от времени силы взаимодействия со встречным пучком, так и из-за различия поперечных температур по вертикали и горизонтали, и поэтому равновесная функция распределения не является распределением Гиббса. Недавно одним из авторов [12] был предложен новый подход к решению этой задачи, направленный на отыскание экспоненциально малых «хвостов» равновесной функции распределения (РФР). В ведущем экспоненциальном приближении время жизни квазиравновесного распределения при наличии поглощающих границ однозначно определяется в этом методе максимумом РФР на границе. Как было обнаружено, влияние изолированных нелинейных резонансов на экспоненциальные хвосты РФР и время жизни квазиравновесного распределения в многомерном случае гораздо сильнее (имеет другой порядок величины), чем в одномерном, что связано с новым явлением, названным фазовой конвекцией. Это явление заключается в образовании замкнутых потоков частиц в фазовом пространстве и обусловлено возможностью «путешествий» частиц вдоль резонансных линий. Сильное влияние относительно узких (колебания амплитуд много меньше самих амплитуд) резонансов на время жизни в многомерном случае объясняется тем, что вероятность попадания частиц из притягивающего центра на поглощающую границу сильно увеличивается за счет возможности прохождения частицами больших расстояний (в фазовом пространстве) вдоль резонансных линий.

В настоящей работе на основе численной реализации метода работы [12] исследуются возмущения РФР и времени жизни пучка в электрон-позитронном накопителе под влиянием изолированных резонансов, возбуждаемых полем встречного пучка. В первой части приведены характеристики отдельных резонансов ( $lv_x + mv_z + n = 0$ ) с различными индексами гармоник  $l, m$  для различных параметров накопителя (каталог резонансов). Во вто-

рой части представлены данные о максимально возможном (при различных  $v_x, v_z$ ) влиянии этих резонансов на время жизни. В третьей части рассматривается реальная картина сталкивающихся пучков, когда в плоскости амплитуд имеется несколько резонансов, влияющих на РФР, и проводится сравнение данных расчетов с экспериментальными данными. Показано, что во многих экспериментально наблюдаемых случаях ограничение времени жизни пучков происходит из-за нового механизма влияния изолированных нелинейных резонансов на РФР посредством возбуждения фазовой конвекции.

## 2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК ИЗОЛИРОВАННЫХ РЕЗОНАНСОВ

Основные характеристики изолированных нелинейных резонансов, возникающих в эффектах встречи, приведены в [11]. В настоящей работе резонансы показаны в плоскости нормированных поперечных бетатронных амплитуд  $A_x, A_z$  (2.4), так что резонанс представлен резонансной линией (2.12) и векторами резонансных колебаний  $\Delta A_x^{lm}, \Delta A_z^{lm}$  (2.16) на ней (здесь все номера формул относятся к § 2 работы [11]). Целые числа  $l, m, n$  являются номером гармоники резонанса  $lv_x + mv_z + n = 0$ . Основными параметрами машины, от которых зависят указанные характеристики резонансов, являются линейные сдвиги частот  $\xi_x, \xi_z$ , невозмущенные бетатронные частоты  $\nu_{x0}, \nu_{z0}$  — и параметр эллиптичности встречного пучка  $\kappa = \sigma_x / \sigma_z$  (где  $\sigma_x, \sigma_z$  — горизонтальный и вертикальный размеры пучка). При учете «неидеальностей» машины к этим параметрам следует добавить величины остаточного разведения пучков по  $x$  и  $z$ , а также величину машинной нелинейности. Для каждого фиксированного параметра эллиптичности  $\kappa$  резонансная линия и векторы  $\Delta A_x, \Delta A_z$  колебаний на ней однозначно определяются, в отсутствие «неидеальностей», параметром расстройки  $\delta = \frac{lv_{x0} + mv_{z0} + n}{\xi_z}$ , отношением сдвигов частот  $\xi_z / \xi_x$ , и не зависят от всех остальных комбинаций параметров  $\xi_x, \xi_z, \nu_{x0}, \nu_{z0}$ . Для полной характеристики резонанса с индексами  $l, m$  на каждом рисунке представлен набор возможных расположений резонанса в плоскости  $A_x, A_z$  при различных значениях расстройки  $\delta$ .

При наличии остаточного разведения по  $x$  или  $z$  симметрия сил

$f_x, f_z$  от встречного пучка по соответствующей оси нарушается. Вследствие этого, кроме резонансов с четными номерами гармоник  $l$  и  $m$ , возбуждаются также и нечетные резонансы, причем при разведении по  $x$  возникают резонансы с нечетными  $l$ , а при разведении по  $z$  — с нечетными  $m$ . Поскольку остаточные разведения всегда бывают достаточно малы ( $\leq 0.1\sigma$ ), то четные резонансы мало меняются от таких разведений. Поэтому при ненулевых разведениях показаны только нечетные резонансы.

Существенное влияние на нелинейные резонансы при больших амплитудах оказывает октупольная машинная нелинейность ведущего магнитного поля [6, 8]. Основное влияние этой нелинейности заключается во внесении дополнительных «машинных» сдвигов частот

$$\begin{aligned}\delta v_x &= R_1 A_x^2 + R_2 A_z^2, \\ \delta v_z &= R_3 A_x^3 + R_4 A_z^2,\end{aligned}\quad (1)$$

где

$$R_1 = C_{xx} \frac{\sigma_x^2}{\beta_x^*}; \quad R_2 = \frac{C_{xz} \sigma_z^2}{2\beta_x^*}; \quad R_3 = \frac{C_{xz} \sigma_x^2}{2\beta_z^*}; \quad R_4 = \frac{C_{zz} \sigma_z^2}{\beta_z^*} \quad (2)$$

( $\beta_x^*, \beta_z^*$  —  $\beta$ -функции в месте встречи). Коэффициенты  $C_{xx}, C_{xz}, C_{zz}$  определяются интегралами вдоль орбиты:

$$\begin{aligned}C_{xx} &= \frac{3}{2} \oint B(s) \beta_x^2(s) ds, \\ C_{xz} &= -6 \oint B(s) \beta_x(s) \beta_z(s) ds, \\ C_{zz} &= \frac{3}{2} \oint B(s) \beta_z^2(s) ds,\end{aligned}\quad (3)$$

от распределенной по координате  $s$  вдоль кольца амплитуды  $B(s)$ , задающей октупольную добавку в потенциал бетатронных колебаний:

$$\delta U(s, x, z) = B(s)(x^4 - 6x^2 z^2 + z^4). \quad (4)$$

Если считать, что октупольная нелинейность сосредоточена в одном месте на кольце с бета-функциями  $\beta_x, \beta_z$  (например, в специальной линзе), то сдвиги частот можно записать в виде

$$\begin{aligned}\delta v_x &= C \cdot (A_x^2 - 2RA_z^2) \\ \delta v_z &= C \frac{\xi_x}{\kappa \xi_z} \left( A_z^2 - 2 \frac{A_x^2}{R} \right),\end{aligned}\quad (5)$$

где

$$R = \frac{\xi_x \beta_z}{\xi_z \beta_{x\kappa}} \quad (6)$$

и  $C = R_1$ . В таком представлении машинная нелинейность определяется двумя параметрами: сдвигом  $C$  частоты  $\delta v_x$  при  $A_x = 1$  и отношением  $\frac{\beta_x}{\beta_z}$  в месте установки линзы. Влияние машинной нелинейности сводится, таким образом, к прибавлению «машинных» сдвигов частот  $\delta v_{x,z}$  (5) к «пучковым»  $\xi_x \Delta v_x, \xi_z \Delta v_z$ :

$$\begin{aligned}v_x &= v_{x0} + \xi_x \Delta v_x(A_x, A_z, \kappa) + \delta v_x(A_x, A_z, C, R), \\ v_z &= v_{z0} + \xi_z \Delta v_z(A_x, A_z, \kappa) + \delta v_z(A_x, A_z, C, R),\end{aligned}\quad (7)$$

где  $\Delta v_x(A_x, A_z, \kappa), \Delta v_z(A_x, A_z, \kappa)$  — нормированные нелинейные сдвиги частот от встречного пучка [11]. Наличие такой добавки влияет как на расположение резонансных линий, так и на векторы  $\Delta A_x, \Delta A_z$ , длины которых обратно пропорциональны производным частот  $v_x, v_z$  (7) по амплитудам  $A_x, A_z$  [11].

Вычислительная программа, строящая рисунки, состоит из основной программы и подпрограммы. Основная программа обеспечивает построение резонансной линии и содержит все графические операции, в то время как подпрограмма вычисляет значение вектора резонансных колебаний  $\Delta A_x^{lm}, \Delta A_z^{lm}$  в заданной точке  $A_x, A_z$ .

При вычислении характеристик резонансов нормированные силы взаимодействия  $f_x, f_z$  брались из простых феноменологических формул, дающих достаточно высокую точность вычисления сил (см. Приложение В в [6]). Было проведено также несколько контрольных расчетов, показавших, что эти формулы дают достаточную точность и для вычисления ширины резонансов  $\Delta A_x, \Delta A_z$  различного порядка [13].

Все необходимые характеристики резонансов — амплитуда резонансной гармоники, сдвиги частот  $\Delta v_{x,z}$  и «пучковая» нелинейность, определяемая производными  $\Delta v_{x,z}$  по амплитудам  $A_x, A_z$  — были выражены в виде двумерных интегралов от сил  $f_x, f_z$  [11], и вычисление проводилось с помощью численного интегрирования.

Построение резонансной линии в плоскости  $A_x, A_z$  проводилось в основной программе вычислением значений расстройки

$$\delta = l(v_{x0} + \xi_x \Delta v_x + \delta v_x) + m(v_{z0} + \xi_z \Delta v_z + \delta v_z) + n,$$

на сетках величин  $\Delta v_x$ ,  $\Delta v_z$  в плоскости  $A_x$ ,  $A_z$ . Эти сетки вычислялись отдельной программой и хранились в памяти машины.

Резонансная линия определяется условием  $\delta=0$ . Поэтому для нахождения точек на этой линии программа, двигаясь вдоль узлов сетки с постоянной амплитудой  $A_z$ , определяла соседние узлы с разными знаками  $\delta$  и вычисляла (из линейной интерполяции) положение точки с нулевой  $\delta$ , лежащей между этими узлами. Другие точки с нулевой  $\delta$  находились аналогичным образом с направлением поиска вдоль линий постоянной амплитуды  $A_x$ . После этого все точки объединялись в одном массиве, который упорядочивался по расстоянию от первой точки. Графическая подпрограмма при передаче ей такого упорядоченного массива вычерчивала гладкую резонансную линию.

### 3. КАТАЛОГ РЕЗОНАНСОВ

На рис. 1—38 показаны возможные положения различных резонансов в плоскости нормированных амплитуд

$$A_x = \frac{\sqrt{x^2 + x'^2 \beta_x^2}}{\sigma_x}; \quad A_z = \frac{\sqrt{z^2 + z'^2 \beta_z^2}}{\sigma_z};$$

для «идеального» случая, когда машинная нелинейность и остаточное разведение пучков отсутствуют. По оси  $A_z$  используются два масштаба — равномерный от 0 до 10, и равномерный, но в 7 раз более плотный от 10 до 80. Каждое положение резонанса характеризуется центральной линией (сплошной), векторами колебаний амплитуд на сепаратрисе и двумя пунктирными линиями, показывающими ширину резонанса. Каждый рисунок однозначно определяется параметрами эллиптичности  $\kappa$ , отношением линейных сдвигов частот  $\xi_z/\xi_x$ , и индексами резонанса  $l$ ,  $m$ . Независимость рисунков от абсолютных значений  $\xi_x$ ,  $\xi_z$  (тока встречного пучка) связана с известным свойством почти линейных систем, для которых ширина резонансов  $\Delta A_x$ ,  $\Delta A_z$  не зависит от силы возмущения [1]. Заметим также, что различные положения резонанса на каждом рисунке однозначно определяются расстройкой  $\delta = \frac{lv_{x0} + mv_{z0} + n}{\xi_z}$ , и соответствуют, таким образом, различным рабочим точкам  $v_{x0}$ ,  $v_{z0}$ .

На рис. 1—24 показаны все резонансы с порядком

$N = |l| + |m|$ , меньшим 10, для  $\xi_z/\xi_x = 2$  и  $\kappa = 100$ . Напомним, что из-за симметрии потенциала встречного взаимодействия индексы  $l$  и  $m$  могут принимать только четные значения [1, 11]. Из этих рисунков видны некоторые характерные особенности нелинейных резонансов, которые могут быть поняты в основном также и из аналитического рассмотрения [11, 13].

1). Ширина резонансов  $\Delta A_x$ ,  $\Delta A_z$  увеличивается с увеличением амплитуд  $A_x$ ,  $A_z$ . При малых амплитудах  $A_x$ ,  $A_z$  ширина быстро убывает с ростом  $|l|$ ,  $|m|$ .

2). Из-за большой величины параметра  $\kappa$  в широкой области  $A_z \ll \kappa$  колебания амплитуд  $A_x$ ,  $A_z$  происходят для всех резонансов с  $m \neq 0$  почти по вертикали:  $\Delta A_x \ll \Delta A_z$ .

3). По той же причине большой эллиптичности  $\kappa$  резонансы имеют тенденцию вытягиваться вдоль оси  $A_z$ .

4). Наклон резонансной линии  $A_{z0}(A_x)$  отрицателен для всех суммовых резонансов (одинаковые знаки  $l$  и  $m$ ). Многие из разностных резонансов (противоположенные знаки  $l$  и  $m$ ) могут иметь как положительный, так и отрицательный наклон.

На рис. 25—30 показаны резонансы с порядком  $N = |l| + |m|$ , равным 8, для другого значения  $\xi_z/\xi_x$ , равного 4 ( $\kappa$  по-прежнему равно 100). Интересно отметить, что сами резонансные линии, как нетрудно видеть из условия  $\delta=0$ , зависят только от параметра  $\frac{l\xi_x}{m\xi_z}$ , а не от  $l$ ,  $m$ ,  $\xi_z/\xi_x$  по отдельности. Резонансные же векторы зависят от всех трех параметров.

Одномерные резонансы  $l=0$  и  $m=0$  не зависят от отношения  $\xi_z/\xi_x$  и поэтому не показаны на рис. 25—30. В целом можно сказать, что изменение отношения  $\xi_z/\xi_x$  более сильно действует на разностные резонансы, чем на суммовые. Это связано с тем, что у большинства разностных резонансов наклон резонансной линии в одной части амплитудной плоскости положителен, а в другой отрицателен, и при изменении отношения  $\xi_z/\xi_x$  эти области довольно сильно меняются. Величина же амплитуды колебаний  $\Delta A_z$  в каждой фиксированной точке  $A_x$ ,  $A_z$  в широкой области  $A_z \ll \sqrt{\kappa}$  не зависит, как показано в [11, 13], ни от  $\xi_z/\xi_x$ , ни от  $\kappa$  (в этой области  $\Delta A_x \ll \Delta A_z$ ). При больших значениях  $A_z$  уменьшение параметра  $\xi_z/\xi_x$  уменьшает  $\Delta A_z$  и увеличивает  $\Delta A_x$ .

На рис. 31—38 показаны резонансы с  $N=8$  и  $\xi_z/\xi_x=2$  для меньшего значения параметра эллиптичности  $\kappa=30$ . Из сравнения с рис. 11—19 для тех же резонансов с  $\kappa=100$  видно, что резо-

нансные линии слабо зависят от  $\kappa$  во всей плоскости  $A_x, A_z$ . Векторы же колебаний  $\Delta A_x, \Delta A_z$  зависят от  $\kappa$  только при больших значениях  $A_z$  (в соответствии с [11, 13] — при  $A_z \geq \sqrt{\kappa}$ ). В этой области уменьшение  $\kappa$  эквивалентно уменьшению  $\xi_z/\xi_x$ : величина  $\Delta A_z$  уменьшается, а  $\Delta A_x$  увеличивается.

На рис. 39—54 выборочно показаны нечетные резонансы различных порядков, возникающие при не равных нулю разведениях пучков  $\Delta x$  и  $\Delta z$  по соответствующим осям. Для того, чтобы понять может ли небольшое разведение ( $\leq 0.1\sigma$ ) существенно повлиять на динамику пучка, следует сравнить приведенные рисунки для резонансов с нечетными  $l$  или  $m$  с соответствующими рисунками для четных резонансов с удвоенными значениями  $l$  и  $m$ , поскольку такие резонансы (соответственно, с удвоенным  $n$ ) всегда будут присутствовать одновременно с нечетными. Если ширина удвоенного резонанса ( $\Delta A_x, \Delta A_z$ ) много больше, чем исходного нечетного, то влиянием разведения можно пренебречь. При проведении такого сравнения для резонансов с разведением по  $x$  (нечетные  $l$ ) обнаружим, что исходный резонанс много больше удвоенного при достаточно малых  $A_x$ , при  $A_x$ , равных 4—6, они сравниваются, и при больших  $A_x$  удвоенный резонанс делается больше. В целом трудно сказать, является ли разведение по  $x$  существенным, поскольку при малых  $A_x$ , где имеется заметный эффект, ширина  $\Delta A_x, \Delta A_z$  очень мала (много меньше, чем при больших  $A_x$ ). Вопрос о влиянии разведения на время жизни будет рассмотрен во второй части.

Аналогичное сравнение для резонансов с разведением по  $z$  (нечетные  $m$ ) показывает превышение исходных резонансов над удвоенными при малых  $A_z$ , при  $A_z \sim 4 \div 6$  они сравниваются, и при больших  $A_z$  удвоенный резонанс делается большим. Таким образом, резонансы с нечетным  $m$  «работают» только в малой области  $A_z \leq 4$  и поэтому можно сразу предположить, что они не будут оказывать существенного влияния на время жизни пучка. Окончательный вывод будет также сделан во второй части.

На рис. 55—64 показаны резонансы с  $N=10$ ,  $\xi_z/\xi_x=2$  ( $\xi_x=0.03$ ,  $\xi_z=0.06$ ) и  $\kappa=100$  при наличии положительной машинной нелинейности с параметрами  $C=2.4 \cdot 10^{-5}$  и отношением  $\beta$ -функций в месте установки октупольной линзы  $\beta_x/\beta_z=2.5$  (параметры соответствуют «естественной» машинной нелинейности ВЭПП-4, см. [8]). Положительная нелинейность, как показано в [8], приводит к образованию «нулевой нелинейности» резонансных

колебаний (см. ниже) у большего числа резонансов, и поэтому более «опасна». Из рассмотрения этих рисунков видны две принципиальные особенности резонансов при положительной машинной нелинейности. Первая состоит в возможности образования для некоторых резонансов двойных резонансных линий (на рис. 55—64 показаны стрелкой), когда для некоторых значений расстройки  $\delta$  резонансное условие выполняется не на одной, а на двух не соединенных между собой линиях. Второй особенностью является наличие для некоторых резонансов точек на резонансных линиях, где нелинейность колебаний на резонансе  $\alpha$ , определяемая некоторой линейной комбинацией производных частот (7) по амплитудам  $A_x, A_z$  [11, 13] равна нулю, так что вычисляемые в стандартном приближении маятника величины  $\Delta A_x, \Delta A_z$  в этих точках обращаются в бесконечность. Реально резонансные колебания имеют и в этих точках конечную амплитуду, определяемую высшими производными частот по амплитудам. Наличие такой «нулевой нелинейности» естественным образом приведет к большим значениям  $\Delta A_x, \Delta A_z$  [8]. Поскольку значения  $\Delta A_x, \Delta A_z$  при «нулевой нелинейности» не описываются нашим формализмом, то увеличение  $\Delta A_x, \Delta A_z$  при очень малых  $\alpha$  показано на рис. 55—64 схематично. Условие нулевой нелинейности выполняется на некоторой линии в амплитудной плоскости (показанной на рис. 55—64 пунктиром), которая пересекается с резонансными линиями в одной точке.

Из приведенных рисунков видно, что образование кривой «нулевой нелинейности» для всех суммовых резонансов связи с  $m > 0$ ,  $l \neq 0$ ,  $N = |l| + |m| = 10$  не происходит. Это находится в соответствии с найденным в [8] условием образования нулевой нелинейности для суммовых резонансов:

$$l^2 \left( \frac{\beta_x}{\beta_z} \right)^2 - 4lm \left( \frac{\beta_x}{\beta_z} \right) + m^2 > 0,$$

где  $\beta_x/\beta_z$  — отношение  $\beta$ -функций в месте установки октупольной линзы. При другом отношении  $\beta_x/\beta_z$  нулевая нелинейность может образовываться и у некоторых суммовых резонансов с  $N=10$ . Так, на рис. 65 показаны линии нулевой нелинейности резонансов  $N=10$  при других параметрах, и среди этих линий есть и принадлежащие суммовым резонансам. Разностные и одномерные резонансы имеют, по-видимому, точки с нулевой нелинейностью при любых отношениях  $\beta_x/\beta_z$  и положительных  $C$ . Сами линии нулевой нелинейности слабо зависят от параметра  $C$  (точнее, от отношения

$C/\xi_x$ ), что видно из рис. 66, где показаны линии нулевой нелинейности для тех же параметров, что и на рис. 65, но при больших значениях  $C$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Izrailev F.M.* Physica, 1980, v.1D, p.243.
2. *Evans L.R.* The Beam-Beam Interaction.—Internal report, CERN SPS/83-38 (DI-MST), 1983.
3. *Израйлев Ф.М., Вассерман И.Б.* Влияние различных типов модуляций на понижение порога стохастичности в эффектах встречи.—Препринт ИЯФ СО АН СССР 81-60. Новосибирск, 1981.
4. *Gerasimov A.L., Izrailev F.M., Tennison J.L.* Synchrotron Sideband Overlap in Electron-Positron Colliding Beams.—INP Preprint 87-69. Novosibirsk, 1987.
5. *Tennison J.L.* Physica, 1982, v.5D, p.123.
6. *Tennison J.L.* The Dynamics of the Beam-Beam Interaction.—In: Physics of High Energy Particle Accelerators, eds R.A. Carrigan, F.R. Huson, M. Month; AIP Conf. Proceedings N 87, AIP Press, New York, 1982.
7. *Dikansky N.S., Pestrikov D.V.* Part. Accel., 1982, v.12, N 1, p.27—38.
8. *Темных А.Б.* Диссертация на соискание уч. степ. кандидата физ.-мат. наук. ИЯФ СО АН СССР. Новосибирск, 1987.
9. *Вентцель А., Фрейдлин М.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений.—М.: Наука, 1979.
10. *Matkovsky B., Shuss Z., Ben-Jacob E.* SIAM J. Appl. Math., 1982, v.42, N 4.
11. *Gerasimov A., Izrailev F., Tennison J.* Nonlinear Resonances and Beam-Beam Effects for Elliptical Beams.—In: Proc. of the XIII Intern. Accel. Conf., Novosibirsk, 1986.
12. *Герасимов А.Л.* Тепловое равновесие осциллятора при возбуждении изолированных нелинейных резонансов.—Препринт ИЯФ СО АН СССР 87-100. Новосибирск, 1987.
13. *Герасимов А.Л., Израйлев Ф.М., Теннисон Дж.* Описание нелинейных резонансов для встречных пучков с большим отношением поперечных размеров.—Препринт ИЯФ СО АН СССР 86-98. Новосибирск, 1986.

#### Подписи к рисункам

*Рис. 1—24.* Резонансы различных порядков при отсутствии «неидеальностей» при отношении линейных сдвигов частот  $\xi_z/\xi_x=2$  и параметре эллиптичности  $\kappa=100$ .

*Рис. 25—30.* Резонансы с порядком  $N=|l|+|m|=8$  в отсутствие «неидеальностей» при отношении линейных сдвигов частот  $\xi_z/\xi_x=4$  и параметре эллиптичности  $\kappa=100$ .

*Рис. 31—38.* Резонансы с порядком  $N=|l|+|m|=8$  в отсутствие «неидеальностей» при отношении линейных сдвигов частот  $\xi_z/\xi_x=2$  и параметре эллиптичности  $\kappa=30$ .

*Рис. 39—54.* Нечетные резонансы различных порядков, возникающие при остаточных разведениях пучков по вертикали или горизонтали. Отношение линейных сдвигов частот  $\xi_z/\xi_x=2$ , параметр эллиптичности  $\kappa=100$ .

*Рис. 55—64.* Резонансы с порядком  $N=|l|+|m|=10$  при наличии положительной машинной нелинейности с параметрами  $C=2.4 \cdot 10^{-5}$  и  $\beta_x/\beta_z=2.5$ . Линейные сдвиги частот  $\xi_x=0.03$ ,  $\xi_z=0.06$ , параметр эллиптичности  $\kappa=100$ .

*Рис. 65.* Линии нулевой нелинейности для резонансов с порядком  $N=|l|+|m|=10$  при машинной нелинейности с параметрами  $C=8 \cdot 10^{-5}$ ,  $\beta_x/\beta_z=1$ . Линейные сдвиги частот  $\xi_x=0.0074$ ,  $\xi_z=0.0026$ , параметр эллиптичности  $\kappa=100$ .

*Рис. 66.* То же, что на рис. 65, для  $C=3.2 \cdot 10^{-4}$ .



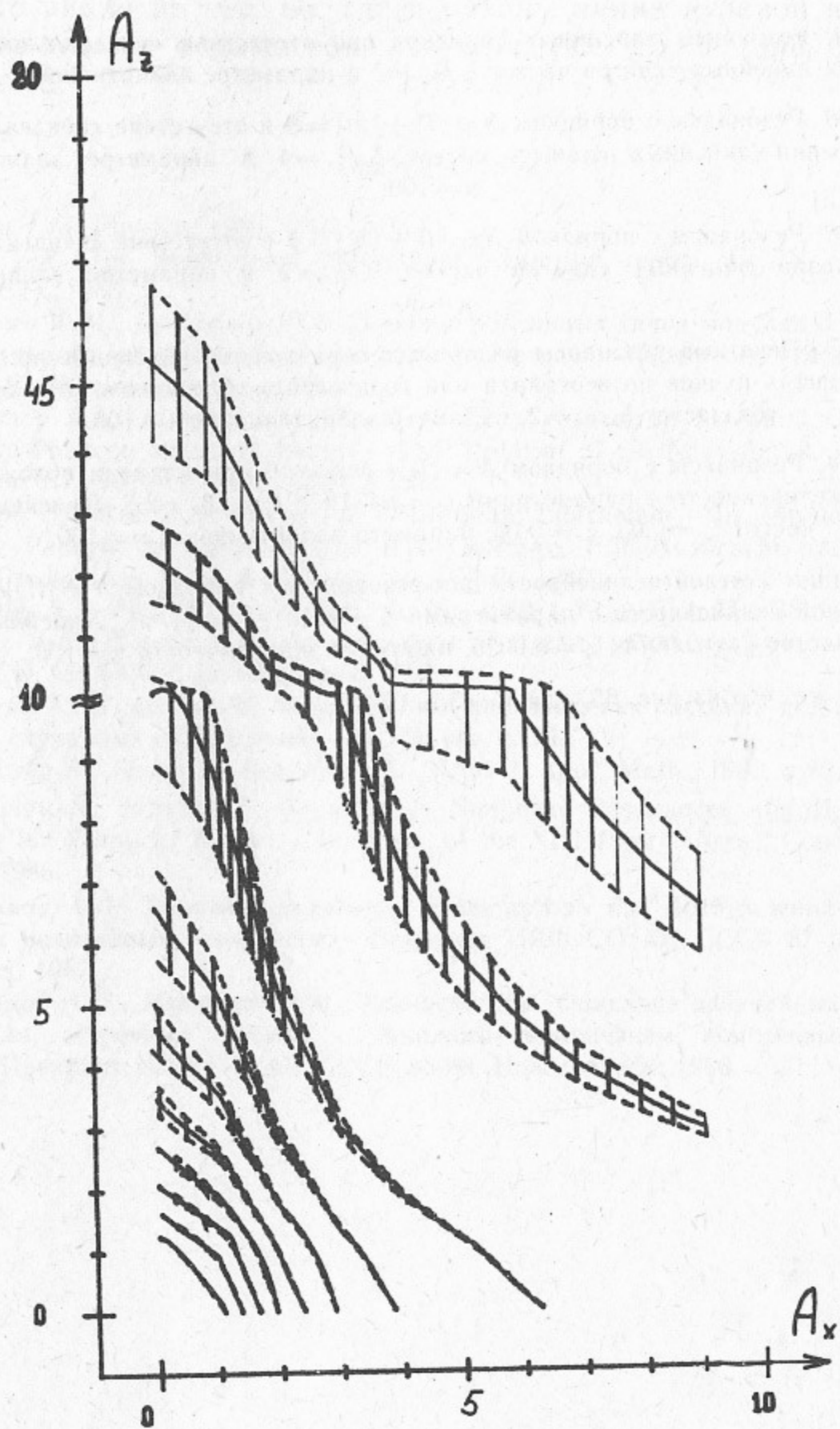


Рис. 1.  $l=0, m=10$ .

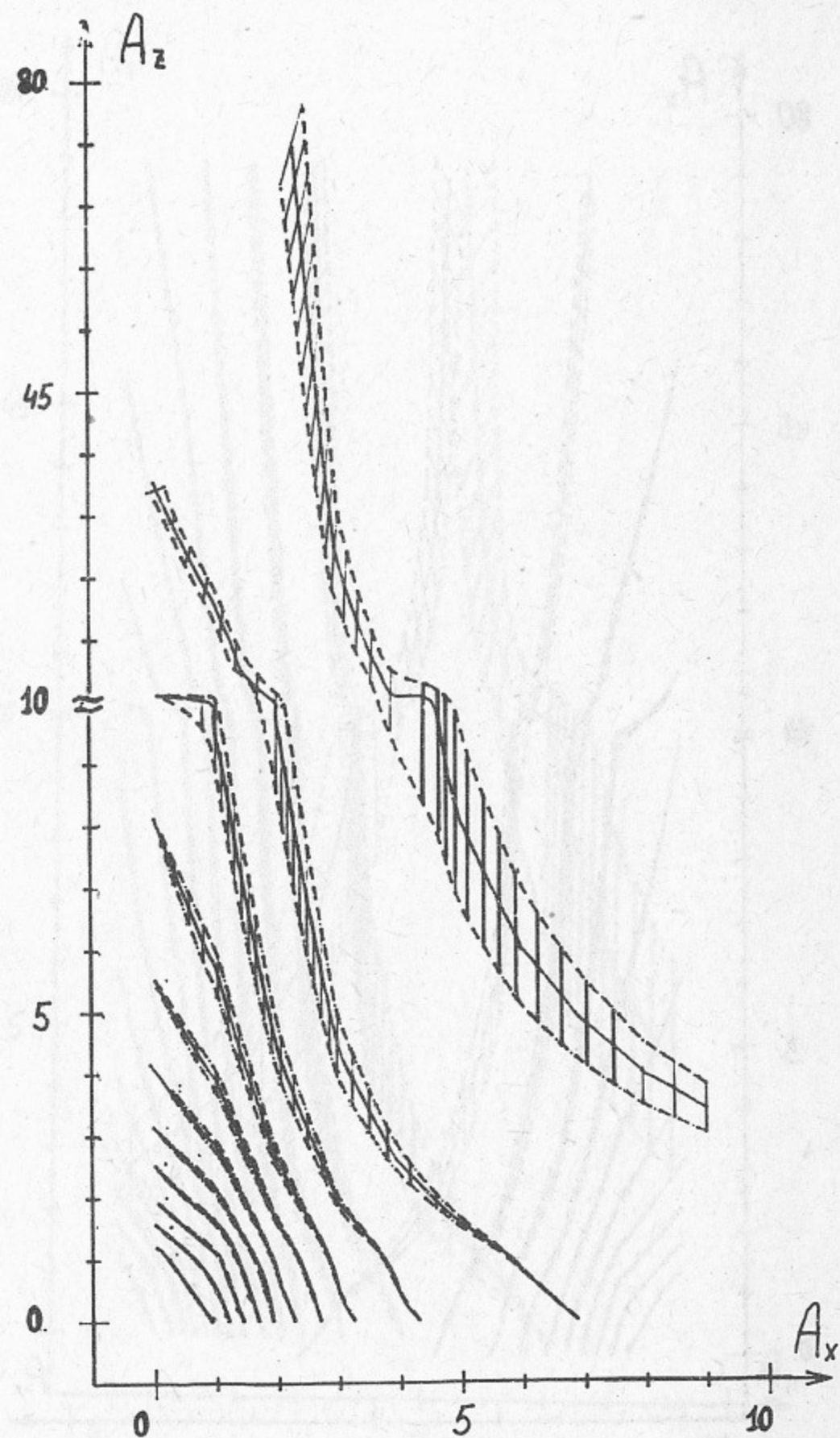


Рис. 2.  $l=2, m=8$ .

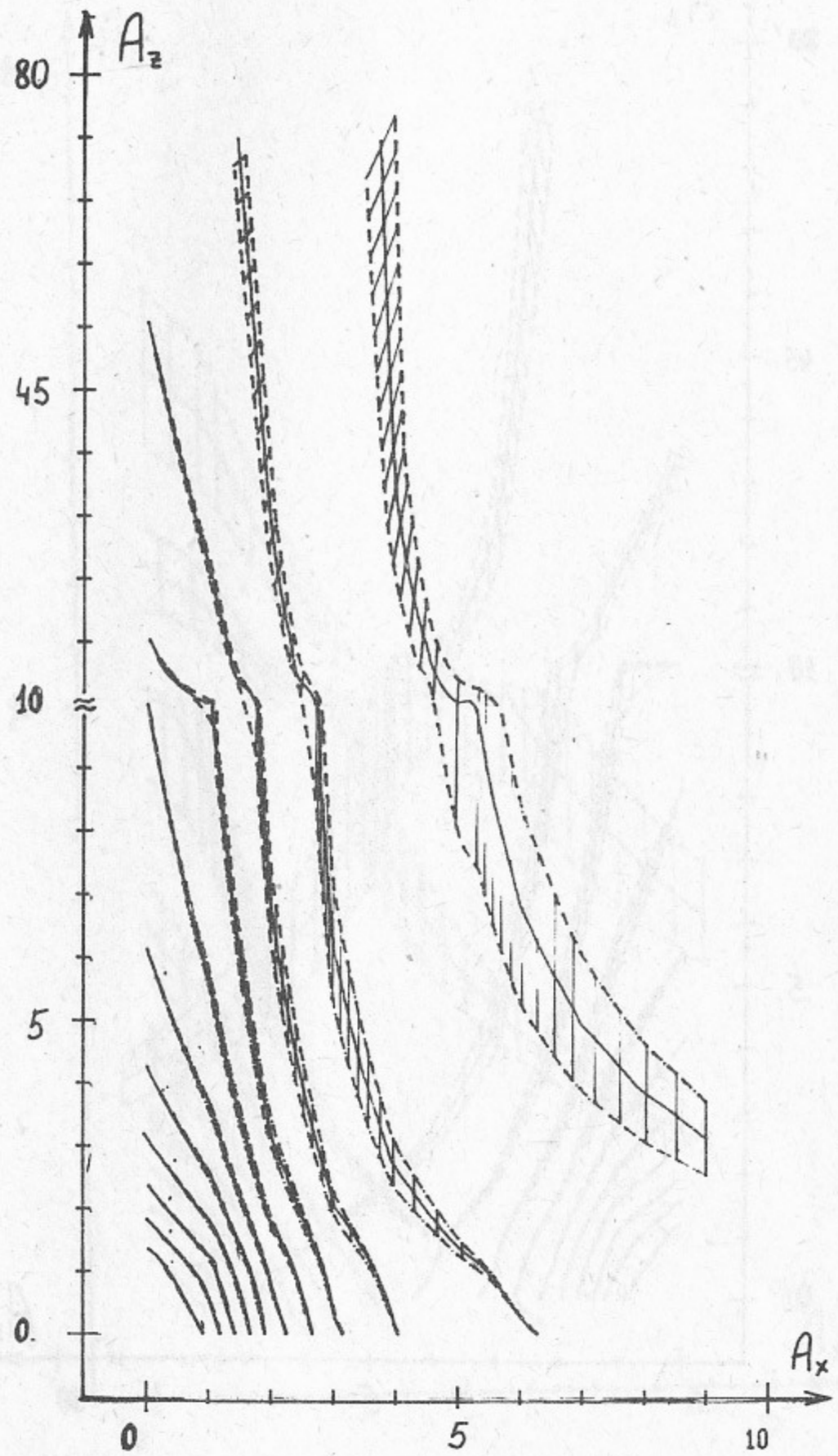


Рис. 3.  $l=4, m=6$ .

