27

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Ф.А. Цельник

О СТОХАСТИЧЕСКОМ КВАНТОВАНИИ

ПРЕПРИНТ 88-47

НОВОСИБИРСК

Интерпретация квантовой механики в терминах теории случайных процессов [1] (а также обзор [2]) основана на сопоставлении траекториям частицы решений стохастического дифференциального уравнения в координатном пространстве. В простейшем случае одномерного нерелятивистского движения частицы без спина уравнение имеет вид:

$$dq(t) = v_+(q(t), t)\, dt + dw(t)\,. \tag{1}$$

Здесь $q(t)$ — координата частицы (случайная) в момент t;

$$v_+(x, t) = \lim_{\Delta t \to 0} E\left[\frac{q(t+\Delta t) - q(t)}{\Delta t}\,\middle|\, q(t) = x\right]$$

есть среднее значение (математическое ожидание) смещения в единицу времени — «скорости» частицы — для пучка траекторий, расходящихся из точки x; dw — стандартный (винеровский) случайный процесс: $E(dw) = 0$, $E(dw^2) = \nu\, dt$; ν — коэффициент диффузии, не зависящий от $q(t')$ для $t' \leqslant t$.

Такое описание траекторий только по форме напоминает теорию броуновского движения в классической механике, где существует физическая причина диффузии — столкновение с молекулами среды.

Напротив, в стохастической механике представление об универсальном характере диффузии является исходным: все тела движутся по случайным траекториям с коэффициентом диффузии $\nu = \hbar/2m$, где $\hbar$ — постоянная Планка, деленная на 2π, m — масса тела. Гипотеза о таком характере движения сама по себе не более уязвима, чем представления о гладких линиях классической механики, но она существенно отличается от этих представлений и не сводится к ним. В [1] показано, что эта схема, дополненная «динамической гипотезой», определяющей связь функции $v_+(x,t)$ с внешней силой $F(x,t)$, эквивалентна квантовой механике, по крайней мере, для систем с конечным числом степеней свободы.

Гипотеза об универсальном броуновском движении побуждает к выявлению механизма, ответственного за диффузию, поскольку диффузия — это весьма специальный вид движения (конечно, с равным основанием можно искать и причину гладкости траекторий классической механики: они ведь тоже — лишь частный случай линий).

Тем не менее, как будет здесь показано, эта гипотеза (а вместе с ней и «динамическая гипотеза») может быть истолкована в духе традиционных представлений квантовой теории, связывающих статистический характер описания с неконтролируемым взаимодействием частицы с измерительным прибором.

Для этого необходимо конкретизировать понятие «измерительный прибор». Задача механики состоит в нахождении траекторий тел, движущихся под действием внешних сил. Сами силы выявляются по их влиянию (ускорению) на тела, отличные от того, движение которого изучается, — так называемые пробные тела. По существу сравниваются движения разных тел в одном силовом поле, причем траектории данного тела ставится в соответствие множество траекторий пробных тел. Последние специально — для решения данной задачи — подбираются; можно сказать, что в совокупности траекторий пробных тел силовое поле «закодировано». Вопрос тогда заключается в установлении правил оптимального кодирования, зависящих и от характера решения, требуемого по условиям задачи.

Предложение, реализуемое в схеме ньютоновской механики, состоит в установлении локального соответствия: в точке, где в данный момент находится тело (A), движение которого ищется, ему сопоставлено одно из пробных тел (Z), имеющее «подобную» траекторию в этой точке: на интервале $(t-dt, t+dt)$ изменения импульсов тел A и Z равны с точностью до членов более высокого порядка по dt:

$$dp_A = dp_Z + o(dt)\,.$$

В классе гладких траекторий такого соответствия достаточно

для того, чтобы построить решение интегрированием. Приведенное равенство есть уравнение Ньютона, если обозначить общее значение приращений через $F\,dt$.

Тогда из уравнения $dp_A/dt = F(x,t)$ находится траектория A, а равенство $F(x,t) = dp_Z/dt$ *определяет* функцию $F(x,t)$. Считая импульс функцией скорости, можно сопоставить конструкции Ньютона определенную эмпирическую процедуру. Если приближенно заменить траекторию A ломаной и считать точку t одной из точек излома, сосредоточив в ней все ускорение за интервал $(t-dt, t+dt)$, то нужно сопоставить телу A в момент t такое Z, которое на интервале $(t-dt, t)$ движется точно так же, как A. На интервале $(t, t+dt)$ траектории A и Z, вообще говоря, различны, но первая может быть найдена по известной второй, если дополнительно известна их связь — отношения заряд/масса: одно из требований к набору пробных тел $\{Z\}$ состоит как раз в том, чтобы эта связь была задана.

