

23

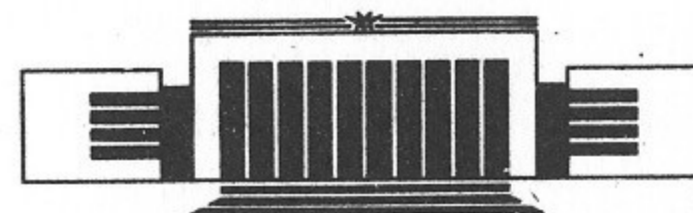
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР



Д.В. Пестриков

О ТОРМОЖЕНИИ ИОНА В  
ЗАМАГНИЧЕННОМ ЭЛЕКТРОННОМ ПОТОКЕ

ПРЕПРИНТ 88-42



НОВОСИБИРСК

О торможении иона в  
замагниченном электронном потоке

Д.В. Пестриков

Институт ядерной физики  
630090, Новосибирск 90, СССР

АННОТАЦИЯ

В логарифмическом приближении в работе вычислены продольные компоненты силы трения, действующие на положительно и отрицательно заряженные ионы в замагниченном электронном пучке. Обсуждается ограничение величины продольной силы трения, связанное с пространственным зарядом охлаждающего пучка.

ABSTRACT

In the frame of the logarithmic approximation the longitudinal friction force for positive and negative charged ions inside the magnetized electron beam has been calculated. Limitation on the magnitude of the friction force caused by the space charge of the cooling beam is discussed.

1. Как известно [1, 2], в области малых температур эффективность электронного охлаждения пучка тяжелых частиц (ионов) может существенно увеличиваться замагниченностью охлаждающих электронов. Это увеличение обусловлено вкладом столкновений, происходящих адиабатически/медленно по сравнению с частотой ларморовского вращения электронов  $\omega_L$  в сопровождающем магнитном поле установки ( $\vec{H}_0$ ). Если  $\vec{u} = \vec{v} - \vec{v}_e$  — относительная скорость сталкивающихся иона и электрона, то область прицельных параметров  $\rho$ , отвечающих адиабатическим столкновениям, определяется неравенством

$$\rho \frac{\omega_L}{u} \gg 1, \quad \omega_L = \frac{eH_0}{mc}. \quad (1)$$

Если, к тому же, скорость иона мала по сравнению со скоростью ларморовского вращения электрона  $v_L$ , то  $u \simeq v_L$  и вместо (1) получаем

$$\rho \gg \rho_L = \frac{v_L}{\omega_L}. \quad (2)$$

В этих условиях охлаждение обусловлено столкновениями ионов с газом ларморовских кружков, температура которых совпадает с продольной температурой электронов  $T_{\parallel}$  и (при электростатическом ускорении) может достигать очень малых величин. Поскольку в равновесии температуры пучков выравниваются,  $T_i \rightarrow T_{\parallel}$ , использование электронного охлаждения позволяет получать пучки ионов с уникально малыми температурами (см., например, [3]).

Охлаждение замагниченным пучком, особенно на его конечной стадии, является весьма сложным процессом. Так, в работах [4, 5] указывалось на возможность определенных различий в охлаждении положительно и отрицательно заряженных частиц. Экспериментально этот вопрос изучался в работе [6]. Измерением продольной силы трения  $F_{\parallel}$  отрицательных ( $F_{\parallel}^{(-)}$ ) и положительных ( $F_{\parallel}^{(+)}$ ) ионов водорода установлено, что максимальные значения  $F_{\parallel}^{(-)}$  примерно в три раза превышают максимальные значения  $F_{\parallel}^{(+)}$ . В качестве объяснения столь заметного различия  $F_{\parallel}^{(+)}$  и  $F_{\parallel}^{(-)}$  в работах [5, 6] указано на вклад столкновений с прицельными параметрами

$$\rho < \rho_{\min} = \frac{2e^2}{mv^2} \quad (3)$$

(электроны считаются неподвижными), дающих в  $F_{\parallel}^{(-)}$  нелогарифмическую добавку [5, 6]:

$$\Delta F_{\parallel}^{(-)} = -\frac{2\pi n e^2}{mv^2} \cdot 4. \quad (4)$$

Ранее роль аналогичных процессов в охлаждении обсуждалась в [4], причем их вклад в  $F_{\parallel}^{(-)}$  был оценен как малосущественный.

2. В настоящей работе мы проведем вычисление продольной силы трения  $F_{\parallel}$  для положительно и отрицательно заряженных частиц с учетом разброса продольных скоростей в электронном пучке. Для простоты\*) считаем электронный пучок предельно замагниченным так, что во всяком случае  $\rho_L \ll n^{-1/3}$  ( $n$  — плотность пучка электронов); скорость иона считаем направленной вдоль магнитного поля  $\vec{H}_0$ .

