19

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

А.Л. Герасимов

О ВЛИЯНИИИ РЕЗОНАНСОВ НА ФУНКЦИЮ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА

ПРЕПРИНТ 88-34

НОВОСИБИРСК

1. ВВЕДЕНИЕ

В опубликованной недавно работе [1] была рассмотрена задача о функции распределения многомерного нелинейного осциллятора с внешним периодическим во времени возмущением при наличии диссипации и внешнего шума, устанавливающейся в пределе больших времен. Для простоты мы будем называть такую функцию распределения равновесной (РФР), хотя из-за наличия неконсервативного возмущения она не является равновесной в обычном смысле статистической физики. Наличие диссипации и внешнего шума моделирует взаимодействие с термостатом и отвечает, например, диффузионному приближению в кинетической теории [2]. Было показано, что для нестационарного возмущения многомерного осциллятора экспоненциально малые «хвосты» РФР, имеющие вид $Z\exp(-\Phi/kT)$, где Φ является функцией фазовых переменных, сильно возмущаются «внешними» изолированными нелинейными осцилляторами, вносимыми возмущением. Величина Φ, таким образом, определяет ведущий экспоненциальный множитель вероятности больших (по сравнению с kT) флуктуаций энергии осциллятора под воздействием тепловых шумов. Порядок возмущений функции Φ связан в многомерном случае не с шириной «внешних» резонансов ΔI_r, а с их «длиной» в фазовом пространстве. Это принципиально отличает воздействие «внешних» резонансов на функцию Φ от «внутренних», влияние которых на функцию Φ, как видно из распределения Гиббса для РФР $\rho=\exp(-H/kT)$, получающегося для консервативного осциллятора с гамильтонианом $H=H_0(\bar{I})+\sum_{\bar{l}} V_{\bar{l}} \cos \bar{l}\bar{\theta}$, определяется только величиной резонансной гармоники $V_{\bar{l}}$.

Указанный результат был получен в [1] в приближении слабого шума (то же, что и приближение низкой температуры). Однако в общем случае в системе возникает бесконечно большое число резонансов со сколь угодно малыми гармониками, для которых приближение слабого шума может нарушаться. Для случая фиксированного трения и достаточно малых температур для решения задачи достаточно рассмотреть только те резонансы, которые хорошо описываются приближением слабого шума, поскольку трение, как показано в [1], разрушает малые резонансы и уменьшает их воздействие на РФР. Если же трение при заданной температуре является довольно малым, то для описания воздействия нелинейного резонанса с малой амплитудой гармоники $V_{\bar{l}}$ на РФР метод работы [1], основанный на применении асимптотики слабого шума, неприменим.

Поэтому в настоящей работе предлагается описание такой более общей ситуации с резонансом произвольной (сколь угодно малой) гармоники $V_{\bar{l}}$

2. УРАВНЕНИЕ ФОККЕР—ПЛАНКА (УФП)

Эволюция функции распределения частиц в нашей системе с шумом определяется УФП (кинетическим уравнением). Рассмотрим, для простоты, двумерную систему (четырехмерное фазовое пространство). В окрестности заданного резонанса $l\nu_x(I_x, I_z)+m\nu_z(I_x, I_z)=n\Omega$, где ν_x, ν_z — частоты собственных колебаний осциллятора, зависящие от невозмущенных переменных действия I_x, I_z; Ω — частота внешнего возмущения; l, m, n — целые индексы резонанса, введем резонансную фазу $\varphi=l\theta_x+m\theta_z-n\Omega t$, где θ_x, θ_z — невозмущенные фазы (канонически сопряженные I_x, I_z); и запишем УФП в этой окрестности в виде (см. [1])

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nu_x\frac{\partial\rho}{\partial\theta_x}+\nu_z\frac{\partial\rho}{\partial\theta_z}+V\cos\varphi\left(l\frac{\partial\rho}{\partial I_x}+m\frac{\partial\rho}{\partial I_z}\right)=$$
$$=\alpha\left[\frac{\partial}{\partial I_x}I_x\left(1+\frac{\eta}{\nu_{x0}}\frac{\partial}{\partial I_x}\right)+\frac{\partial}{\partial I_z}I_z\left(1+\frac{\eta}{\nu_{z0}}\frac{\partial}{\partial I_z}\right)\right]\rho. \qquad (1)$$