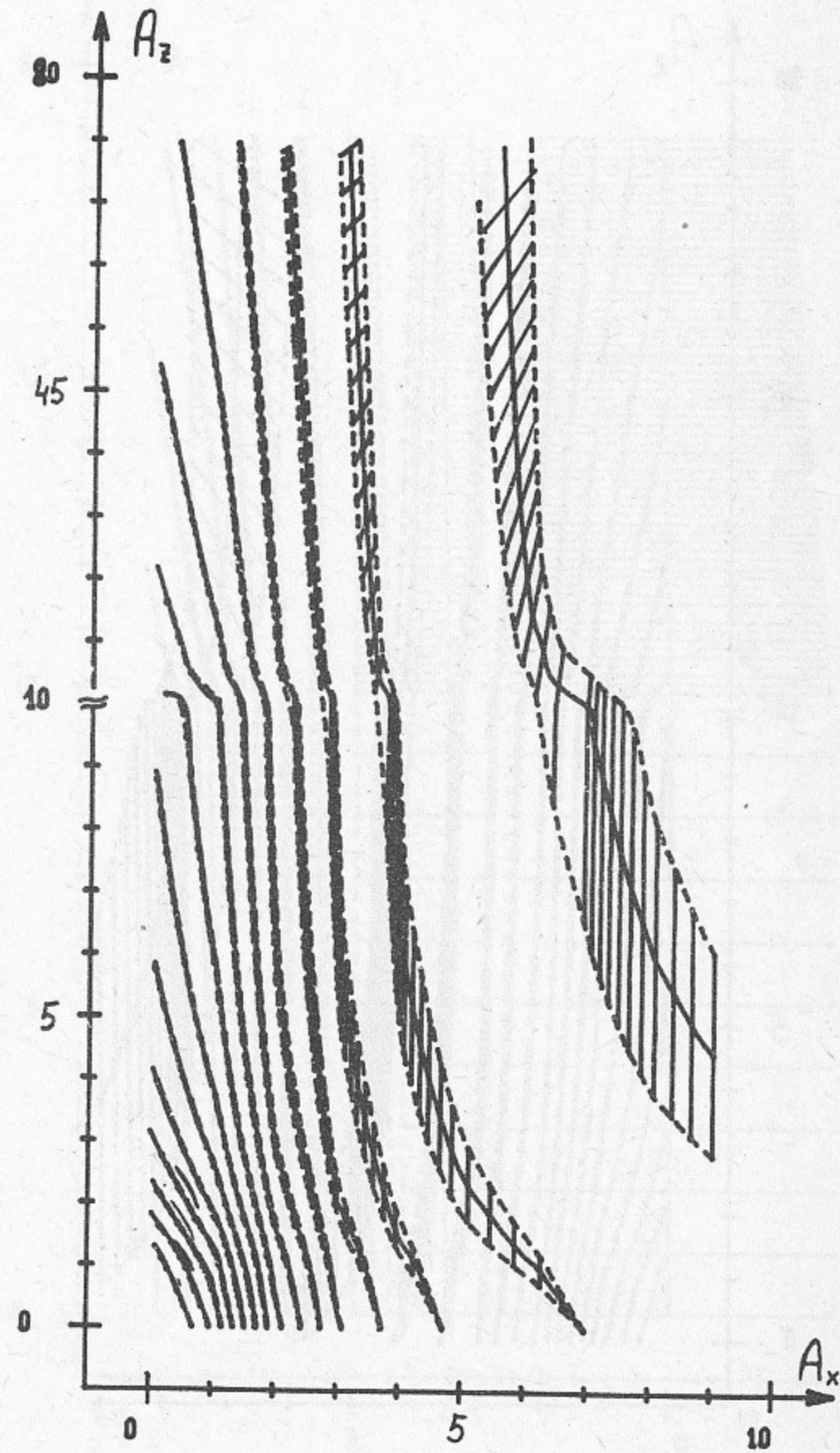


Рис. 4.  $l=6, m=4$ .

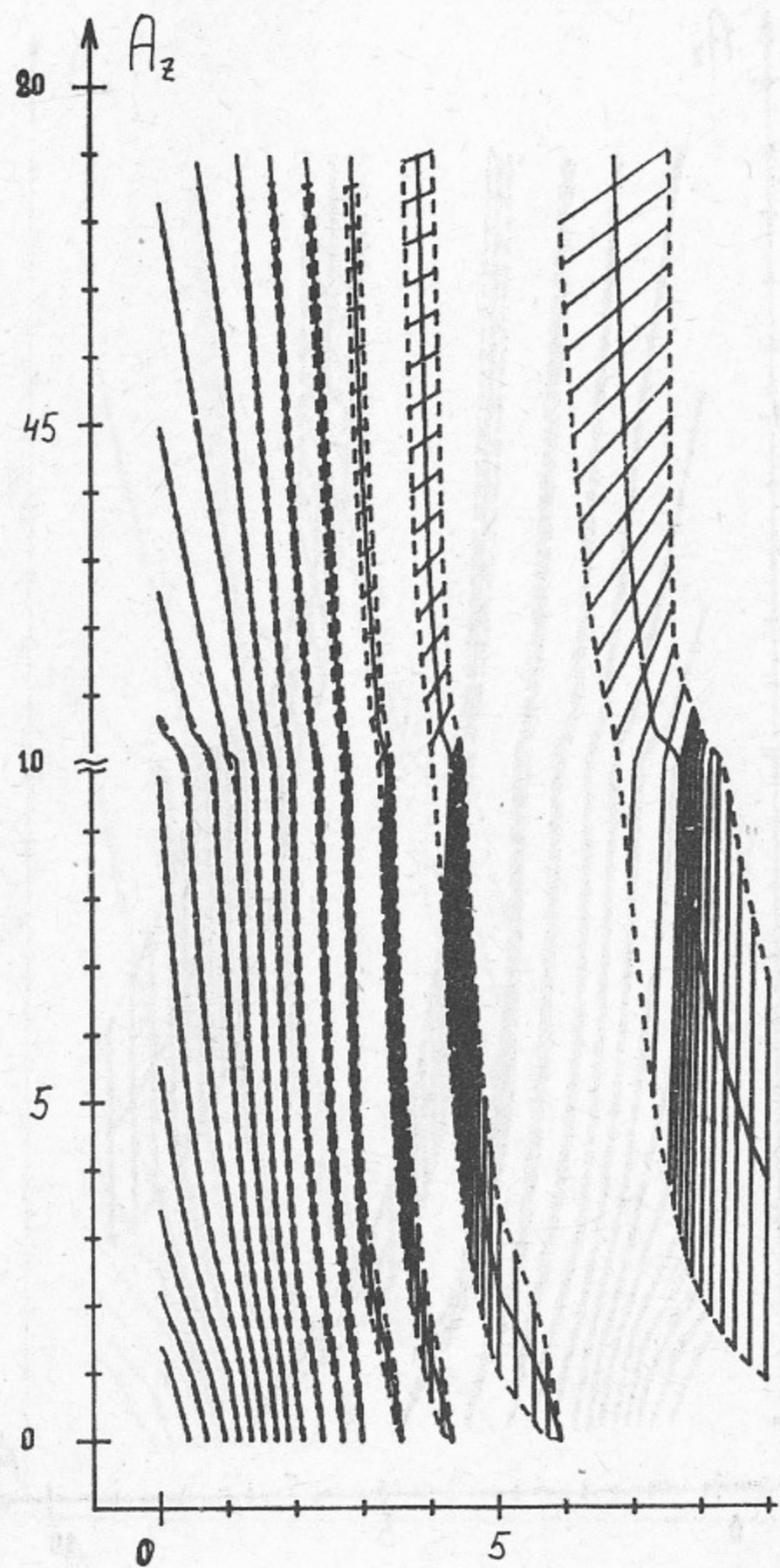


Рис. 5.  $l=8, m=2$ .

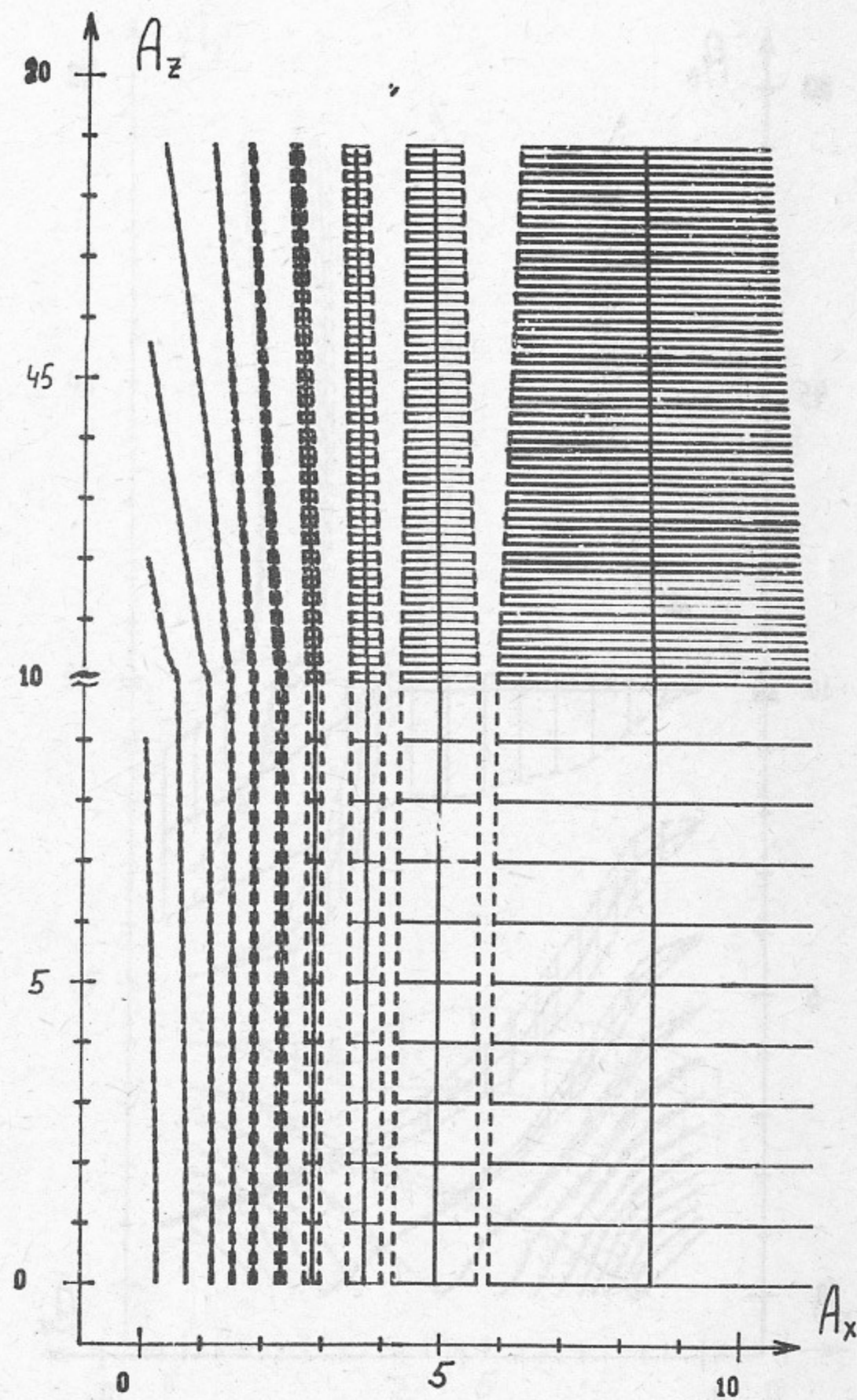


Рис. 6.  $l=10, m=0$ .

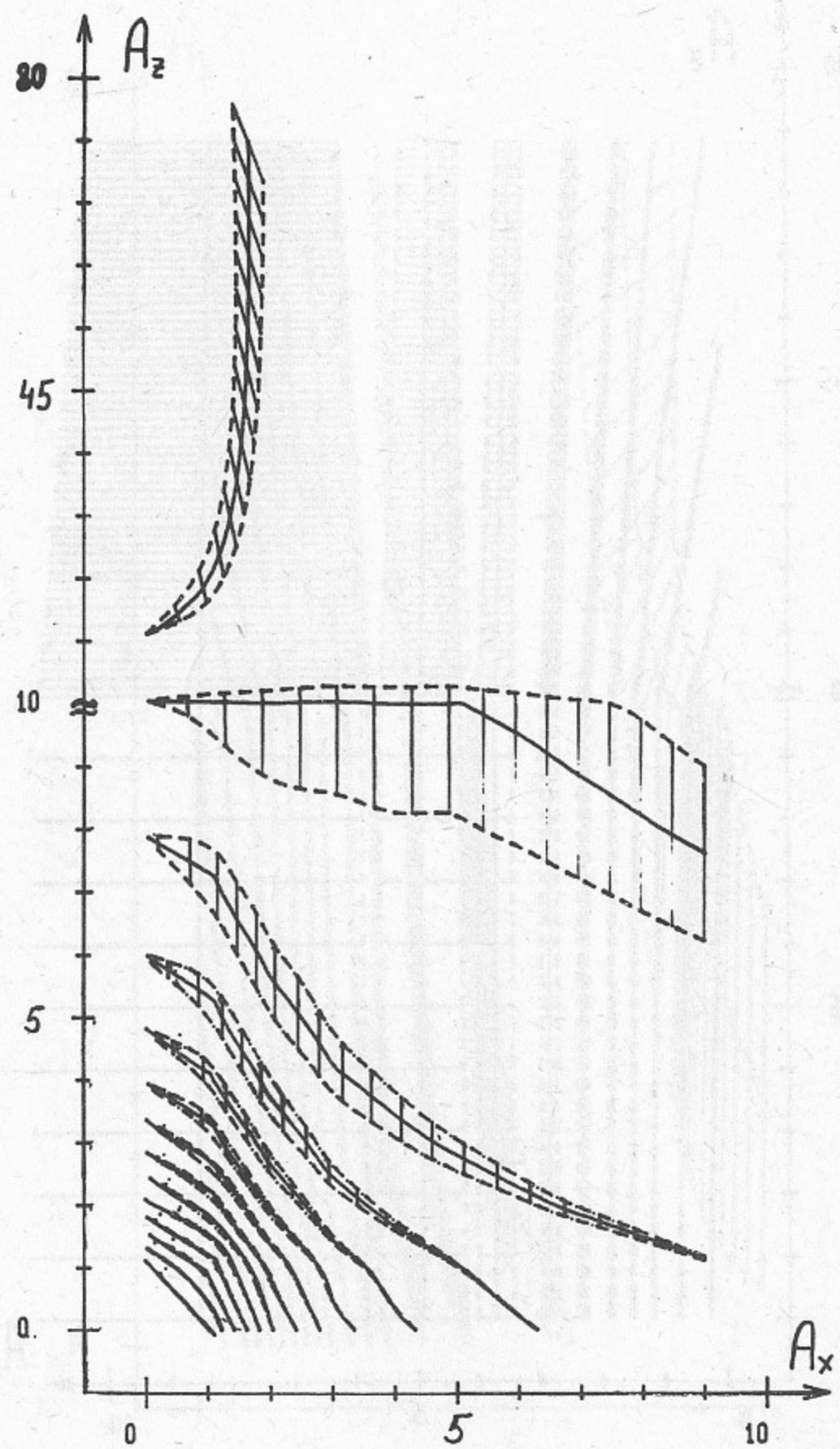


Рис. 7.  $l=2, m=-8$ .

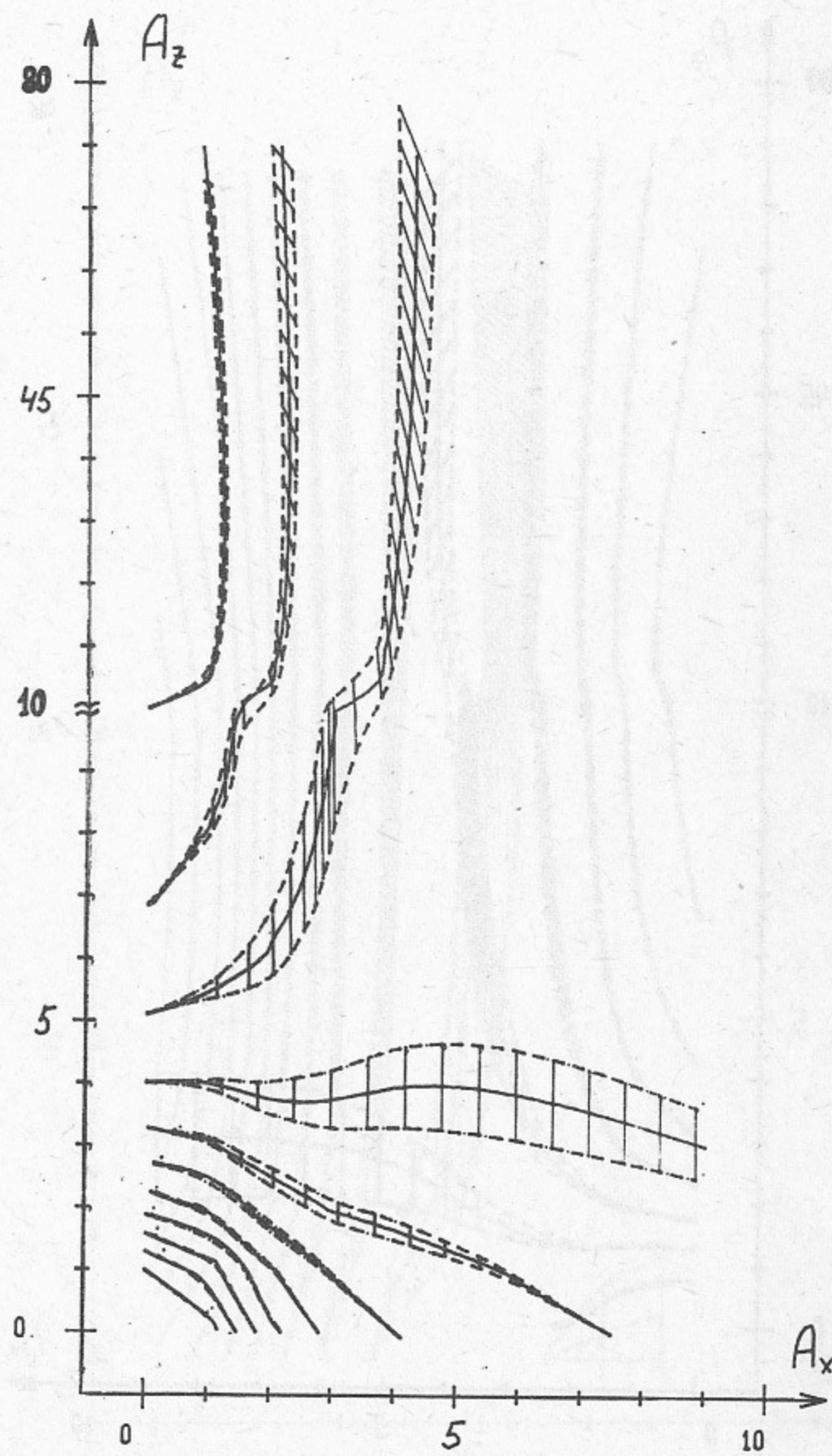


Рис. 8.  $l=4, m=-6$ .

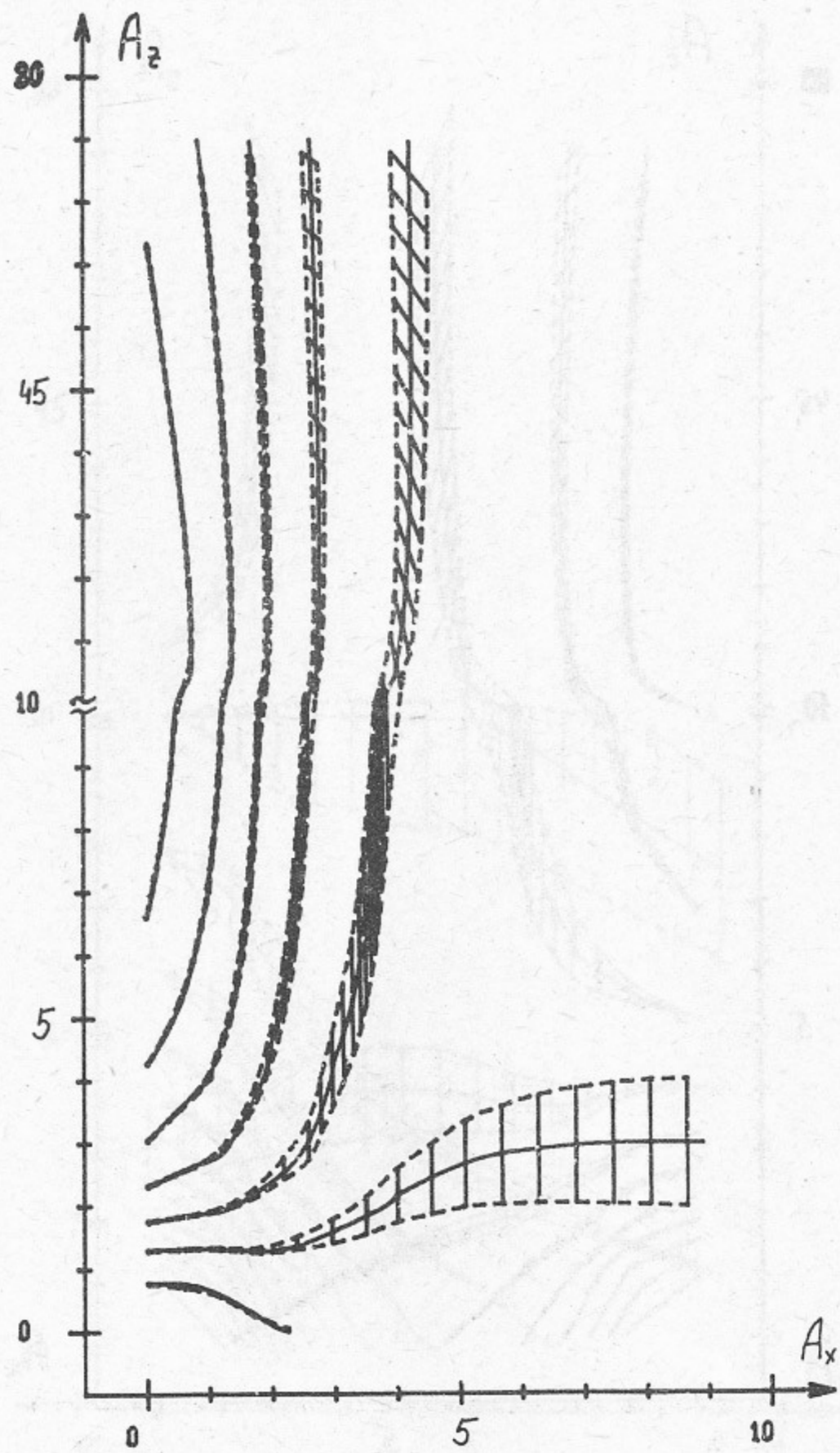


Рис. 9.  $l=6, m=-4$ .

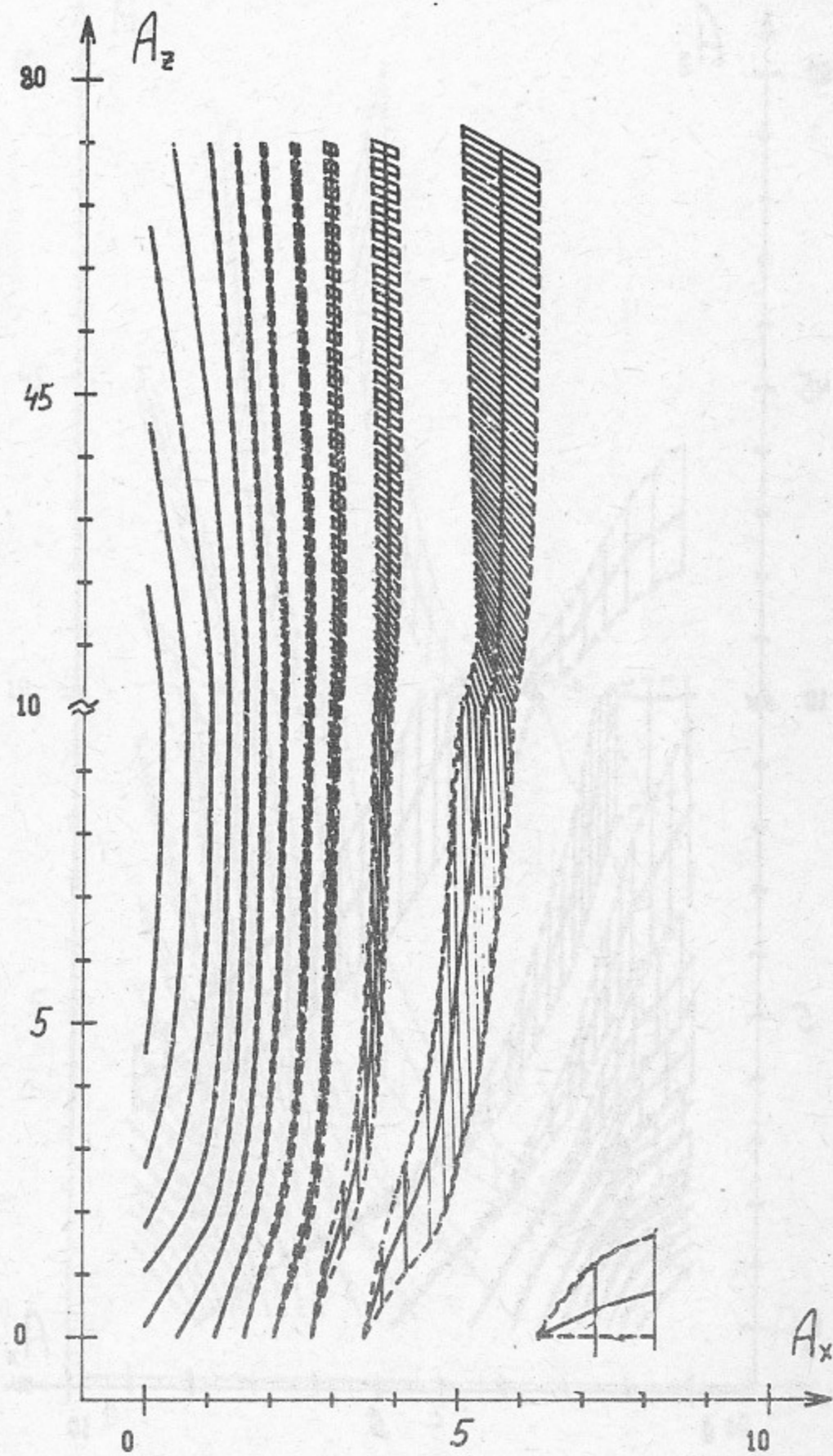


Рис. 10.  $l=8, m=-2$ .

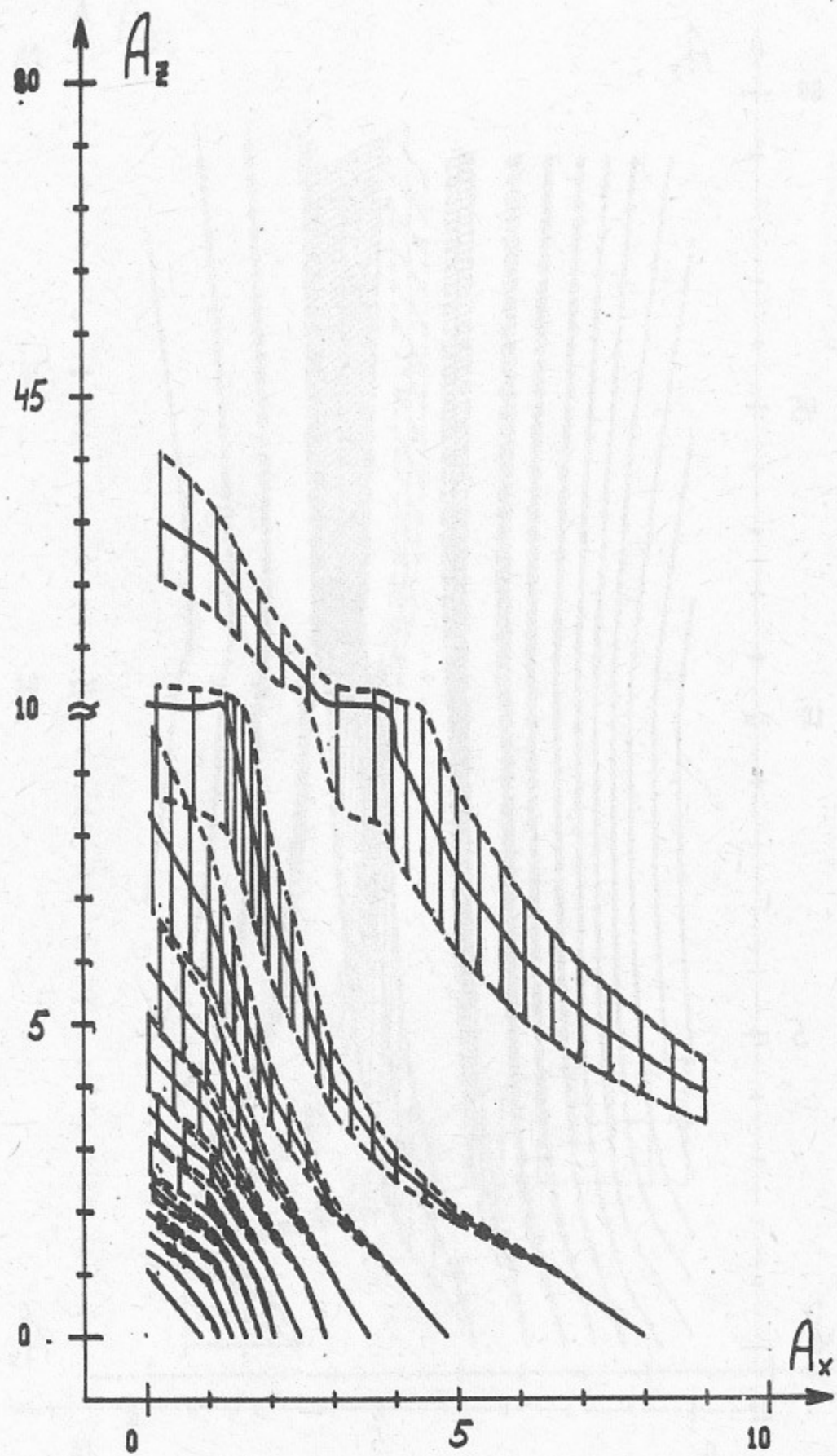


Рис. 11.  $l=0, m=8$ .

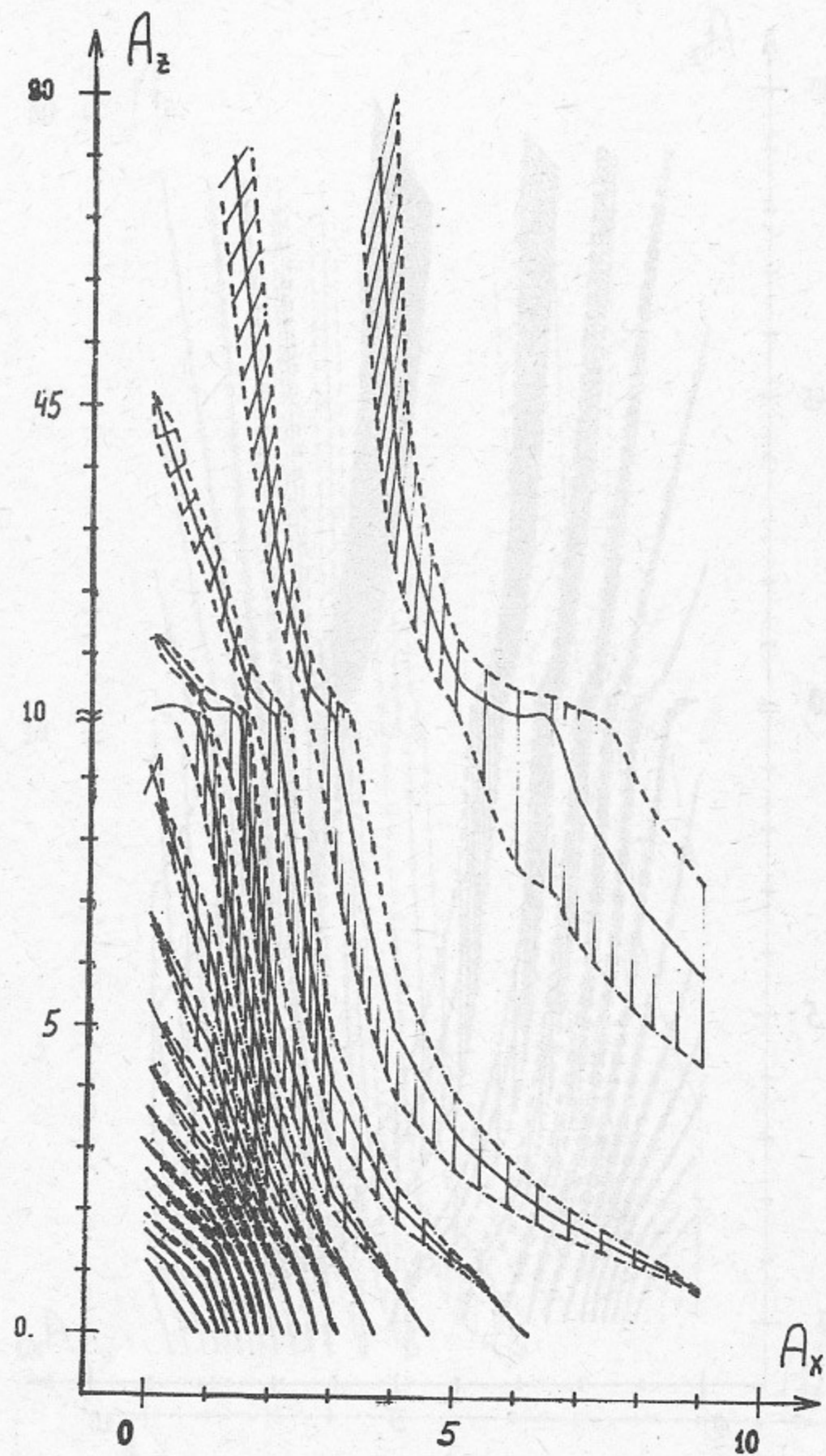


Рис. 12.  $l=2, m=6$ .

