

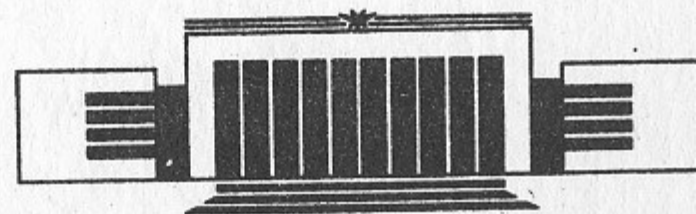


ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Г.В. Ступаков

ВОЗБУЖДЕНИЕ ЖЕЛОБКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ  
ПУЧКОМ ИОНОВ В ОТКРЫТОЙ ЛОВУШКЕ

ПРЕПРИНТ 87-40



НОВОСИБИРСК

Возбуждение желобковых колебаний пучком ионов  
в открытой ловушке

*Г.В. Ступаков*

Институт ядерной физики  
630090, Новосибирск 90, СССР

АННОТАЦИЯ

Исследована потенциальная неустойчивость в плазме малого давления, которая возбуждается пучком быстрых ионов в пробкотроне вследствие резонанса между волной и продольными колебаниями ионов между пробками. Частота этой неустойчивости близка к бунс частоте колебаний ионов, а ее инкремент в несколько раз меньше инкремента желобковой неустойчивости. Рассмотренная неустойчивость характерна для пучков с малым угловым разбросом и чувствительна к профилю магнитного поля пробкотрона.

Flute Instability Driven by Ion Beam in a Mirror Cell

*G.V. Stupakov*

Institute of Nuclear Physics  
630090, Novosibirsk, USSR

АБСТРАКТ

An instability is studied in a small beta plasma which is driven by a fast ion beam due to the resonance between the wave and the ion bounce oscillations in a mirror cell. The frequency of this instability is close to the ion bounce frequency and its growth rate is only several times lower than the growth rate of the interchange instability. It is shown that the instability is characteristic of the beams with a small angular and energy spread and is sensitive to the mirror magnetic field profile.

1. ВВЕДЕНИЕ

Во многих современных экспериментах на открытых ловушках для нагрева плазмы используются мощные пучки нейтральных атомов. Часто при этом пучки инжектируются не по нормали, а под некоторым углом к оси ловушки [1—3]. Образующиеся в результате ионизации быстрые ионы, совершая продольные колебания между магнитными пробками вдоль силовой линии, могут явиться причиной дополнительных неустойчивостей плазмы.

Неустойчивость, о которой идет речь в настоящей работе, связана с резонансным взаимодействием продольных колебаний ионов с желобковым возмущением в ловушке. Она является потенциальной и может возникать в плазме с малым  $\beta$  даже в условиях, когда в МГД приближении плазма устойчива. Характерная частота ее мало отличается от частоты продольных колебаний горячих ионов, а инкремент всего лишь в несколько раз меньше инкремента желобковой неустойчивости. Близкая по физике неустойчивость в применении к токамакам была рассмотрена в работе [4].

Ниже мы проведем рассмотрение для аксиально-симметричной открытой ловушки, имея прежде всего в виду предложения по стабилизации с помощью плещущихся ионов [5, 6], а также аксиально-симметричный вариант амбиполярной ловушки [7] и газодинамическую ловушку [8]. В то же время надо отметить, что предположение об аксиальной симметрии не является принципиальным, и основные результаты работы фактически переносятся и на пробкотроны с минимумом В, хотя формальное описание в последнем случае несколько усложняется.

Дальнейший план изложения следующий. В разделе 2 сформулировано уравнение, которое описывает эволюцию потенциальных возмущений при учете резонансов между волной и продольными колебаниями частиц (вывод этого уравнения вынесен в Приложение 1). В третьем разделе рассмотрен случай пучка с малым энергетическим разбросом, а в четвертом разделе исследованы колебания, связанные с пучком, функция распределения которого формируется процессом остывания на холодных электронах плазмы. Всюду рассмотрение ограничено пучками без углового разброса. Заключительный, пятый, раздел посвящен обсуждению результатов.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим плазму, удерживаемую в аксиально-симметричном пробкотроне, в которой в результате инжекции создается пучок быстрых ионов, захваченных между магнитными пробками. Будем считать, что радиус плазмы  $a$  мал по сравнению с длиной пробкотрона  $l$ , так что можно пользоваться параксиальным приближением для магнитного поля. Предположим, что суммарное давление плазмы и пучка много меньше давления магнитного поля,  $\beta \ll 1$ . В соответствии с реальной ситуацией предположим также, что температура электронов мала по сравнению с характерной энергией ионов пучка (но она может быть порядка температуры ионов основной плазмы), так что влиянием амбиполярного потенциала на движение быстрых ионов можно пренебречь. Ограничимся рассмотрением потенциальных возмущений желобкового типа, в которых потенциал  $\phi$  постоянен вдоль силовой линии.

Возмущение потенциала в плазме ищем в виде  $\phi = \phi(\psi) \exp(im\theta)$ , где  $\psi$  — потоковая координата, равная деленному на  $2\pi$  магнитному потоку, заключенному между осью и силовой линией, а  $\theta$  — азимутальный угол. Уравнение для радиальных собственных функций  $\phi(\psi)$  выведено в Приложении 1. Ниже будут рассмотрены моды, соответствующие большим значениям азимутального числа,  $m \rightarrow \infty$ . В этом пределе уравнение сводится к дисперсионному соотношению для частоты  $\omega$ , куда  $\psi$  входит только в качестве параметра; оно получено также в работе [9]:

$$\omega^2 - \omega_0^2 + \frac{4\pi^2\omega}{M^2} \left( \int \frac{\rho ds}{r^2 B^3} \right)^{-1} \int d\varepsilon d\mu \omega_b^{-1} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{\omega - n\omega_b} = 0, \quad (1)$$

где через  $\omega_0^2$  обозначен квадрат частоты желобковых колебаний

$$\omega_0^2 = - \left( \int \frac{\rho ds}{r^2 B^3} \right)^{-1} \int \frac{\kappa ds}{r B^2} \frac{\partial}{\partial \psi} (p_{\parallel} + p_{\perp}); \quad (2)$$

$\rho$  — плотность плазмы;  $p_{\parallel}$ ,  $p_{\perp}$  — продольная и поперечная составляющие давления;  $\kappa$  — кривизна силовой линии;  $\varepsilon = Mv^2/2$  — энергия;  $\mu = Mv_{\perp}^2/2B$  — магнитный момент;  $M$  — масса ионов;  $f_0(\varepsilon, \mu, \psi)$  — функция распределения ионов.