Коэффициент α является декрементом затухания и определяет

время релаксации $\tau=1/\alpha$. Величины $\alpha\eta\frac{I_x}{\nu_{x0}}$, $\alpha\eta\frac{I_z}{\nu_{z0}}$ являются коэффициентами диффузии по I_x, I_z. Специфическая форма «интеграла столкновений» в правой части уравнения (1) определяется специальной формой невозмущенного гамильтониана $H_0(I_x, I_z)=\nu_{x0}I_x+\nu_{z0}I_z+\varepsilon U(I_x, I_z)$, где коэффициент ε предполагается достаточно малым, так что нелинейная добавка в гамильтониане мала по сравнению с линейными слагаемыми. Такая специальная форма гамильтониана появляется в задаче о взаимодействии встречных пучков в ускорителе (см. [1]), и в настоящей работе используется лишь для упрощения выкладок. Само уравнение (1) появляется из исходного УФП (3.4) работы [1], записанного в исходных фазовых переменных координата-импульс x, p_x, z, p_z, после усреднения исходного «интеграла столкновений», записанного в переменных p_x, p_z, по фазам θ_x, θ_z что применимо только при условии $\alpha\ll\nu_x$, ν_z (см. [1]). Для целей настоящей работы уравнение (1) может рассматриваться как модельное.

При отсутствии возмущения $V=0$ уравнение (1) имеет стационарное решение

$$\rho=\exp\left(-\frac{\nu_{x0}I_x+\nu_{z0}I_z}{\eta}\right), \qquad (2)$$

которое является гиббсовским (нелинейным слагаемым в гамильтониане H_0 мы пренебрегаем) с температурой $kT=\eta$. При $V\neq 0$ РФР является стационарной в переменных I_x, I_z, φ. Уравнение (1) в этих переменных для РФР ρ имеет вид

$$(l\nu_x+m\nu_z-n\Omega)\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}+V\cos\varphi\left(l\frac{\partial\rho}{\partial I_x}+m\frac{\partial\rho}{\partial I_z}\right)$$
$$=\alpha\left[\frac{\partial}{\partial I_x}I_x\left(1+\frac{\eta}{\nu_{x0}}\frac{\partial}{\partial I_x}\right)\quad\frac{\partial}{\partial I_z}I_z\left(1+\frac{\eta}{\nu_{z0}}\frac{\partial}{\partial I_z}\right)\right]\rho. \qquad (3)$$

Как известно, резонансная линия (центр резонанса) будет определяться условием (см. [1])

$$\delta\omega=l\nu_x(I_x, I_z)+m\nu_z(I_x, I_z)-n\Omega=0. \qquad (4)$$

Далее, следуя [1], введем резонансные действия J_1, J_2:

$$J_1=I_z/m,$$

$$J_2 = -I_x + \frac{l}{m} I_z \tag{5}$$

и в окрестности некоторой точки J_2 на резонансной линии $J_{10}(J_2)$, определяемой условием (4), запишем уравнение (3) в переменных J_1, J_2, φ

$$\delta\omega \frac{\partial\rho}{\partial\varphi} + mV\cos\varphi \frac{\partial\rho}{\partial J_1} = \alpha\Big[\frac{\partial}{\partial J_1} J_1\rho + \frac{\partial}{\partial J_2} J_2\rho + $$

$$+ \eta\Big(Q_{11}\frac{\partial^2\rho}{\partial J_1^2} + Q_{21}\frac{\partial^2\rho}{\partial J_1\,\partial J_2} + Q_{22}\frac{\partial^2\rho}{\partial J_2^2}\Big)\Big] \tag{6}$$

где коэффициенты Q_{ik} представляются в форме

$$Q_{11} = \frac{J_{10}}{m\nu_{z0}},$$

$$Q_{21} = \frac{2lJ_{10}}{m\nu_{z0}}, \tag{7}$$

$$Q_{22} = \frac{(-J_2 + lJ_{10})}{\nu_{x0}} + \frac{l^2}{m\nu_{z0}} J_{10}.$$

Поскольку нашей целью является нахождение экспоненциальной части зависимости функции ρ от точки на резонансной линии $J_1 = J_{10}(J_2)$ (см. также [1]), то удобно перейти к переменным $p = J_1 - J_{10}(J_2)$, J_2, φ. Переменная p характеризует отклонение от центра резонанса (при $J_2 = \mathrm{const}$), а переменная J_2 параметризует (при $p=0$) смещение вдоль резонансной линии. Используя операторные тождества

$$\frac{\partial}{\partial J_1}\Big|_{J_2,\varphi=\mathrm{const}} = \frac{\partial}{\partial p}\Big|_{J_2,\varphi=\mathrm{const}},$$

$$\frac{\partial}{\partial J_2}\Big|_{J_1,\varphi=\mathrm{const}} = \frac{\partial}{\partial J_2}\Big|_{p,\varphi=\mathrm{const}} - \varkappa\frac{\partial}{\partial p}\Big|_{J_2,\varphi=\mathrm{const}}, \tag{8}$$