Эмпирическая процедура сравнения движений тел сопряжена с их взаимными контактами, необходимыми уже для установления самого факта одинаковости движения A и Z на интервале $(t-dt, t)$. В классической механике допускаются к рассмотрению ситуации, в которых можно найти такой $\{Z\}$, что контакты $A \leftrightarrow \{Z\}$ практически не влияют на траекторию A. Если, однако, $\{Z\}$ таков, что влияние измерительных контактов существенно, движение A уже не определено только силой F. При случайном характере изменения импульса из-за контактов возникает вероятностное описание, обусловленное процессом измерения, а не свойствами самой изучаемой системы, как в статистической механике.

Все же не пробные тела являются объектом исследования, а потому набор $\{Z\}$ не задан изначально: его можно подобрать, причем разным выборам $\{Z\}$ отвечает и разное возмущение траектории A. Можно представить себе и макроскопическое тело, положение которого определяется посредством контактов с вспомогательными телами, причем передача импульса при регистрации контакта не мала по сравнению с импульсом, приобретаемым телом во внешнем поле. Если информация о движении образуется лишь из таких измерений, описание, очевидно, возможно лишь статистическое. В области применимости классической механики всегда можно найти лучший набор $\{Z\}$ и произвести невозмущающие измерения; в квантовой механике — нельзя.

Поскольку все движение частицы описывается вероятностно, ее измерительные контакты с телами $\{Z\}$ тоже реализуются лишь с некоторой вероятностью. Сама система $\{Z\}$ подходящим образом упорядочена, а движение составляющих ее тел всегда считается классическим: их массу можно выбрать достаточно большой.

Оказывается, что уравнение Шредингера дает картину движения частицы, соответствующую измерению с использованием вполне определенного, минимально искажающего информацию, набора пробных тел, взаимодействие с которым представлено стохастическим процессом, удовлетворяющим уравнению (1).

Для фактического построения такого — оптимального — набора $\{Z\}$ нужно прежде всего заметить, что поскольку информация, предоставляемая пробными телами, — это изменение импульса под действием F в каждой точке (x, t), и движение частицы должно быть выражено через эту величину, то следует так организовать $\{Z\}$, чтобы при неизбежном возмущении движения частицы, по крайней мере, средний ее импульс из-за контактов $A \leftrightarrow \{Z\}$ не менялся. Тогда изменение среднего импульса будет обусловлено только внешней силой, и, если известен коэффициент диффузии, то вероятностный процесс будет вполне определен и выражен через dp_Z/dt.

Для диффузионных процессов нужное устройство набора всегда возможно. Пусть, в самом деле, $t^- = t - \Delta t$, t, $t^+ = t + \Delta t$ — три последовательных момента времени, а $\rho^-(x', t^-)$, $\rho(x, t)$, $\rho^+(x'', t^+)$ — относящиеся к этим моментам распределения вероятностей положения частицы. Задача состоит в отыскании отображения $\rho^- \to \rho^+$, причем такого, чтобы при $\Delta t \to 0$ можно было бы построить интегральную сумму, определяющую отображение $\rho(x', t_0) \to \rho(x'', t_1)$ для конечного интервала (t_0, t_1).

Плотность вероятности перехода $P(x', t^-, x'', t^+)$ из точки (x', t^-) в (x'', t^+) для диффузионного процесса удовлетворяет условию Чепмена — Колмогорова:

$$P(x', t^-, x'', t^+) = \int dx\, P(x', t^-, x, t)\, P(x, t, x'', t^+)\,. \tag{2}$$

Поскольку, с другой стороны, по определению вероятности перехода:

$$\rho^+ = \int dx'\, \rho^-\, P(x', t^-, x'', t^+)\,, \tag{3}$$

то подстановка (2) в (3) с изменением порядка интегрирования дает представление совокупности траекторий, отображающих ρ^- в ρ^+ и удовлетворяющих (1), в виде интеграла по x, где каждое слагаемое интегральной суммы соответствует «цилиндрическому

множеству», составленному из траекторий, проходящих в окрестности dx точки x в момент t:

$$\rho^+ = \int dx \int dx'\, \rho^-\, P(x', t^-, x, t)\, P(x, t, x'', t^+)\,. \tag{4}$$

Каждому такому цилиндрическому множеству $O(x, t)$ выборочных траекторий частицы следует поставить в соответствие ту часть потока пробных тел, которые проходят через точку (x, t) и потому испытывают изменение импульса $2F(x, t)\Delta t$.