Входящая в (1) частота продольных колебаний задается формулой

$$\omega_b^{-1} = \frac{1}{\pi} \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{|v_{\parallel}|}, \quad (3)$$

где  $s_1$  и  $s_2$  — соответственно, левая и правая точки поворота частицы, в которых  $v_{\parallel} = 0$ ; коэффициенты  $a_n$  в (1) определяются соотношением

$$a_n = \frac{\omega_b}{\pi} \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{|v_{\parallel}|} \frac{\kappa(2\varepsilon - \mu B)}{rB} \cos \left( n\omega_b \int_{s_1}^s \frac{ds'}{|v_{\parallel}|} \right). \quad (4)$$

Отметим, что если ловушка симметрична по отношению к отражению в экваториальной плоскости, то коэффициенты  $a_n$  отличны от нуля только при четных  $n$ .

Поскольку  $a_n \propto \kappa$ , то последнее слагаемое в уравнении (1) пропорционально квадрату кривизны силовой линии и в параксиальном приближении формально является малым по сравнению с  $\omega_0^2$ , которое линейно по кривизне  $\kappa$ . По этой причине обычно этим слагаемым пренебрегают, что дает дисперсионное соотношение для желобковых колебаний  $\omega = \pm \omega_0$ . В случае, когда  $\omega_0^2 > 0$ , т. е. в этом приближении желобковые колебания устойчивы, как показано в работе [9], учет по теории возмущений поправки к  $\omega$ , возникающей из последнего слагаемого в (1), может привести к неустойчивости, связанной с раскачкой желобковых мод за счет резонансного взаимодействия ионов, частота колебаний  $\omega_b$  которых совпадает с  $\omega_0$ . Необходимым условием такой неустойчивости является положительность производной  $(\partial f_0 / \partial \varepsilon)_{\mu}$  в некоторой области фазового пространства (что имеет место, например, при стабилизации плазмы плещущимися ионами [5]). Если же всюду

$(\partial f_0/\partial \varepsilon)_\mu < 0$ , то, взаимодействуя с резонансными частицами, желобковые моды затухают за счет эффекта, аналогичного затуханию Ландау.

С помощью метода Найквиста можно доказать и более сильное утверждение: если всюду  $(\partial f_0/\partial \varepsilon)_\mu < 0$  и  $\omega_0^2 > 0$ , то уравнение (1) не имеет корней с  $\text{Im } \omega > 0$ .

При наличии в плазме пучка помимо мод с частотой, близкой к  $\omega_0$ , у уравнения (1) могут быть и другие ветви неустойчивых колебаний. Чтобы показать это, представим функцию распределения ионов  $f_0$  в виде

$$f_0 = f_p + f_b, \quad (5)$$

где  $f_p$  — функция распределения ионов основной плазмы;  $f_b$  — функция распределения быстрых ионов пучка. Оставим в последнем члене в (1) только  $f_b$  и пренебрежем  $f_p$ ; это можно сделать, как будет видно из дальнейшего, так как колебания, о которых идет речь, находятся в резонансе с ионами пучка и слабо взаимодействуют с основной плазмой. В следующих двух разделах будут рассмотрены различные примеры функций  $f_b$ .

### 3. ПУЧОК С МАЛЫМ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ РАЗБРОСОМ

Если пучок можно считать моноэнергетическим и пренебречь угловым разбросом, то

$$f_b = A \delta(\varepsilon - \varepsilon_0) \delta(\mu - \mu_0), \quad (6)$$

где  $A$  — константа, которая связана с плотностью пучка  $n_b$  в точке с напряженностью магнитного поля  $B$  следующим образом:

$$n_b = A \frac{2^{3/2} \pi B}{M^{3/2} (\varepsilon_0 - \mu_0 B)^{1/2}}. \quad (7)$$

Подставляя (6) в (1), можно выполнить интегрирование и получить:

$$\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{4\pi^2 r \omega}{M^2} \left( \int \frac{\rho ds}{r^2 B^3} \right)^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{|a_n|^2 \omega_b^{-1}}{\omega - n\omega_b} = 0, \quad (8)$$

где  $\omega_b$ ,  $a_n$  и их производные по  $\varepsilon$  вычисляются для значений энер-

гии и магнитного момента, равных  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$ , соответственно.