где $\varkappa = \dfrac{dJ_{10}}{dJ_2} = \dfrac{dI_{z0}/dI_x}{-m + l(dI_{z0}/dI_x)}$ (параметр $\varkappa$ выражается через тангенс угла наклона $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{dI_{z0}}{dI_x}$ резонансной линии $I_{z0}(I_x)$ в исходной плоскости действий I_x, I_z) уравнению (6) можно придать форму

$$\lambda p\frac{\partial\rho}{\partial\varphi} + V\cos\varphi\frac{\partial\rho}{\partial p} = \alpha\Big[\frac{\partial}{\partial p}(J_{10}+p)\rho + \Big(\frac{\partial}{\partial J_2} - \varkappa\frac{\partial}{\partial p}\Big) J_2\rho + $$

$$+ \eta\Big\{ Q_{11}\frac{\partial^2\rho}{\partial p^2} + Q_{21}\Big(\frac{\partial}{\partial J_2} - \varkappa\frac{\partial}{\partial p}\Big)\frac{\partial}{\partial p}\rho + Q_{22}\Big(\frac{\partial}{\partial J_2} - \varkappa\frac{\partial}{\partial p}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial J_2} - \varkappa\frac{\partial}{\partial p}\Big)\rho\Big\}\Big] \tag{9}$$

В уравнении (9) вместо величины $\delta\omega(J_1, J_2)$ (4) подставлен линейный член разложения $\delta\omega$ по p в точке $J_1 = J_{10}(J_2)$, т. е. $\delta\omega(J_1, J_2) \approx \lambda(J_2)p$. Величины $\varkappa$, Q_{11}, Q_{21}, Q_{22} в (9) можно считать зависящими только от J_2, так как мы считаем (см. также далее), что ширина резонанса $p_r = \sqrt{|2V/\lambda|}$ много меньше характерной «длины» линии $J_{10}(J_2)$, и мы будем интересоваться изменением РФР ρ только на этих больших масштабах. Производная $\dfrac{\partial}{\partial J_2}$ в (9), так же, как и во всех нижеследующих формулах, подразумевает $\dfrac{\partial}{\partial J_2}\Big|_{p,\varphi=\mathrm{const}}$.

3. МОДИФИЦИРОВАННАЯ АСИМПТОТИКА СЛАБОГО ШУМА

В работе [1] было построено решение уравнения (9) в асимптотике слабого шума $\eta \to 0$ для случая, когда экстремаль (наиболее вероятная траектория) проходит «вдоль» резонанса. Именно в этом случае, как показано в [1], резонанс сильно возмущает РФР. Нашей целью будет обобщение этого результата на случай «узкого» резонанса, т. е. исследование того же предела $\eta \to 0$, но при произвольно малой величине V и, соответственно, ширине резонанса $p_r = \sqrt{|2V/\lambda|}$. Из-за малости V стандартные методы асимптотики слабого шума (описанные, например, в [1]), неприменимы, и воздействие резонанса на РФР ослабляется.

Для исследования случая $\eta \to 0$ при произвольном V предположим, что характерный масштаб изменения $V(J_2)$ тот же, что и всех остальных параметров уравнения (9), зависящих от J_2. Этот масштаб может быть отождествлен с радиусом кривизны кривой $J_{10}(J_2)$ и определяется, согласно (4), только зависимостью невозмущенных частот $\nu_x(I_x, I_z)$, $\nu_z(I_x, I_z)$ от действий I_x, I_z. Тогда решение уравнения (9) будем строить, основываясь на предположении, что при $\eta \to 0$ РФР ρ может быть представлена в виде

$$\rho(p, J_2, \varphi, \eta) = Z(p, J_2, \varphi, \eta)\ \exp\Big(-\frac{\Phi(J_2)}{\eta}\Big), \tag{10}$$