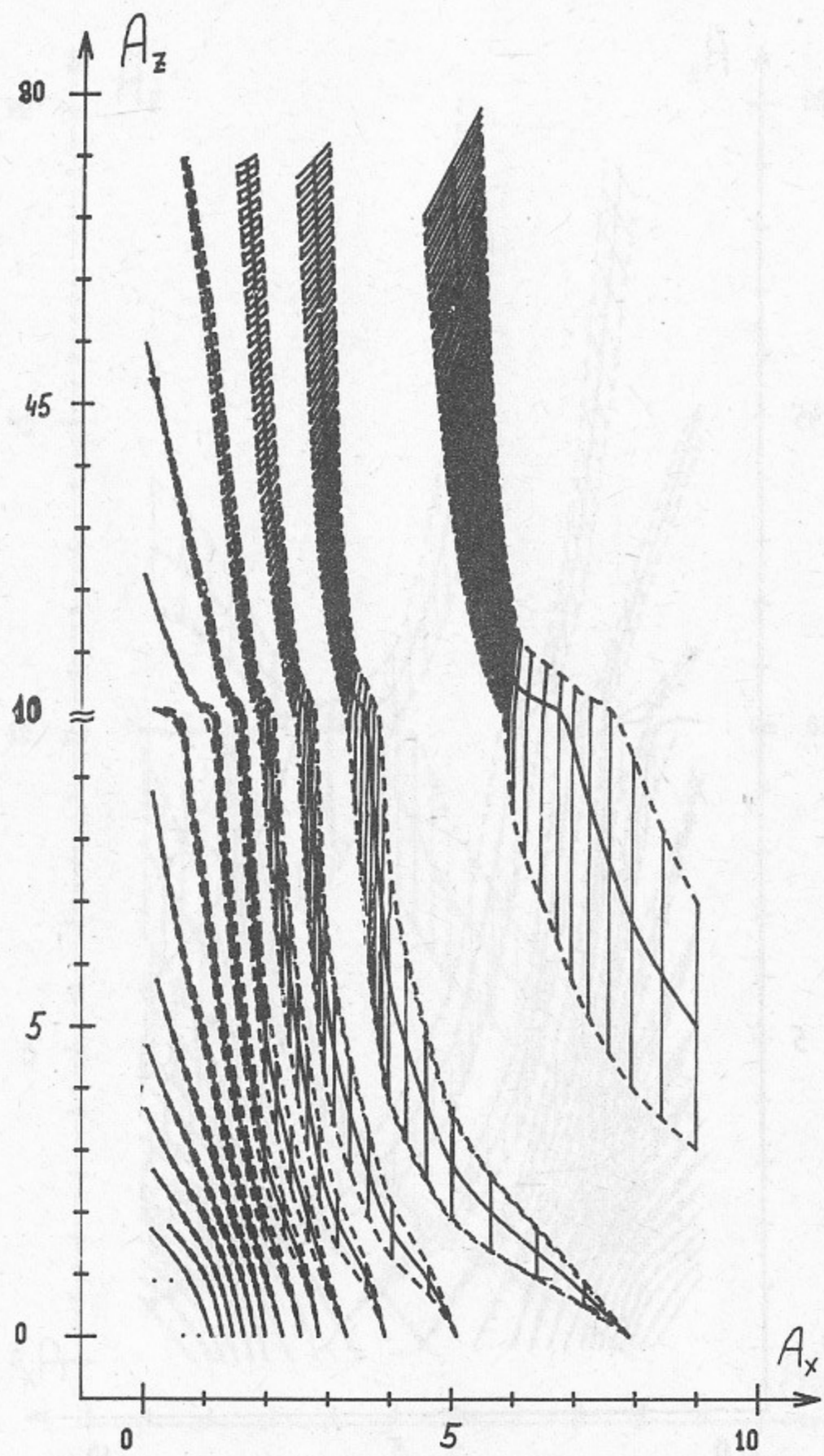


Рис. 13.  $l=4, m=4$ .

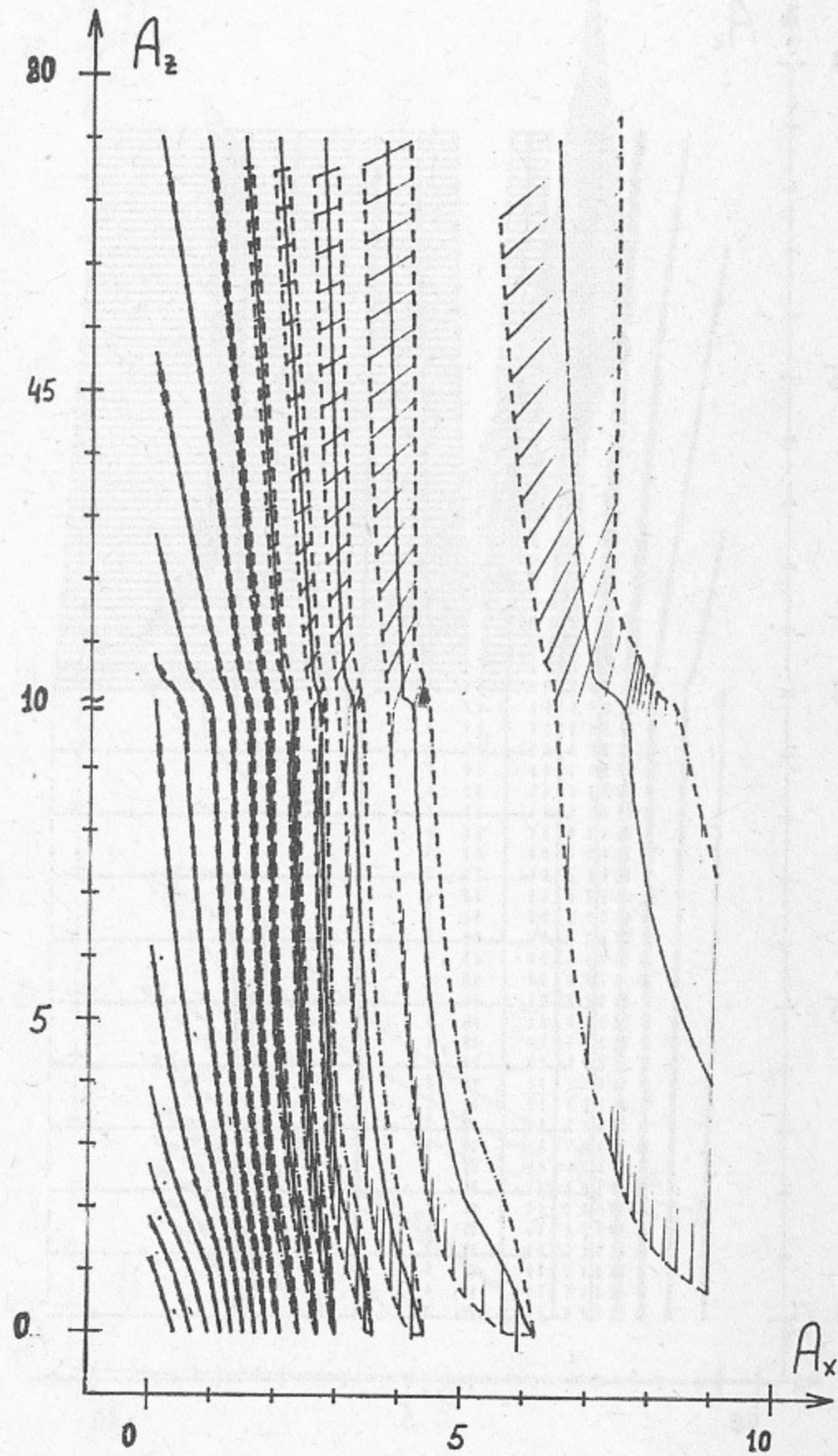


Рис. 14.  $l=6, m=2$ .

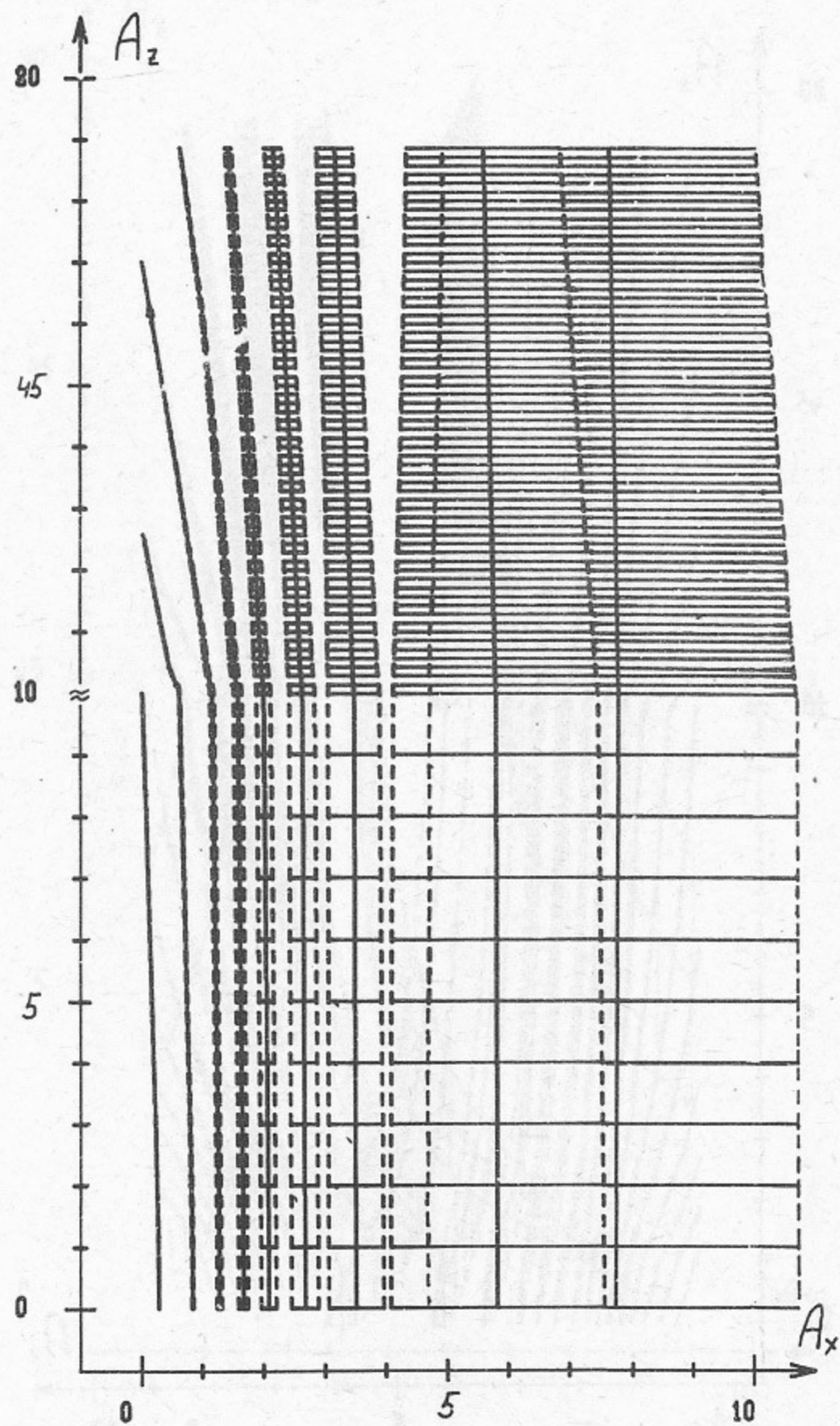


Рис. 15.  $l=8, m=0$ .

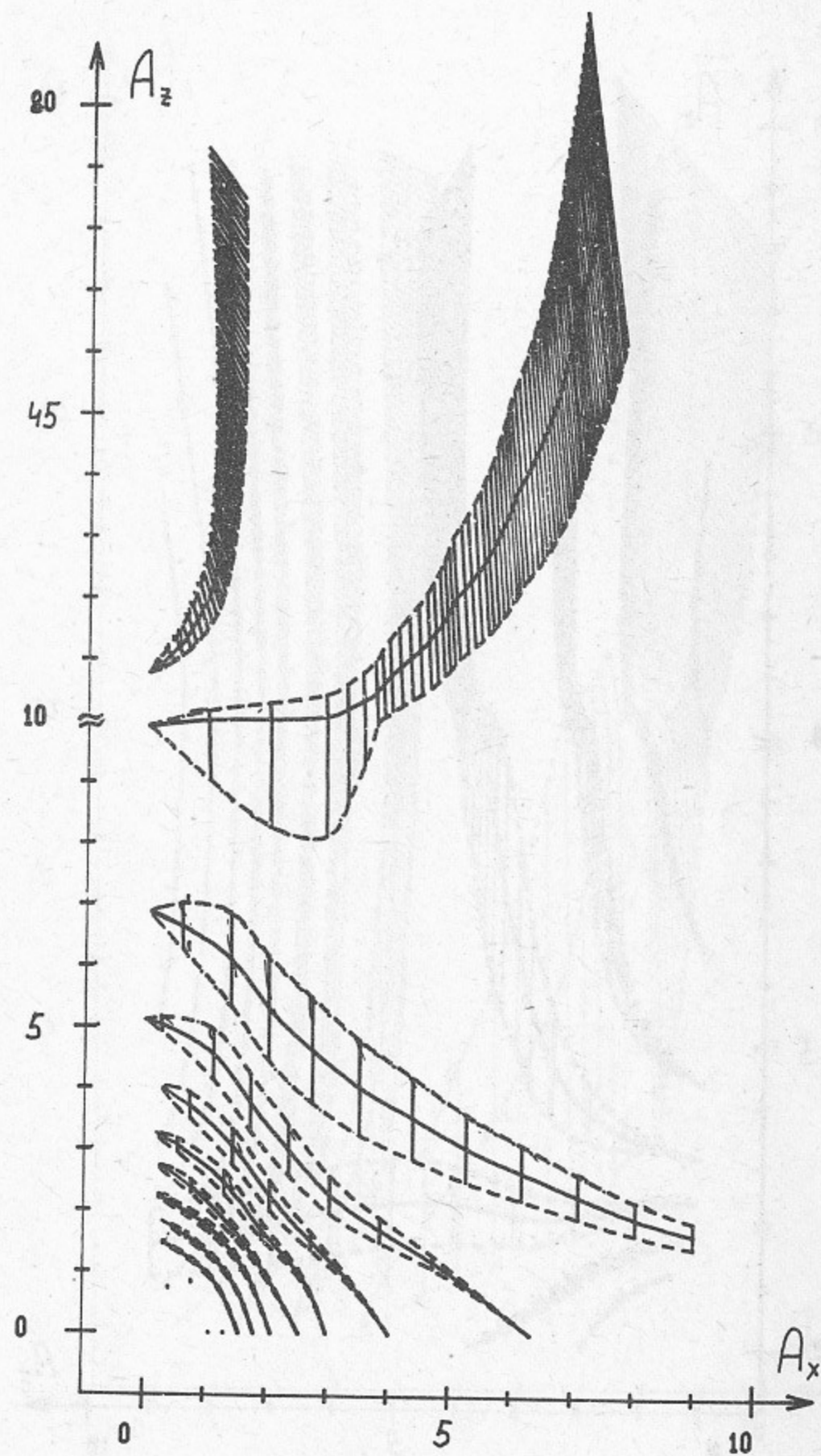


Рис. 16.  $l=2, m=-6$ .



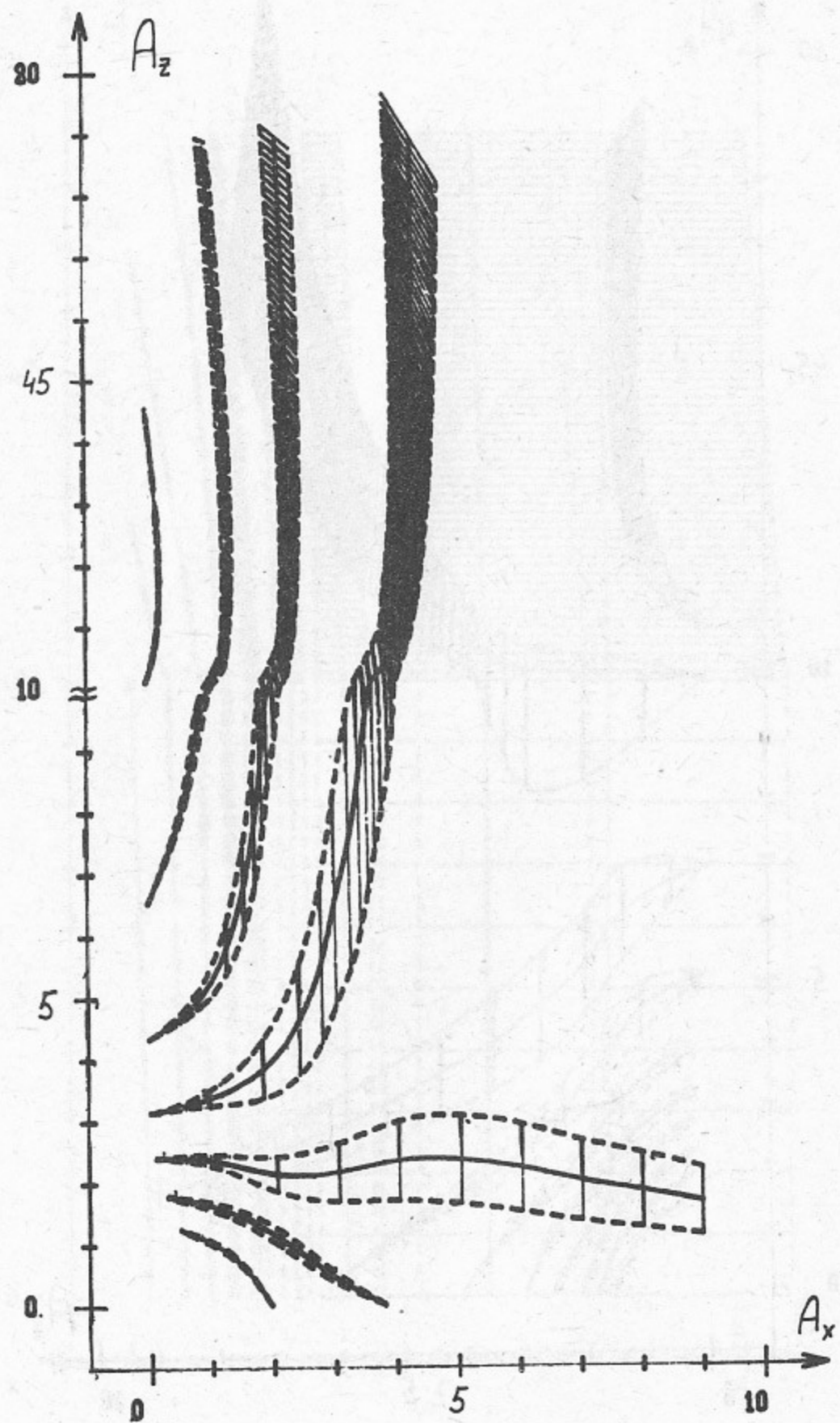


Рис. 17.  $l=4, m=-4$ .

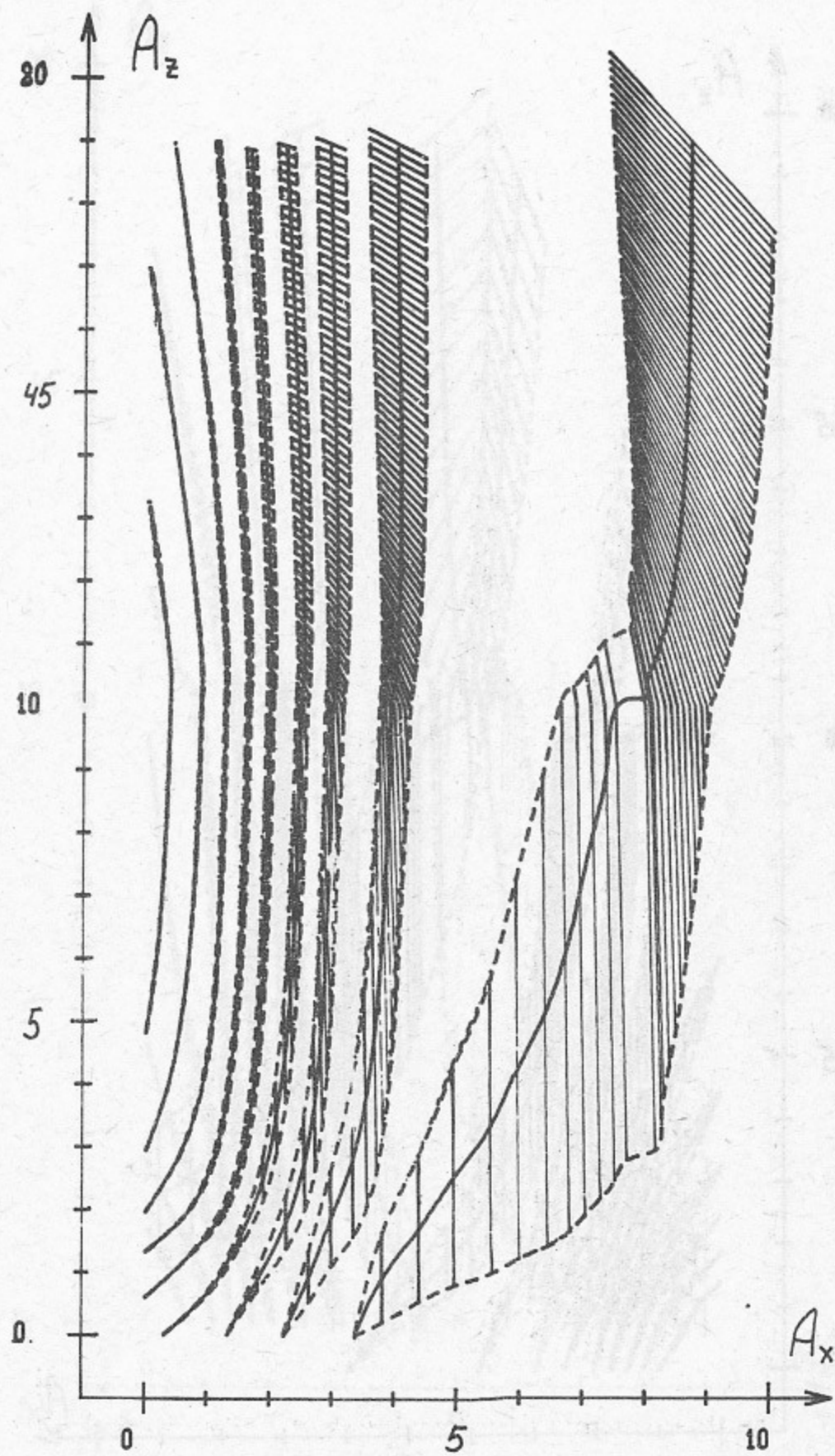


Рис. 18.  $l=6, m=-2$ .

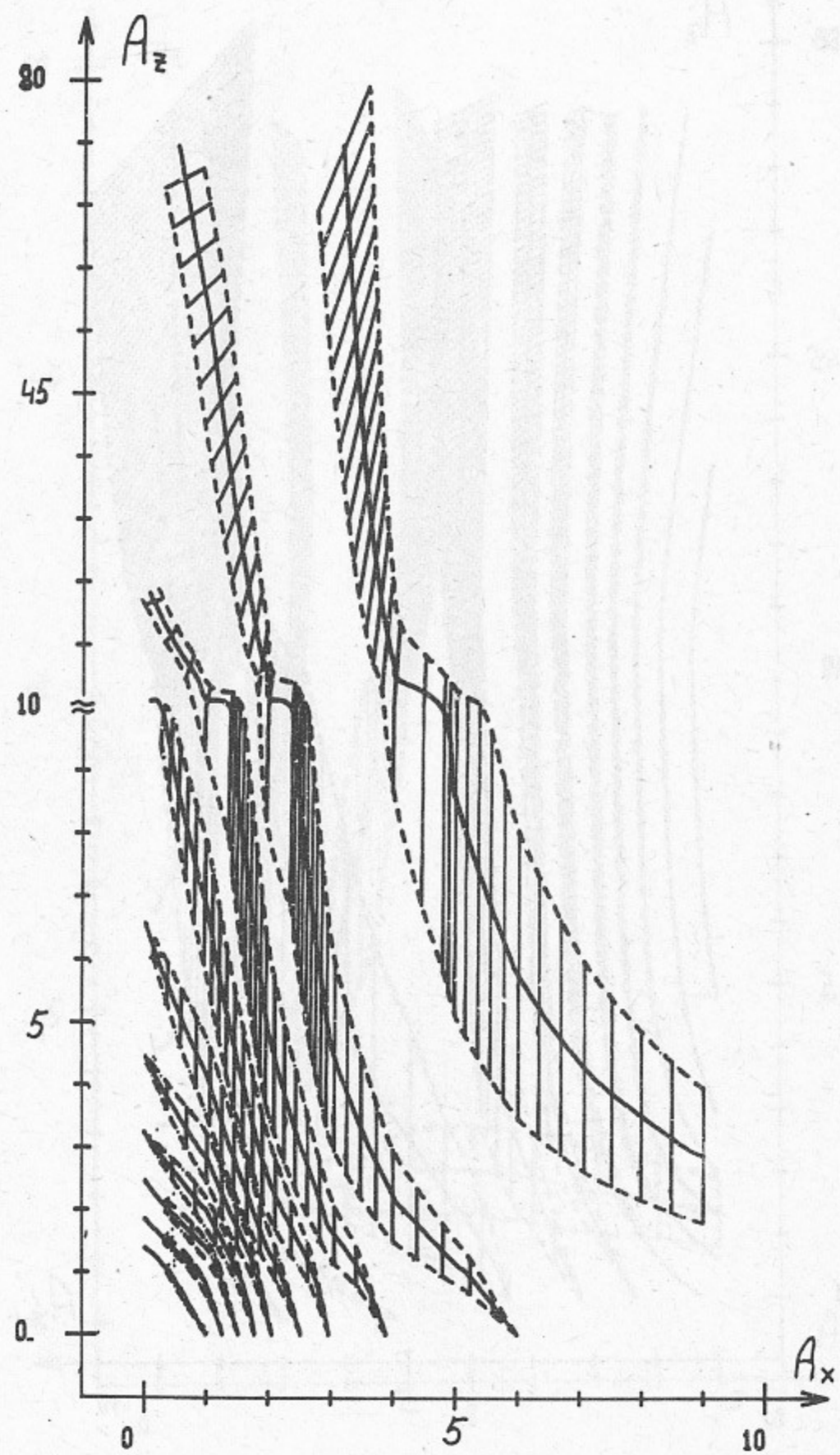


Рис. 19.  $l=2, m=4$ .

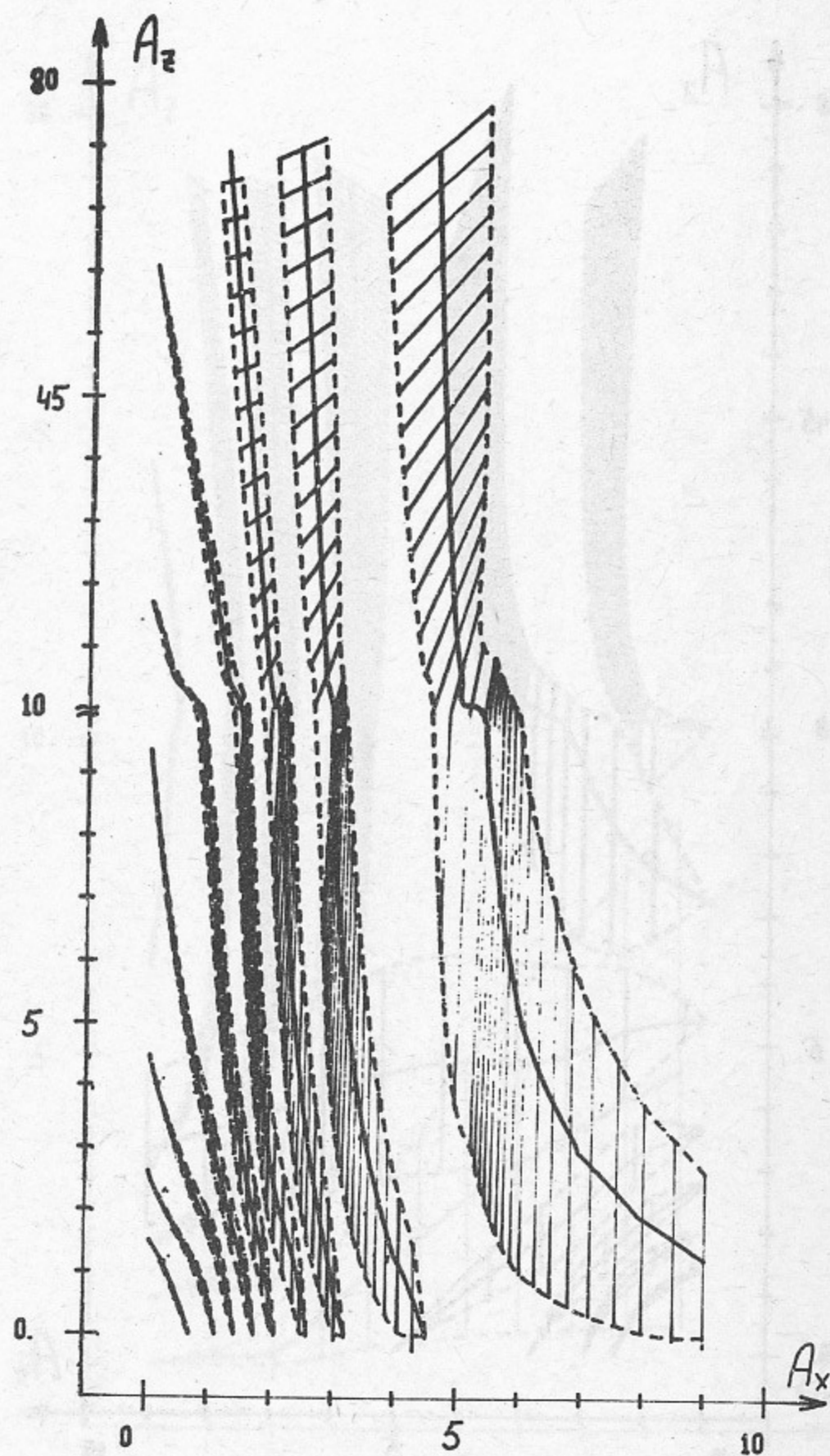


Рис. 20.  $l=4, m=2$ .

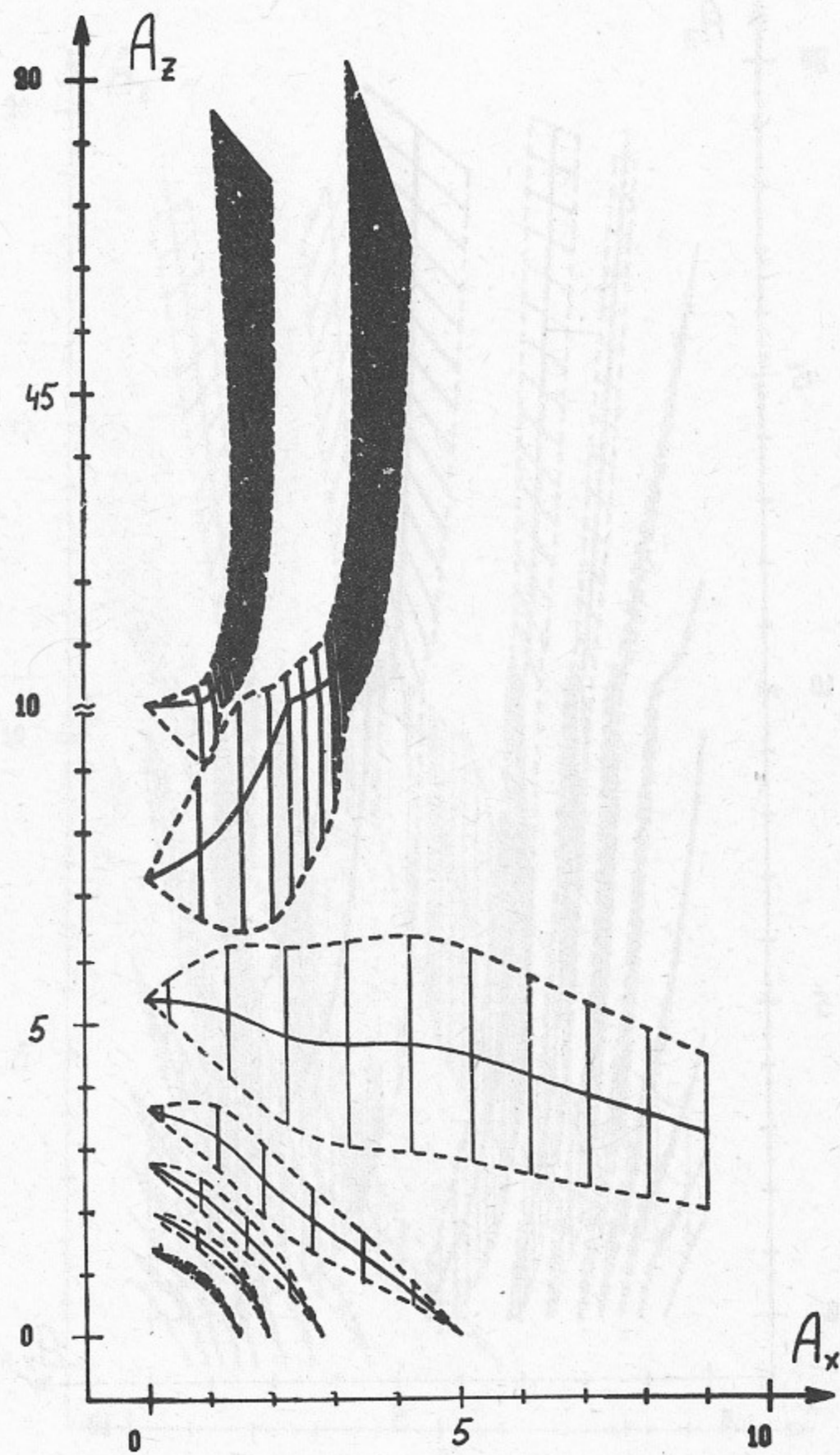


Рис. 21.  $l=2, m=-4$ .