Уравнение (8) имеет бесконечно много решений  $\omega_n$ , близких к обертонам  $n\omega_b$ . Будем искать эти решения в виде

$$\omega_n = n\omega_b + \delta\omega_n, \quad (9)$$

считая, что  $|\delta\omega_n| \ll \omega_n$ . Подставляя (9) в (8), достаточно оставить в сумме только одно резонансное слагаемое с  $n$ , равным номеру обертона. В результате получим:

$$\delta\omega_n^2 = v_n^2 \equiv \frac{4\pi^2 n^2 A |a_n|^2}{M^2 (n^2 \omega_b^2 - \omega_0^2)} \left( \frac{\partial \omega_b}{\partial \varepsilon} \right)_\mu \left( \int \frac{\rho ds}{r^2 B^3} \right)^{-1}. \quad (10)$$

Естественно считать, что частота колебаний горячих ионов  $\omega_b$  больше  $\omega_0$ , тогда как следует из (10), неустойчивость возникает, если  $(\partial \omega_b / \partial \varepsilon)_\mu < 0$ . Зависимость  $\omega_b$  от энергии частицы определяется в конечном итоге профилем магнитного поля (см. Приложение 2), и в принципе производная  $(\partial \omega_b / \partial \varepsilon)_\mu$  может иметь любой знак. Однако для инжекции под малым углом к оси, когда точки отражения частиц лежат вблизи точек максимумов поля, производная  $(\partial \omega_b / \partial \varepsilon)_\mu$  будет отрицательна. Действительно, увеличение  $\varepsilon$  при фиксированном  $\mu$  означает уменьшение питч-угла частицы, что в рассматриваемом случае приводит к логарифмическому росту периода продольных колебаний и, следовательно, уменьшению  $\omega_b$ .

Рассмотрим теперь случай, когда функция распределения ионов пучка размыта по энергии, при этом угловым разбросом по-прежнему будем пренебрегать. Такую функцию распределения можно представить в виде

$$f_b = F(\varepsilon) \delta(\lambda - \lambda_0), \quad (11)$$

где  $\lambda \equiv \varepsilon / \mu = B / \sin^2 \alpha$ ,  $\alpha$  — питч-угол частицы. Будем считать, что функция  $F(\varepsilon)$  описывает распределение со средней энергией  $\varepsilon_0$  и энергетическим разбросом  $\Delta \varepsilon$ , причем  $\Delta \varepsilon \ll \varepsilon_0$ . Для аналитических вычислений удобно взять в качестве  $F$  функцию

$$F(\varepsilon) = A \frac{\lambda_0^2}{\pi \varepsilon_0} \frac{\Delta \varepsilon}{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + (\Delta \varepsilon)^2}; \quad (12)$$

нормировка этой функции выбрана так, что  $A$  по-прежнему связано с плотностью пучка формулой (7).

Ниже будет удобно рассматривать частоту  $\omega_b$  как функцию пе-

ременных  $\varepsilon$  и  $\lambda$ ,  $\omega_b(\varepsilon, \lambda)$ . Заметим, что, как следует из (П2.1), (П2.2),

$$\left(\frac{\partial \omega_b}{\partial \varepsilon}\right)_\lambda = \frac{1}{2} \frac{\omega_b}{\varepsilon}. \quad (13)$$

Это соотношение будет без оговорок использоваться в дальнейшем.

С энергетическим разбросом  $\Delta\varepsilon$  связан разброс частот  $\Delta\omega_b$ :

$$\Delta\omega_b \equiv \left(\frac{\partial \omega_b}{\partial \varepsilon}\right)_\lambda \Delta\varepsilon = \frac{\Delta\varepsilon}{2\varepsilon_0} \omega_b(\varepsilon_0, \lambda_0). \quad (14)$$

Если  $n\Delta\omega_b$  мало по сравнению с отстройкой от резонанса  $|\delta\omega_n|$ , определяемой формулой (10), то  $F(\varepsilon)$  можно заменить  $\delta$ -функцией, и мы возвращаемся к рассмотренному выше случаю. Нас же теперь будет интересовать случай, когда  $n\Delta\omega_b \sim |\delta\omega_n|$ .

Займемся вычислением интеграла, входящего в соотношение (1). Заметим, что поскольку  $F(\varepsilon)$  имеет вид узкого пика, то плавно зависящие от  $\varepsilon$  факторы  $|a_n|^2$  и  $\omega_b$  могут быть вынесены из под знака интеграла. В результате задача сводится к вычислению интеграла

$$I \equiv \int d\varepsilon d\mu \left(\frac{\partial f_b}{\partial \varepsilon}\right)_\mu \frac{1}{\omega - n\omega_b}. \quad (15)$$

Перейдем от переменных  $\varepsilon, \mu$  к переменным  $\varepsilon, \lambda$ :

$$I = \int d\varepsilon d\lambda \frac{\varepsilon}{\lambda^2} \left[ \left(\frac{\partial f_b}{\partial \varepsilon}\right)_\lambda + \frac{\lambda}{\varepsilon} \left(\frac{\partial f_b}{\partial \lambda}\right)_\varepsilon \right] \frac{1}{\omega - n\omega_b}. \quad (16)$$

Проведем интегрирование по частям по  $\lambda$  во втором слагаемом и воспользуемся тождеством

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (\omega - n\omega_b)^{-1} = \left(\frac{\partial \omega_b}{\partial \lambda}\right)_\varepsilon \left(\frac{\partial \omega_b}{\partial \varepsilon}\right)_\lambda^{-1} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\omega - n\omega_b)^{-1}; \quad (17)$$

после этого еще одним интегрированием этого слагаемого по частям по  $\varepsilon$  перебросим производную по  $\varepsilon$  на  $f_b$ . Оставляя в подынтегральном выражении только главные члены, содержащие  $\partial f_b / \partial \varepsilon$ , и пренебрегая членами, где  $f_b$  не дифференцируется, получим

$$I = \int d\varepsilon d\lambda \frac{\varepsilon}{\lambda^2} \left(\frac{\partial f_b}{\partial \varepsilon}\right)_\lambda \left(1 + \frac{\lambda}{\varepsilon} \frac{(\partial \omega_b / \partial \lambda)_\varepsilon}{(\partial \omega_b / \partial \varepsilon)_\lambda}\right) \frac{1}{\omega - n\omega_b} =$$

$$= 2 \int d\varepsilon d\lambda \frac{\varepsilon^2}{\lambda^2 \omega_b} \left(\frac{\partial \omega_b}{\partial \varepsilon}\right)_\mu \left(\frac{\partial f_b}{\partial \varepsilon}\right)_\lambda \frac{1}{\omega - n\omega_b}. \quad (18)$$