Подробное описание охлаждения замагниченным пучком дано в работе [4]. В этом смысле приведенные ниже вычисления, в основном, будут сводиться к напоминанию или конкретизации вычислений в работах [4, 6]. Следуя [4], мы будем предполагать выполненным условие

$$T_{\parallel} = m\Delta^2 \gg e^2 n^{1/3}, \quad (5)$$

тем более, что, судя по публикациям [6, 7], это условие не слишком сильно нарушено в эксперименте. Будем также предполагать,

\*) Это также отвечает условиям эксперимента в [6].

что число ленгмюровских колебаний электронов на длине участка охлаждения  $l$  велико:

$$\frac{\omega_e l}{v_0} \gg 1, \quad \omega_e^2 = \frac{4\pi n e^2}{m}, \quad (6)$$

$v_0$  — средняя скорость пучка ионов.

В указанных условиях сила трения, действующая на положительно заряженный ион, определяется выражением

$$\vec{F} = \frac{-ie^2}{2\pi^2} \int \frac{d^3 k \vec{k}}{k^2 \varepsilon(\vec{k}, \vec{k} \vec{v})}, \quad (7)$$

где  $\varepsilon(\vec{k}, \omega)$  — диэлектрическая проницаемость электронного пучка; скорости иона ( $\vec{v}$ ) и электронов будем отсчитывать от  $\vec{v}_0$ . В замагниченном пучке электроны движутся вдоль  $\vec{h} = \vec{H}_0/H_0$ , а

$$\varepsilon(\vec{k}, \omega) = 1 + \frac{\omega_e^2 k_{\parallel}}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv_e \frac{\partial f / \partial v_e}{\omega - k_{\parallel} v_e}, \quad \text{Im } \omega > 0, \quad (8)$$

$k_{\parallel} = \vec{h} \vec{k}$ ,  $f(v_e)$  функция распределения электронов по скоростям. Ниже мы почти всегда будем считать  $f(v_e)$  гауссовой функцией:

$$f(v_e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Delta} \exp\left(-\frac{v_e^2}{2\Delta^2}\right). \quad (9)$$

Для такого распределения и  $\vec{v} \parallel \vec{h}$  для  $k^2 \varepsilon(\vec{k}, k_{\parallel} v)$  имеем:

$$k^2 \varepsilon(\vec{k}, k_{\parallel} v) = k^2 - \frac{\omega_e^2}{\sqrt{2\pi} \Delta^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_e v_e e^{-v_e^2/2\Delta^2}}{v - v_e} + i\pi \text{sgn}(k_{\parallel}) \frac{v}{\sqrt{2\pi} \Delta^3} \omega_e^2 \exp\left(-\frac{v^2}{2\Delta^2}\right), \quad (10)$$

где интеграл должен вычисляться в смысле главного значения.

Простые выражения для  $F_{\parallel}$  получаются в двух предельных случаях.

а).  $|v| \ll \Delta$ . При этом с точностью до квадратичных по  $(v/\Delta)$  слагаемых

$$k^2 \text{Re } \varepsilon(\vec{k}, k_{\parallel} v) \simeq k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2 + k_d^2, \quad k_d = \frac{\omega_e}{\Delta},$$

а подстановка этого выражения в (7) дает

$$F_{\parallel}(v) = -\frac{e^2 \omega_e^2}{\sqrt{2\pi}} \frac{v}{\Delta^3} \int_0^{\infty} dk_{\parallel} k_{\parallel} \int \frac{d(k_{\perp}^2)}{(k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2 + k_d^2)^2}. \quad (11)$$

Входящий сюда интеграл по  $k$  логарифмически расходится. Эта специфическая для кулоновского взаимодействия расходимость устраняется введением такого  $k_{\perp}^{\max}$ , чтобы выполнялась использованная при вычислении (7) теория возмущений:

$$k_{\perp}^{\max} \sim \frac{m\Delta^2}{e^2} \gg k_d.$$

После интегрирования по  $k$  получаем

$$F_{\parallel}(v) = -\frac{e^2 \omega_e^2}{\sqrt{2\pi}} \frac{v}{\Delta^3} \frac{1}{2} \ln \left[ 1 + \left( \frac{k_{\perp}^{\max}}{k_d} \right)^2 \right], \quad (12)$$

