

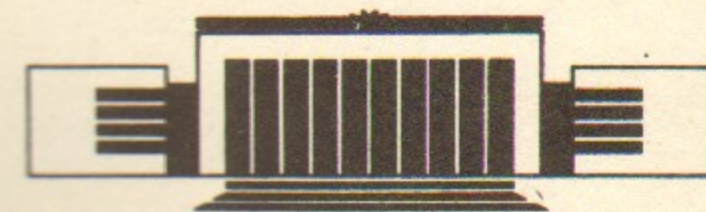


20  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

М.А. Тиунов, Б.М. Фомель, В.П. Яковлев

**САМ — ИНТЕРАКТИВНАЯ ПРОГРАММА  
ДЛЯ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОННЫХ ПУШЕК  
НА МИНИ-ЭВМ**

ПРЕПРИНТ 87-35



НОВОСИБИРСК

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных направлений развития ускорительной техники является создание линейных ускорителей с высоким темпом ускорения (до 50—100 МэВ/м). Достижение таких темпов ускорения в резонансных ускоряющих структурах требует разработки СВЧ-генераторов мощностью 100—300 МВт в диапазоне рабочих длин волн 3—10 см. Важным узлом таких генераторов является инжектор, формирующий интенсивный пучок высокоэнергетичных электронов ( $\sim 1$  МэВ) с малыми поперечным размером и фазовым объемом и с плотностью тока до 500 А/см<sup>2</sup>. Известно, что плотность тока, эмитируемого с катода, ограничена эмиссионной способностью современных подогревных катодов и электрической прочностью инжектора и не превышает величины 10—20 А/см<sup>2</sup>. Поэтому требуемая плотность тока может быть достигнута только в результате сильной компрессии исходного пучка.

В связи с этим встает задача проектирования и расчета на ЭВМ электронно-оптических систем, формирующих аксиально-симметричные интенсивные пучки электронов с большой компрессией и малым фазовым объемом. Однако, существующие вычислительные программы [1, 2] не обеспечивают точности, требуемой при расчетах инжекционных узлов мощных СВЧ-генераторов. К тому же эти программы реализованы на больших ЭВМ и работают в пакетном режиме, что очень затрудняет ввод данных и обработку результатов.

В данной работе описывается комплекс программ SAM для

расчета электронных пушек инжекционных узлов ускорителей и мощных ВЧ-генераторов. При его разработке была поставлена задача удовлетворить следующим требованиям:

- 1) интерактивный режим работы с использованием машинной графики;
- 2) реализация программ на мини-ЭВМ типа «Э-100/25» или «Э-79»;
- 3) принятие специальных мер для достижения необходимой точности расчетов;
- 4) расширение класса решаемых задач, в том числе:
  - а) расчет электрических полей в системах электродов с изоляторами;
  - б) расчет магнитных фокусирующих элементов с железом (без учета эффекта насыщения);
  - в) расчет пушек с высоким коэффициентом компрессии пучка.

Хотя существующие программы не удовлетворяют всем указанным требованиям, некоторые из них используют весьма эффективные численные методы и алгоритмы. Так, в программе В.Т. Астрелина и В.Я. Иванова [1] применен метод граничных интегральных уравнений совместно со сплайн-интерполяцией плотности поверхностных зарядов. Основным преимуществом такого подхода является малый объем требуемой памяти при высокой точности расчетов.

В данной работе был использован положительный опыт работы этих авторов, а также развиты новые методы и алгоритмы для повышения точности расчетов. Однако, для целостности восприятия, мы описываем все используемые методы и алгоритмы расчета, хотя некоторые из них уже описаны в работах [1, 3].

При расчете электронных пушек электрические и магнитные поля представляются в виде суперпозиции внешних полей, создаваемых системой электродов с изоляторами и магнитными фокусирующими элементами, и собственных полей пучка. Таким образом, расчет пушки сводится к последовательному решению следующих двух задач:

- 1) электромагнитостатика;
- 2) расчет динамики пучка.