Воспользуемся теперь соотношением (11) и снова учтем узость функции  $F(\varepsilon)$ , проводя разложение в резонансном знаменателе:

$$\omega - n\omega_b(\varepsilon, \lambda_0) \simeq \omega - n\omega_b(\varepsilon_0, \lambda_0) - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} n\omega_b(\varepsilon_0, \lambda_0).$$

В результате получим

$$I = 2 \frac{\varepsilon_0^2}{\lambda_0^2 \omega_b} \left(\frac{\partial \omega_b}{\partial \varepsilon}\right)_\mu \int d\varepsilon \frac{dF/d\varepsilon}{\omega - n\omega_b - \frac{1}{2} \frac{n\omega_b}{\varepsilon_0} (\varepsilon - \varepsilon_0)}. \quad (19)$$

Здесь (и ниже) подразумевается что  $\omega_b$  и ее производные вычисляются в точке  $\varepsilon_0, \lambda_0$ . Подставим теперь это выражение в формулу (1). Так же, как и выше, будем искать решение дисперсионного соотношения вблизи частоты  $n\omega_b$ , оставляя только одно слагаемое из бесконечной суммы по  $n$ . При этом всюду, кроме резонансного знаменателя в интеграле, можно положить  $\omega = n\omega_b$ . В результате получим

$$n^2 \omega_b^2 - \omega_0^2 + \frac{8\pi^2 n |a_n|^2 \varepsilon_0^2}{\lambda_0^2 M^2 \omega_b} \left(\frac{\partial \omega_b}{\partial \varepsilon}\right)_\mu \left(\int \frac{\rho ds}{r^2 B^3}\right)^{-1} \times \\ \times \int d\varepsilon \frac{dF/d\varepsilon}{\omega - n\omega_b - \frac{1}{2} \frac{n\omega_b}{\varepsilon_0} (\varepsilon - \varepsilon_0)} = 0. \quad (20)$$

До сих пор мы не конкретизировали вид функции  $F(\varepsilon)$ . Учтем теперь (12) и введем безразмерные переменные

$$t = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\Delta\varepsilon}, \quad z = 2 \frac{\varepsilon_0}{\Delta\varepsilon} \frac{\omega - n\omega_b}{|n|\omega_b}; \quad (21)$$

в результате соотношение (20) примет вид

$$1 \pm \frac{v_n^2}{\pi n^2 (\Delta\omega_b)^2} \int \frac{dt}{z \mp t} \frac{d}{dt} (t^2 + 1)^{-1} = 0, \quad (22)$$

где верхние знаки соответствуют положительным, а нижние — отрицательным значениям  $n$ . При вычислении интеграла в (22), в соответствии с общими правилами [10], нужно считать, что  $\text{Im } \omega > 0$  (а, значит,  $\text{Im } z > 0$ ), что дает

$$1 + \frac{v_n^2}{n^2(\Delta\omega_b)^2} \frac{1}{(z+i)^2} = 0. \quad (23)$$

Отсюда находим:

$$z = -i \pm \frac{\sqrt{v_n^2}}{|n| \Delta\omega_b}. \quad (24)$$

Как следует из этого выражения,  $\text{Im } z < 0$  при положительных значениях величины  $v_n^2$ , что соответствует затуханию с декрементом

$$\gamma = \frac{1}{2} |n| \omega_b \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0}. \quad (25)$$

Заметим, что в пределе  $\Delta\varepsilon \rightarrow 0$ , функция распределения (11) переходит в (6), при этом, согласно (25),  $\gamma \rightarrow 0$  в соответствии с результатом (10). Если  $v_n^2 < 0$ , то при больших  $v_n^2$ ,  $|v_n| \gg n\Delta\omega_b$  имеется неустойчивость с инкрементом  $\gamma \sim |v_n|$ ; однако увеличение энергетического разброса пучка до величины, при которой

$$|n| \Delta\omega_b = |v_n| \quad (26)$$

приводит к обращению мнимой части  $\omega$  в нуль. При больших  $\Delta\omega_b$  рассмотренные колебания всегда являются затухающими, с характерным декрементом, задаваемым формулой (25).

#### 4. ПУЧОК, РЕЛАКСИРУЮЩИЙ В ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЕ

Рассмотрим функцию распределения, которая возникает при квазистационарной инжекции пучка ионов с энергией  $\varepsilon_0$  в холодную плазму. При этом в типичных условиях энергия ионов пучка изменяется вследствие трения об электроны плазмы, а их угловым рассеянием можно пренебречь. Функцию  $f_b$  можно представить в следующем виде (см., например, [11]):

$$f_b = \frac{A\lambda_0^2}{\sqrt{\varepsilon_0}} \varepsilon^{-3/2} \delta(\lambda - \lambda_0) \cdot \begin{cases} 1, & \varepsilon < \varepsilon_0 \\ 0, & \varepsilon > \varepsilon_0 \end{cases} \quad (27)$$

Константа  $A$  в этой формуле имеет ту же размерность, что и в формулах (6), (12).

Будем по-прежнему называть пучком компоненту плазмы, описываемую функцией распределения (27). Строго говоря, эта фун-

кция распределения правильно описывает релаксирующий пучок только в области  $\varepsilon \geq \varepsilon_{\min}$ , где  $\varepsilon_{\min}$  — величина порядка температуры ионов холодной плазмы [11]; при меньших энергиях существенным становится угловое рассеяние частиц пучка на ионах плазмы. Величина  $\varepsilon_{\min}$  входит в выражение для плотности пучка:

$$n_b = A \frac{2^{3/2} \pi B \ln(\varepsilon_0/\varepsilon_{\min})}{\varepsilon_0^{1/2} M^{3/2} (1 - B/\lambda_0)^{1/2}}, \quad (28)$$

однако, поскольку  $\varepsilon_{\min}$  появляется только под знаком логарифма, точное ее значение несущественно.