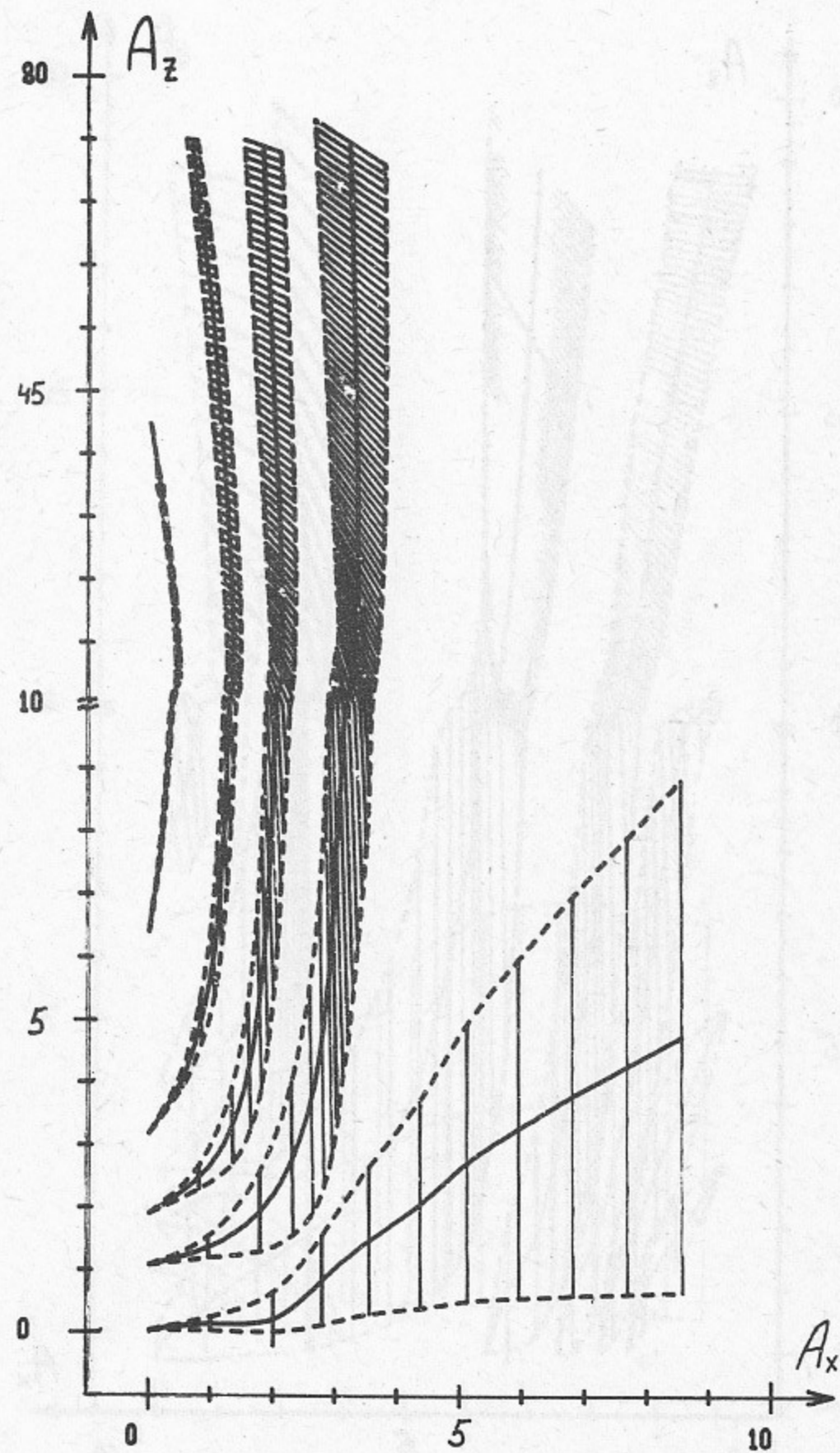


Рис. 22.  $l=4, m=-2$ .

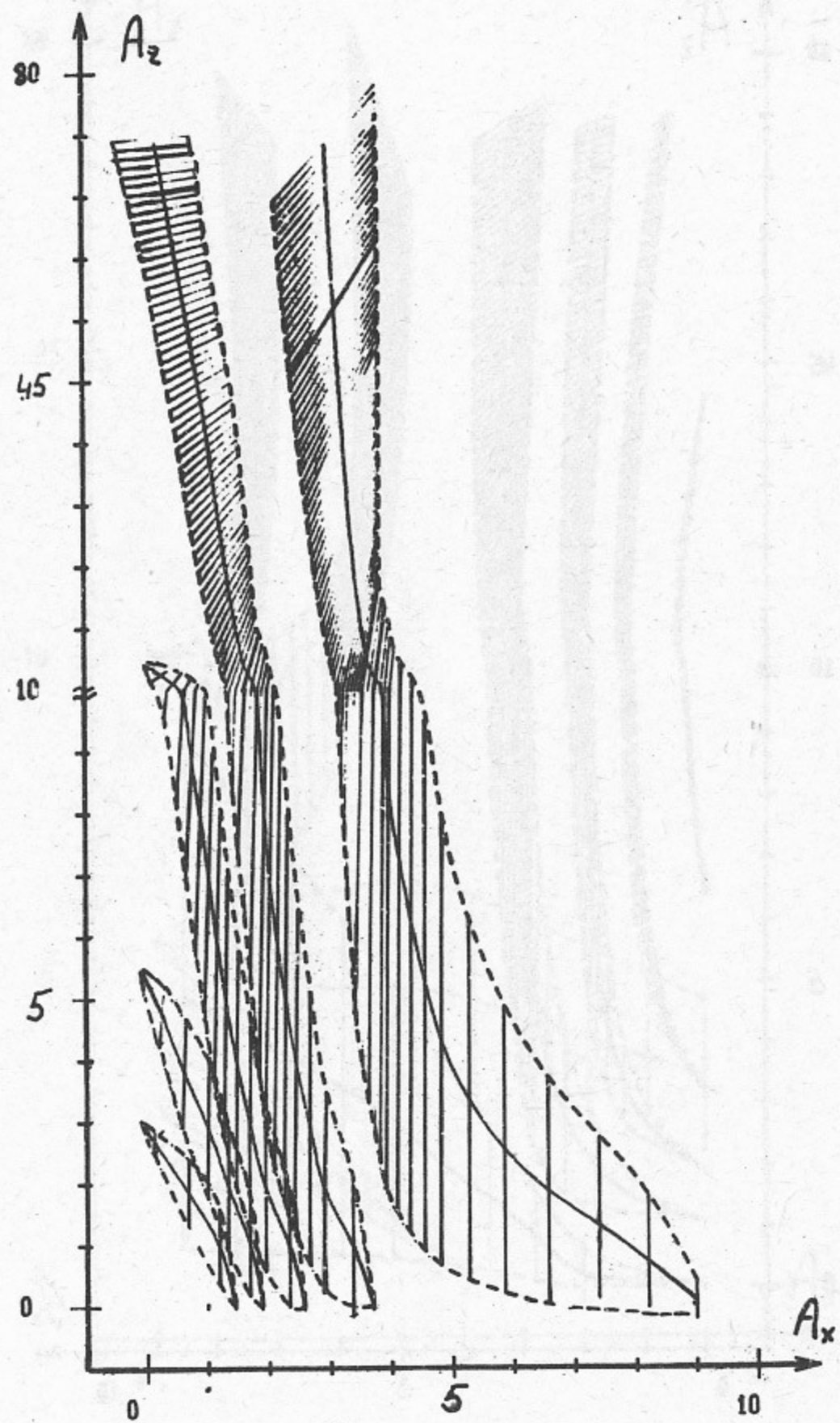


Рис. 23.  $l=2, m=2$ .

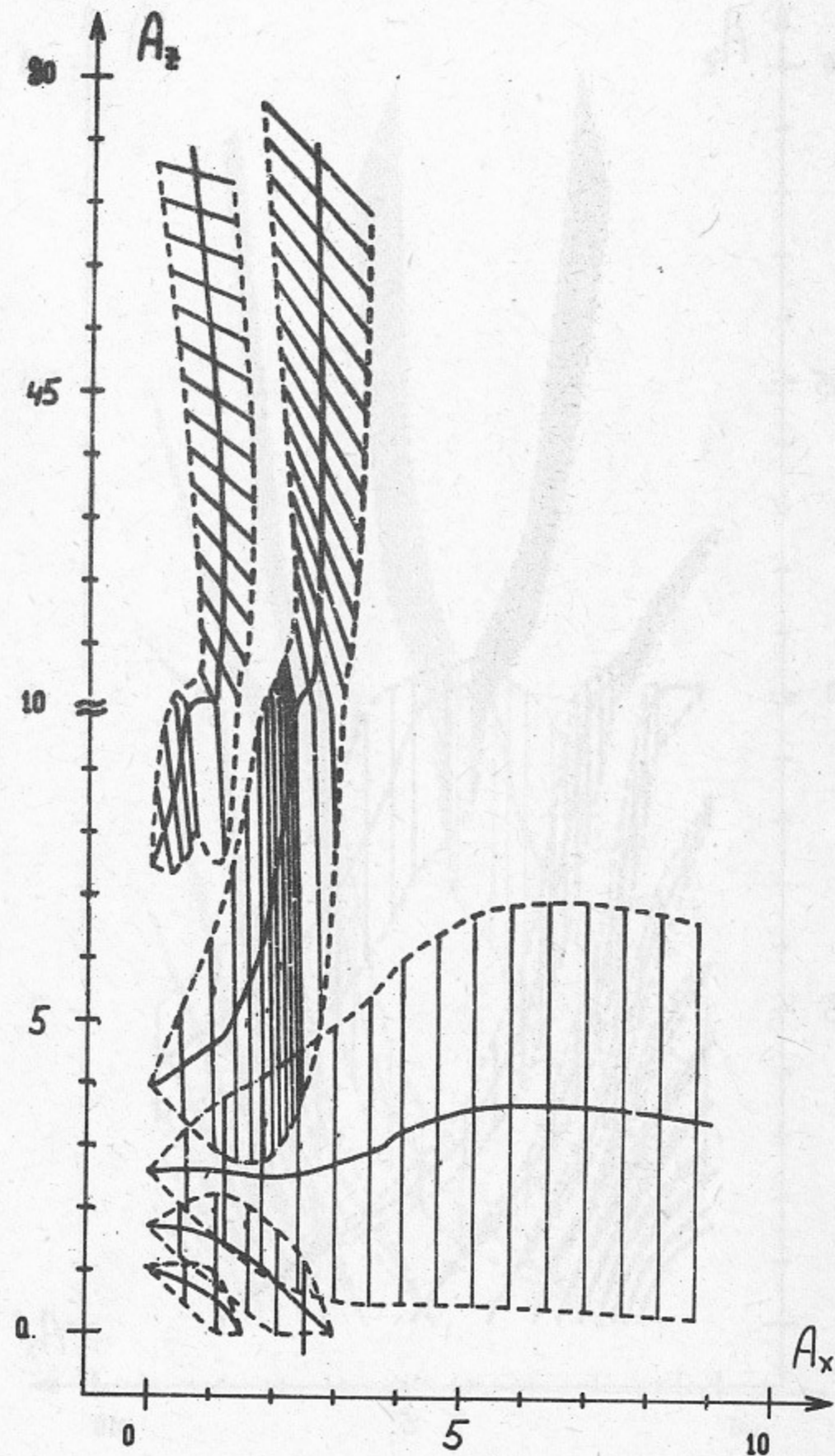
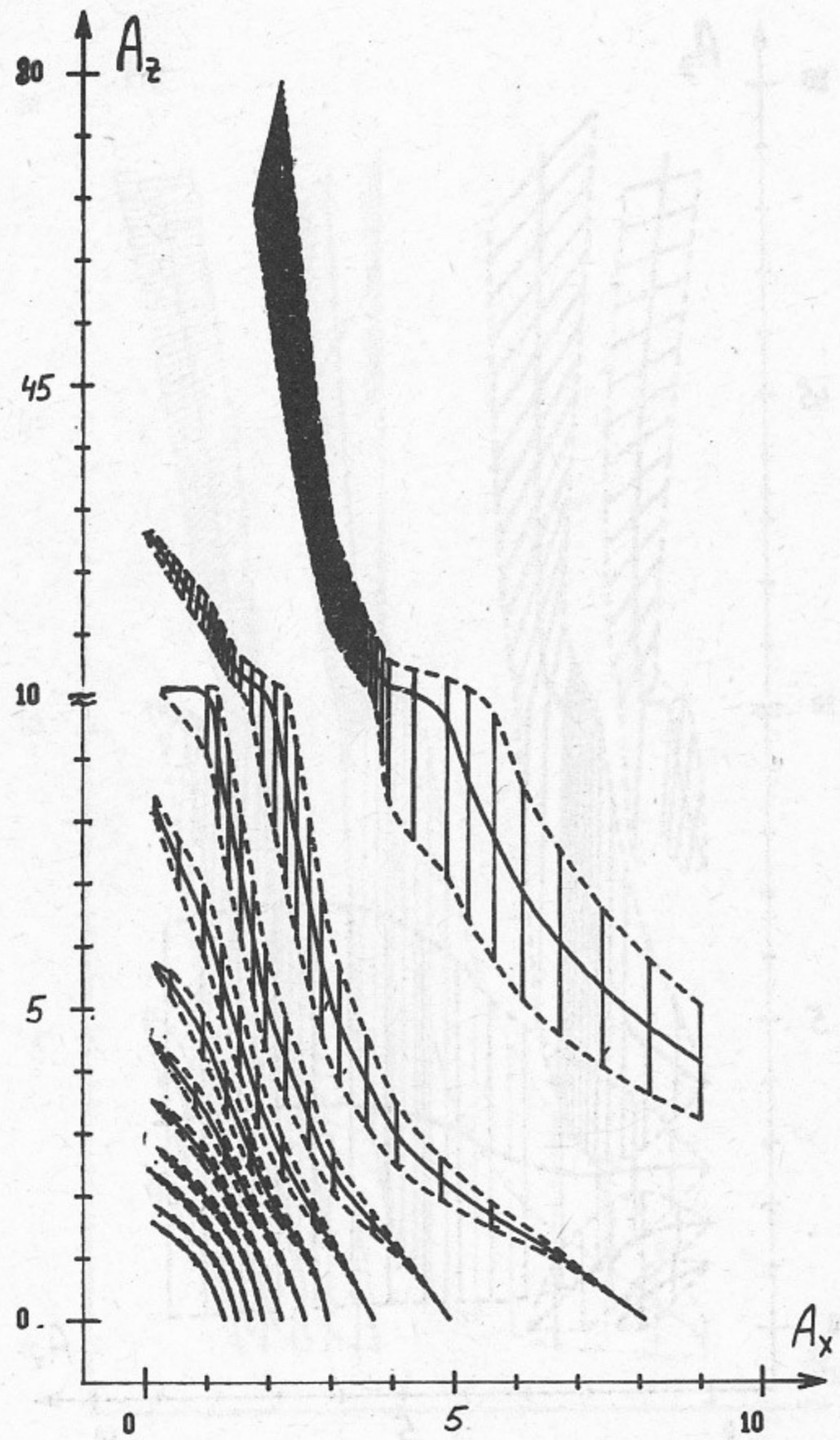
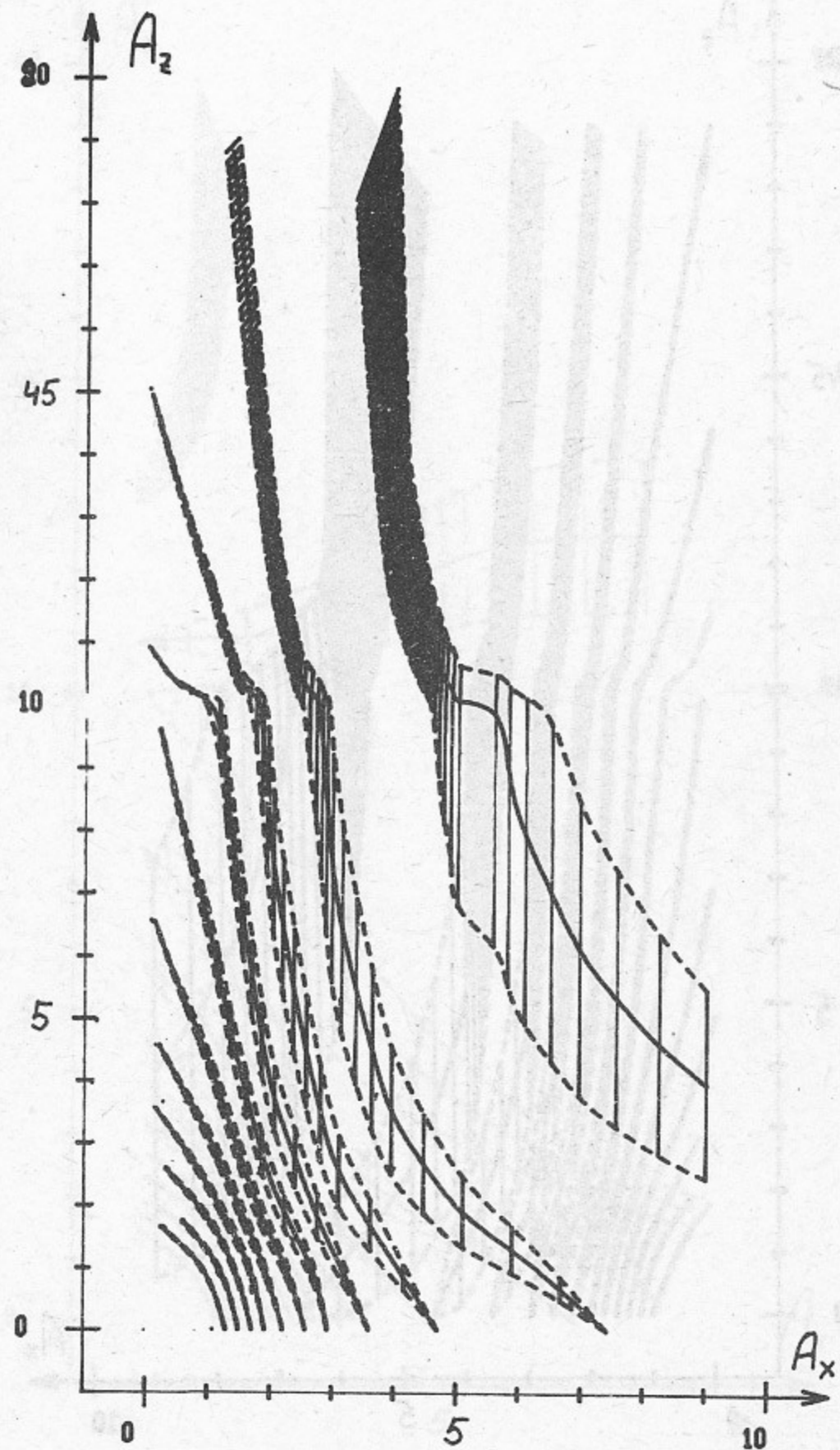


Рис. 24.  $l=2, m=-2$ .



*Puc. 25.  $l=2, m=+6.$*



*Puc. 26.  $l=4, m=4.$*

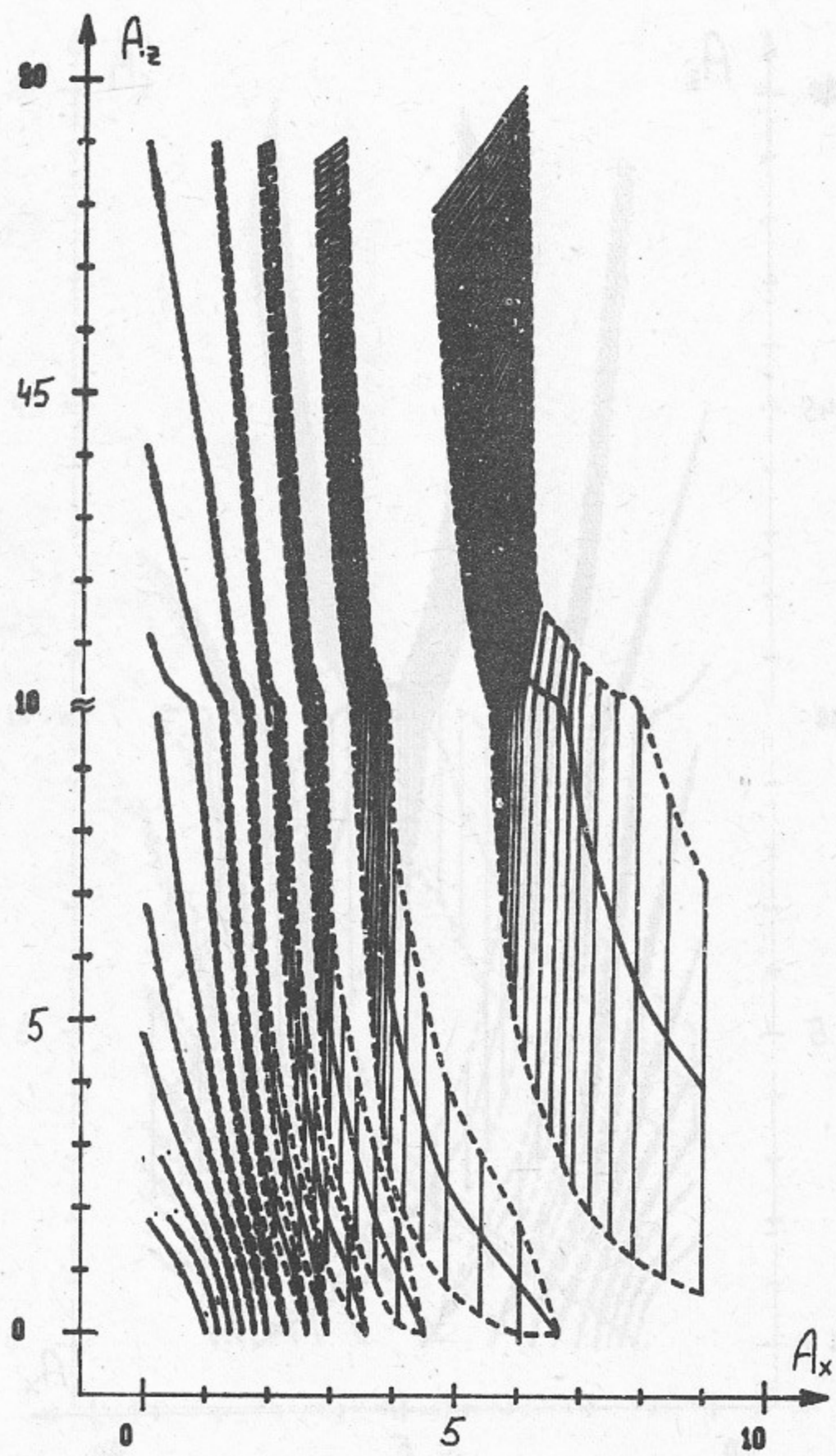


Рис. 27.  $l=6, m=2$ .

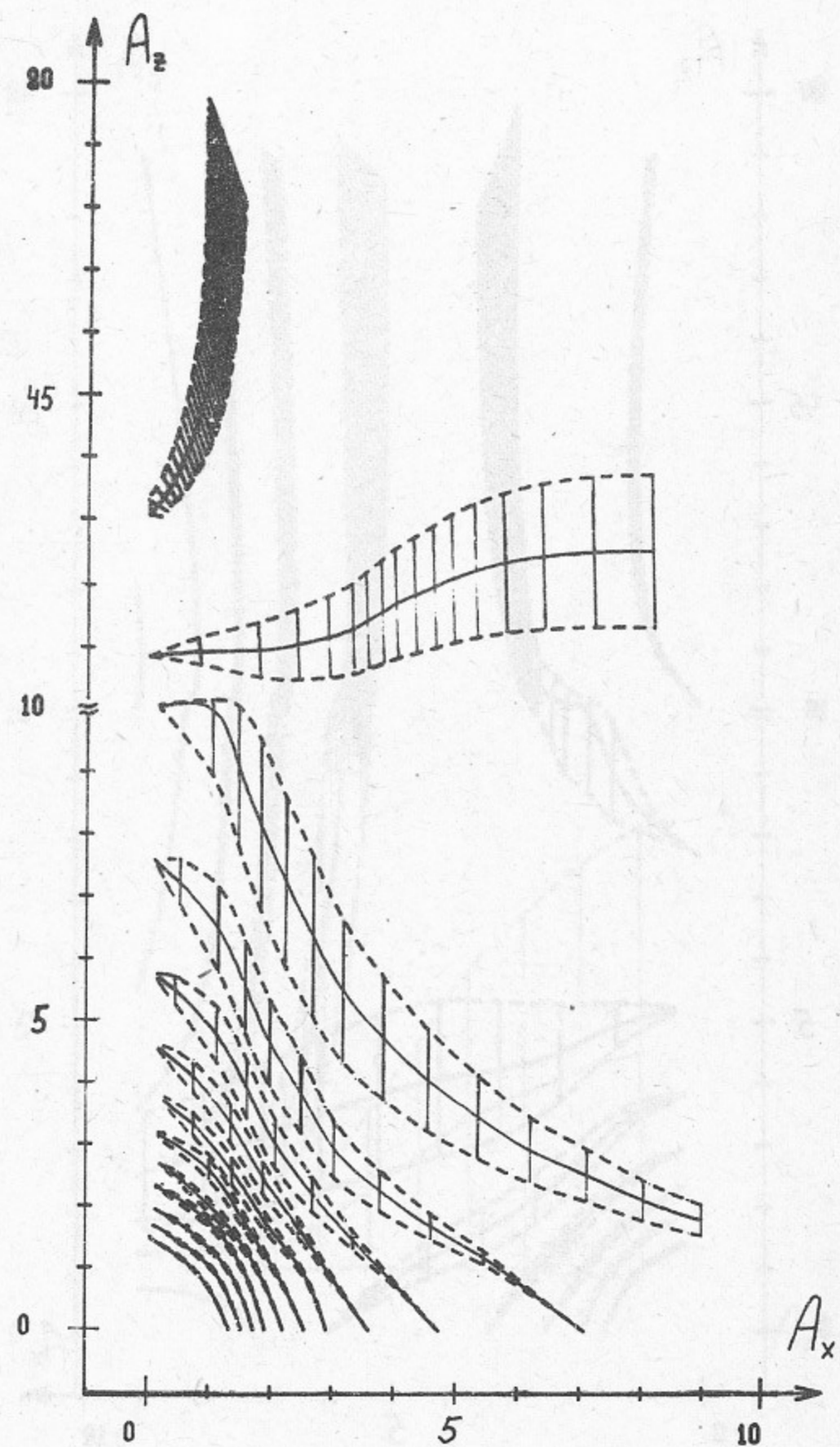


Рис. 28.  $l=2, m=-6$ .

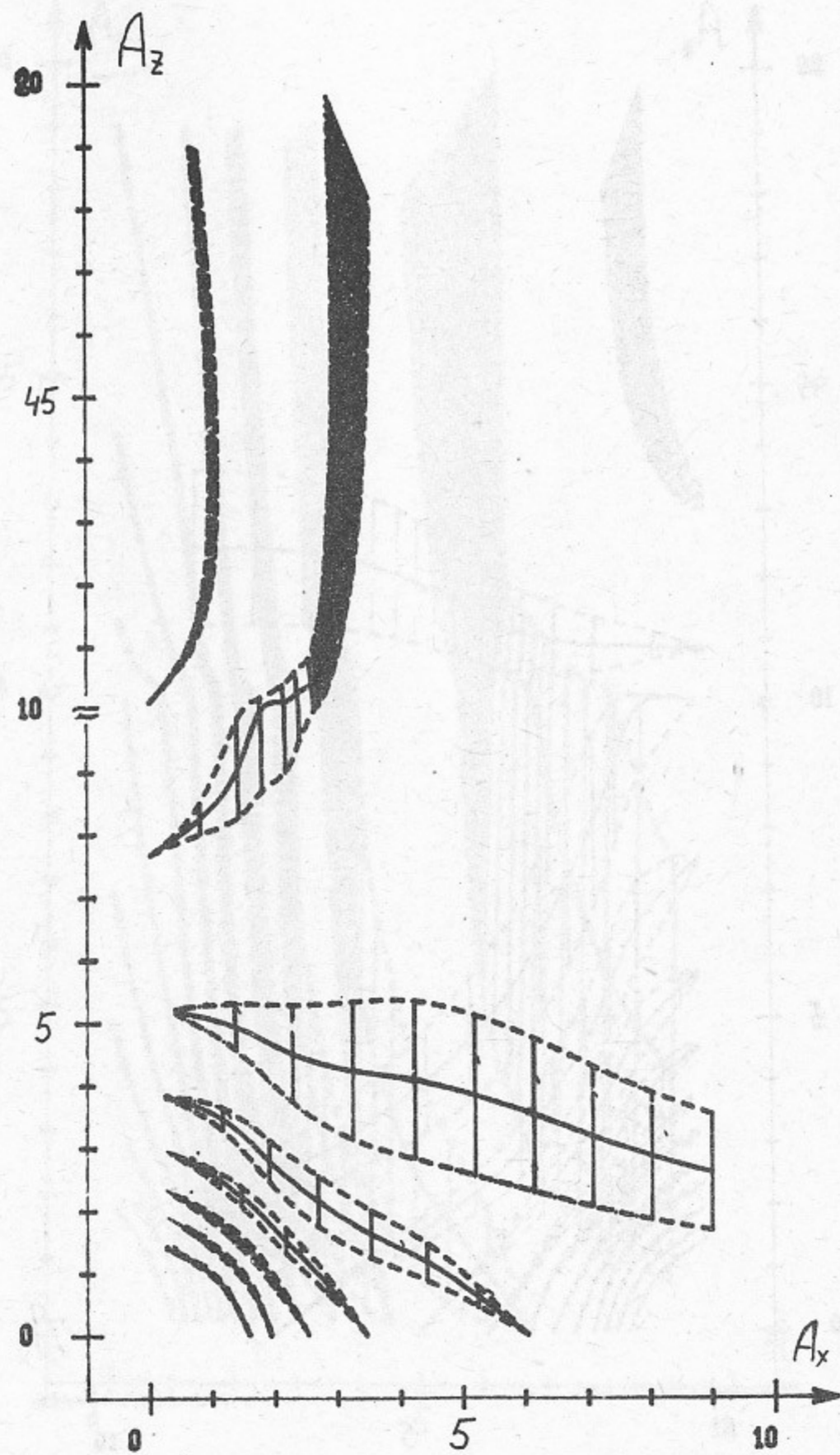


Рис. 29.  $l=4, m=-4$ .