где предполагается, что $\frac{\partial Z}{\partial J_2} \sim Z$ (т. е. стремится к константе при $\eta \to 0$). Представление (10) соответствует приближению слабого шума (см. [1]), примененному только в одном направлении — вдоль резонансной линии (переменная J_2). В поперечном направлении (переменная p) изменение РФР на масштабах изменения p порядка ширины резонанса описывается множителем Z. Подставляя выражение (10) в уравнение (9) и выделяя высшие степени $1/\eta$, связанные с дифференцированием по J_2, получим

$$\lambda p \frac{\partial Z}{\partial \varphi} + V \cos\varphi \frac{\partial Z}{\partial p} = -\alpha \Big[\frac{(J_2 q - Q_{22} q^2)}{\eta} + \\ + (Q_{21} q - J_{10} - 2Q_{22} \varkappa q) \frac{\partial}{\partial p} - (Q_{11} + Q_{22} \varkappa^2 - Q_{21} \varkappa)\, \eta \frac{\partial}{\partial p^2} \Big] Z, \quad (11)$$

где введено обозначение $q = \frac{d\Phi}{dJ_2}$. Задачей настоящей работы является вычисление величины $q(J_2)$, определяющей экспоненциальную часть изменения РФР ρ вдоль резонансной линии. Существенно заметить, что уравнение (11) всегда имеет решение, с функцией $\Phi(J_2)$, отличающейся от соответствующей функции Φ для невозмущенной резонансом РФР (4) только на величину порядка V. Это решение соответствует приходу частиц в каждую точку на резонансной линии из внешнего пространства через сепаратрисную поверхность. Нас же будет интересовать другое решение, которое соответствует частицам, приходящим в каждую точку на резонансной линии вдоль этой линии (см. ниже). В асимптотике слабого шума (при больших V) оно должно соответствовать экстремалям, идущим вдоль резонансной линии (см. [1]).

Для получения аналитического решения уравнения (11) мы воспользуемся стандартным методом «теплового усреднения» (см. [1, 3]), применимым при достаточно слабом трении $\alpha J_{10} \ll V$. Этот метод заключается в предположении постоянства функции Z вдоль траекторий гамильтониана, соответствующего оператору Лиувилля $\hat{L}_H = \lambda p \frac{\partial}{\partial \varphi} + V \cos\varphi \frac{\partial}{\partial p}$, стоящего в левой части уравнения (11), и последующего усреднения уравнения (11) вдоль этих траекторий (см. [1, 3]). Гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{\lambda p^2}{2} + V \cos\varphi. \quad (12)$$

Для дальнейшего удобно представить уравнение (11) в виде

$$\hat{L}_H Z = \alpha \Big[\frac{a}{\eta} + b \frac{\partial}{\partial p} + c \eta \frac{\partial^2}{\partial p^2} \Big] Z, \quad (13)$$

где

$$a = Q_{22} q^2 - J_2 q,$$
$$b = 2Q_{22} \varkappa q + J_{10} - Q_{21} q, \quad (14)$$
$$c = Q_{11} + Q_{22} \varkappa^2 - Q_{21} \varkappa.$$

При проведении «теплового усреднения» уравнения (13) необходимо провести дифференцирование в правой части (13), считая, что Z зависит только от H, и потом усреднить по времени коэффициенты при производных Z по H, считая, что величины p, φ зависят от времени, как переменные гамильтониана H (12) (см. [1, 3]). Среднее от левой части (13) равно нулю. Если вместо переменной H в получившемся усредненном уравнении ввести переменную действия $J(H)$ для маятника H (12) (см. [1, 3]), то это уравнение можно записать в виде

$$\frac{a}{\eta} Z + \frac{\partial}{\partial J} \Big(bF + cG(J) \frac{\partial}{\partial J} \Big) Z = 0, \quad (15)$$

где

$$F = \Big\langle \frac{\partial J}{\partial p} \Big\rangle,$$

$$G(J) = \Big\langle \Big(\frac{\partial J}{\partial p} \Big)^2 \Big\rangle. \quad (16)$$

Символом $\langle ... \rangle$ в (16) обозначено усреднение по времени вдоль траекторий гамильтониана H. Для дальнейшего существенно, что уравнение (13) переходит при «тепловом усреднении» в уравнение (15) для любого гамильтониана H, соответствующего оператору Лиувилля в левой части (13). Заметим также, что при выводе (15) использовалось соотношение (см. [1, 3])

$$\frac{\partial}{\partial J} \Big\langle \Big(\frac{\partial J}{\partial p} \Big)^2 \Big\rangle = \Big\langle \frac{\partial^2 J}{\partial p^2} \Big\rangle \quad (17)$$

и то обстоятельство, что величина F, как нетрудно показать, не зависит от J.