Этим условием выбор Z в точке (x, t) не определен однозначно; нужно задать еще скорость Z на интервале (t^-, t). В классической механике она равна скорости A. В квантовой механике нужно выбрать скорость Z, равную средней «скорости» A в точке (x, t) в том смысле, что в первом порядке по Δt равен нулю средний по $O(x, t)$ обмен импульсом между Z и A. Тогда, зная Δp_Z, можно указать и среднее значение Δp_A, не зависящее от измерительных контактов.

Для диффузионных траекторий (1) средний импульс, «вытекающий» из точки (x, t), складывается из «кинетической» части, связанной с движением вероятностного распределения как целого, и «осмотической», обусловленной расплыванием распределения. Первая равна $m\rho v_+$, так как для винеровского процесса $E(dw \mid q(t) = x) = 0$. Вторая равна $-m\rho u = -m\nu \dfrac{\partial \rho}{\partial x}$.

Чтобы определить $O(x, t)$, нужно задать еще импульс, «втекающий» в точку (x, t). С этой целью в [1] введено уравнение

$$dq(t) = v_-(q(t), t)\, dt + dw'(t)\,, \tag{1'}$$

сопряженное (1) в том смысле, что множество траекторий (1′) дает такое же отображение $\rho(x', t_0) \to \rho(x'', t_1)$ для любого (t_0, t_1), что и (1), но заданное пучками траекторий, сходящихся к (x, t).

Аналогично (1):

$$v_-(x, t) = \lim_{\Delta t \to 0} E\left[\frac{q(t) - q(t^-)}{\Delta t}\,\Big|\, q(t) = x\right].$$

Средний импульс, «втекающий» в (x, t), согласно (1′), равен $m\left(\rho v_- + \nu \dfrac{\partial \rho}{\partial x}\right)$. Следовательно, v_+ и v_- связаны соотношением

$$v_- = v_+ - 2\nu \frac{\partial \ln \rho}{\partial x}\,, \tag{5}$$

которое можно получить и из сопряженных уравнений Фоккера — Планка, определяемых (1) и (1′) [1]:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(v_{\pm}\rho) \pm \nu\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}. \qquad (6,\ 6')$$

Среднее по $O(x, t)$ на интервале (t^-, t) значение v_+ равно:

$$\langle v_+ \rangle^- = E[\, v_+(q(t^-), t^-) \mid q(t) = x] \,, \qquad (7)$$

а на (t, t^+):

$$\langle v_- \rangle^+ = E[\, v_-(q(t^+), t^+) \mid q(t) = x] \,. \qquad (8)$$

Пусть пробные тела из $\{Z\}$ выбраны так, что их скорость на (t^-, t) равна $\langle v_+ \rangle^- - u$, а на (t, t^+) равна $\langle v_- \rangle^+ + u$. Тогда средний обмен импульсом $A \leftrightarrow O(x, t) \subset \{Z\}$ (трение) будет равен нулю в первом порядке по Δt.

Полученная из наблюдений за движением пробных тел величина $2F(x, t)\Delta t = \Delta p_Z$ должна быть приравнена скачку Δp_A:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\langle v_- \rangle^+ + 2u - \langle v_+ \rangle^-}{2\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{Ev_-(q(t^+), t^+) - v_-(q(t), t) - Ev_+(q(t^-), t^-) + v_+(q(t), t)}{2\Delta t} \,\Big|\, q(t) = x \right] \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2}(D_+ v_- + D_- v_+) = \frac{F}{m}. \qquad (9)$$

Но именно это равенство составляет содержание «динамической гипотезы», введенной Нельсоном [1] лишь по аналогии с уравнением Ланжевена, а здесь получающей обоснование в самом характере эмпирической процедуры, которая, в свою очередь, определяется условием разрешимости задачи.