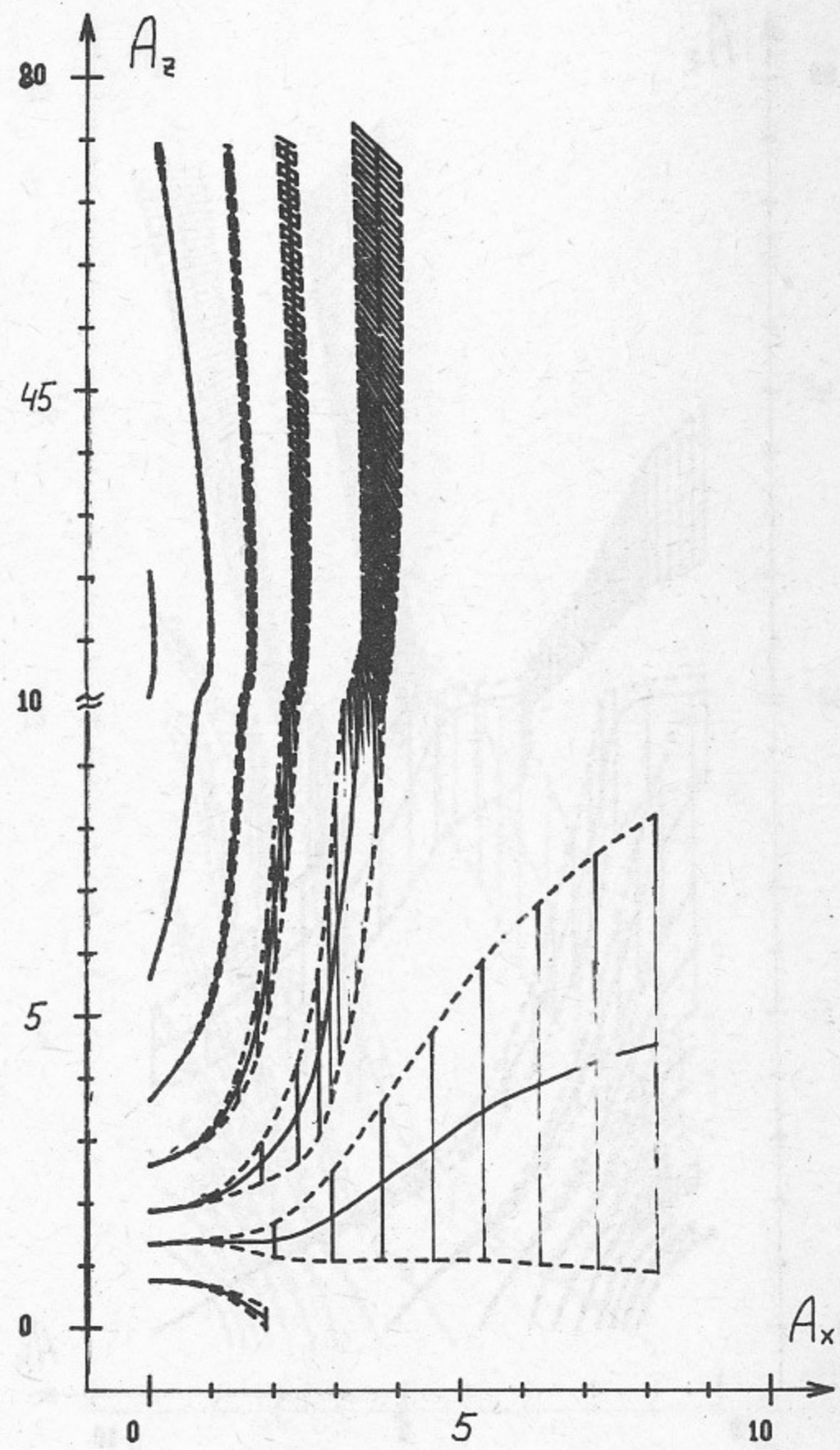
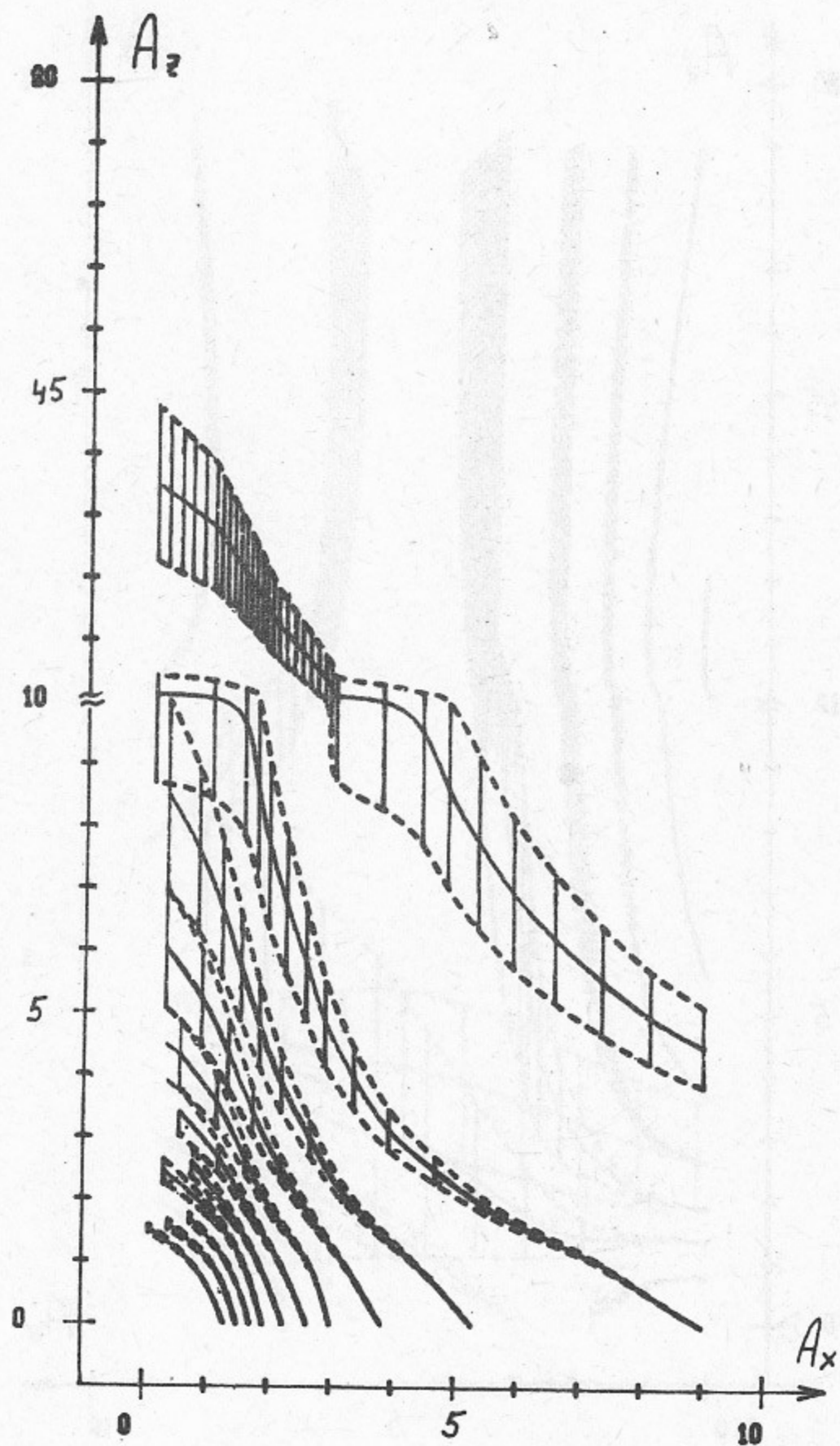
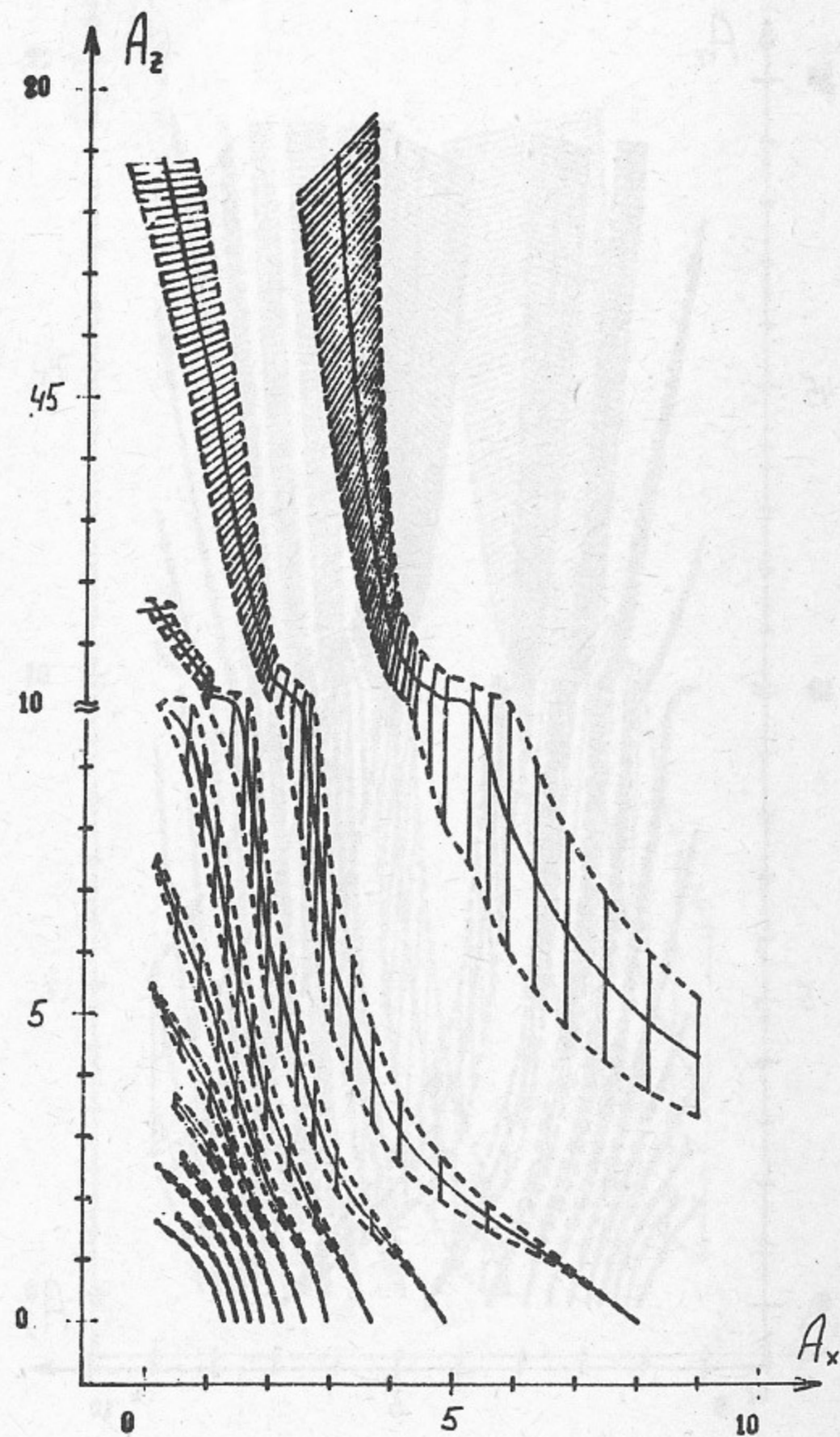


Рис. 30.  $l=6, m=-2$ .



*Puc. 31.  $l=0, m=8$ .*



*Puc. 32.  $l=2, m=6$ .*



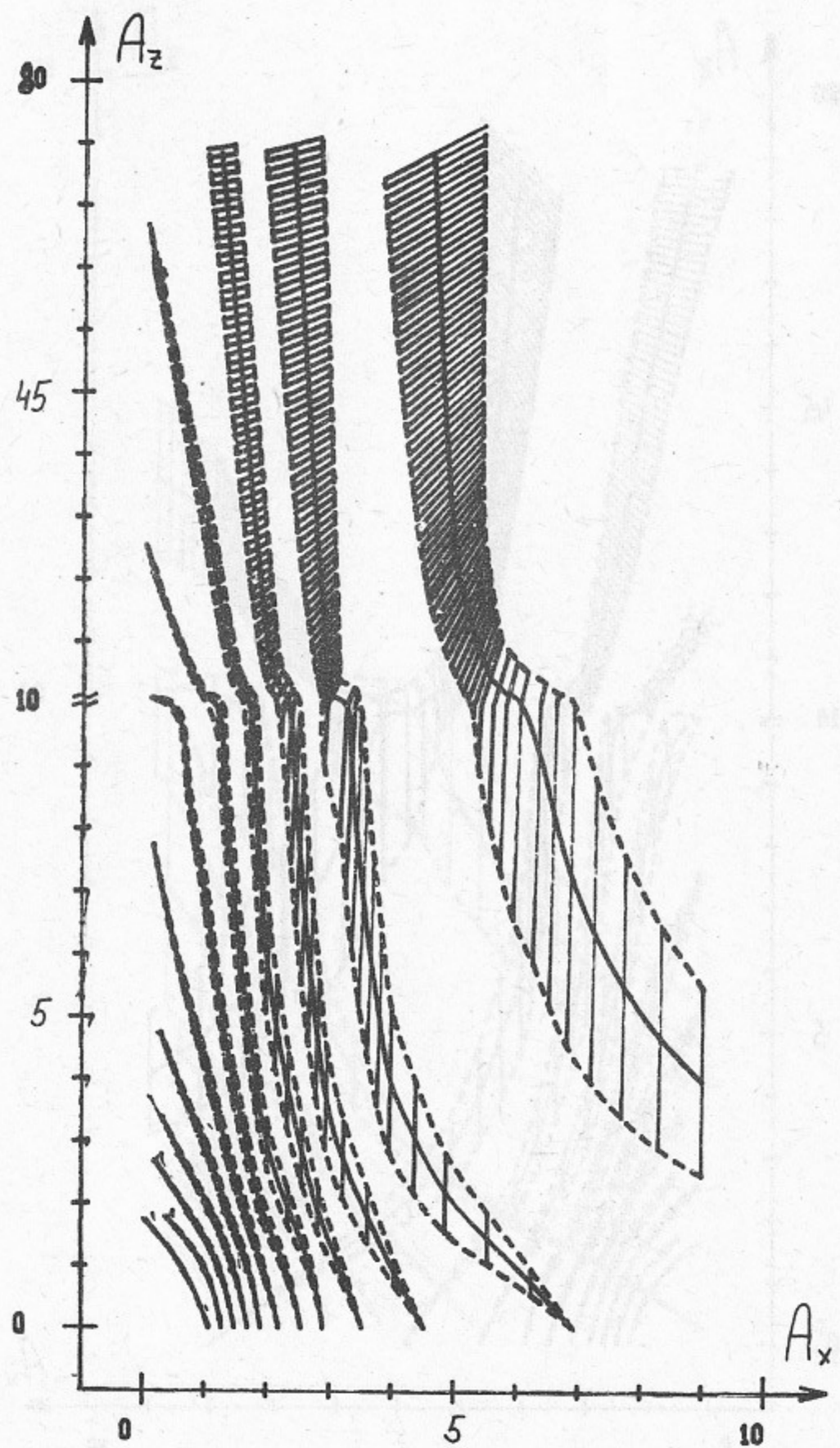


Рис. 33.  $l=4, m=4$ .

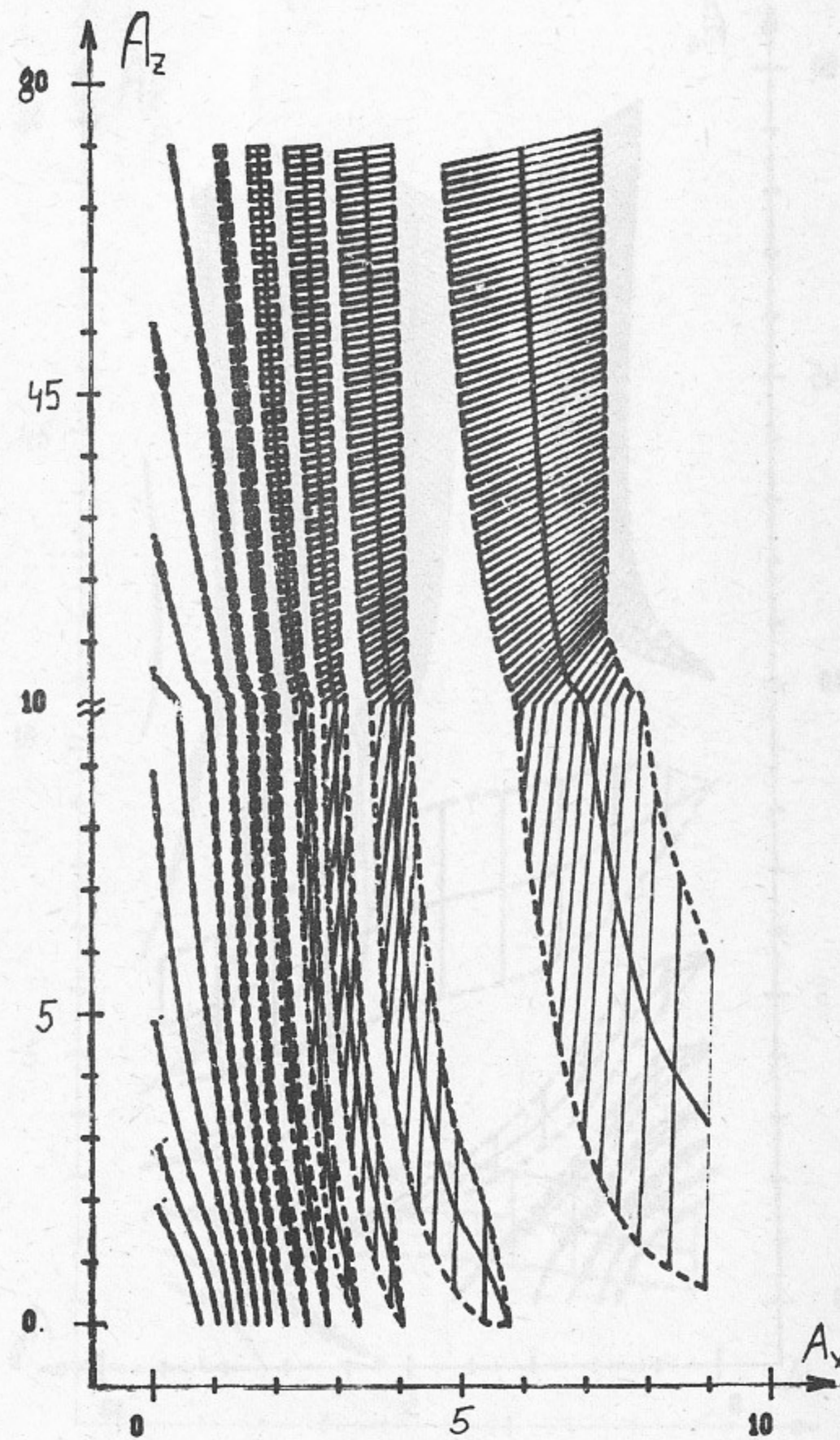
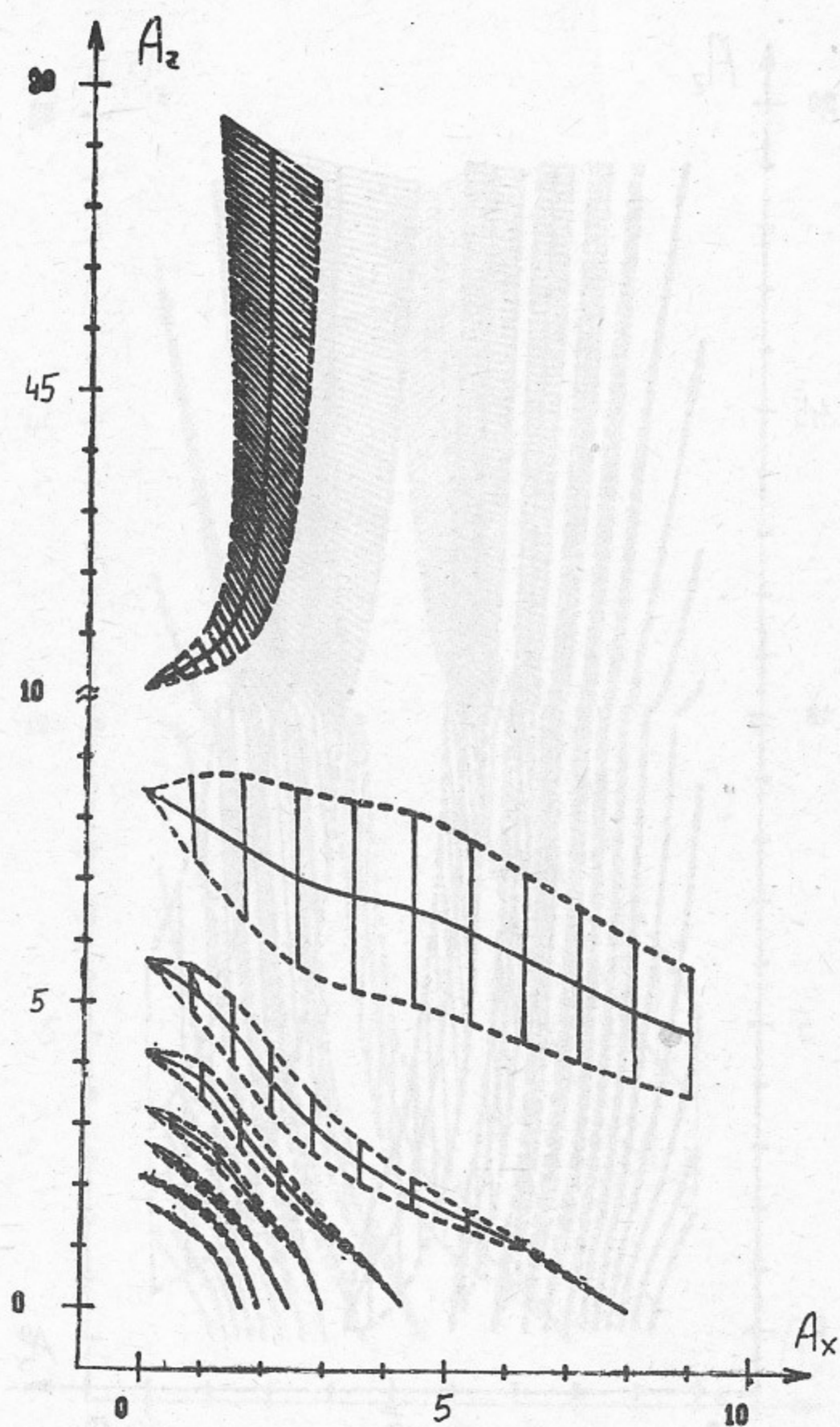
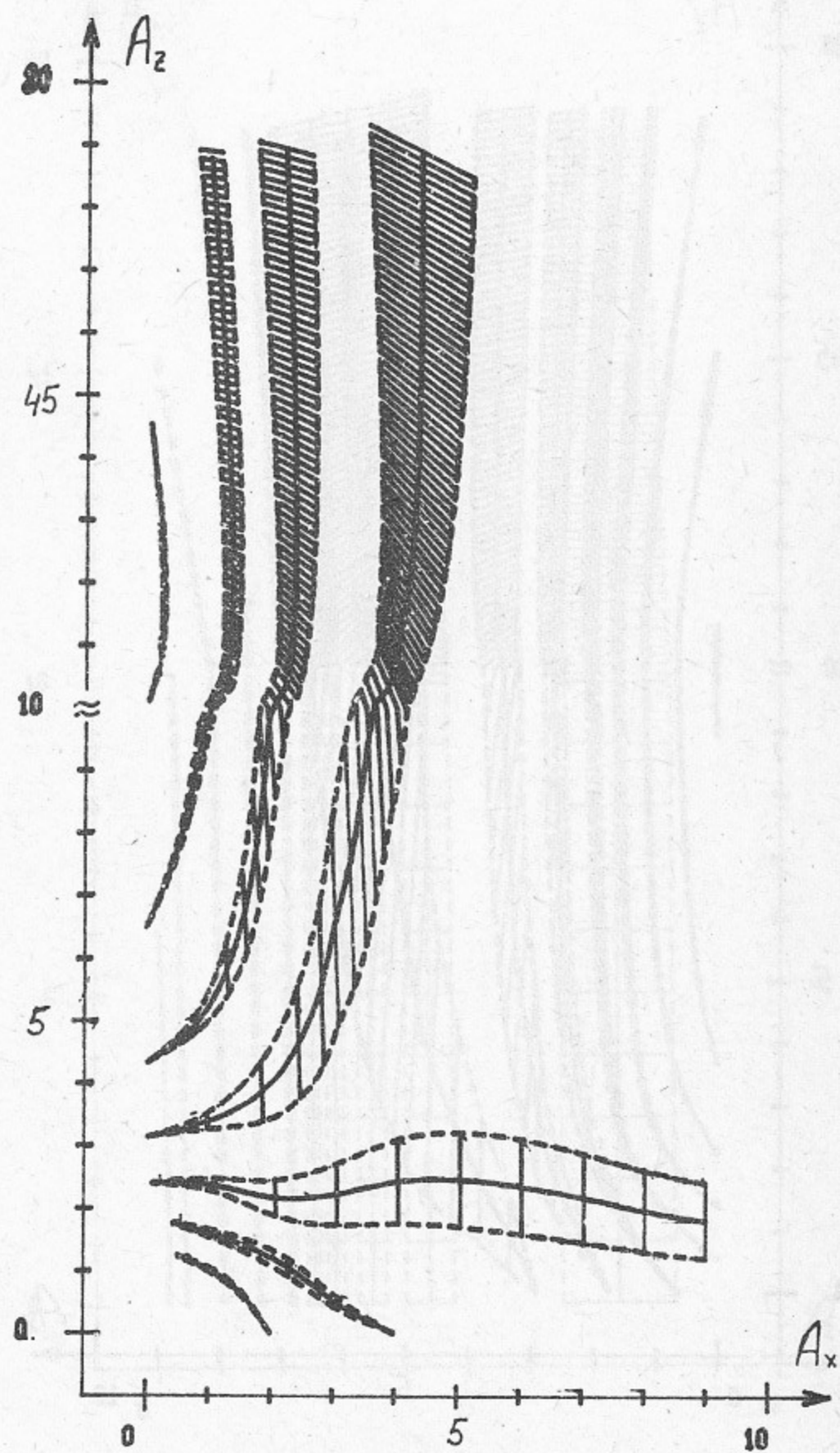


Рис. 34.  $l=6, m=2$ .



*Puc. 35.  $l=2, m=-6.$*



*Puc. 36.  $l=4, m=-4.$*

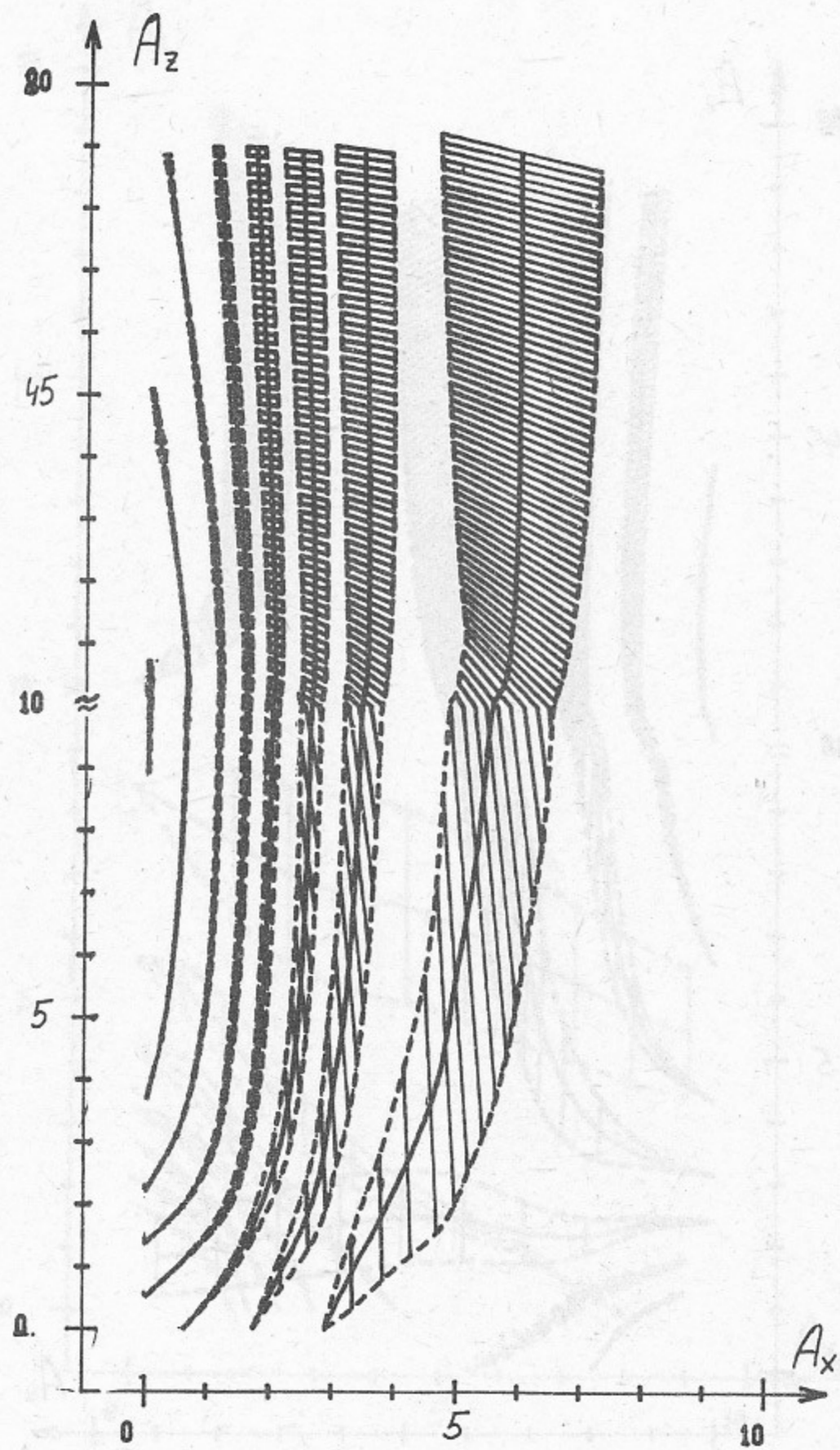


Рис. 37.  $l=6, m=-2$ .

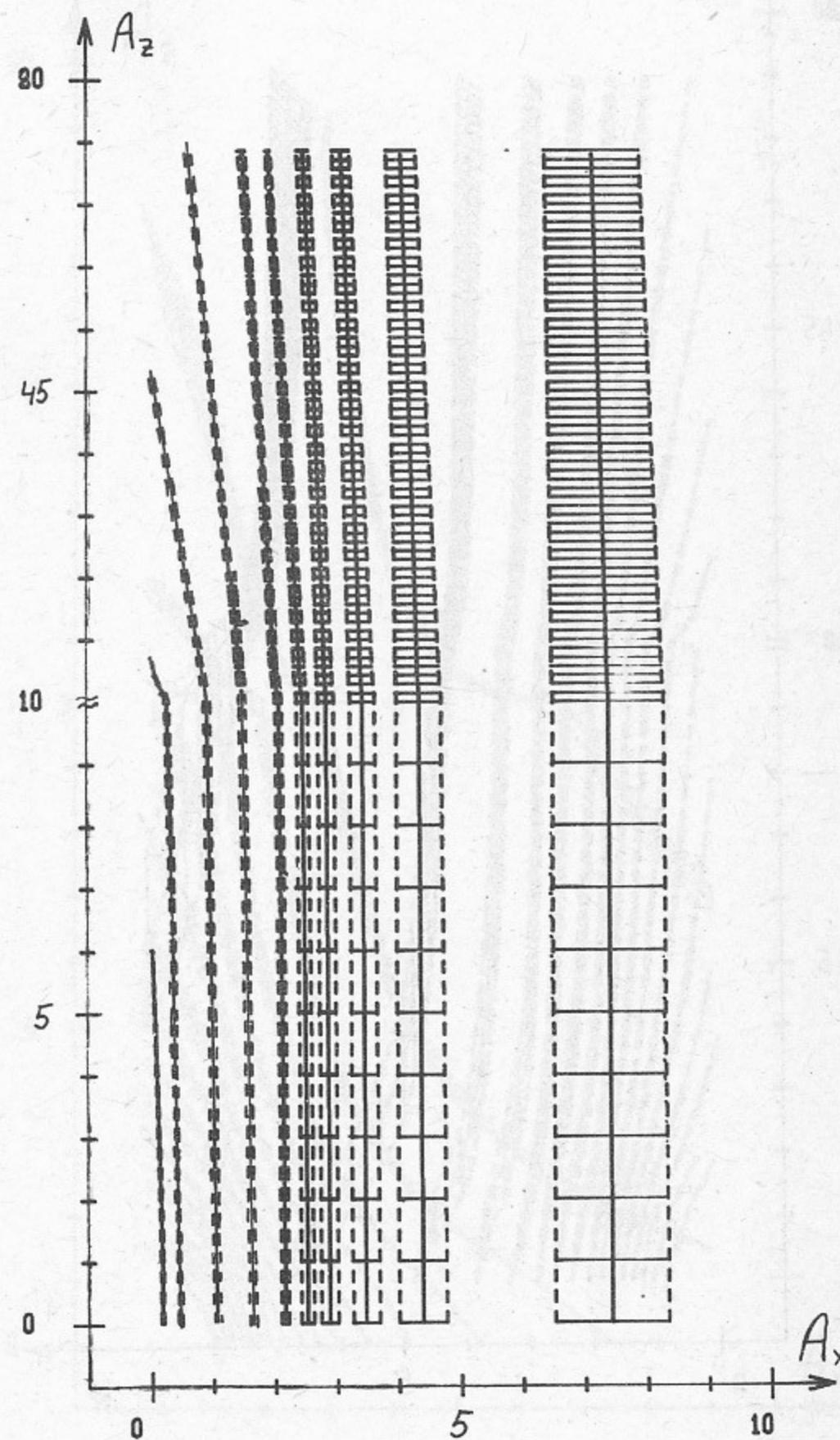


Рис. 38.  $l=7, m=0, \Delta x=0.1$ .