или, с логарифмической точностью,

$$F_{\parallel}(v) = -\frac{e^2 \omega_e^2}{\sqrt{2\pi}} \frac{v}{\Delta^3} \frac{3}{2} \ln \left( \frac{m\Delta^2}{e^2 n^{1/3}} \right), \quad v \ll \Delta.$$

б). В области  $v \gg \Delta$  ленгмюровская волна успевает излучиться:

$$\operatorname{Re} \varepsilon(\vec{k}, k_{\parallel} v) \simeq 1 - \frac{\omega_e^2}{k^2 v^2}$$

и, соответственно,  $|\operatorname{Re} \varepsilon| \gg |\operatorname{Im} \varepsilon|$  для всех  $\vec{k}$  за исключением  $\operatorname{Re} \varepsilon(\vec{k}, k_{\parallel} v) = 0$ . В этом случае формулу (7) можно переписать в виде

$$F_{\parallel}(v) = -\frac{e^2}{2\pi} \operatorname{sgn}(v) \int \frac{d^3 k |k_{\parallel}|}{k^2} \delta[\operatorname{Re} \varepsilon(\vec{k}, k_{\parallel} v)],$$

или, после интегрирования по  $\vec{k}$ ,

$$F_{\parallel}(v) = -\frac{e^2 \omega_e^2}{2v^2} \operatorname{sgn}(v), \quad |v| \gg \Delta. \quad (13)$$

Объединяя формулы (12) и (13), для  $F_{\parallel}(v)$  получим

$$F_{\parallel}(v) = -\frac{e^2 \omega_e^2}{2\Delta^2} \begin{cases} \frac{v}{\Delta} \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \ln \left( \frac{m\Delta^2}{e^2 n^{1/3}} \right), & |v| \ll \Delta \\ \operatorname{sgn}(v) \frac{\Delta^2}{v^2}, & |v| \gg \Delta \end{cases} \quad (14)$$

3. При вычислении силы трения, действующей на отрицательно заряженный ион, выражение (7) должно вычисляться совместно с вкладом столкновений с прицельными параметрами

$$\rho < \frac{2e^2}{mu^2}, \quad u = v - v_e. \quad (15)$$

В этой области столкновение состоит в отражении электронов от потенциального барьера высотой  $e^2/\rho$ , приводящем к изменению импульса иона на  $\Delta p_{\parallel} = -2mu$ . Средняя скорость изменения импульса иона, прошедшего в электронном пучке расстояние  $v_0 t$ , равна

$$\overline{\frac{d\Delta p_{\parallel}}{dt}} = \int_{-\infty}^v dv_e (-2mu) \pi \rho^2(u) \cdot |u| \cdot n \cdot \left( 1 - \frac{v_0 t}{l} \right) f(v_e) + \int_v^{\infty} dv_e (-2mu) \pi \rho^2(u) \cdot |u| \cdot n \cdot \frac{v_0 t}{l} f(v_e). \quad (16)$$

Отсюда, среднее изменение импульса иона после прохождения участка охлаждения

$$\Delta p_{\parallel} = \frac{-l}{v_0} \int_0^{\infty} du 2mu^2 \pi \rho^2 \cdot n \cdot \frac{1}{2} [f(v-u) - f(v+u)],$$

а среднее значение силы трения ( $\Delta F_{\parallel}^{(-)} = \Delta p_{\parallel} / (l/v_0)$ ) с учетом (15) равно

$$\Delta F_{\parallel}^{(-)}(v) = -e^2 \omega_e^2 \int \frac{du}{u^2} [f(v-u) - f(v+u)]. \quad (17)$$

Ввиду быстрого убывания подынтегрального выражения верхний предел интегрирования в (17) можно положить равным бесконеч-

ности. На нижнем же пределе интеграл логарифмически расходится. Эта расходимость связана с неограниченным увеличением сечения рассеяния частиц с малыми относительными скоростями:

$$\sigma = \pi \rho^2 = \frac{4\pi e^4}{m^2 u^4}. \quad (18)$$

Поскольку формула (17) написана в приближении парных столкновений,  $\rho$  сверху ограничено условием

$$\frac{\omega_e \rho}{u} \ll 1$$

(считаем пучок предельно замагниченным), или

$$\rho \ll \rho_{\max} = \frac{|u|}{\omega_e}.$$

Отсюда

$$u_{\min} \gg \left( \frac{2e^2 \omega_e}{m} \right)^{1/3} \quad (19)$$

и, соответственно,

$$\Delta F_{\parallel}^{(-)} = -e^2 \omega_e^2 \int_{u_{\min}}^{\infty} \frac{du}{u^2} [f(v-u) - f(v+u)]. \quad (20)$$

В некоторых предельных случаях выражение (20) удастся упростить.