Уравнение (15) следует интерпретировать как уравнение непрерывности. Первое слагаемое соответствует распределенному источнику частиц, появляющемуся, как нетрудно показать, из-за ненулевой дивергенции «продольного» тока, т. е. тока частиц вдоль резонанса (вдоль оси J_2). Выражение, стоящее в (15) под производной $\frac{\partial}{\partial J}$ является «поперечным» током, текущим вдоль оси J (связанной с «поперечной» плоскостью p, φ). В решении уравнения (11) при $V=\mathrm{const}$, $\eta\to 0$ в стандартной асимптотике слабого шума, описанном в [1], «продольный» ток имеет нулевую дивергенцию, так что коэффициент a (14) равен нулю, и величина q находится из условия $a(q)=0$. Обращение в нуль дивергенции «продольного» тока в асимптотике слабого шума имеет наглядное объяснение, связанное с тем, что при малом шуме (большой ширине резонанса) вероятность частицы отойти от центра резонанса и дойти до сепаратрисной поверхности $H(J_2, p, \varphi)=V$ (с H (12)) и «выпасть» из резонансной «трубы» экспоненциально мала (см. [1]), и поэтому ток частиц, текущих вдоль резонанса, сохраняется. Целью настоящей работы является исследование случая «узкого» резонанса, когда частицы имеют заметную вероятность «выпасть» из резонанса во время движения вдоль него.

Переменная действия J для гамильтониана маятника H (12) легко вычисляется и выражается через эллиптические интегралы (см., например [3]). Коэффициенты F, G (16) также могут быть выражены через эллиптические интегралы. В работе [3] рассматривался одномерный случай, когда первое слагаемое в уравнении типа (15) отсутствовало, и решение получалось в квадратурах. В нашем случае, однако, $a\neq 0$ и линейное уравнение второго порядка с коэффициентами, являющимися специальными функциями аргумента, не может быть решено в явном виде. Поэтому точное аналитическое решение задачи получить не удается. Для приближенного, оценочного описания явления мы заменим траектории гамильтониана H (12), вдоль которых проводилось усреднение уравнения (13), и которые изображены на рис. 1, некоторыми упрощенными траекториями, изображенными на рис. 2. Ширина области II рис. 2 по p будет полагаться равной kp_r, где $k\sim 1$ — феноменологический параметр, который должен определяться подгонкой.

Проведем усреднение уравнения (13) вдоль «упрощенных» траекторий, считая что оператор Лиувилля $\hat{L}_H$ в левой части соответствует этим траекториям. Тогда среднее от левой части по-прежнему равно нулю. Усреднение правой части во «внерезонансной» области I рис. 2 оставляет ее без изменений, так что в

областях I рис. 2 функция Z определяется уравнением

$$\left(\frac{a}{\eta}+b\frac{\partial}{\partial p}+c\eta\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)Z=0. \tag{18}$$

Так как коэффициенты a, b, c в (18) не зависят от p, то решение уравнения (18) в областях I^a и I^b рис. 2 можно записать в виде

$$Z_a = B\exp(-k_1p_1/\eta),$$
$$Z_b = B\exp(-k_2p_2/\eta), \tag{19}$$

где переменные $p_1=p-kp_r$, $p_2=p+kp_r$ введены для удобства сшивки (см. ниже), а коэффициенты k_1, k_2 определяются формулами

$$k_1=\frac{b}{2c}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2c},$$
$$k_2=\frac{b}{2c}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2c}. \tag{20}$$

Нормировочный множитель B для Z_a (Z в области I^a) и Z_b (Z в области I^b) взят одним и тем же, поскольку из-за предполагаемого постоянства Z вдоль траекторий и непрерывности Z должно выполняться условие $Z_a(p_1=0)=Z_b(p_2=0)$. Выбор различных реше-

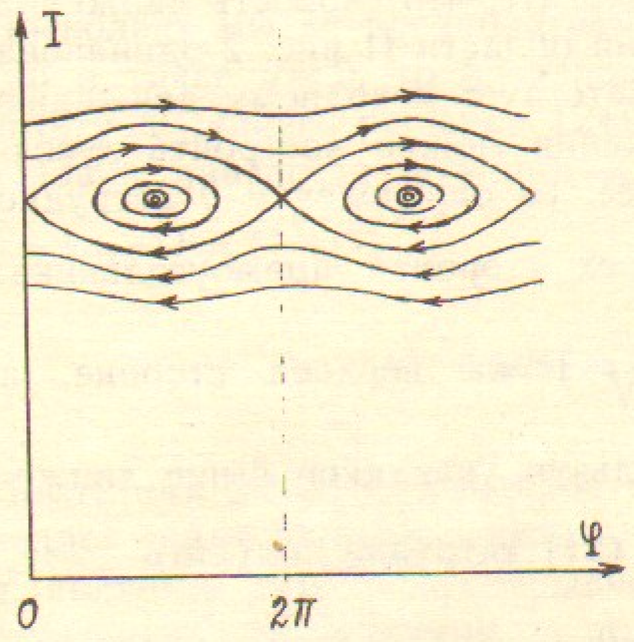

Рис. 1. Фазовые траектории в окрестности изолированного нелинейного резонанса, описываемые гамильтонианом маятника (12).