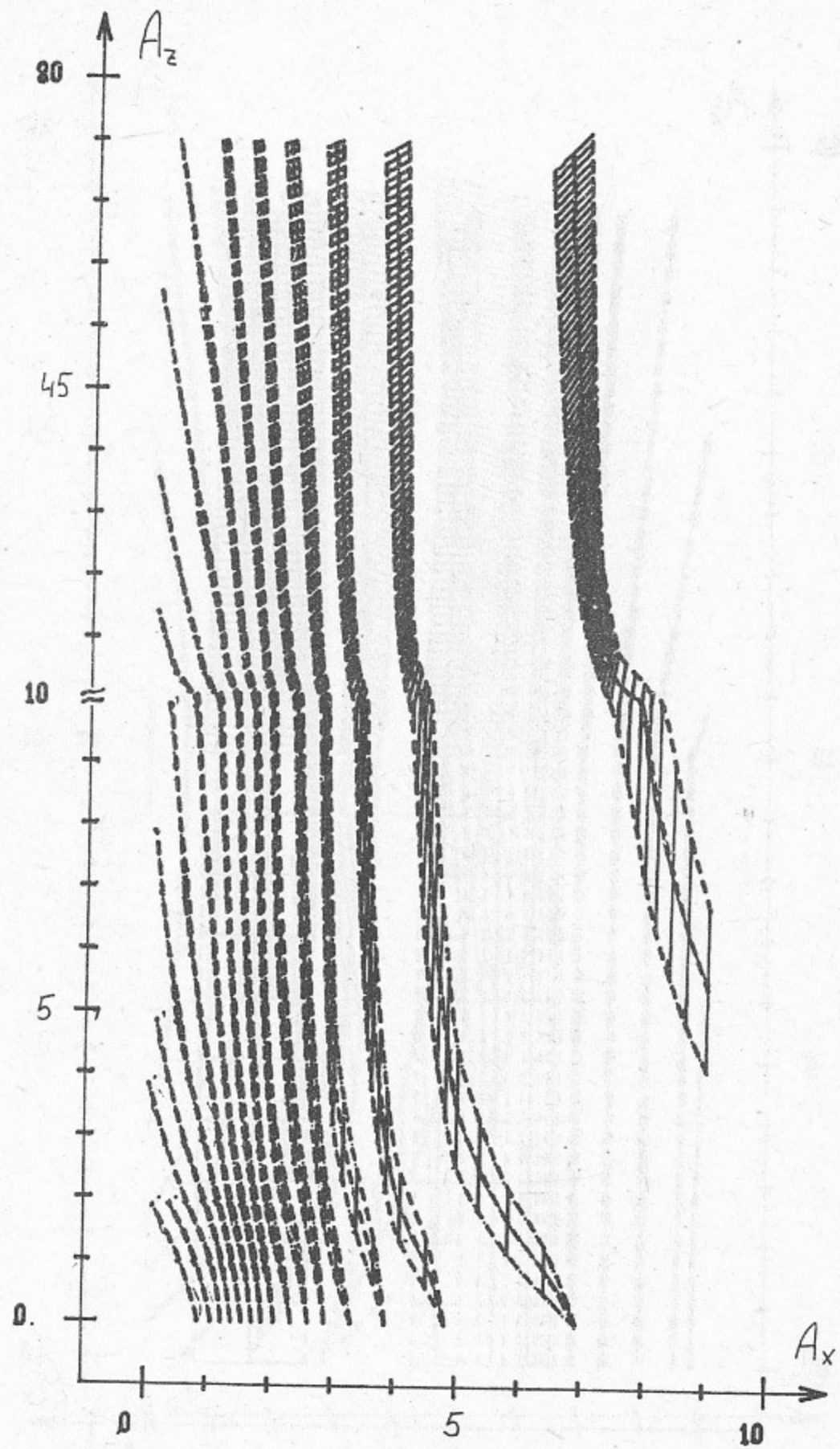


Рис. 39.  $l=5, m=2, \Delta x=0.1.$

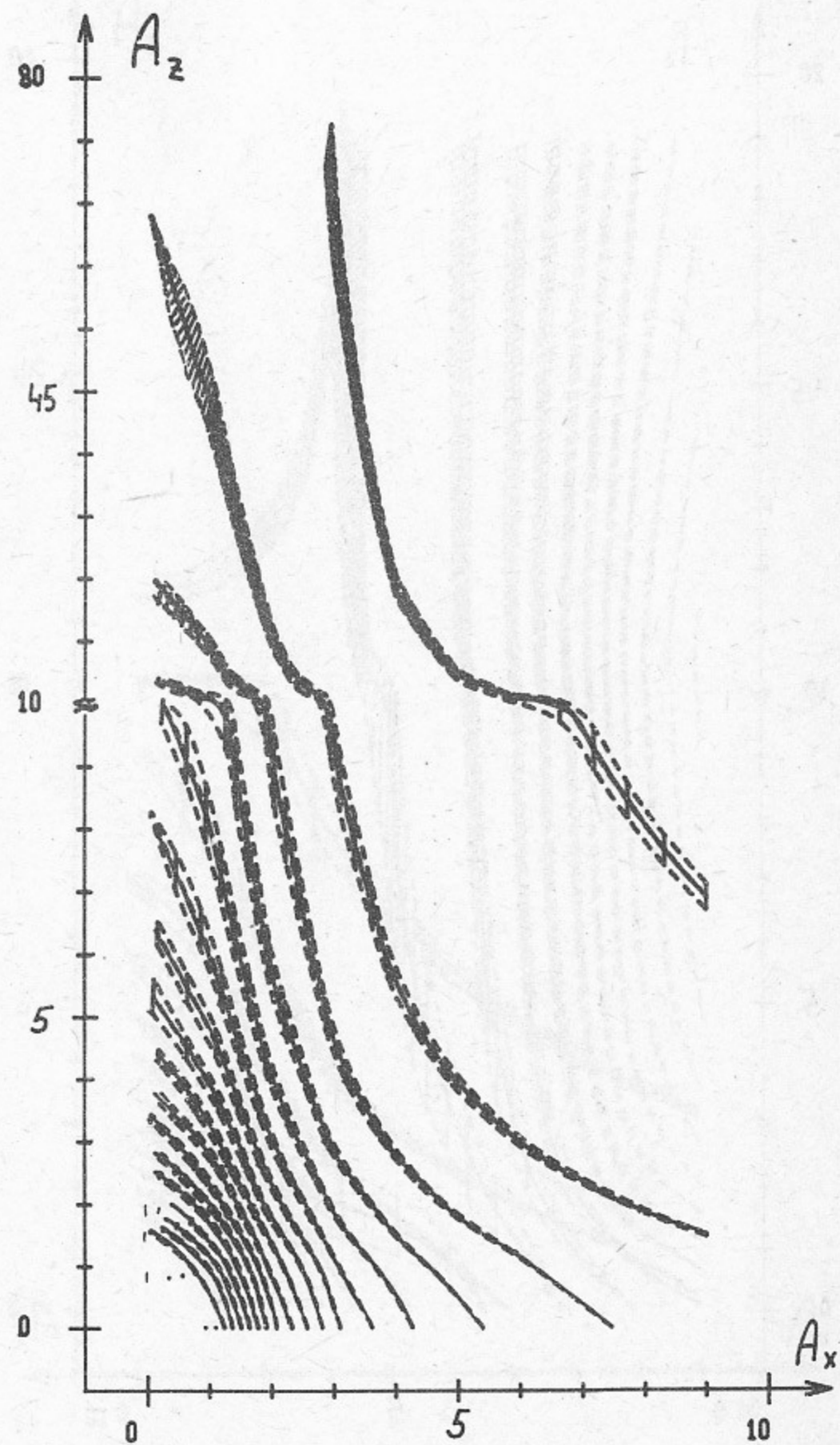


Рис. 40.  $l=1, m=6, \Delta x=0.1.$

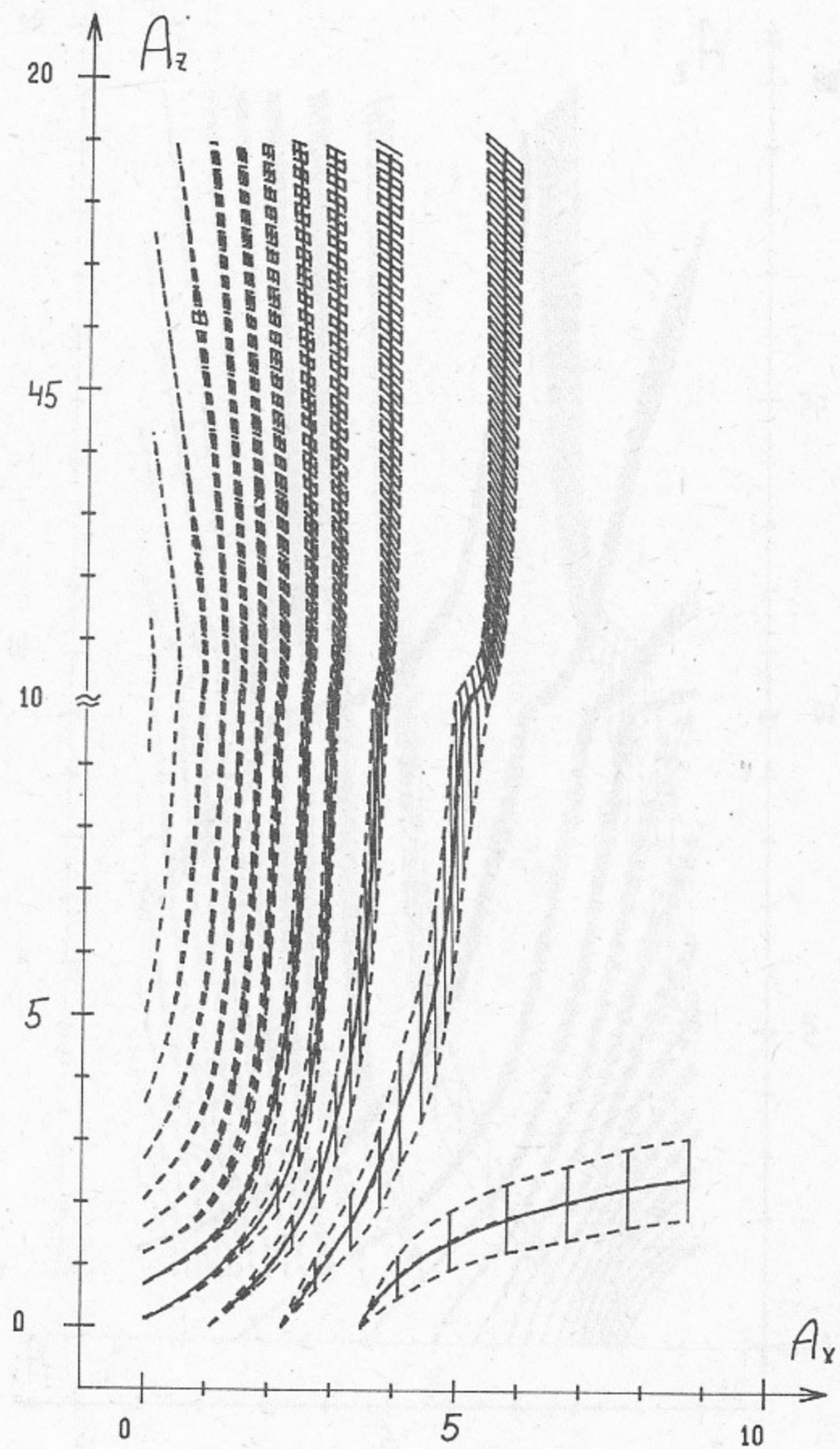


Рис. 41.  $l=5, m=-2, \Delta x=0.1$ .

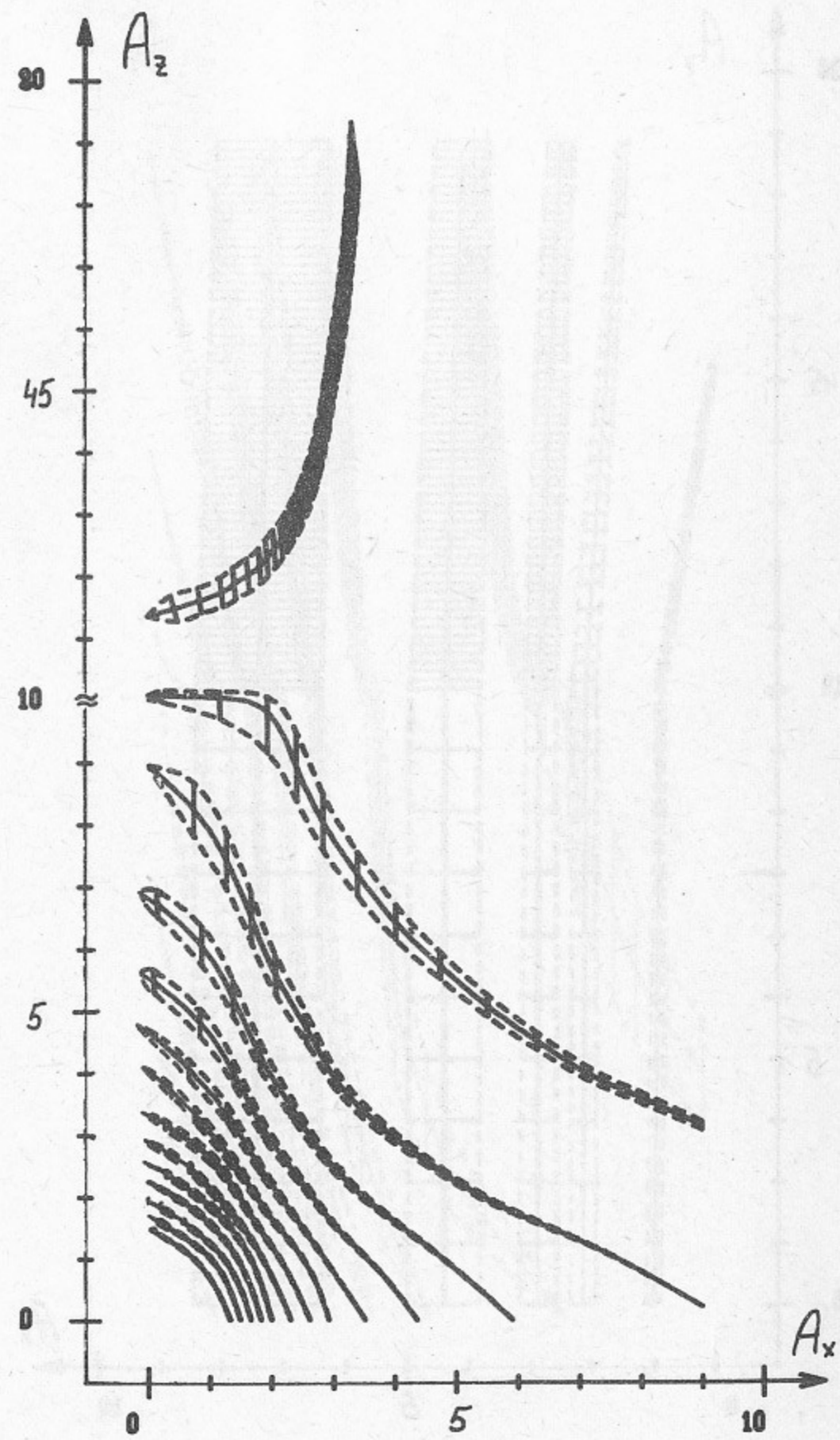


Рис. 42.  $l=1, m=-6, \Delta x=0.1$ .

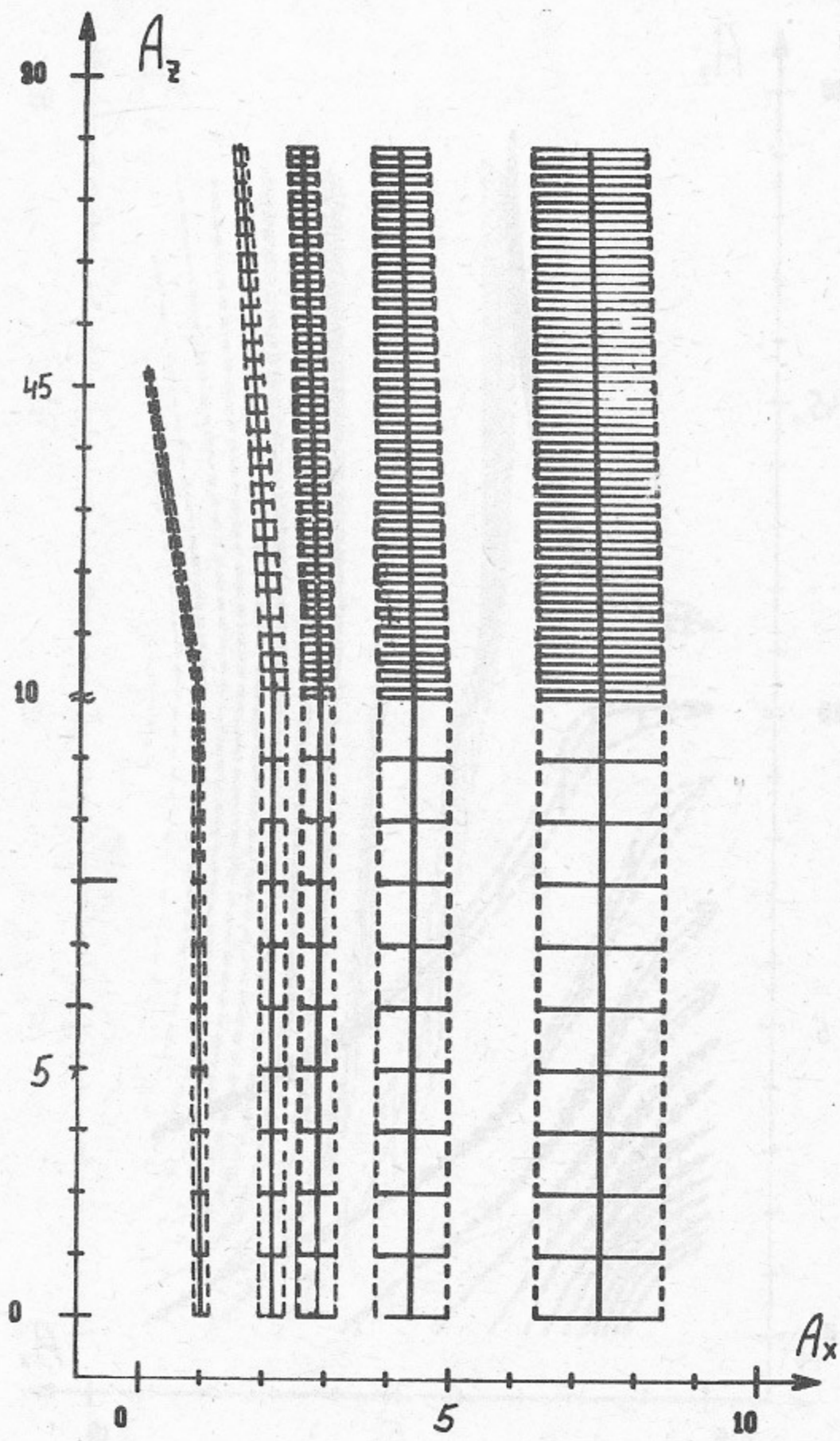


Рис. 43.  $l=5, m=0, \Delta x=0.1.$

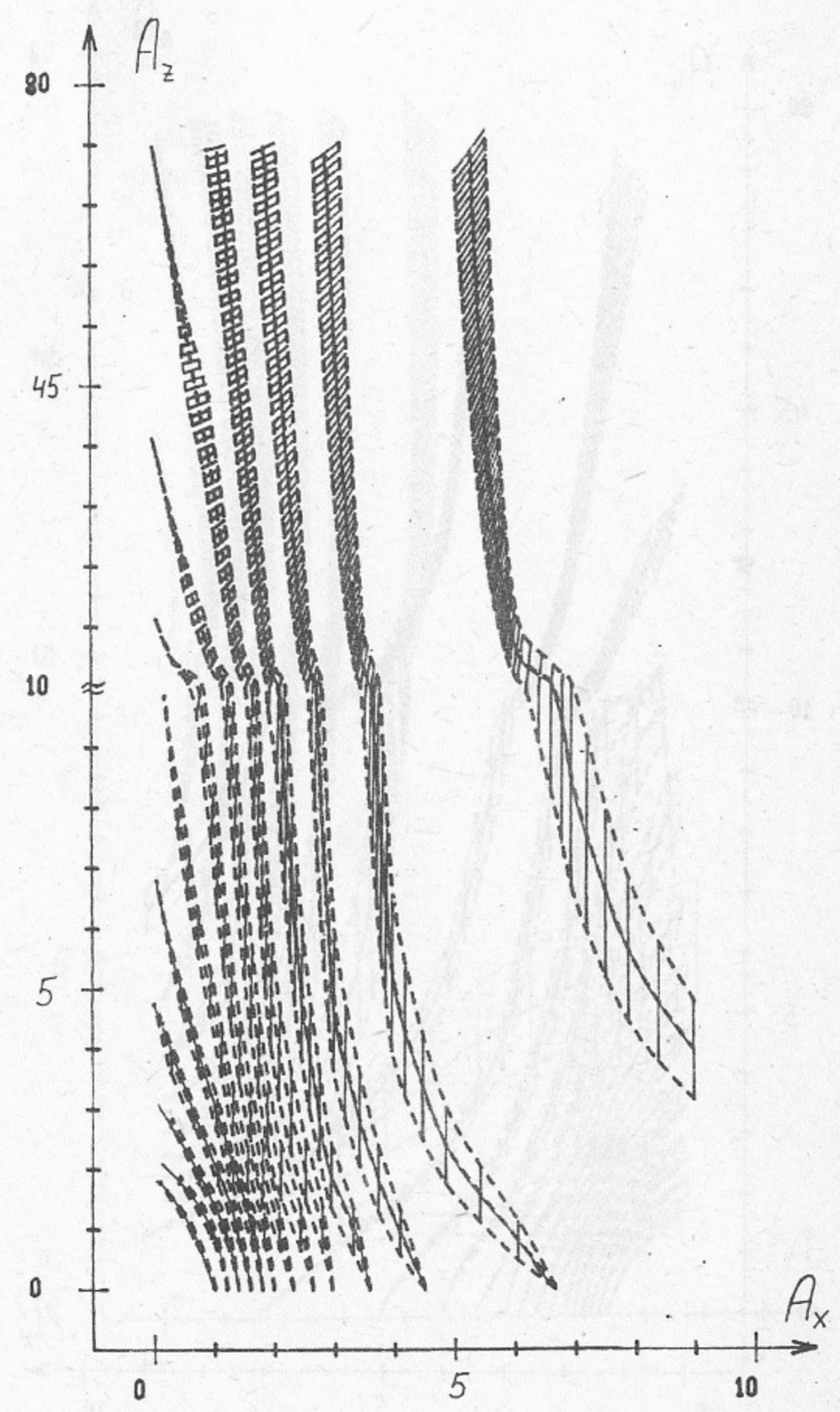


Рис. 44.  $l=3, m=2, \Delta x=0.1.$

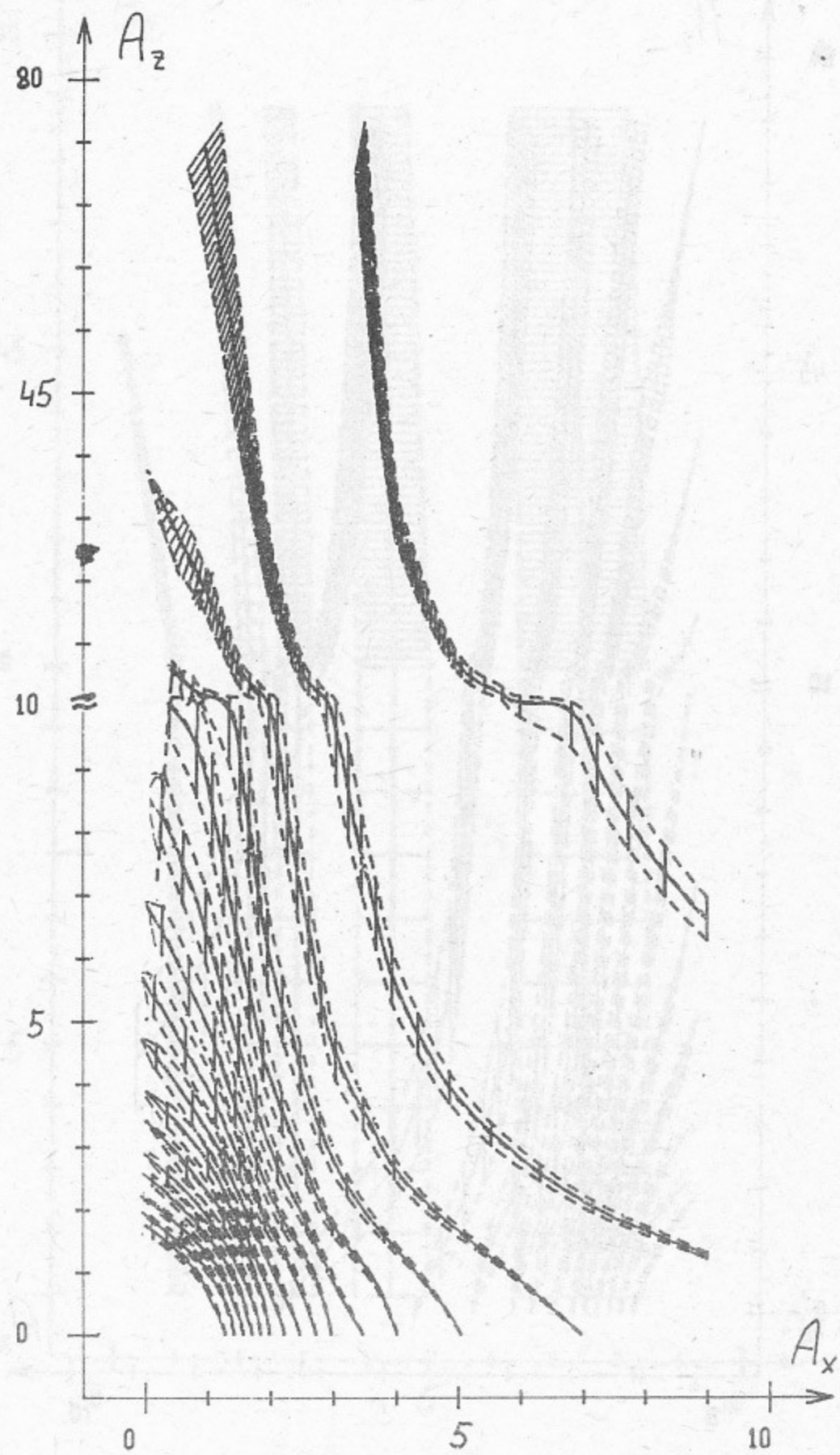


Рис. 45.  $l=1$ ,  $m=4$ ,  $\Delta x=0.1$ .

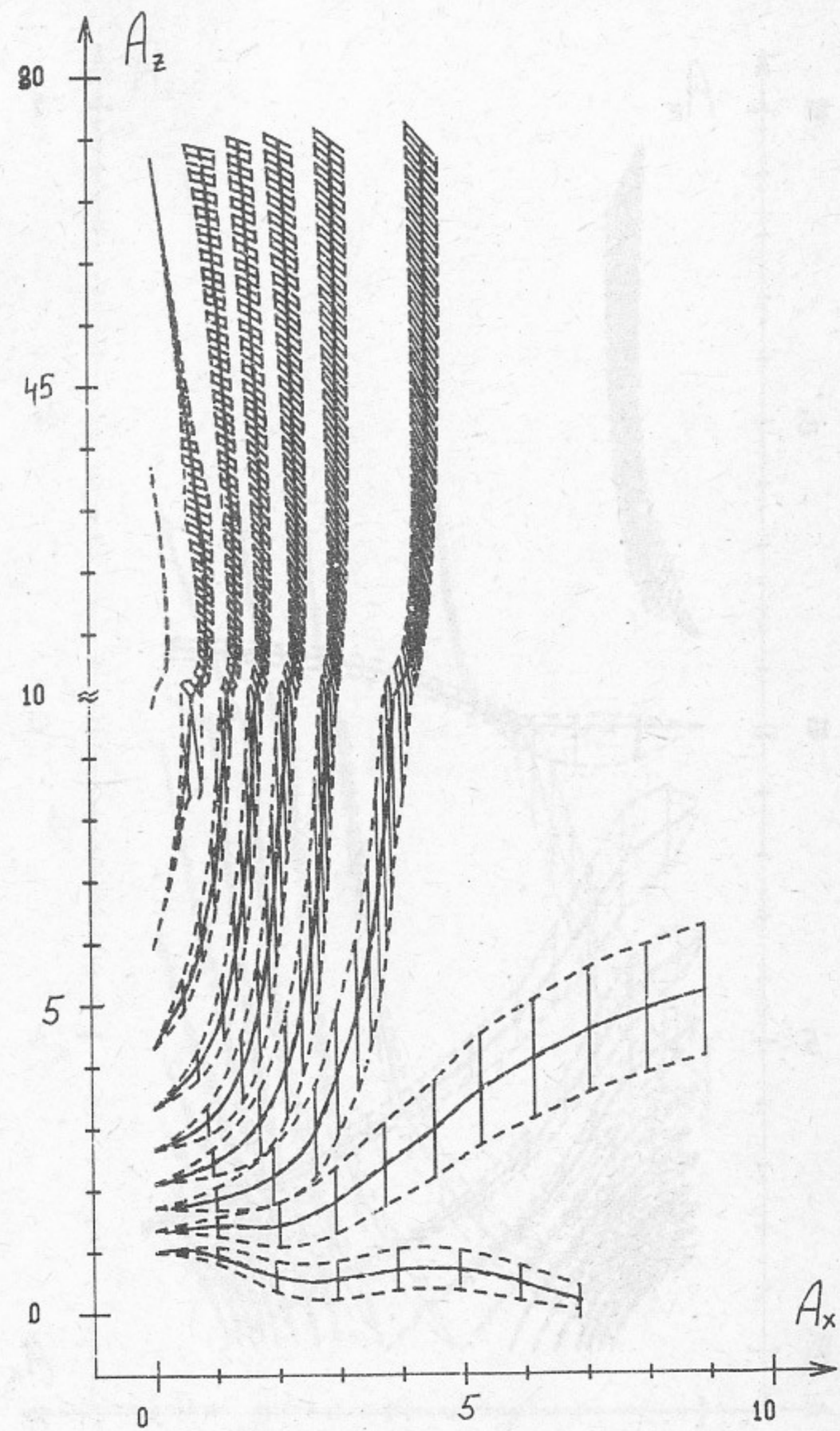


Рис. 46.  $l=3$ ,  $m=-2$ ,  $\Delta x=0.1$ .

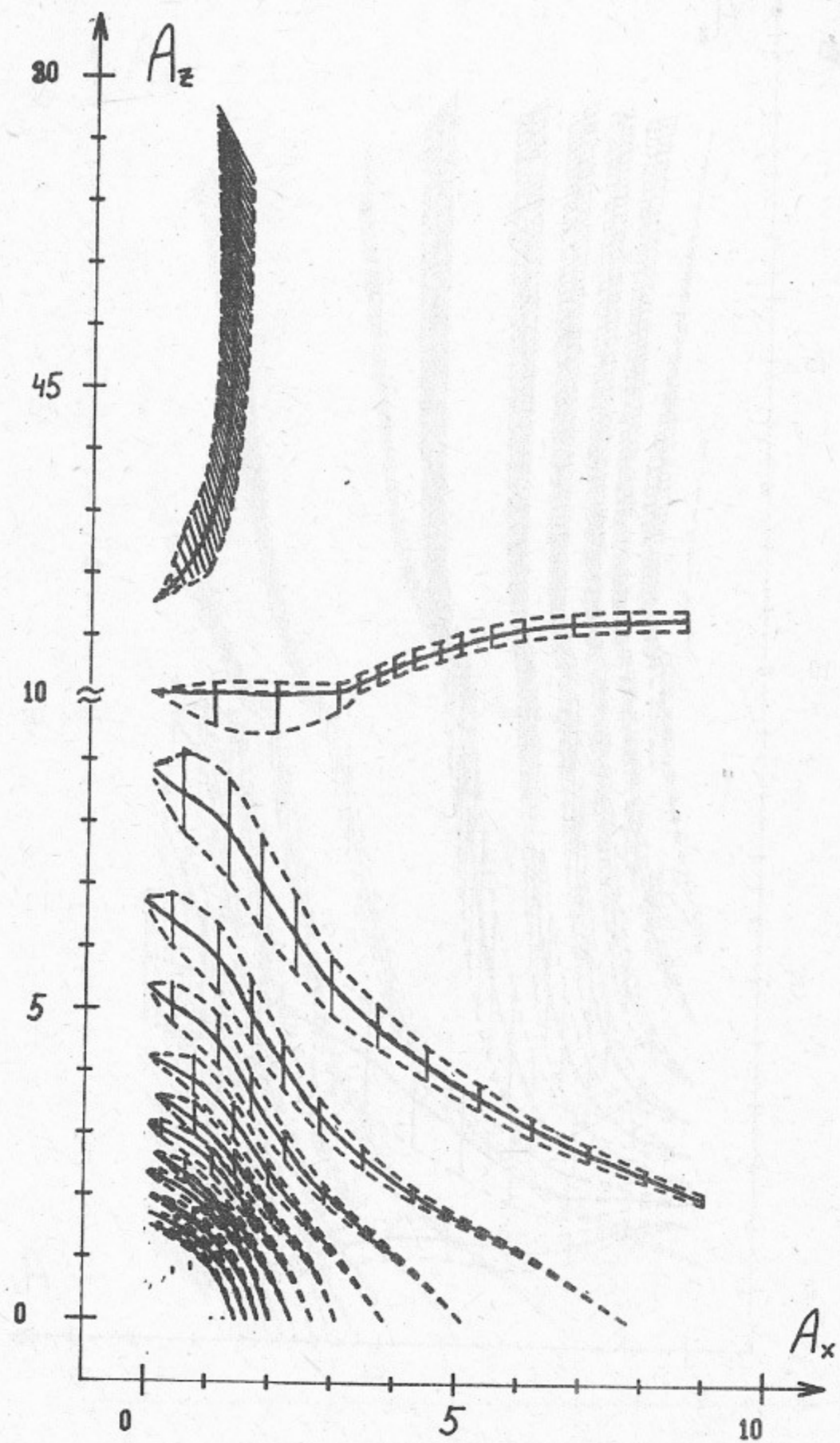


Рис. 47.  $l=1, m=-4, \Delta x=0.1$ .

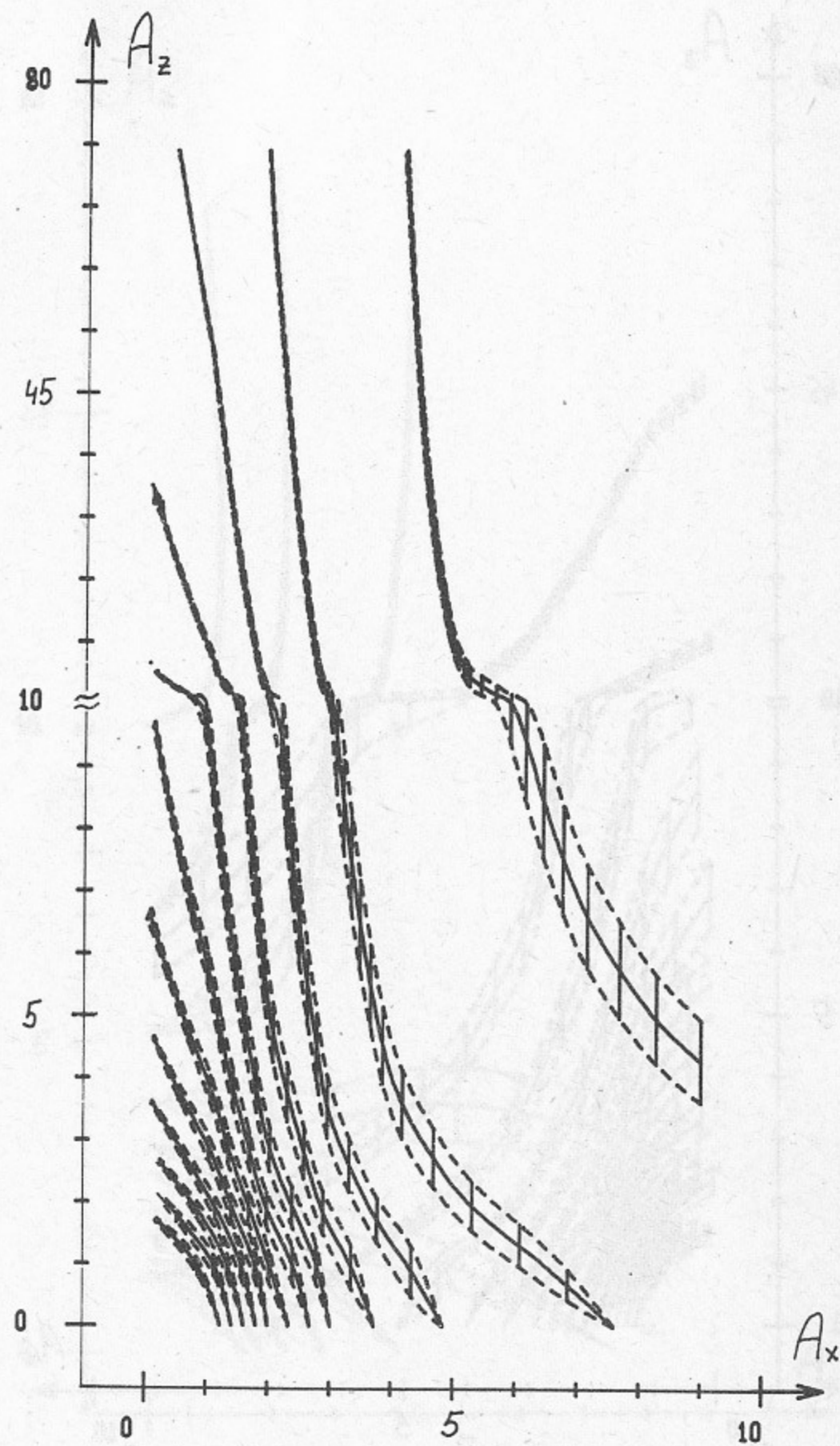


Рис. 48.  $l=2, m=3, \Delta z=0.1$ .