Следует заметить, во избежание недоразумений, что переходные вероятности в стохастической механике и в конструкции интеграла по траекториям не одно и то же: они определены по отношению к различным совокупностям траекторий, по которым осуществляется переход. В стохастической механике рассматриваются траектории случайного процесса. Вероятности перехода удовлетворяют условию Чепмена — Колмогорова и зависят от $\rho(x, t)$. В схеме интеграла по траекториям [3] при каждом разбиении интервала (t_0, t_1), относящемся к одному из членов последовательности

интегральных сумм, берутся классические траектории, и лишь в пределе $\Delta t \to 0$ конструкция эквивалентна случайному процессу. Главный постулат схемы состоит как раз в том, что условие Чепмена — Колмогорова не выполняется и заменяется аналогичным допущением относительно комплексных амплитуд вероятности, зависящих от $F(x, t)$, но не от $\rho(x, t)$.

Для каждого разбиения в [3] траектории — непрерывные линии (ломаные). В приведенной выше конструкции пробным телам в каждой точке сопоставлены лишь части траекторий — на интервале (t^-, t^+), причем не определено их продолжение за пределы интервала. Продолжение и не требуется, коль скоро нужно найти только последовательность отображений $\rho^- \to \rho^+$ и допустимо перемешивание выборочных кривых, реализующих отображение. В пределе $\Delta t \to 0$ случайное слагаемое $dw(t)$ восстанавливает все-таки непрерывность траекторий по вероятности [4].

Зависимость вероятности перехода от ρ в стохастической механике обусловлена тем, что при разных функциях $\rho(x, t)$ скорости потока пробных тел в точке (x, t), для которых трение равно нулю, — разные, а тогда и рассеяние на этих телах, существенное для определения вероятности, тоже изменится.

Само представление процесса в форме (1) также есть лишь математический эквивалент измерительной процедуры. Действительно, так как рассеяние определено упругими столкновениями частицы с измерительными телами, массу которых можно считать бесконечно большой, при контакте сохраняется квадрат импульса частицы. Тогда диффузия сводится лишь к изменению положения A, т. е. к случайному процессу в координатном пространстве, а таковой имеет вид (1) при весьма общих предположениях (см., например, [5]).

Универсальное значение коэффициента диффузии — его независимость от F — также соответствует выбору $\{Z\}$ с минимальным искажением информации. Действительно, даже в отсутствие «трения» слишком сильное рассеяние на пробных телах так исказит движение частицы, что его зависимость от F почти исчезнет.

Изменение среднего импульса аппроксимируется все более точно с уменьшением Δt, тогда как диффузия — в силу гауссовского характера процесса (1) (дисперсия суммы случайных смещений равна сумме дисперсий слагаемых) — не подавляется при увеличении числа точек деления.

Регистрация контакта частицы с пробным телом из поднабора $\{Z'\} \subset \{Z\}$, соответствующего некоторому значению измеряемой величины (в классическом смысле, так как движение пробных тел в общих понятиях механики связана с обменом классическое), импульсом между ними. Отправляясь от классического аналога, естественно ввести величину «свободного пробега» по регистрации λ как расстояние, на котором контакт регистрируется с вероятностью порядка единицы. Величина λ никак не связана с F, определяя лишь процесс фиксации контакта; она зависит от плотности потока пробных тел и «эффективного сечения» регистрации. Минимальная величина передачи импульса, необходимая для регистрации контакта, играет роль бита информации. Численное значение этого импульса имеет смысл лишь в рамках аналогии с неким (условным) классическим процессом, где его можно было бы определить при невозмущающем измерении: сам по себе бит информации не может иметь величину, характеризуя лишь обнаружение частицы, но не измерение импульса.