Задача электромагнитостатики решается методом граничных интегральных уравнений относительно плотности вводимых поверхностных электрических и магнитных зарядов. При численном решении этих уравнений используется метод коллокации со сплайн-интерполяцией плотности поверхностных зарядов. В результате исходные интегральные уравнения сводятся к двум системам ли-

нейных уравнений относительно плотности зарядов в узлах коллокации. Коэффициенты матриц этих систем выражаются через интегралы по поверхностям электродов и границам раздела диэлектриков и магнетиков от произведения весовых функций сплайна на ядро соответствующего интегрального уравнения. Эти интегралы рассчитываются численно, а для повышения точности расчетов аналитически выделяются особенности ядра интегральных уравнений в узлах коллокации.

Точность сплайн-интерполяции резко падает при наличии особенностей полей, и как следствие, особенностей плотности поверхностных зарядов на острых краях электродов, диэлектриков и магнетиков, а также в точках стыковки электродов с изоляторами. В этом случае плотность заряда представляется в виде произведения множителя, описывающего особенность, на гладкую функцию, хорошо описываемую сплайном. Исходные системы линейных уравнений переписываются относительно значений гладкой функции в узлах коллокации, а множители особенностей вносятся под упоминавшиеся выше интегралы. При этом точность расчетов повышается за счет аналитического выделения как особенностей плотности зарядов на краях и в точках стыковки, так и особенностей ядра в точках коллокации.

Для описания динамики пучка в пушке используется гидродинамическая модель трубок тока. Распределение объемного заряда и тока пучка описывается с помощью сетки, имеющей прямоугольные в цилиндрических координатах  $(r, z)$  ячейки и покрывающей только предполагаемую область движения пучка. Плотность заряда и тока считается постоянной в пределах одной ячейки сетки. Электрические и магнитные поля рассчитываются только в узлах сетки, а в произвольной точке находятся с помощью интерполяции. Для описания эмиссии с катода используется модель плоского или сферического диода в зависимости от формы эмиттера. Расчет всей электронной пушки в целом проводится методом последовательных приближений.

Особенно отметим следующие новые методы и алгоритмы, предлагаемые в данной работе для повышения точности расчетов и расширения класса решаемых задач.

При решении задачи электромагнитостатики:

1. Описание особенностей плотности зарядов на краях диэлектриков и магнетиков, где само интегральное уравнение и его ядро теряют смысл;
2. Нахождение методом Мейкснера [4] показателя особенности

электрического поля вблизи точек стыковки металлов с диэлектриками;

3. Повышение точности расчетов малых рассеянных магнитных полей за счет регуляризации по Тозони [5] исходного интегрального уравнения.

При расчете динамики пучка:

1. Вводится набор прямоугольных сеток с разными размерами и разбиением на ячейки. Это позволяет точнее описывать неоднородности заряда и тока пучка, а также сильно неоднородные внешние поля. Например, неоднородности плотности заряда вблизи катода и при сильной компрессии пучка или электрическое поле вблизи анодного отверстия пушки.
2. Используется параболическая интерполяция при нахождении полей в точках, не совпадающих с узлами сеток.
3. Вводится начальное приближение для итераций по объемному заряду, определяемое следующими тремя параметрами:
  - а) предполагаемый ток пучка;
  - б) эффективный зазор анод-катод;
  - в) ускоряющее напряжение на этом зазоре.Это позволяет существенно сократить число итераций, требуемое для достижения заданной точности, особенно, при расчетах высокоперевансных электронных пушек.
4. Аналитически выделяются особенности, возникающие при расчете потенциалов и полей, наводимых зарядом и током отдельной ячейки сетки внутри или на границе этой ячейки. В результате удается значительно повысить точность расчета потенциалов и полей, наводимых пучком.
5. Трубки тока имеют конечное сечение, которое меняется с изменением радиуса пучка. Это дает возможность сравнительно малым числом трубок тока корректно описывать сильно неламинарные пучки с большой компрессией.
6. В качестве критерия сходимости итераций по объемному заряду принимается сходимость не только эмитируемого с катода тока, но также и эмиттанса пучка на выходе из пушки.
7. При расчете электрических полей и потенциалов заранее один раз насчитываются и хранятся на магнитном диске матрицы их значений в узлах сеток и точках коллокации при единичной плотности поверхностных и объемных зарядов. Затем реальные значения полей и потенциалов на каждой итерации по объемному заряду вычисляются простым умножением этих матриц на вектор значений плотности поверхностных зарядов в точках кол-

локации и вектор значений плотности объемных зарядов в ячейках сеток. Это позволяет существенно сократить время расчета пушки при высокой точности расчета полей и потенциалов.