Особенностью функции распределения (27) является наличие скачка при  $\varepsilon = \varepsilon_0$ , который, как будет видно из дальнейшего, приводит к появлению колебаний с частотами, близкими к  $n\omega_b(\varepsilon_0, \lambda_0)$ , где  $n$  — целое число. Основной вклад в эти колебания вносят частицы с энергией, мало отличающейся от  $\varepsilon_0$ , поэтому при нахождении собственных частот можно воспользоваться дисперсионным соотношением (20), взяв в качестве  $dF/d\varepsilon$  значение производной вблизи точки  $\varepsilon = \varepsilon_0$ :

$$\frac{dF}{d\varepsilon} = - \frac{A\lambda_0^2}{\varepsilon_0^2} \left[ \delta(\varepsilon - \varepsilon_0) + \frac{3}{2\varepsilon_0} \right] \cdot \begin{cases} 1, & \varepsilon < \varepsilon_0 \\ 0, & \varepsilon > \varepsilon_0 \end{cases} \quad (29)$$

Подставляя (29) в (20) и переходя к безразмерным переменным

$$t = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0}, \quad z = 2 \frac{\omega - n\omega_b}{|n| \omega_b},$$

получим

$$1 \mp \frac{4v_n^2}{n^2\omega_b^2} \int_{-1}^0 \frac{dt}{z \mp t} \left[ \delta(t) + \frac{3}{2} \right] = 0, \quad (30)$$

где верхние знаки относятся к положительным, а нижние — к отрицательным значениям  $n$ . Величина  $v_n^2$  в (30) определяется формулой (10), но теперь под  $A$  понимается нормирующий множитель в формуле (27).

Выполняя интегрирование в (30) и учитывая, что  $z$  должно быть мало по сравнению с единицей, найдем:

$$1 + \frac{4v_n^2}{n^2\omega_b^2} \left[ \mp \frac{1}{z} + \frac{3}{2} \ln(\mp z) \right] = 0. \quad (31)$$

В первом приближении можно пренебречь логарифмом в (31), что дает

$$z = z_0 \equiv \pm \frac{4v_n^2}{n^2 \omega_b^2}. \quad (32)$$

Если  $v_n^2 > 0$ , то в следующем приближении отброшенный логарифм дает не представляющую интереса малую реальную добавку к  $z_0$  и, следовательно, частота останется действительной.

В случае, когда  $v_n^2 < 0$ , подстановка нулевого приближения (32) и (31) приводит к появлению отрицательного числа под знаком логарифма, что дает в следующем приближении мнимую компоненту  $z$ :

$$\text{Im } z = -\frac{3}{2} \pi z_0^2 < 0. \quad (33)$$

Следовательно, в этом случае колебания затухают; декремент затухания равен

$$\gamma = 12\pi \frac{v_n^4}{|n|^3 \omega_b^3}. \quad (34)$$

Отметим, что этот результат можно получить непосредственно из (30), если воспользоваться правилом обхода Ландау особенности на действительной оси в интеграле.

Таким образом, мы приходим к заключению, что для функции распределения ионов (27) колебания с частотой, приблизительно равной  $n\omega_b(\epsilon_0, \lambda_0)$ , всегда устойчивы независимо от знака  $v_n^2$ .

## 5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрение, проведенное в предыдущих разделах, показывает, что учет возможности резонансного взаимодействия потенциальной волны с продольными осцилляциями ионов приводит к появлению новых типов колебаний плазмы, отличных от стандартных желобковых мод. Частота этих колебаний близка к частоте продольных колебаний инжектированного пучка.

В случае, когда энергетический разброс пучка пренебрежимо мал, эти колебания могут быть неустойчивыми (даже если желобковые моды стабилизированы, т. е.  $\omega_0^2 > 0$ ) в зависимости от знака

производной  $(\partial\omega_b/\partial\epsilon)_\mu$ . Характерный инкремент неустойчивости, которая в этом случае носит гидродинамический характер, определяется формулой (10); для пробкотрона длины  $l$  с радиусом плазмы  $a$  он оценочно равен (при  $n \sim 1$ )

$$\gamma \sim \frac{\kappa v_b}{\sqrt{1 + \frac{n_p}{n_b}}} \sim \frac{v_b}{l} \cdot \frac{a}{l} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{n_p}{n_b}}}, \quad (35)$$

где  $v_b$  — характерная скорость пучка, а  $n_p$  — плотность холодной плазмы. Как видно из этой формулы, инкремент неустойчивости всего лишь в  $l/a$  раз (в типичных условиях  $l/a \leq 10$ ) меньше инкремента желобковой неустойчивости (равного  $|\omega_0|$ ) в такой системе. Неустойчивость носит гидродинамический характер, если разброс энергий в пучке удовлетворяет неравенству

$$\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_0} \ll \frac{\gamma}{\omega_b}. \quad (36)$$

Для пучков с относительным разбросом, превышающим  $\gamma/\omega_b$ , как это следует из формулы (24), неустойчивость исчезает.

Наконец, проведенное в разделе 4 рассмотрение для функции распределения (27), характеризующей пучок, остывающий на электронах холодной плазмы, показывает, что и в этом случае существуют колебания с частотой, близкой к  $n\omega_b(\epsilon_0, \lambda_0)$ , но они всегда устойчивы.