Полезно, для наглядности, разобрать «в классических понятиях» формирование бита информации. При заданном способе регистрации контакта плотность потока можно *подбирать*: слишком малое значение λ соответствует сильному рассеянию частицы на пробных телах; слишком большое — плохой локализации частицы вследствие уменьшения вероятности ее обнаружения в заданном интервале Δx. Поэтому существует $\lambda = \lambda_o$, отвечающее минимальной полной дисперсии, если вероятность обнаружения также характеризовать дисперсией значений координаты. Величина $p_m \cdot \lambda_o(p_m)$, где p_m — минимально необходимое для регистрации контакта значение передаваемого импульса, определяет дисперсию при оптимальном выборе $\{Z\}$. С другой стороны, коэффициент диффузии в гауссовом процессе связан с дисперсией соотношением $\nu\Delta t = \bar{v}\lambda_o\Delta t$, где $m\bar{v} = p_m$. Отсюда $\nu = \frac{p_m \cdot \lambda_o}{m}$ с обозначением $p_m \cdot \lambda_o = \text{const} = \hbar/2$.

Как и обычно, универсальность — следствие экстремальности.

Объяснение структуры квантовой механики рассеянием на пробных телах разрешает известный парадокс: классическая механика — предельный случай квантовой, но необходима для самой ее формулировки. Гамильтонианы квантовых систем строятся по классическим аналогам. Но по сказанному выше, движение частиц описывается в терминах пробных тел, сопоставленных частице и движущихся по классическим траекториям.

При всей простоте приведенного анализа, он, на первый взгляд, противоречит тому, что в реальных квантовомеханических

экспериментах никаких пробных тел нет и быть не может (недостижимые для макроскопических тел скорости, как у частиц; мгновенное устранение «отработавших» тел за время, малое по сравнению с Δt и т. п.). Но ведь и в классических экспериментах пробных тел обычно тоже нет. Тем не менее, когда утверждается, что данный прибор измеряет определенную механическую величину в заданном интервале значений и с такой-то точностью, всегда подразумевается определенный процесс его калибровки. В конечном счете, это всегда можно проследить до сравнения с пробными телами. Сравнение показаний прибора с разного рода эталонами оправдано лишь в той мере, в какой сами эталоны выверены по траекториям тел. Принцип действия любого прибора означает некоторое разбиение всего множества тел на подмножества, которые прибор отличает друг от друга, но не различает тела внутри подмножеств.

Калибровка прибора для измерений в классической области основана на представлении траекторий тел в виде гладких кривых. Соответствие между начальным и конечным положениями тела предсказывается с использованием такой картины движения. Адекватное определение какой-либо механической величины в квантовой механике тоже предполагает существование прибора, ее измеряющего, с необходимой калибровкой. Калибровка с участием пробных тел сопровождается рассеянием контрольных частиц. Таким образом, прибор для квантовомеханических измерений уже в своем устройстве предполагает отображение начального состояния в конечное семейством диффузионных траекторий. Иначе его нельзя прокалибровать. Явное введение в анализ пробных тел позволяет судить о правильности принципа действия прибора.

Например, экран со щелями следует сопоставить потокам пробных тел, которые могут пройти только через щели. Эта конфигурация тел есть *определение* экрана. В самом деле, то, что в экране есть щели, известно потому, что их «видно» — можно проверить пропусканием тел (например, фотонов). Интерференция на двух щелях естественно объясняется, если принять во внимание, что частица испытывает дополнительное рассеяние на пробных телах, пролетающих через вторую щель, а с другой стороны, от второй щели добавляются частицы в ансамбле.

Уже само представление о траектории связано с измерительными контактами. В частности, неверно было бы считать, что в квантовой механике траектории «на самом деле» гладкие, но измеряются способом, искажающим информацию. Определенное подмножество совокупности измерительных контактов — это и есть траектория. Все геометрические образы механики могут быть выражены и с единой точки зрения обоснованы в терминах таких контактов. Подробное обсуждение геометрических конструкций механики, однако, далеко выходит за рамки этой статьи и должно стать предметом отдельного сообщения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nelson E.* Phys. Rev. 1966, v.150, p.1079.
2. *Guerra F.* Phys. Rep. 1981, v.77, p.263.
3. *Feynman R.P.* Rev. Mod. Phys. 1948, v.20, p.367.
4. *Леви П.* Стохастические процессы и броуновское движение. — М.: Наука, 1972.
5. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1965.

Ф.А. Цельник

О стохастическом квантовании

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 21 марта 1988 г.
Подписано в печать 31.03.1988 г. МН 08245
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 0,8 печ.л., 0,7 уч.-изд.л.
Тираж 150 экз. Бесплатно. Заказ № 47

Набрано в автоматизированной системе на базе фотонаборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и отпечатано на ротапринте Института ядерной физики СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.