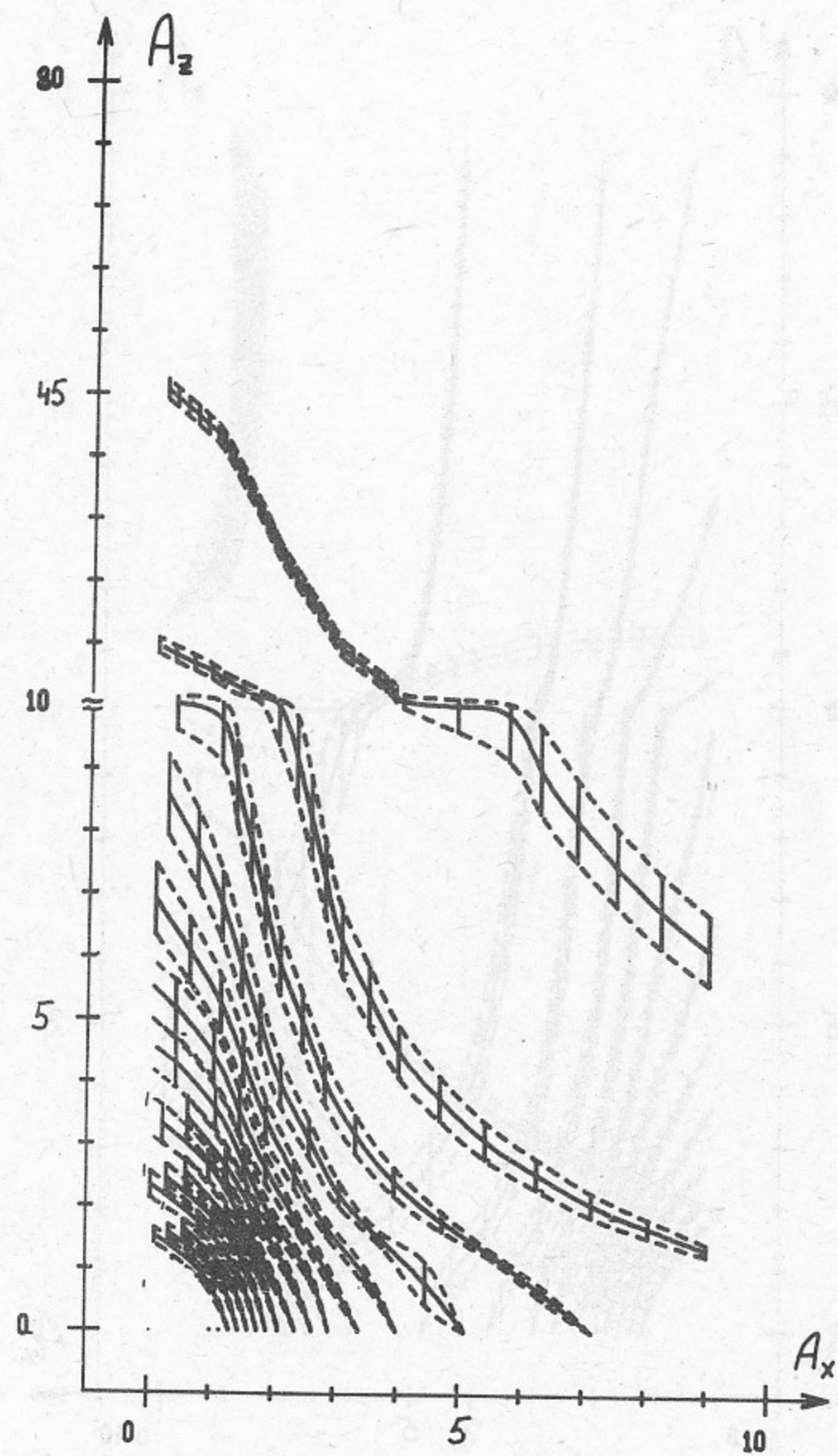


Рис. 49.  $l=0, m=5, \Delta z=0.1$ .

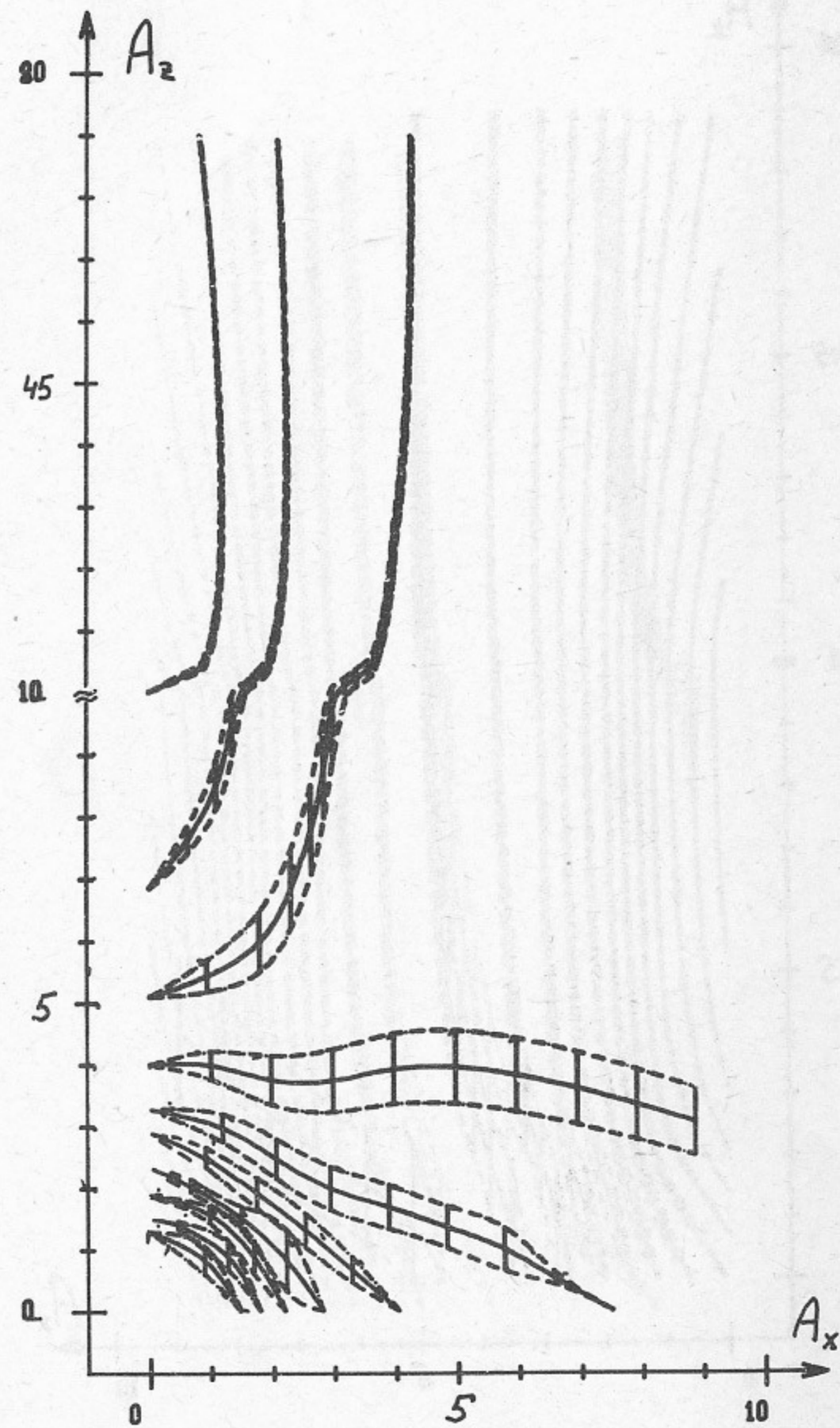


Рис. 50.  $l=2, m=3, \Delta z=0.1$ .

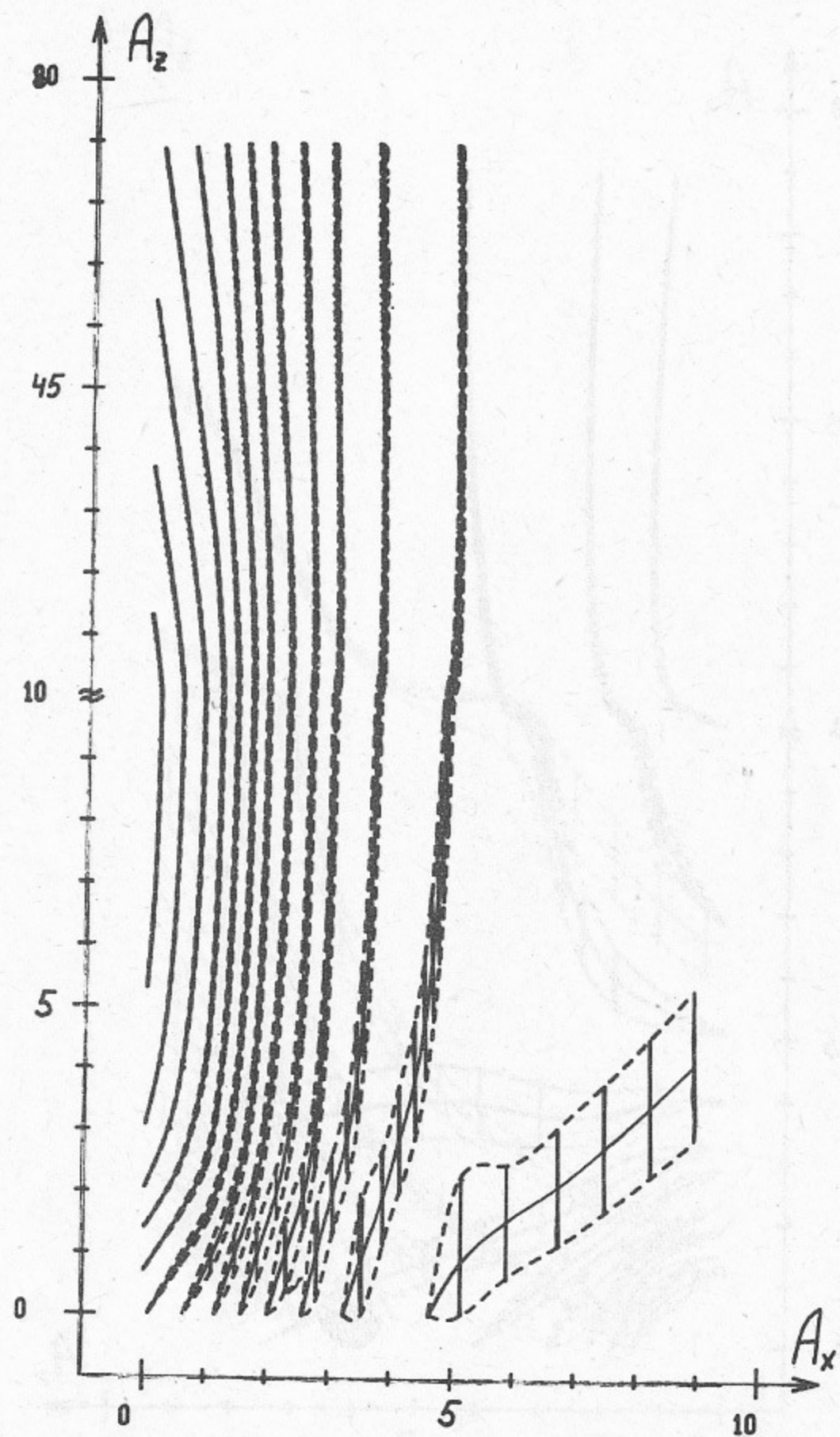


Рис. 51.  $l=4, m=-1, \Delta z=0.1$ .

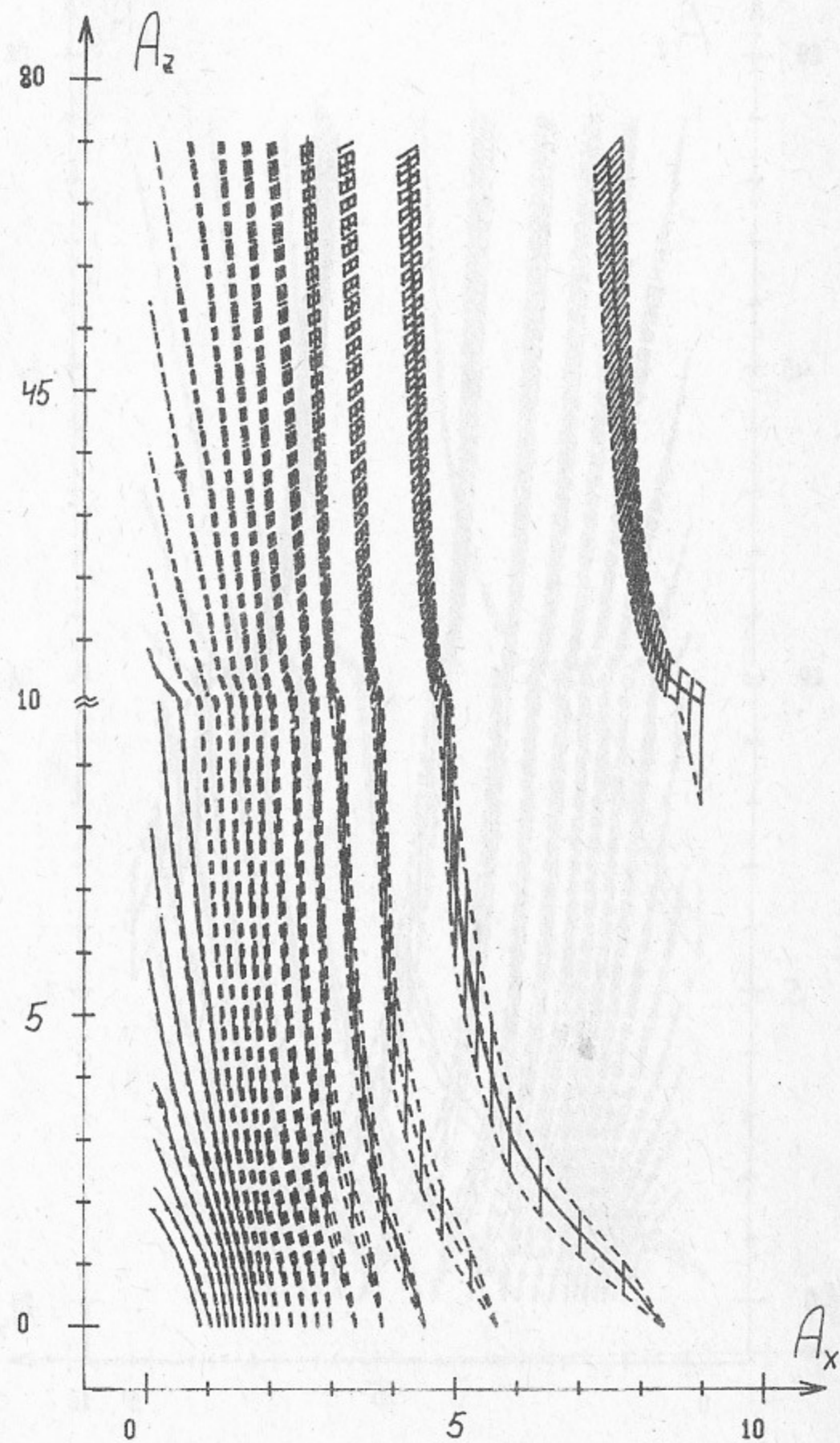


Рис. 52.  $l=5, m=2, \Delta x=0.05$ .

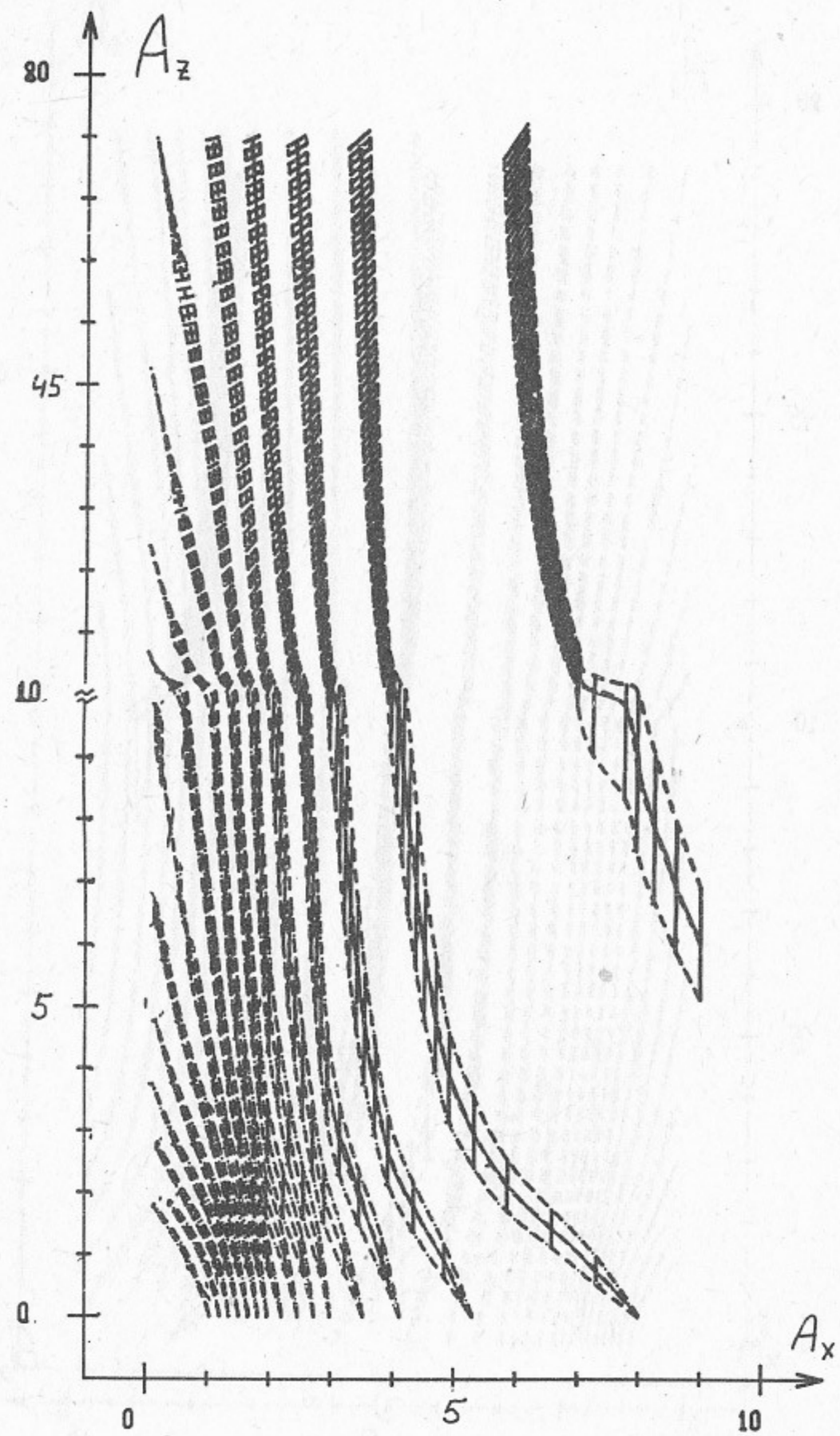


Рис. 53.  $l=3, m=2, \Delta x=0.05$ .

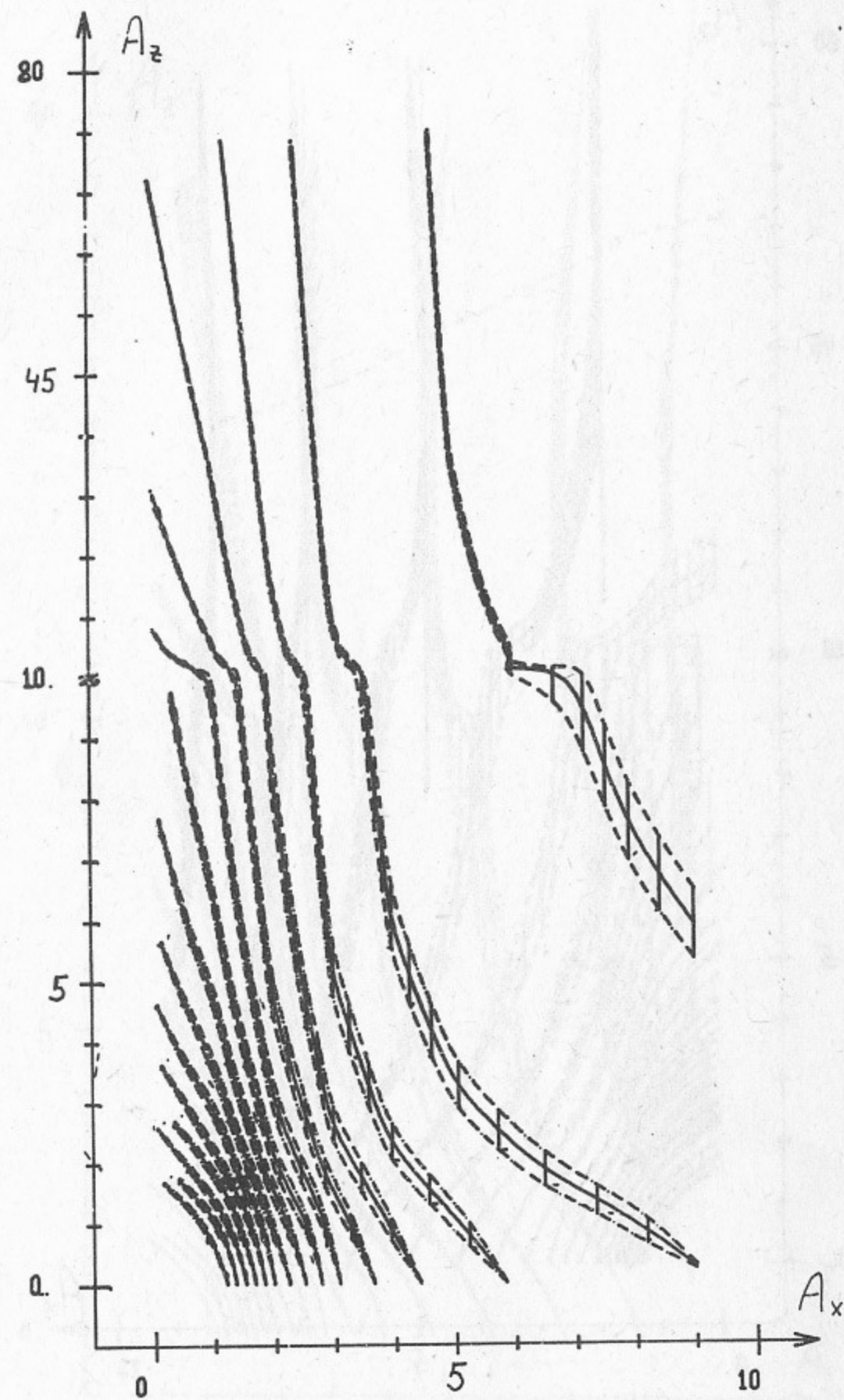


Рис. 54.  $l=2, m=3, \Delta z=0.05$ .

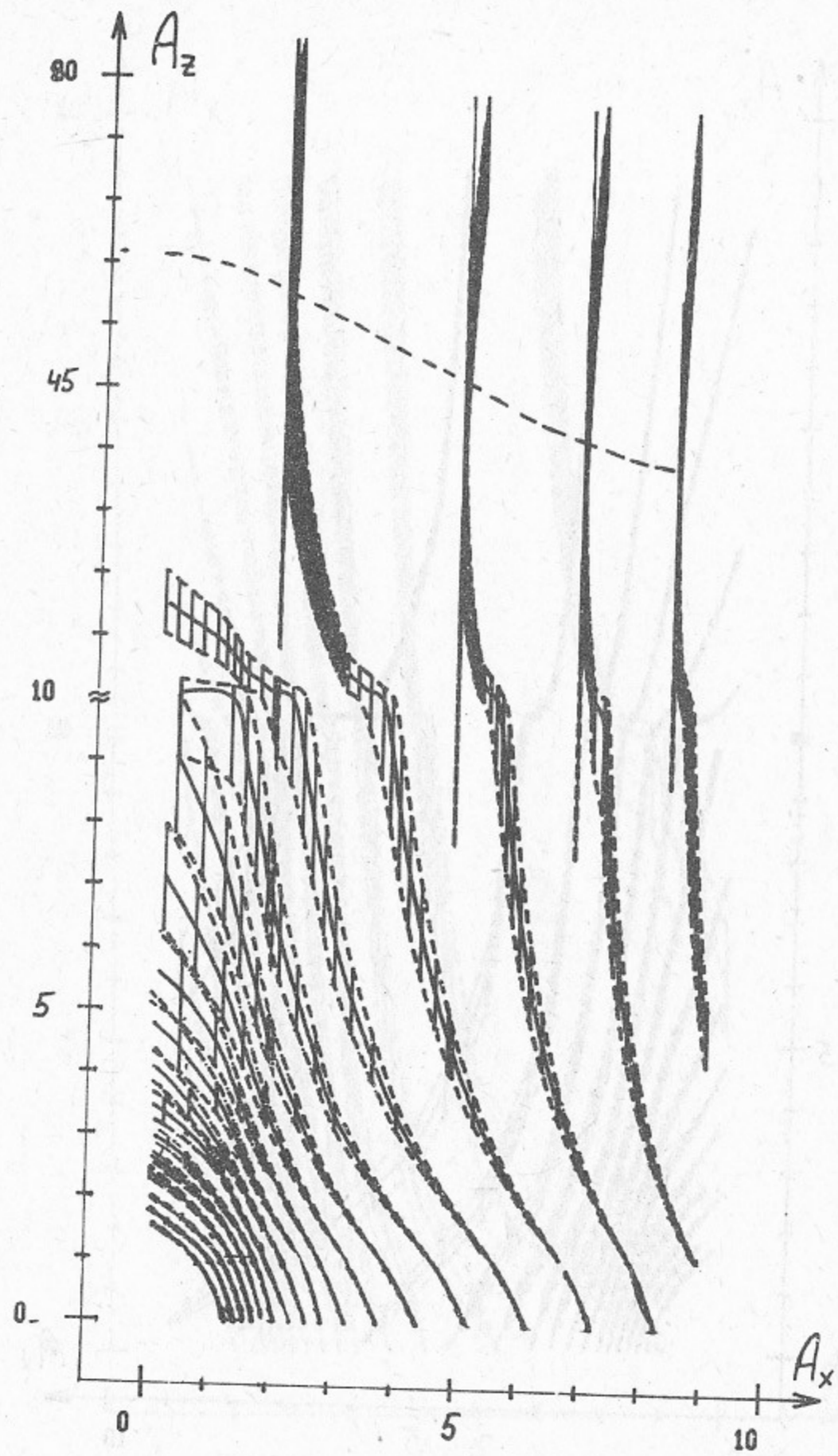


Рис. 55.  $l=0, m=10$ .

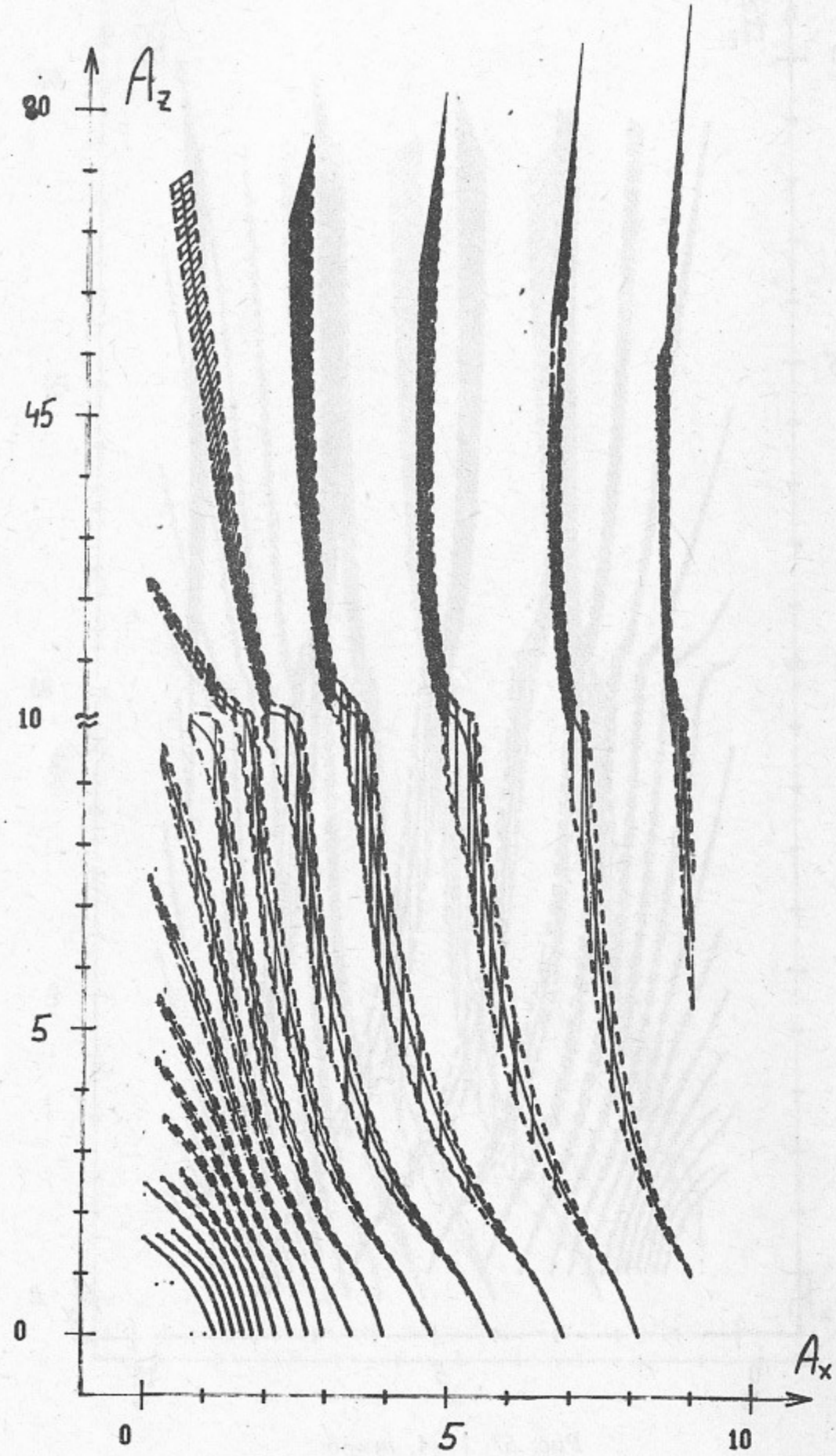


Рис. 56.  $l=2, m=8$ .

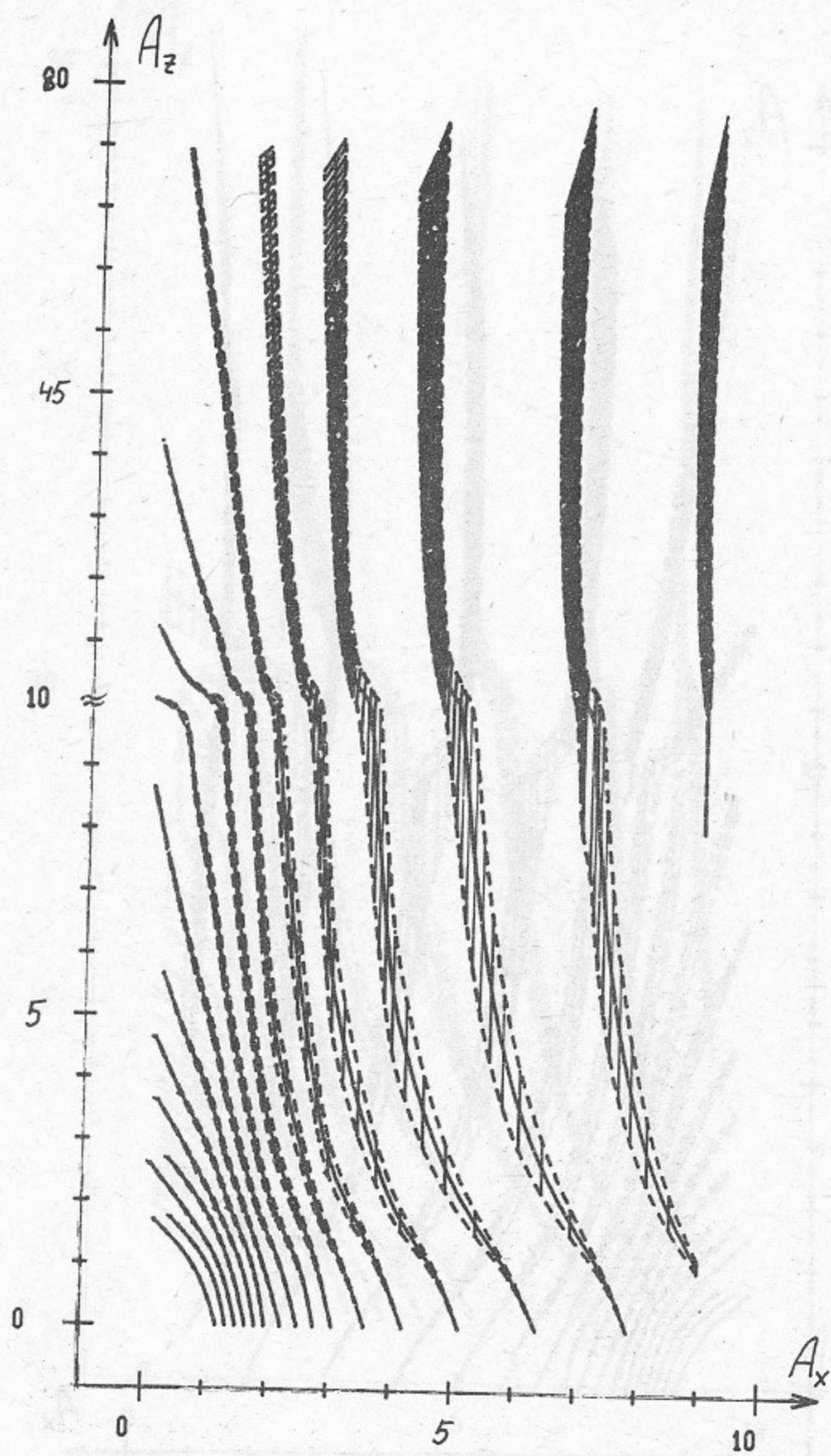


Рис. 57.  $l=4, m=6$ .