Надо отметить, что анализ в настоящей работе ограничен случаем, когда можно пренебречь угловым разбросом пучка, который можно характеризовать интервалом  $\Delta\lambda$ . Такое пренебрежение оправдано, если обусловленный этим разбросом интервал частот  $\Delta\omega_b$ ,

$$\Delta\omega_b = \left( \frac{\partial\omega_b}{\partial\lambda} \right)_\epsilon \Delta\lambda,$$

удовлетворяет условию  $|n\Delta\omega_b| \ll |\omega - n\omega_b|$ . В противном случае учет углового разброса может существенно изменить картину неустойчивости.

Отметим также, что описанный выше механизм раскачки колебаний пучком в открытой ловушке сохраняет силу и в отношении альфвеновских колебаний плазмы. Соответствующее рассмотрение будет проведено в отдельной работе.

В заключение выражаю благодарность Б.Н. Брейзману за критические замечания.

## Приложение 1

Выведем уравнение потенциальных колебаний плазмы в аксиально-симметричном пробкотроне.

Исходным является линеаризованное уравнение идеальной магнитной гидродинамики

$$\rho \dot{\mathbf{v}}_1 = -\nabla \hat{p}_1 + \frac{1}{c} [\mathbf{j}_1, \mathbf{B}], \quad (\text{П1.1})$$

справедливое в пренебрежении эффектами конечного ларморовского радиуса. В (П1.1) индекс 1 обозначает возмущение соответствующей величины,  $\hat{p}$  — тензор давления  $p_{\alpha\beta}$ ,

$$p_{\alpha\beta} = p_{\perp} \delta_{\alpha\beta} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \frac{B_{\alpha} B_{\beta}}{B^2}, \quad (\text{П1.2})$$

а  $\rho$  — массовая плотность плазмы. Из уравнения (П1.1) находится перпендикулярная к магнитному полю составляющая тока  $\mathbf{j}_1^{(\perp)}$ :

$$\mathbf{j}_1^{(\perp)} = \frac{c}{B^2} [\mathbf{B}, \nabla \hat{p}_1 + \rho \dot{\mathbf{v}}_1]. \quad (\text{П1.3})$$

Продольная составляющая  $j_1^{(\parallel)}$  определяется из условия непрерывности тока  $\text{div } \mathbf{j}_1 = 0$ :

$$B \frac{\partial}{\partial s} B^{-1} j_1^{(\parallel)} = -\text{div } \mathbf{j}_1^{(\perp)}. \quad (\text{П1.4})$$

Интегрируя (П1.4) вдоль силовой линии с весом  $B^{-1}$  и пользуясь тем, что  $j_1^{(\parallel)}$  обращается в нуль в точках, где давление плазмы равно нулю, получим

$$\int \frac{ds}{B} \text{div } \mathbf{j}_1^{(\perp)} = 0, \quad (\text{П1.5})$$

где интегрирование ведется от пробки до пробки. Соотношение (П1.5) и является тем уравнением, которое описывает желобковые колебания плазмы в открытой ловушке.

Для вычисления интеграла (П1.5) нужно воспользоваться (П1.3) и учесть, что

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{c}{B^2} [\nabla \phi, \mathbf{B}], \quad (\text{П1.6})$$

где  $\phi$  — возмущение электростатического потенциала, относительно которого предполагается, что он не зависит от  $s$ ; другими словами, возмущение продольного электрического поля равно нулю. Удобно проводить вычисления, выбрав в качестве криволинейных координат величины  $\psi, \theta, s$ , где  $\psi$  обозначает деленный на  $2\pi$  магнитный поток, заключенный между осью и данной силовой линией;  $\theta$  — азимутальный угол;  $s$  — длина дуги, считываемая вдоль силовой линии. Считая, что

$$\phi \propto e^{-i\omega t + im\theta}, \quad (\text{П1.7})$$

после громоздких вычислений можно свести (П1.5) к следующему уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left[ \Phi_{\psi} \int \frac{\rho r^2}{B} ds \right] - m^2 \Phi \int \frac{\rho ds}{r^2 B^3} + \frac{m}{c\omega} \int \frac{\kappa_n ds}{r B^2} (p_{\parallel 1} + p_{\perp 1}) = 0, \quad (\text{П1.8})$$

где  $\kappa_n$  — проекция вектора кривизны силовой линии на направление нормали  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n} \equiv \nabla \psi / |\nabla \psi|$ , а  $p_{\parallel 1}$  и  $p_{\perp 1}$  обозначают возмущения соответствующих компонент давления.

Займемся теперь вычислением последнего слагаемого в (П1.8), куда входят  $p_{\parallel 1}$  и  $p_{\perp 1}$ . Для этого воспользуемся дрейфовым кинетическим уравнением для функции распределения ионов  $f$ , предполагая для простоты, что электроны — холодные и не вносят вклада в давление. Будем также считать, что в равновесном состоянии электрическое поле в плазме отсутствует. Представим  $f$  в виде

$$f = f_0(\epsilon, \mu, \psi) + f_1(\epsilon, \mu, \sigma, \psi, s, t), \quad (\text{П1.9})$$

где  $f_0$  — равновесная функция распределения, а  $f_1$  — возмущение; в (П1.9) явно выписаны аргументы, от которых зависят  $f_0$  и  $f_1$ ,  $\epsilon$  — кинетическая энергия частицы,  $\mu$  — магнитный момент,  $\sigma = \text{sign } v_{\parallel}$ . Функция  $f_1$  подчиняется уравнению

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v_{\parallel} \frac{\partial f_1}{\partial s} + v_{\perp} \nabla f_0 + \dot{\epsilon} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} = 0. \quad (\text{П1.10})$$