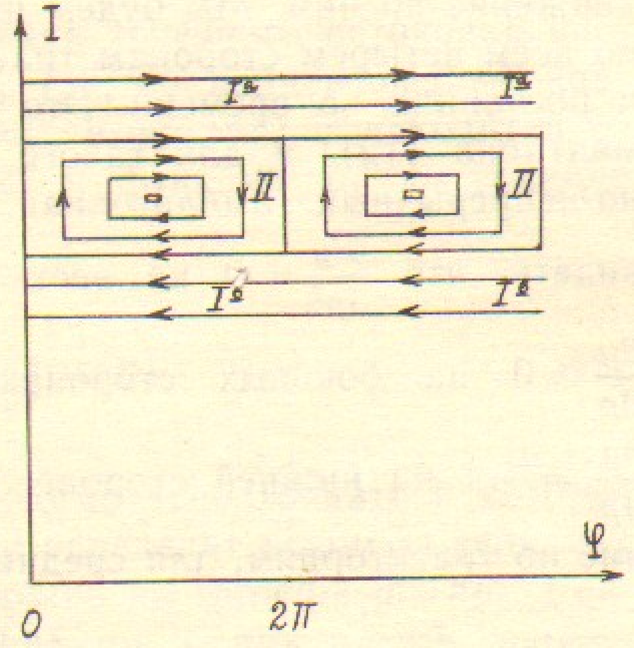

Рис. 2. «Упрощенные» траектории, используемые вместо точных рис. 1.

ний (19) в областях I^a, I^b из общего решения, являющегося их линейной суперпозицией, определяется физическим смыслом искомого решения. Действительно, ненулевое положительное значение a в (13) соответствует непрерывно распределенному в плоскости p, φ источнику частиц. Эти частицы растекаются в обоих направлениях p, и выбор решений (19) соответствует противоположному направлению токов в областях I^a и I^b (см. ниже).

Для усреднения уравнения (13) в области II определим для каждой траектории этой области величину y, которая будет равняться значению p на верхней стороне прямоугольника траектории. Величина y, таким образом, является однозначно заданной функцией p и φ в области II. Функция Z в области II зависит только от y. Для усреднения правой части (13) запишем стандартное (см. [1, 3]) соотношение

$$\left\langle \frac{a}{\eta} + b\,\frac{\partial}{\partial p} + c\eta\,\frac{\partial^2}{\partial p^2} \right\rangle_{\mathrm{II}} =$$

$$= \frac{a}{\eta} + b\left\langle \frac{\partial y}{\partial p} \right\rangle_{\mathrm{II}} \frac{\partial}{\partial y} + c\eta\left(\left\langle \frac{\partial^2 y}{\partial p^2} \right\rangle_{\mathrm{II}} \frac{\partial}{\partial y} + \left\langle \frac{\partial y}{\partial p} \right\rangle_{\mathrm{II}}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), \tag{21}$$

где символы $\langle \ldots \rangle_{\mathrm{II}}$ означают усреднение по времени вдоль траекторий области II. Для проведения усреднений в (21) необходимо знать не только форму траекторий, показанную на рис. 2, но и движение по ним. Мы будем предполагать, что скорость движения по всем четырем сторонам траекторий области II рис. 2 одинакова и постоянна во времени. Это соответствует исходному движению маятника (12), и для такого движения можно построить кусочно-непрерывный гамильтониан. Далее, из определения y нетрудно видеть, что $\frac{\partial^2 y}{\partial p^2} = 0$ на всех четырех сторонах прямоугольника, $\frac{\partial y}{\partial p} = 0$ на боковых сторонах, $\frac{\partial y}{\partial p} = 1$ на верхней стороне, и $\frac{\partial y}{\partial p} = -1$ на нижней стороне. Используя указанное выше движение по траекториям, для средних из (21) нетрудно получить

$$\left\langle \frac{\partial^2 y}{\partial p^2} \right\rangle_{\mathrm{II}} = 0,$$

$$\left\langle \frac{\partial y}{\partial p} \right\rangle_{\mathrm{II}} = 0, \tag{22}$$

$$\left\langle \left(\frac{\partial y}{\partial p} \right)^2 \right\rangle_{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, усредненное уравнение (13) в области II дает уравнение для зависимости $Z_{\mathrm{II}}(y)$:

$$\left[\frac{a}{\eta} + \frac{c}{2}\,\eta\,\frac{d^2}{dy^2} \right] Z_{\mathrm{II}}(y) = 0, \tag{23}$$