Преимущества интерактивного режима работы с использованием машинной графики состоят в том, что пользователь прямо по ходу расчетов может видеть на экране цветного графического дисплея геометрию полей и параметры пучка в пушке. При этом выводятся карта эквипотенциалей и распределение электрического поля на оси пушки, а также траектории частиц, распределение плотности тока и фазовый портрет пучка на разных стадиях движения.

Более полное описание используемых методов и алгоритмов дано в разделах 2—4. В последнем разделе приводятся тестовые расчеты, а также несколько примеров расчета реальных электронных пушек и сравнение с экспериментальными результатами.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При расчете стационарных электронно-оптических систем для формирования интенсивных пучков заряженных частиц считаются заданными (рис. 1):

- 1) геометрия и потенциалы электродов;
- 2) геометрия и диэлектрическая проницаемость изоляторов;
- 3) геометрия и магнитная проницаемость магнитопроводов, а также геометрия и токи катушек магнитной фокусирующей системы (МФС);
- 4) режим эмиссии с катода.

Задача расчетов состоит в том, чтобы найти формируемый данной пушкой пучок с учетом его собственных электрического и магнитного (для релятивистских пучков электронов) полей.

Для описания потока пространственного заряда необходимо совместно решить две основные системы уравнений: уравнения электромагнитного поля и уравнения движения частиц пучка.

### 2.1. Уравнения электромагнитного поля

В силу стационарности полное электрическое поле, т. е. поле электродов плюс собственное поле пучка, может быть описано скалярным электрическим потенциалом, удовлетворяющим уравнению

Пуассона:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho/\varepsilon, \quad (2.1.1)$$

где  $\rho$  — объемная плотность заряда пучка. На поверхностях электродов и границах раздела сред с разной диэлектрической проницаемостью на потенциал накладываются следующие граничные условия:

$$\varphi|_{S_e} = U_e \quad (2.1.2)$$

$$\varepsilon_1 \left( \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right)_1 = \varepsilon_2 \left( \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right)_2 \Big|_{S_d} \quad (2.1.3)$$

где  $S_e$  и  $S_d$  — поверхности электродов и границ раздела диэлектриков;  $U_e$  — потенциалы электродов;  $\frac{\partial}{\partial n}$  — производная по нормали к границе раздела. Индексы 1 и 2 соответствуют двум разным средам, примыкающим к данной границе.

Известно, что общее решение уравнения (2.1.1) может быть представлено в виде:

$$\varphi(\vec{r}_0) = \int_{S_e + S_d} \frac{\sigma(\vec{r}) dS}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|} + \int_{V_b} \frac{\rho(\vec{r}) dV}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|}, \quad (2.1.4)$$

где  $\sigma$  — поверхностная плотность зарядов на электродах и границах раздела диэлектриков;  $V_b$  — объем, занимаемый пучком. Подставляя общее решение (2.1.4) в граничные условия (2.1.2) и (2.1.3), получаем следующие интегральные граничные уравнения относительно неизвестной поверхностной плотности заряда на электродах:

$$\int_{S_e + S_d} \frac{\sigma(\vec{r}) dS}{|\vec{r}_e - \vec{r}|} = U_e - \int_{V_b} \frac{\rho(\vec{r}) dV}{|\vec{r}_e - \vec{r}|} \quad (2.1.5)$$

и на границах раздела диэлектриков:

$$2\pi \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \sigma(\vec{r}_d) - \int_{S_e + S_d} \sigma(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial n_d} \left( \frac{1}{|\vec{r}_d - \vec{r}|} \right) dS = \int_{V_b} \rho(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial n_d} \left( \frac{1}{|\vec{r}_d - \vec{r}|} \right) dV \quad (2.1.6)$$

где  $\vec{r}_e$ ,  $\vec{r}_d$  — координаты точек на поверхности электродов и границах раздела, соответственно;  $\frac{\partial}{\partial n_d}$  — производная по нормали к гра-

нице раздела в точке с координатой  $\vec{r}_d$ .