Так, в области  $|v| \ll \Delta$  разложение подынтегрального выражения в ряд по степеням  $|v|/\Delta$  с точностью до квадратичных слагаемых дает

$$\Delta F_{\parallel}^{(-)} = 2e^2 \omega_e^2 v \int_{u_{\min}}^{\infty} \frac{du}{u^2} \frac{\partial f}{\partial u}, \quad |v| \ll \Delta. \quad (21)$$

Для распределения Гаусса (9) интеграл в (21) выражается через интегральную показательную функцию [8]:

$$\Delta F_{\parallel}^{(-)} = \frac{e^2 \omega_e^2 v}{\Delta^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} Ei\left(-\frac{u_{\min}^2}{2\Delta^2}\right). \quad (22)$$

Используя асимптотические выражения

$$Ei(-x) = \begin{cases} \ln(x) - x + C, & x \ll 1 \\ -\frac{e^{-x}}{x}, & x \gg 1 \end{cases}$$

где  $C \simeq 0.577$  — постоянная Эйлера, перепишем формулу (22) в виде

$$\Delta F_{\parallel}^{(-)} = -\frac{e^2 \omega_e^2 v}{\Delta^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} \ln\left(\frac{2\Delta^2}{u_{\min}^2}\right) + \frac{u_{\min}^2}{\Delta^2} - C, & u_{\min} \ll \Delta \\ \frac{\exp(-u_{\min}^2/2\Delta^2)}{(u_{\min}^2/2\Delta^2)}, & u_{\min} \gg \Delta. \end{cases} \quad (23)$$

В обратном предельном случае  $|v| \gg \Delta$  величина добавки  $\Delta F_{\parallel}^{(-)}$  определяется поведением хвостов функции распределения. Для гладких  $f(v_e)$  из (20) получаем

$$\Delta F_{\parallel}^{(-)} = e^2 \omega_e^2 \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \ln\left(\frac{v^2}{u_{\min}^2}\right), \quad |v| \gg \Delta. \quad (24)$$

Наоборот, для  $\delta$ -образного, а также других особенных распределений электронов по скоростям из (20) можно получить

$$\Delta F_{\parallel}^{(-)} \propto 1/v^2, \quad |v| \gg \Delta.$$

Такая чувствительность результатов к виду функции распределения электронов по скоростям вообще свойственна вычислениям характеристик охлаждения замагниченным пучком.

4. Полная сила трения, действующая на отрицательно заряженный ион в замагниченном электронном потоке, получается суммированием выражений (7) и (20). При этом, однако, интегрирование по  $k_{\perp}$  в формуле (7) должно проводиться до

$$k_{\perp}^{\max} = \frac{m u_{\min}^2}{e^2} \gg k_d.$$

В результате, например, формула (12) переходит в

$$F_{\parallel}^{(0)} = -\frac{e^2 \omega_e^2 v}{2\Delta^3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ln\left(1 + \frac{\Delta^2}{u_{\min}^2}\right), \quad |v| \ll \Delta. \quad (25)$$

Поскольку величина  $F_{\parallel}^{(0)}$  не зависит от знака заряда иона, сложение формул (23), (25) в логарифмическом приближении ( $\Delta^2 \gg u_{\min}^2$ ,  $m\Delta^2 \gg e^2 n^{1/3}$ ) дает

$$F_{\parallel}^{(-)} = F_{\parallel}^{(0)} + \Delta F_{\parallel}^{(-)} \cong F_{\parallel}^{(0)} + 2F_{\parallel}^{(0)} = 3F_{\parallel}^{(0)}, \quad |v| < \Delta,$$

$$F_{\parallel}^{(+)} = F_{\parallel}^{(0)} = -\frac{e^2 \omega_e^2}{2\Delta^2} \frac{v}{\sqrt{2\pi}} L, \quad L = \ln\left(\frac{\Delta^2}{u_{\min}^2}\right) \gg 1. \quad (26)$$

При больших скоростях иона  $|v| \gg \Delta$ , как видно из (24), величиной  $\Delta F_{\parallel}^{(-)}$  можно вообще пренебречь. Поэтому силы трения  $F_{\parallel}^{(+)}$  и  $F_{\parallel}^{(-)}$  совпадают:

$$F_{\parallel}^{(\pm)} \cong -\operatorname{sgn}(v) \frac{e^2 \omega_e^2}{2v^2}, \quad |v| \gg \Delta.$$

Такие зависимости сил трения  $F_{\parallel}^{(\pm)}$  от скорости иона, по крайней мере качественно, согласуются с результатами измерений в [6] (см., например, рис. 6 из [6]).