общее решение которого

$$Z_{\mathrm{II}} = A\cos\left(\sqrt{\frac{2a}{c}}\,\frac{y}{\eta} + \Psi \right). \tag{24}$$

Как нетрудно показать, число частиц, пересекающих траекторию с заданным y в единицу времени (ток по y) для произвольной функции $Z(y)$ определяется выражением

$$j_y = \frac{c}{2}\,\eta\,\frac{dZ}{dy}. \tag{25}$$

Подставляя (24) в (25), получим ток j_y в области II:

$$j_{y\mathrm{II}} = \frac{-c}{2}\sqrt{\frac{2a}{c}}\,A\sin\left(\sqrt{\frac{2a}{c}}\,\frac{y}{\eta} + \Psi \right). \tag{26}$$

Поскольку мы не предполагаем наличия точечного источника частиц в точке $y=0$, то из условия $j_{y\mathrm{II}}\big|_{y=0} = 0$ найдем первую константу Ψ общего решения (24): $\Psi = 0$. Константа B находится из условия равенства функций Z_a и Z_b и функции Z_{II} на границе $y = kp_r = k\sqrt{\frac{2V}{\lambda}}$:

$$A\cos\left(\sqrt{\frac{2a}{c}}\,kp_r \right) = B. \tag{27}$$

Последним условием, которое необходимо использовать и которое задаст связь коэффициентов a, b, c и определит искомую величину q, является условие непрерывности токов на границе $y = kp_r$. Действительно, вытекающий из области II ток j_y при $y = kp_r$ должен равняться сумме токов (нижний должен быть взят с отрицательным знаком) в областях I^a и I^b на границе областей I и II. Токи в области I, как нетрудно видеть непосредственно из (18), имеют вид

$$j_{p1} = \left(b + c\eta \frac{\partial}{\partial p} \right) Z, \qquad (28)$$

откуда искомое условие, при подстановке выражений (19), запишется в форме

$$c(k_1 - k_2) B = \frac{c}{2} A \sqrt{\frac{2a}{c}} \sin\left(\sqrt{\frac{2a}{c}} \frac{kp_r}{\eta} \right). \qquad (29)$$

Подставляя (20) и (27) в (29), окончательно получим

$$\sqrt{\frac{2}{ac}(b^2 - 4ac)} = \operatorname{tg}\left(\sqrt{2\frac{a}{c}} \frac{kp_r}{\eta} \right). \qquad (30)$$

Напомним, что поскольку величины a, b (14) являются функциями q, то уравнение (30) с коэффициентами $a(q)$, $b(q)$, c (14) определяет параметр q как функцию ширины резонанса $p_r = \sqrt{\frac{2V}{\lambda}}$. В явном виде эта функция записана быть не может, поскольку уравнение (30) является трансцендентным.

Представляет интерес рассмотреть решение уравнения (30) для большой ширины резонанса $p_r/\eta \gg 1$ и малой ширины резонанса $p_r/\eta \ll 1$. Рассмотрим сначала случай большой ширины. Поскольку РФР в области II (24) (с $\Psi = 0$) должна быть везде положительна, то аргумент тангенса в (30) должен лежать между 0 и $\pi/2$. Коэффициент c (14) не зависит от q, и поэтому из этого условия следует, что $a(q) \to 0$ при $p_r/\eta \to \infty$. Это является правильным ответом, так как при большой ширине резонанса применима асимптотика слабого шума, и, как показано в [1], величина $q = \frac{d\Phi}{dJ_2}$ определяется условием $a(q) = 0$. Заметим, что уравнение $a(q) = 0$ имеет два решения: $q = 0$ и $q = \frac{J_2}{Q_{22}}$, что соответствует двум возможным направлениям экстремалей вдоль резонанса (см. [1]). Так как левая часть уравнения (30) стремится к бесконечности при $a \to 0$, то аргумент тангенса в (30) стремится к $\pi/2$, а следовательно, при $p_r/\eta \to \infty$ величина a стремится к нулю как

$$a \approx \frac{\pi^2}{8} \frac{c}{k^2 (p_r/\eta)^2}. \qquad (31)$$

Напомним, что величина k в (31) по отношению к исходной задаче с резонансом ширины p_r является подгоночным параметром порядка единицы.