Собственное магнитное поле пучка будем выражать через векторный магнитный потенциал

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}, \quad \vec{A}(\vec{r}_0) = \frac{1}{c} \int_{V_b} \frac{\vec{j}(\vec{r}) dV}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|} \quad (2.1.7)$$

Здесь  $\vec{j}(\vec{r})$  — плотность тока в пучке.

При моделировании динамики пучка необходимо также учитывать внешнее магнитное поле МФС. Часто для его описания используется параксиальное приближение, которое дает хорошую точность, если диаметр пучка мал по сравнению с апертурой МФС. Однако стремление минимизировать габариты и энергозатраты МФС зачастую приводит к нарушению этого условия.

С другой стороны, подавляющее большинство МФС работает в линейной области кривой намагничивания магнитных сердечников ( $\mu = \text{const}$ ). В этом случае задача магнитостатики легко может быть решена в полной постановке. Для этого представим магнитное поле, формируемое МФС, в виде суммы токового поля  $\vec{H}_c$  и поля намагничивания  $\vec{H}_m$ :

$$\vec{H} = \vec{H}_c + \vec{H}_m. \quad (2.1.8)$$

Вводя для описания поля намагничивания скалярный магнитный потенциал и учитывая условие  $\mu = \text{const}$ , можно свести задачу расчета поля намагничивания к электростатической задаче о диэлектрике в заданном внешнем поле. Интегральное граничное уравнение относительно поверхностной плотности «магнитных зарядов», аналогичное уравнению (2.1.6), будет иметь вид:

$$2\pi \frac{\mu_2 + \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \sigma(\vec{r}_m) - \oint_{S_m} \sigma(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial n_m} \left( \frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}|} \right) dS = (\vec{n}_m, \vec{H}_c(\vec{r}_m)), \quad (2.1.9)$$

где  $\vec{r}_m$  — координата точки на границе раздела магнетиков;  $\vec{n}_m$  — вектор нормали к границе в этой точке;  $S_m$  — полная поверхность границ раздела магнетиков.

Уравнения (2.1.4) — (2.1.9) образуют полную систему уравнений электромагнитного поля в стационарных электронно-оптических системах, формирующих интенсивные пучки заряженных частиц. Однако, в этих уравнениях остаются неопределенными плотности заряда и тока пучка.

## 2.2. Уравнение движения частиц пучка

Чтобы описать неизвестные плотности заряда и тока необходимо принять какую-либо модель реального потока заряженных частиц пучка. Для описания стационарных потоков наиболее адекватной является гидродинамическая модель трубок тока. В этой модели реальный поток пространственного заряда заменяется конечным набором ламинарных потоков или трубок тока, каждая из которых характеризуется усредненными по сечению трубки значениями плотностей заряда и тока. При этом, в силу стационарности и ламинарности, для каждого из потоков выполняется следующее соотношение между плотностью тока через сечение трубки и объемной плотностью заряда.

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \quad (2.2.1)$$

где  $\vec{v}$  — средняя скорость заряженных частиц, образующих данный поток.

В заданных полях координаты и скорости частиц находятся из уравнения движения

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = e \left( -\vec{\nabla}\varphi + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] \right) \quad (2.2.2)$$

с начальными условиями:

$$\vec{r}|_{t=0} = \vec{r}_0, \vec{v}|_{t=0} = \vec{v}_0 \quad (2.2.3)$$

где  $\vec{P} = m\gamma\vec{v}$  — импульс частицы;  $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$  — релятивистский фактор;  $\vec{r}_0$  и  $\vec{v}_0$  — координата и скорость частицы на эмиттере.