Полученные формулы справедливы в логарифмическом приближении ( $m\Delta^2 \gg e^2 n^{1/3}$ ). Вычисление  $F_{\parallel}$  в «нелогарифмической» области  $m\Delta^2 \leq e^2 n^{1/3}$  требует выхода за рамки теории возмущений. В промежуточной области  $m\Delta^2 \sim e^2 n^{1/3}$  величины  $F_{\parallel}$  можно оценить продолжением полученных формул [2]. При этом, как видно из (22), (25), относительный вклад  $\Delta F_{\parallel}^{(-)}$  в  $F_{\parallel}^{(-)}$  уменьшается примерно в два раза. Тем не менее сила трения, действующая на отрицательно заряженные ионы, все еще вдвое превосходит силу, действующую на положительно заряженные ионы.

Как видно из приведенных вычислений, увеличение  $F_{\parallel}^{(-)}$  за счет столкновений (15) в основном сводится к увеличению декрементов затухания  $\lambda^{(-)}$  в линейной области и, соответственно, максимального значения  $F_{\parallel}^{(-)}$ . Эти обстоятельства не влияют, однако, на конечное значение температуры пучка ионов после охлаждения. Вычислением коэффициента диффузии за счет столкновений (15) легко убедиться в том, что в логарифмическом приближении на заключительном этапе охлаждения скорость изменения продольной температуры ионов ( $T_{\parallel} = \Delta p_{\parallel}^2 / 2M$ ) определяется уравнением

$$\frac{dT_{\parallel}}{dt} = -2\lambda^{(-)} (T_{\parallel} - m\Delta^2), \quad (27)$$

равновесное решение которого  $T_{\parallel} = m\Delta^2$ .

В заключение хотелось бы отметить следующее обстоятельство.

Столкновения с прицельными параметрами из области (15) могут модифицировать и внутреннюю релаксацию в замагниченном электронном пучке. Поскольку при столкновениях электроны обмениваются скоростями, такие процессы будут приводить к «размешиванию» продольных скоростей электронов по поперечному сечению пучка. В частности, в пучке с нескомпенсированным пространственным зарядом это может переводить провисание потенциала на размере пучка

$$\Delta v_e \cong \frac{\pi n e^2 a_e^2}{2m v_0}, \quad (28)$$

( $a_e$  — радиус электронного пучка) в продольную температуру и тем ограничивать эффективность охлаждения. Продольная температура пучка, отвечающая (28), превысит «флуктуационную»  $e^2 n^{1/3}$  при

$$n > n_c \cong \left(\frac{4m v_0^2}{\pi e^2 a_e^4}\right)^{3/5}.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Будкер Г.И., Диканский Н.С. и др. В кн: Труды X Международной конф. по ускорителям частиц высоких энергий. Протвино, 1977, т.1, с.498.
2. Дербенев Я.С., Скринский А.Н. Там же, с.513.
3. Дементьев Е.Н., Диканский Н.С. и др. ЖТФ, 1980, т.50, № 8, с.1717.
4. Дербенев Я.С. Теория электронного охлаждения. Дис. д-ра физ. мат. наук. Новосибирск, 1978, 245 с; *Derbenev Ya.S., Skrinsky A.N.* In: *Physics Reviews*, ser. Soviet Physical Reviews, v.3, p.165—273.
5. Диканский Н.С., Кокоулин В.И. и др. Быстрое электронное охлаждение в диапазоне малых относительных скоростей. — В кн: Труды XIII Международной конференции по ускорителям частиц высоких энергий (Новосибирск, 1986). — Новосибирск: Наука, 1987, т.1, с.330.
6. Диканский Н.С., Кот Н.Х. и др. Влияние знака заряда на силу трения при электронном охлаждении. — Препринт ИЯФ СО АН СССР 87-102. Новосибирск, 1987, 19 с.
7. Куделайнен В.И., Лебедев В.А. и др. Температурная релаксация в замагниченном электронном потоке. — ЖЭТФ, 1982, т.83, вып.6, с.2056.
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — Физматгиз, 1962. 1100 с.

*Д.В. Пестриков*

**О торможении иона в  
замагниченном электронном потоке**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

---

Работа поступила 16 марта 1988 г.  
Подписано в печать 16.03.1988 г. МН 08189  
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1,0 печ.л., 0,9 уч.-изд.л.  
Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ № 42

---

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-  
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и  
отпечатано на ротапинтере Института ядерной физики  
СО АН СССР,  
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*