Для рассмотрения малой ширины резонанса $p_r/\eta \ll 1$ заметим сначала, что коэффициенты a, c (14) всегда больше нуля (величина q лежит вне интервала $[0, J_2/Q_{22}]$. Величина же $b^2 - 4ac$, входящая в левую часть уравнения (30), может быть записана при подстановке a, b, c (14) в виде

$$b^2 - 4ac = q^2 (Q_{21}^2 - 4Q_{22}Q_{11}) + 2q(J_{10}(2Q_{22}\varkappa - Q_{21}) + 2J_2(Q_{11} + Q_{22}\varkappa^2 - Q_{21}\varkappa)) + J_{10}^2. \qquad (32)$$

Из формул (7) для величин Q_{11}, Q_{21}, Q_{22} видно, что коэффициент при q^2 в (32) отрицателен, следовательно, величина $b^2 - 4ac$ при больших q также отрицательна. Однако, когда $a = 0$, при $q = 0$, $\frac{J_2}{Q_{22}}$ величина $b^2 - 4ac$ положительна. Поэтому величина $b^2 - 4ac$ обращается в нуль при двух значениях q: q_{01}, q_{02}, получающихся приравниванием квадратного трехчлена (32) нулю. Нетрудно видеть, что уравнение (30) при $p_r/\eta \to 0$ имеет решение $q = q_{01}$, q_{02}. Наличие двух решений определяется, так же, как и в асимптотике слабого шума, двумя возможными направлениями движения частиц (токов) вдоль резонансной линии (см. [1]). Заметим также, что поскольку предел $p_r/\eta \to 0$ соответствует просто отсутствию резонанса, то предельные значения q_{01}, q_{02} совпадают со значениями, которые могут быть получены в асимптотике слабого шума из уравнения (6) для отсутствия резонанса $V = 0$ из условия, что экстремаль проходит по резонансной линии $J_1 = J_{10}$. Понятно, что эти решения соответствуют наличию некоторых внешних источников и при построении экстремалей из минимума функционалов действия (см. [1]) реализовываться не будут.

Таким образом, показатель экспоненциального изменения РФР ρ вдоль резонанса $q = \left.\frac{\partial\Phi}{\partial J_2}\right|_{J_1 = J_{10}(J_2)}$ определяется решением трансцендентного уравнения (30) и лежит в пределах $[q_{01}, 0]$ или $[\frac{J_2}{Q_{22}}, q_{02}]$. Коэффициент k в уравнении (30) является подгоночным параметром порядка 1, и может быть найден из численных экспериментов. Для оценок достаточно положить k равным единице.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из результатов настоящей работы следует, что резонанс начинает как-то влиять на экспоненциальные «хвосты» РФР только, когда его ширина p_r делается порядка силы шума η (пропорциональной температуре термостата) и его влияние выходит на асимптотику при $p_r \gg \eta$. С другой стороны, в работе [1] показано, что функция Φ, определяющая «хвосты» РФР $\rho = Z \exp(-\Phi/\eta)$, изменяется на ширине резонанса на величину $\sim V \sim \Delta I_r^2$. Поэтому асимптотика слабого шума оказывается неприменимой уже при $\Delta I_r \sim \sqrt{\eta}$. Из этого следует заключить, что при $\sqrt{\eta} \lesssim \Delta I_r \ll \eta$ асимптотика слабого шума формально неприменима, но дает правильный результат для изменения величины Φ вдоль резонанса. Это является, на наш взгляд, довольно интересным и не очевидным обстоятельством.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Герасимов А.Л.* Тепловое равновесие осциллятора при возбуждении изолированных нелинейных резонансов.— Препринт ИЯФ СО АН СССР 87-100. Новосибирск, 1987.
2. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика.— Москва: Наука, 1979, 116 с.
3. *Shonfeld J.F.* Statistical Mechanics of Colliding Beams.— Annals of Phys., 1985, v.160, p.149—193.

А.Л. Герасимов

О влиянии резонансов на функцию распределения осциллятора

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 19 февраля 1988 г.
Подписано в печать 23.02.1988 г. МН 08124
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1,4 печ.л., 1,1 уч.-изд.л.
Тираж 180 экз. Бесплатно. Заказ № 34

Набрано в автоматизированной системе на базе фотонаборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и отпечатано на ротапринте Института ядерной физики СО АН СССР, Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.