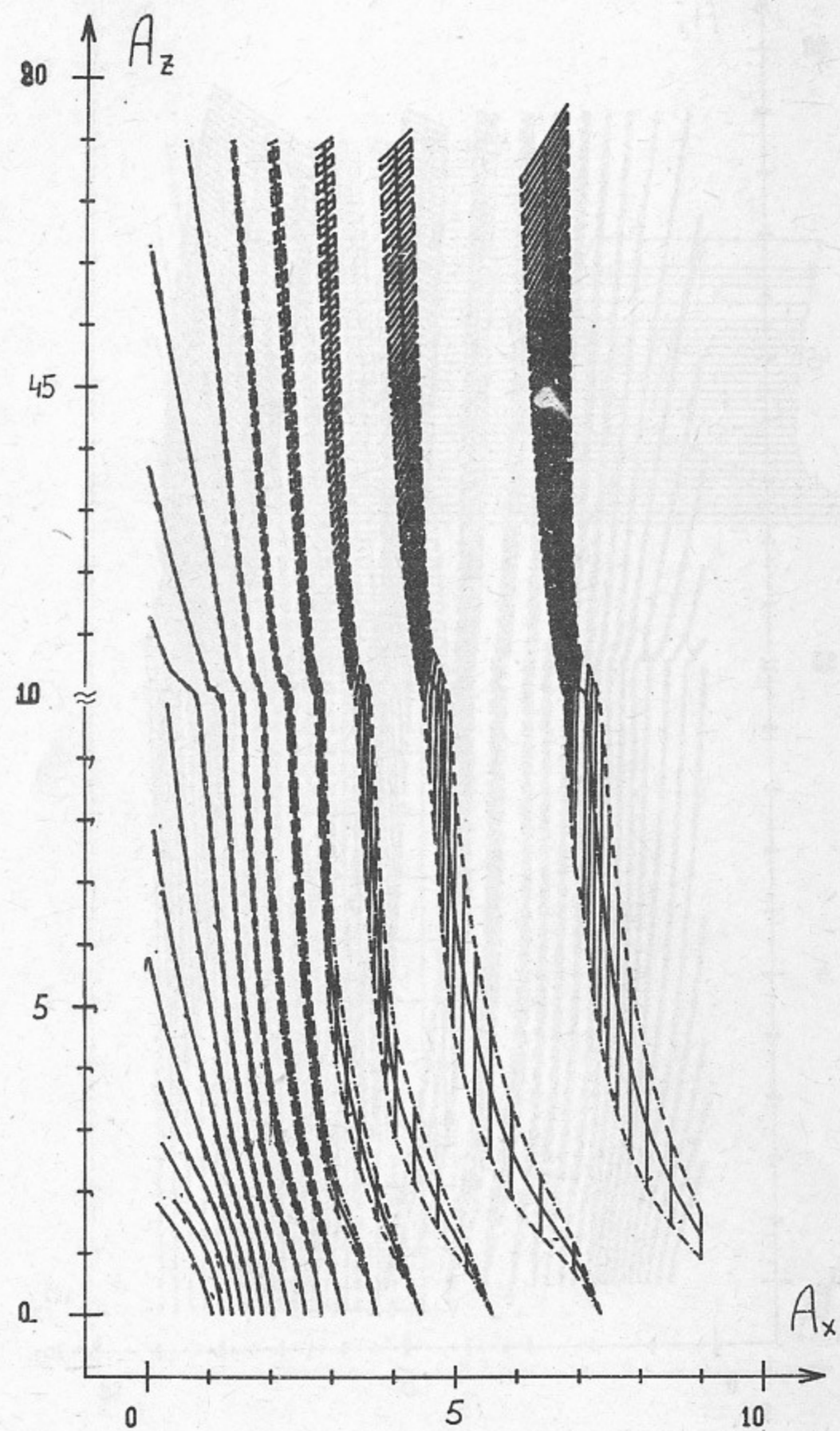


Рис. 58.  $l=6, m=4$ .

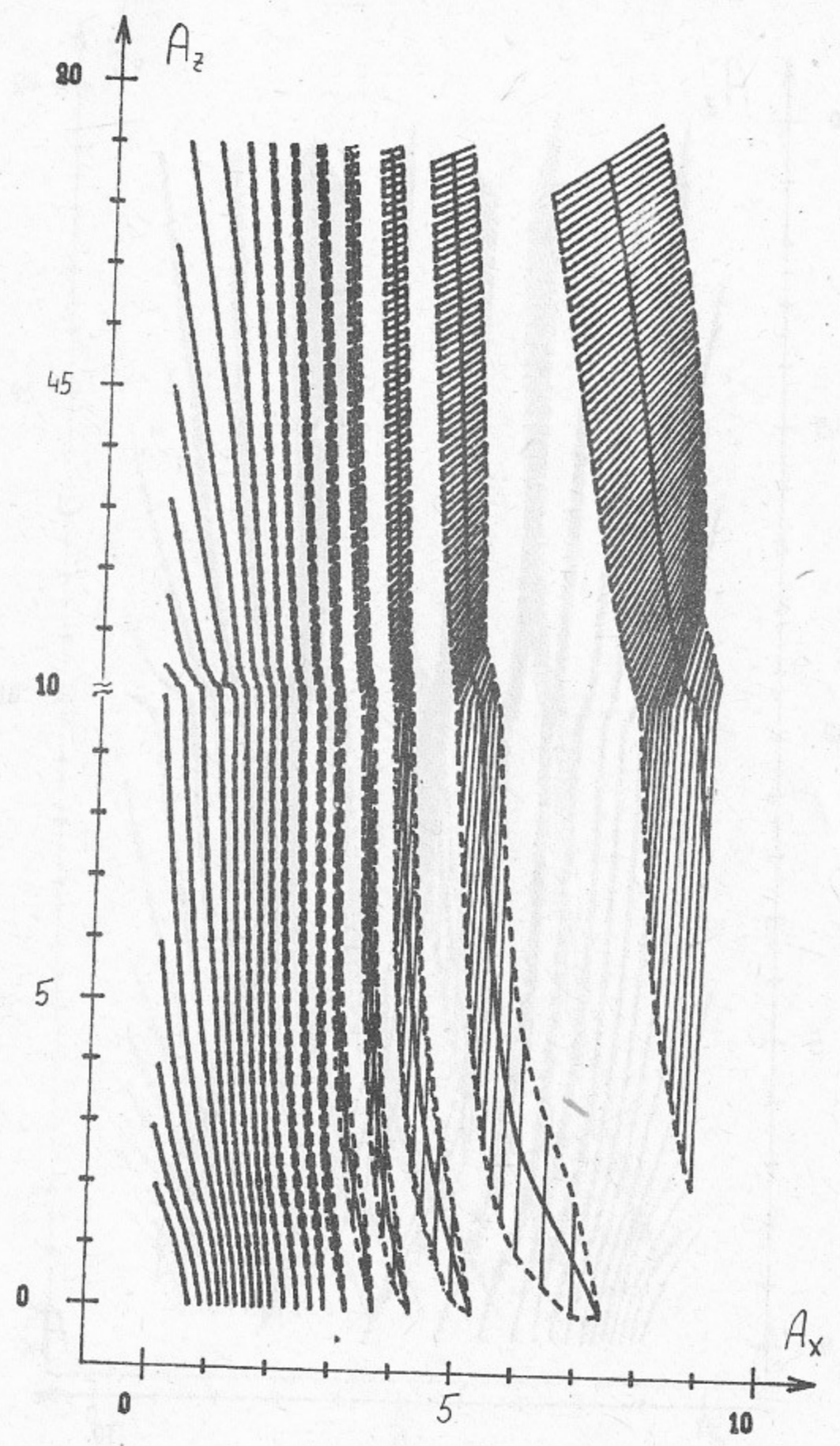


Рис. 59.  $l=8, m=+2$ .

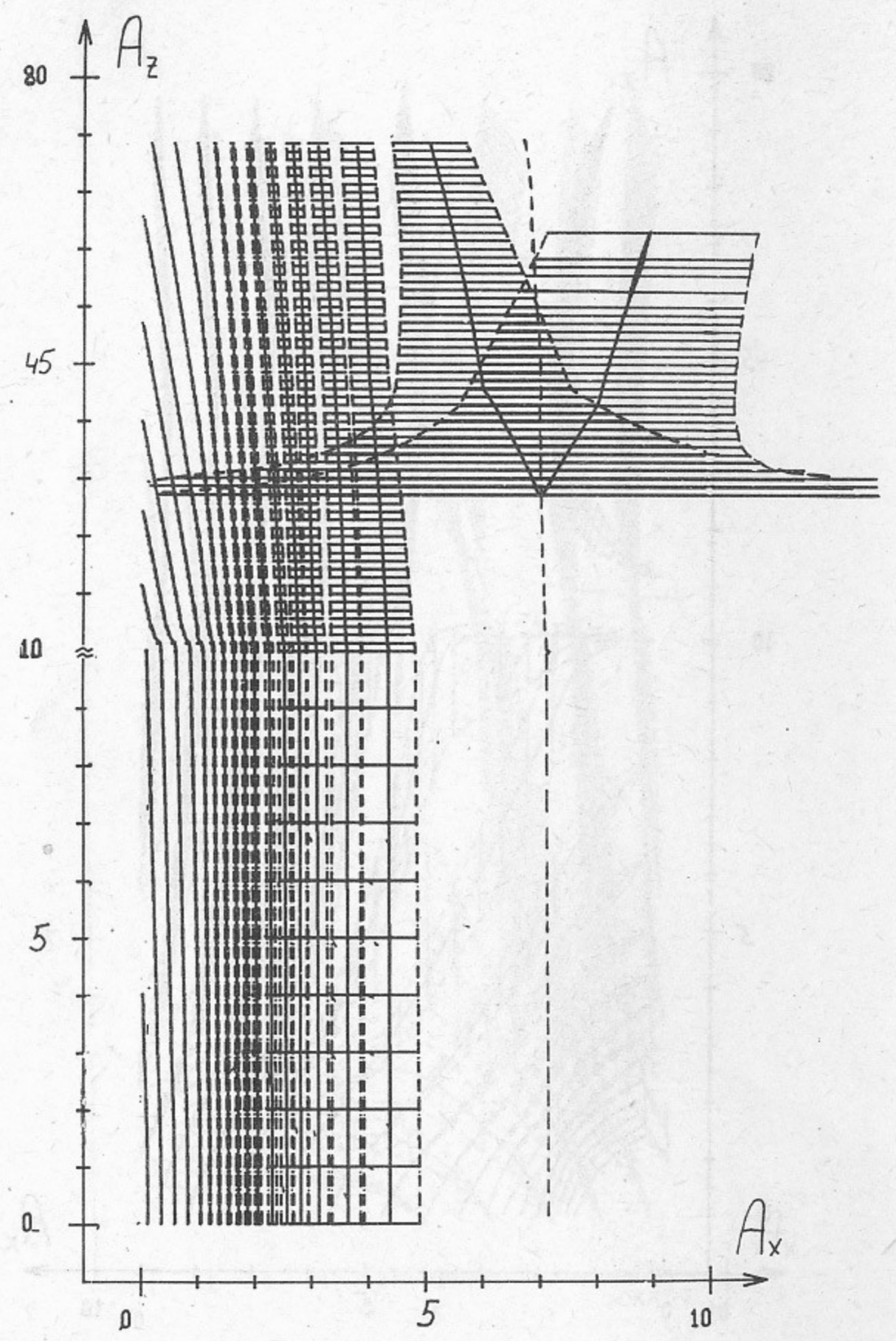


Рис. 60.  $l=10, m=0$ .

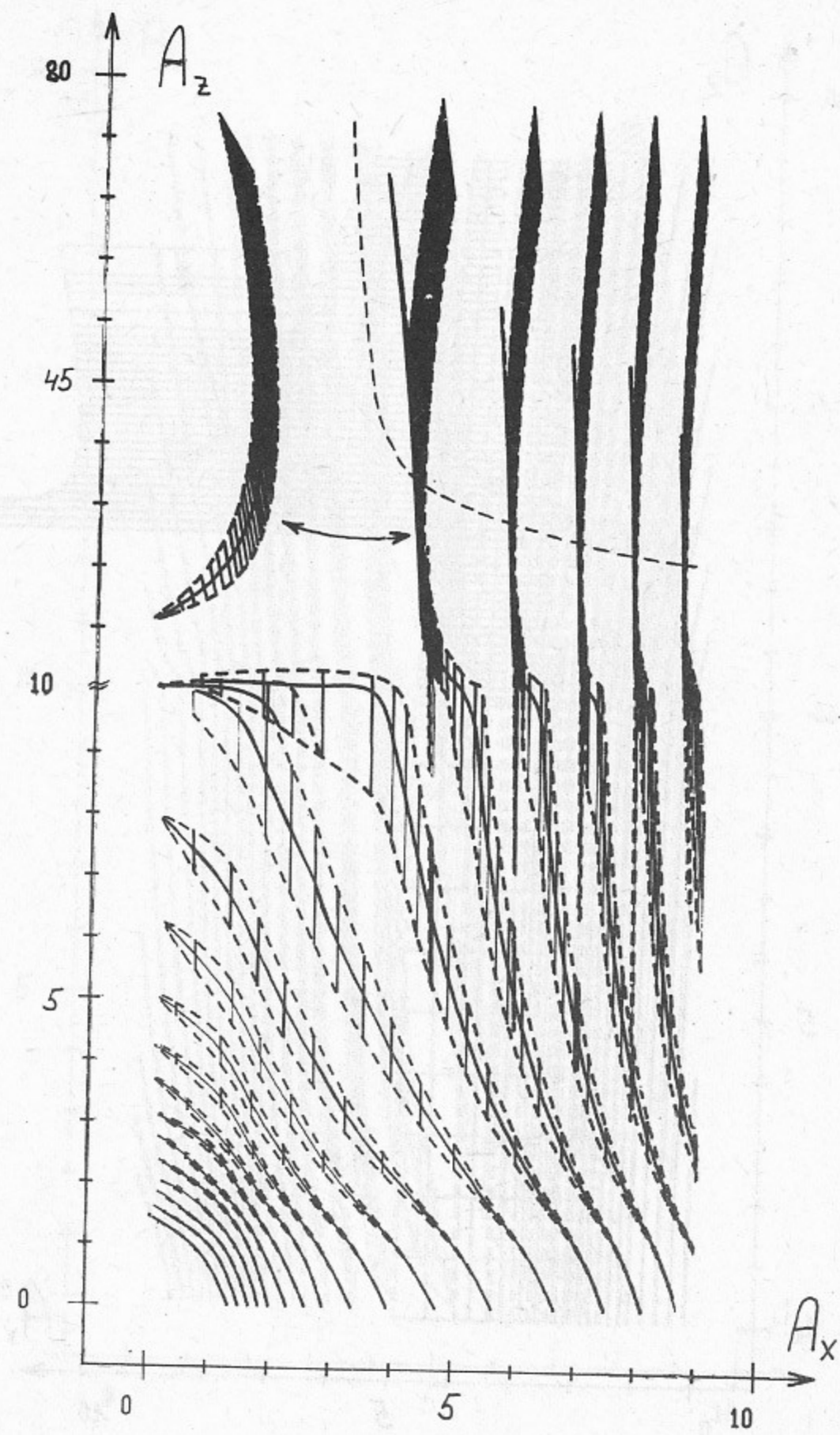


Рис. 61.  $l=2, m=-8$ .

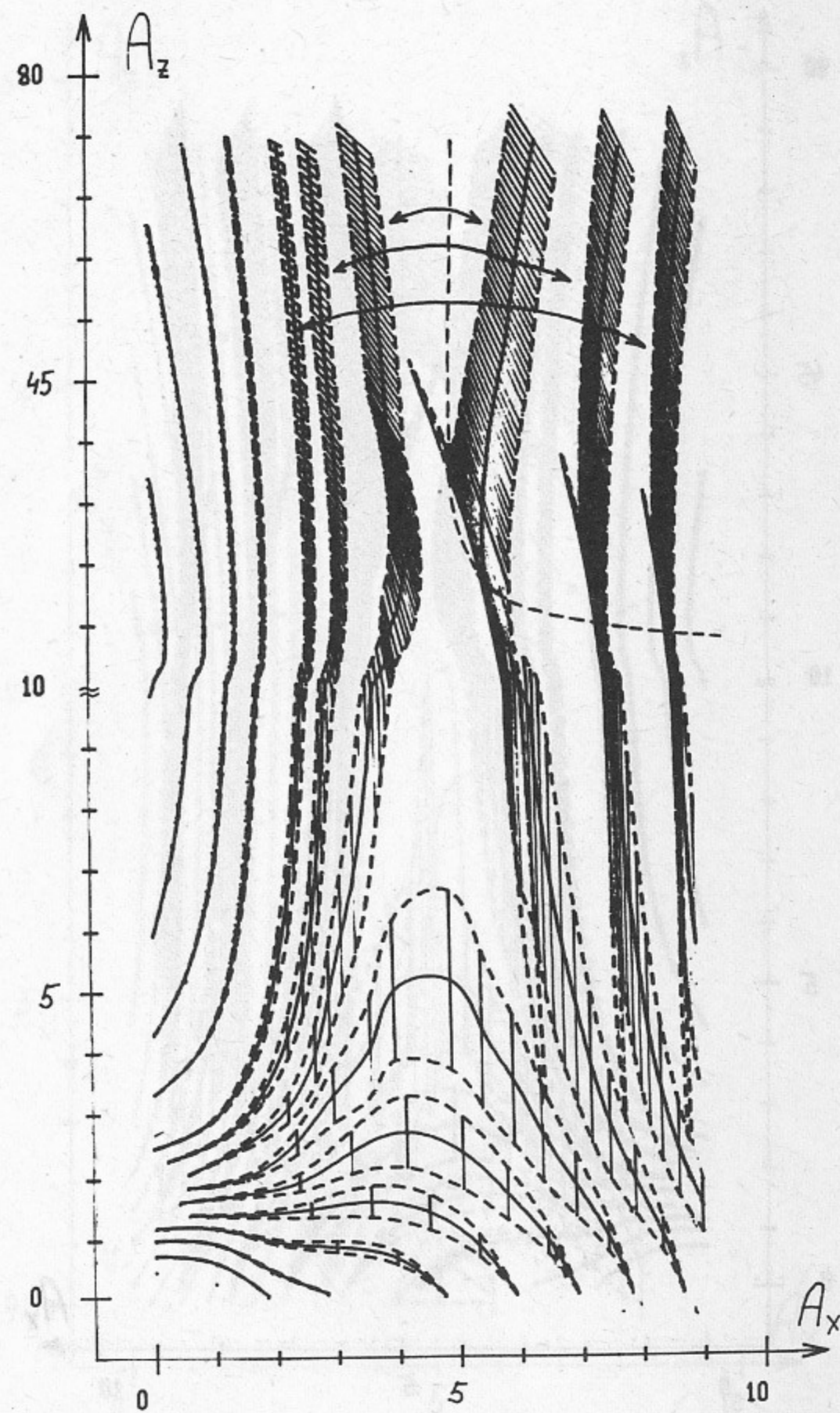


Рис. 62.  $l=4, m=-6$ .

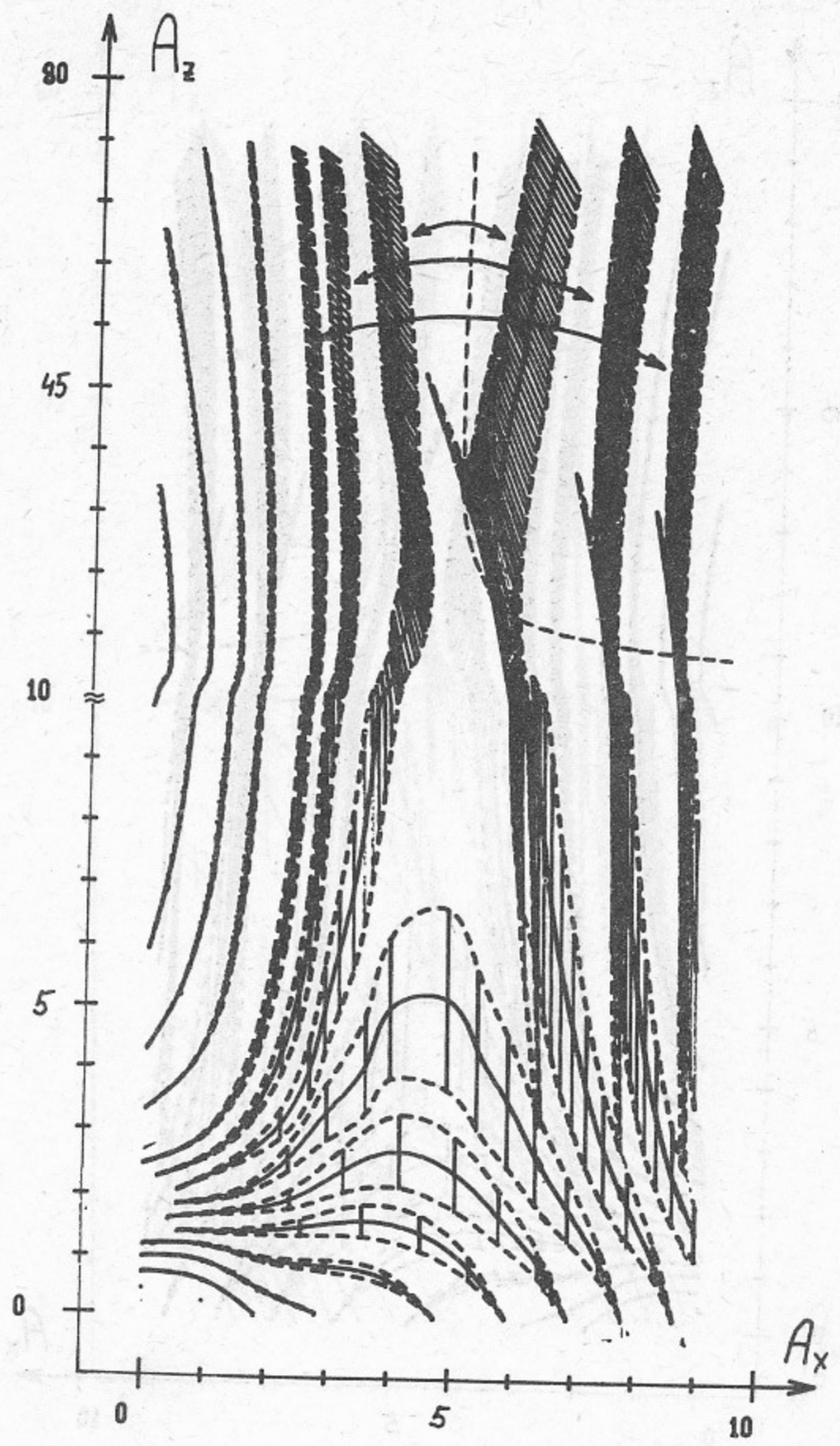


Рис. 63.  $l=6, m=-4$ .

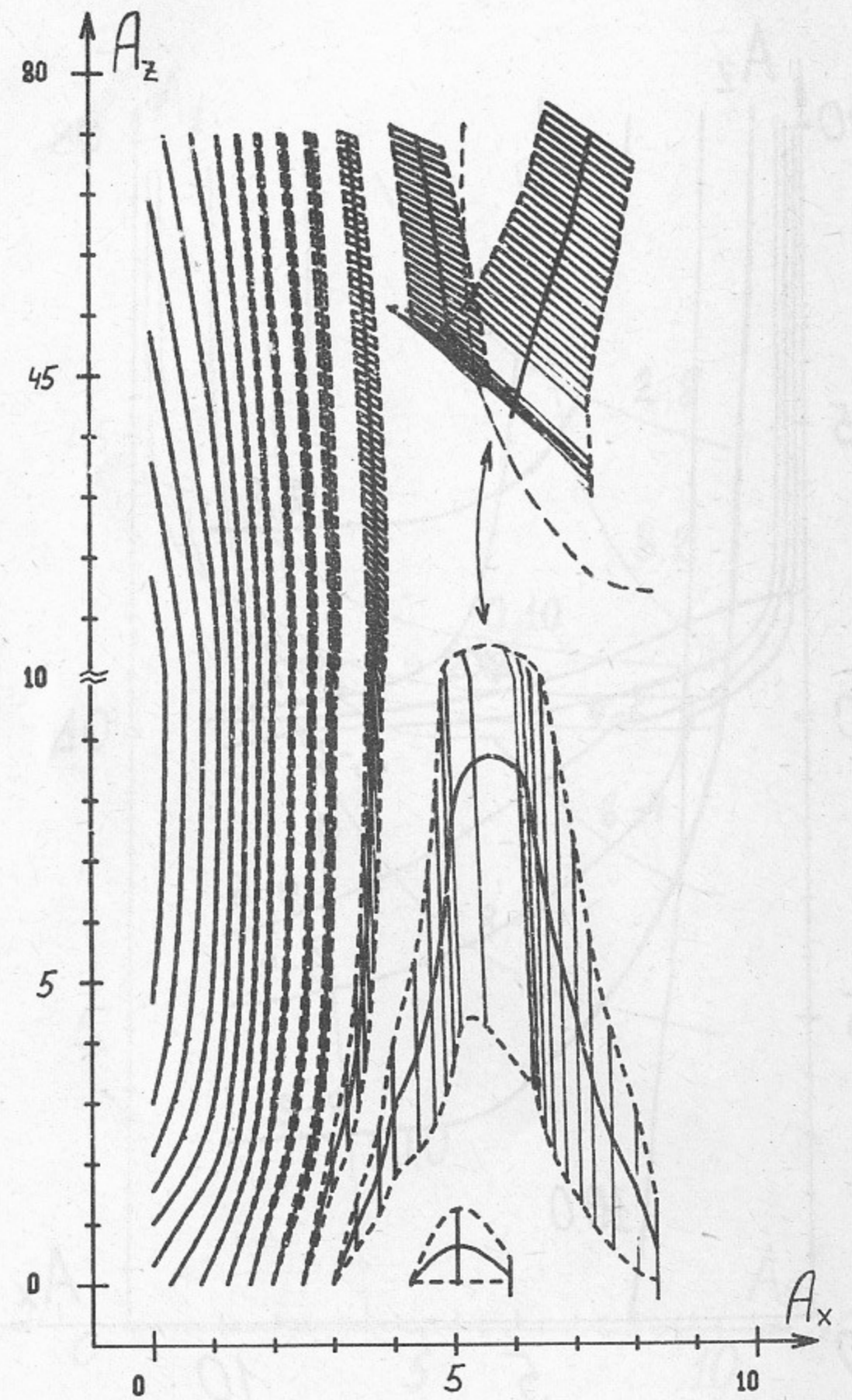


Рис. 64.  $l=8, m=-2$ .



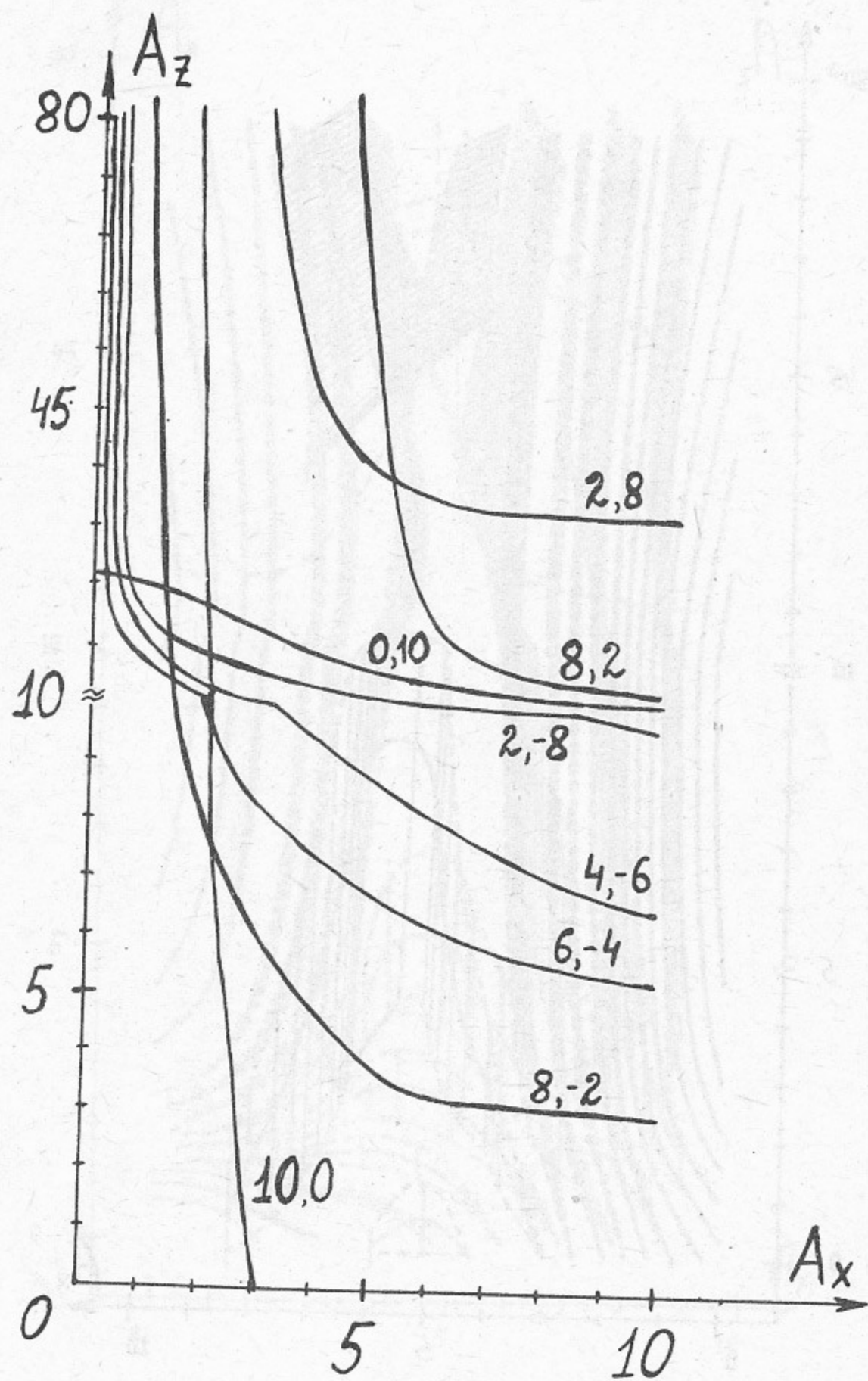


Рис. 65.

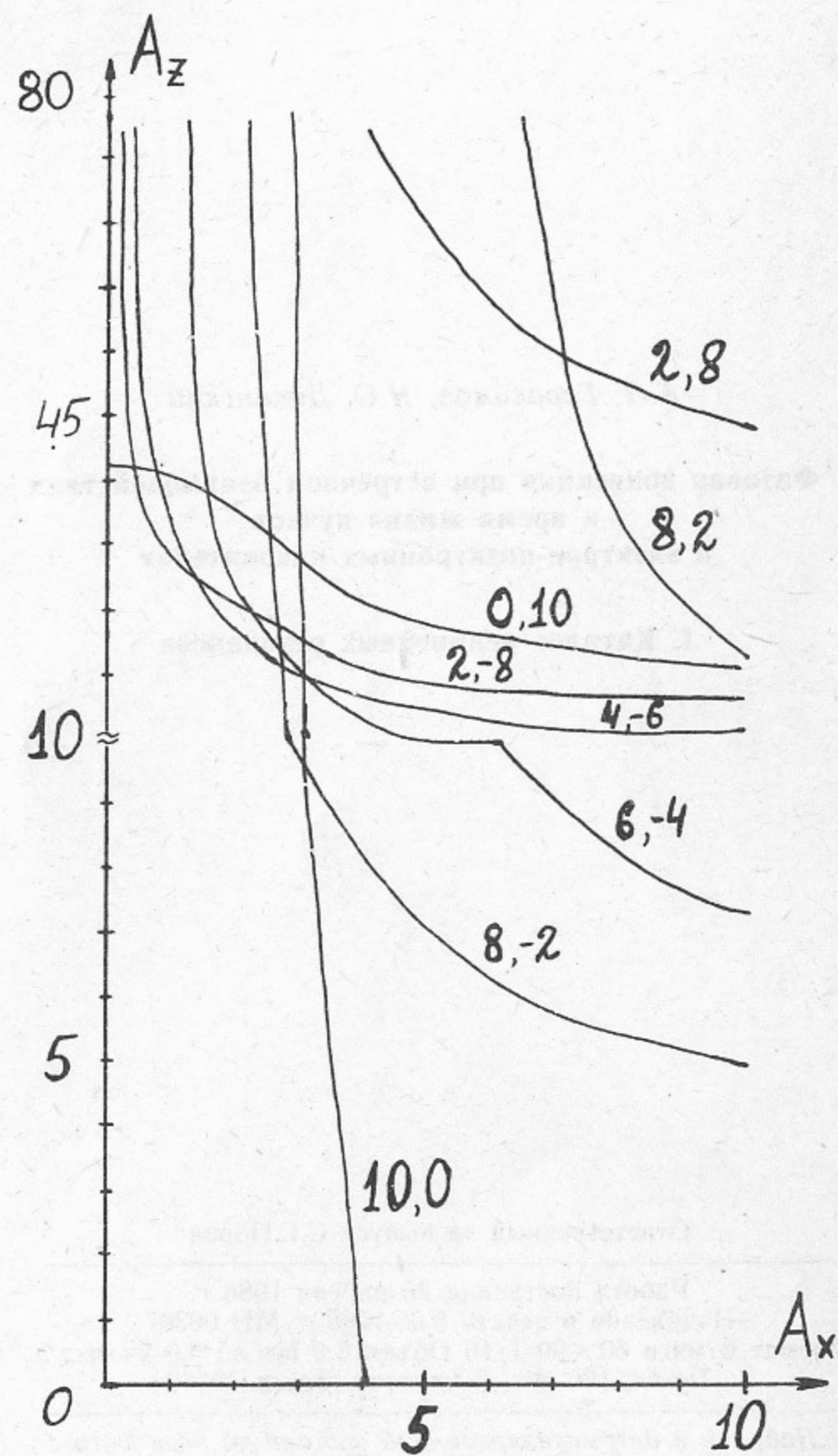


Рис. 66.

*А.Л. Герасимов, Н.С. Диканский*

**Фазовая конвекция при встречном взаимодействии  
и время жизни пучков  
в электрон-позитронных накопителях**

**I. Каталог нелинейных резонансов**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

---

Работа поступила 20 апреля 1988 г.  
Подписано в печать 5.05.1988 г. МН 08307  
Формат бумаги 60×90, 1/16 Объем 3,9 печ.л., 3,0 уч.-изд.л.  
Тираж 180 экз. Бесплатно. Заказ № 60

---

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-  
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и  
отпечатано на ротапинтере Института ядерной физики  
СО АН СССР,  
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*