Входящая в это уравнение скорость  $v_{\perp}$  — это скорость электрического дрейфа ионов (П1.6), а через  $\dot{\epsilon}$  в (П1.10) обозначено изменение кинетической энергии частицы в единицу времени, связанное с работой электрического поля:

$$\dot{\epsilon} = -e \dot{v}_{\text{др}} \nabla \phi, \quad (\text{П1.11})$$



где  $v_{др}$  — дрейфовая скорость частицы в неоднородном магнитном поле,

$$v_{др} = \frac{c}{eB} (2\varepsilon - \mu B) [\mathbf{h}, \bar{\kappa}] = \frac{c\kappa_n}{eB} (2\varepsilon - \mu B) \mathbf{e}_\theta. \quad (\text{П1.12})$$

В (П1.12)  $\mathbf{e}_\theta$  обозначает единичный вектор в азимутальном направлении,  $\mathbf{h} = \mathbf{V}/B$ , а  $\bar{\kappa}$  — вектор кривизны силовой линии. Учтем теперь, что в силу (П1.7)  $f_1 \propto e^{-i\omega t + im\theta}$  и подставим в (П1.10) (П1.6), (П1.11), (П1.12). В результате получим

$$-i\omega f_1 + v_{\parallel} \frac{\partial f_1}{\partial s} - imc\varphi \frac{\partial f_0}{\partial \psi} - \frac{imc\kappa_n}{rB} \varphi (2\varepsilon - \mu B) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = 0. \quad (\text{П1.13})$$

Представим теперь  $f_1$  в виде

$$f_1 = -\frac{mc\varphi}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \psi} + g, \quad (\text{П1.14})$$

тогда  $g$  будет удовлетворять уравнению

$$-i\omega g + v_{\parallel} \frac{\partial g}{\partial s} = \frac{imc\kappa_n}{rB} \varphi (2\varepsilon - \mu B) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}. \quad (\text{П1.15})$$

Для решения этого уравнения вместо переменной  $s$  удобно ввести переменную  $\tau$ , определенную соотношением

$$d\tau = \frac{ds}{v_{\parallel}}.$$

Поскольку значения  $\tau$ , отличающиеся на величину периода колебаний частицы вдоль силовой линии  $\tau_b$ ,

$$\tau_b = \oint \frac{ds}{v_{\parallel}}, \quad (\text{П1.16})$$

соответствуют одной и той же точке фазового пространства, то функция  $g$  должна быть периодической:

$$g(\tau + \tau_b) = g(\tau). \quad (\text{П1.17})$$

Легко найти решение уравнения (П1.15), удовлетворяющее этому условию:

$$g = imc\varphi \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \frac{e^{i\omega\tau}}{1 - e^{i\omega\tau_b}} \int_{\tau - \tau_b}^{\tau} e^{-i\omega\tau'} \frac{\kappa_n(2\varepsilon - \mu B)}{rB} d\tau'. \quad (\text{П1.18})$$

В последнем интеграле зависящее от длины дуги  $s$  подынтегральное выражение надо выразить как функцию переменной  $\tau'$ ; разумеется, эта функция будет периодической функцией  $\tau'$  (с периодом  $\tau_b$ ). Воспользуемся явно этой периодичностью, записав

$$\frac{\kappa_n(2\varepsilon - \mu B)}{rB} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\varepsilon, \mu, \psi) e^{in\omega_b\tau'}, \quad (\text{П1.19})$$

где коэффициенты  $a_n$  определяются соотношением

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\tau_b} \oint d\tau' e^{-in\omega_b\tau'} \frac{\kappa_n(2\varepsilon - \mu B)}{rB} = \\ &= \frac{2}{\tau_b} \int \frac{ds}{|v_{\parallel}|} \frac{\kappa_n(2\varepsilon - \mu B)}{rB} \cos n\omega_b\tau. \end{aligned} \quad (\text{П1.20})$$

В последнем интеграле мы вернулись к интегрированию по  $s$  и наложили на  $\tau$  требование, чтобы  $\tau = 0$  в точке, где  $v_{\parallel} = 0$ .

Подставляя (П1.19) в (П1.18), можно выполнить интегрирование:

$$g = -mc\varphi \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{\omega - n\omega_b} e^{in\omega_b\tau} \quad (\text{П1.21})$$

и тем самым определить поправку  $f_1$ .

Для того, чтобы вычислить последнее слагаемое в (П1.8), воспользуемся соотношением

$$p_{\parallel 1} + p_{\perp 1} = \frac{2\pi B}{M^2} \sum_{\sigma} \int \frac{d\varepsilon d\mu}{|v_{\parallel}|} (2\varepsilon - \mu B) f_1, \quad (\text{П1.22})$$

где  $M$  — масса иона. С помощью (П1.22) находим, что

$$\begin{aligned} \frac{m}{c\omega} \int \frac{ds}{rB^2} \kappa_n (p_{\parallel 1} + p_{\perp 1}) &= \\ &= \frac{2\pi m}{c\omega M^2} \int \frac{ds}{rB} \kappa_n \sum_{\sigma} \int \frac{d\varepsilon d\mu}{|v_{\parallel}|} (2\varepsilon - \mu B) \left[ -\frac{mc\varphi}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \psi} + g \right]. \end{aligned} \quad (\text{П1.23})$$

При вычислении вклада первого слагаемого в квадратных скобках достаточно ограничиться параксиальным приближением и пренебречь изменением магнитного поля на масштабе радиуса плазмы, что даст

$$-\varphi \frac{m^2}{\omega^2} \int \frac{ds}{rB^2} \kappa_n \frac{\partial}{\partial \psi} (\rho_{\parallel} + \rho_{\perp}). \quad (\text{П1.24})$$

Что же касается вклада второго слагаемого, то пользуясь (П1.21), его можно записать так:

$$-\frac{2\pi m^2 \varphi}{\omega M^2} \int \frac{\kappa_n ds}{rB} \sum_{\sigma} \int \frac{d\varepsilon d\mu}{|v_{\parallel}|} (2\varepsilon - \mu B) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{\omega - n\omega_b} e^{in\omega_b \tau}. \quad (\text{П1.25})$$

Если теперь разложить входящий в (П1.25) комплекс  $\kappa_n(2\varepsilon - \mu B)/rB$  по формуле (П1.19) и перейти от интегрирования по  $s$  к интегрированию по  $\tau$  согласно правилу

$$\sum_{\sigma} \int \frac{ds}{|v_{\parallel}|} \rightarrow \oint d\tau,$$

то вместо (П1.25) получим

$$-2\pi \frac{m^2 \varphi}{\omega M^2} \int d\varepsilon d\mu \tau_b \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{\omega - n\omega_b}. \quad (\text{П1.26})$$

Таким образом, объединяя (П1.24) и (П1.26) и подставляя их вместо последнего слагаемого в (П1.8), окончательно получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \varphi_{\psi} \int \frac{\rho r^2}{B} ds \right) - \varphi m^2 \int \frac{\rho ds}{r^2 B^3} - \varphi \frac{m^2}{\omega^2} \int \frac{ds}{rB^2} \kappa_n \frac{\partial}{\partial \psi} (\rho_{\parallel} + \rho_{\perp}) - \\ & - \frac{2\pi m^2 \varphi}{\omega M^2} \int d\varepsilon d\mu \tau_b \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{\omega - n\omega_b} = 0. \end{aligned} \quad (\text{П1.27})$$

Вычислим производную  $(\partial \omega_b / \partial \varepsilon)_{\mu}$ , исходя из выражения (3):

$$\omega_b^{-1} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{M}{2}} I, \quad (\text{П2.1})$$

где

$$I = \int \frac{ds}{\sqrt{\varepsilon - \mu B(s)}}. \quad (\text{П2.2})$$

Имеем

$$\left( \frac{\partial \omega_b}{\partial \varepsilon} \right)_{\mu} = -\frac{\pi}{I^2} \sqrt{\frac{2}{M}} \left( \frac{\partial I}{\partial \varepsilon} \right)_{\mu}. \quad (\text{П2.3})$$

Прямое дифференцирование (П2.2) под знаком интеграла приводит к расходимости. Поэтому воспользуемся следующими преобразованиями, в которых  $B_{\min}$  означает минимальное поле на данной силовой линии, а  $B' \equiv \partial B / \partial s$ :

$$\begin{aligned} & \int \sqrt{\varepsilon - \mu B} ds - (\varepsilon - \mu B_{\min}) I = -\mu \int \frac{B - B_{\min}}{\sqrt{\varepsilon - \mu B}} ds = \\ & = 2 \int \frac{ds}{B'} (B - B_{\min}) \frac{\partial}{\partial s} \sqrt{\varepsilon - \mu B} = -2 \int ds \sqrt{\varepsilon - \mu B} \frac{\partial}{\partial s} \frac{B - B_{\min}}{B'} = \\ & = -2 \int ds \sqrt{\varepsilon - \mu B} \left( 1 - \frac{B''(B - B_{\min})}{(B')^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{П2.4})$$

Дифференцируя теперь по  $\varepsilon$  первое и последнее выражения в этой системе тождеств, найдем

$$\left( \frac{\partial I}{\partial \varepsilon} \right)_{\mu} = \frac{1}{\varepsilon - \mu B_{\min}} \left( -\frac{1}{2} I + \int \frac{ds}{\sqrt{\varepsilon - \mu B}} \left( 1 - \frac{B''(B - B_{\min})}{(B')^2} \right) \right). \quad (\text{П2.5})$$

Совместно с (П2.3) это выражение определяет производную  $(\partial \omega_b / \partial \varepsilon)_{\mu}$ . Отметим, что хотя  $B'$  обращается в нуль в точке минимума поля, отношение  $(B - B_{\min}) / (B')^2$  там конечно, и интеграл в правой части (П2.5) не имеет особенности в этой точке.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Simonen T.C., Allen S.L., Casper T.A. et al.* Phys. Rev. Lett., 1983, v.50, p.1668.
2. *Yatsu K., Tamai H., Hoshino M. et al.* Phys. Rev. Lett., 1983, v.51, p.388.
3. *Post R.S., Gerver M., Kesner J. et al.* Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fus. Res. 1984, IAEA, Vienna, 1987, v.2, p.285.
4. *Михайловский А.Б.* Физика плазмы, 1975, т.1, с.73.
5. *Hinton F.L., Rosenbluth M.N.* Nuclear Fusion, 1982, v.22, p.1547.
6. *Котельников И.А., Росляков Г.В., Рютов Д.Д.* Физика плазмы, 1987, т.13, с.403.
7. *Димов Г.И., Лысянский П.Б.* Препринт 86-102, ИЯФ СО АН СССР. Новосибирск, 1986.
8. *Давыденко В.И., Иваков А.А., Козьминых Ю.Л. и др.* Препринт 86-104, ИЯФ СО АН СССР. Новосибирск, 1986.
9. *Rosenbluth M.N., Catto P.J., Lee X.S.* Phys. Fluids, 1983, v.26, p.216.
10. *Михайловский А.Б.* Теория плазменных неустойчивостей. М.: Атомиздат, 1975, т.1.
11. *Мирнов Б.В., Нагорный В.П., Рютов Д.Д.* Препринт 84-40, ИЯФ СО АН СССР. Новосибирск, 1984.

Г.В. Ступаков

### Возбуждение желобковых колебаний пучком ионов в открытой ловушке

Ответственный за выпуск С.Г. Попов

---

Работа поступила 13 февраля 1987 г.  
Подписано в печать 14.04. 1987 г. МН 00421.  
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2,0 печ.л., 1,6 уч.-изд.л.  
Тираж 220 экз. Бесплатно. Заказ № 40.

---

Набрано в автоматизированной системе на базе фото-  
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и  
отпечатано на ротапинтере Института ядерной физики  
СО АН СССР,  
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.