По условию стационарности ток заданной трубки не зависит от времени, следовательно, постоянен вдоль потока и равен

$$I = \int_{S_i} \vec{j}_0(\vec{r}_0) dS \quad (2.2.4)$$

где  $\vec{j}_0(\vec{r}_0)$  — плотность тока, вытягиваемого с эмиттера;  $S_i$  — сечение трубки на эмиттере. В случае ограничения эмиссии пространственным зарядом пучка плотность тока может быть приближенно описана с помощью модели плоского или сферического диода в зависимости от формы эмиттера:

$$\vec{j}_0(\vec{r}_0) = j_0(\vec{r}_0, \vec{E}, \delta) \quad (2.2.5)$$

где  $\vec{E}$  — напряженность электрического поля на малом расстоянии  $\delta$  от точки  $\vec{r}_0$  по нормали к эмиттеру.

В рамках модели трубок тока уравнения (2.2.1) — (2.2.5) полностью описывают поток пространственного заряда в реальной электронно-оптической системе при заданных электрическом и магнитном полях.

## 2.3. Решение самосогласованной задачи

Уравнение Пуассона (2.1.1) и, как следствие, уравнения (2.1.5) — (2.1.6) являются нелинейными, поскольку их решение зависит от распределения объемного заряда пучка. В свою очередь, распределение заряда зависит от конфигурации электрического поля, т. е. от решения уравнений (2.1.5) — (2.1.6). Аналогичная ситуация возникает и при учете собственного магнитного поля пучка (формулы (2.1.7)). Для решения возникающей самосогласованной задачи будем использовать метод последовательных приближений.

В качестве начального приближения возьмем некоторые модельные распределения плотностей заряда и тока пучка. Решив уравнения (2.1.5) — (2.1.7), мы найдем соответствующие им электрические и магнитные поля. После этого, моделируя эмиссию с катода и динамику пучка в известных полях, можно найти следующее приближение для плотностей заряда и тока и т. д. Критерием сходимости этого итерационного процесса может служить малое относительное изменение от итерации к итерации эмиттанса и тока пучка на выходе из пушки.

Таким образом, задача анализа заданной пушки может быть сведена к последовательному решению трех независимых задач:

- линейной магнитостатики ( $\mu = \text{const}$ );
- электростатики с учетом наведенных заданным пучком потенциалов и полей;
- моделированию эмиссии с катода и динамики пучка в заданных полях.

Метод решения двух первых задач подробно излагается в следующем разделе. Моделирование эмиссии с катода и динамики пучка, а также метод расчета наводимых пучком полей и потенциалов отдельно рассматриваются в разделе 4.

### 3. МЕТОД РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Поскольку в дальнейшем мы будем рассматривать только аксиально-симметричные пушки и магнитные линзы, то граничные интегральные уравнения (2.1.5), (2.1.6) и (2.1.9) удобно записать в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$  и проинтегрировать по углу. Обозначим через  $\xi = (r_0, z_0)$  координаты точки наблюдения и  $\eta = (r, z)$  — текущие координаты. В этих обозначениях указанные уравнения примут следующий вид:

$$\int_{L_e + L_d} \sigma(\eta) G(\xi, \eta) dl = U_e(\xi) - \int_{S_b} \rho(\eta) G(\xi, \eta) dS, \quad \xi \in L_e; \quad (3.1.1)$$

$$2\pi \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \sigma(\xi) - \oint_{L_m} \sigma(\eta) \frac{\partial G}{\partial n_\xi}(\xi, \eta) dl = (\vec{n}_\xi, \vec{H}_c(\xi)), \quad \xi \in L_m \quad (3.1.3)$$

$$2\pi \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \sigma(\xi) - \int_{L_e + L_d} \sigma(\eta) \frac{\partial G}{\partial n_\xi}(\xi, \eta) dl = \int_{S_b} \rho(\eta) \frac{\partial G}{\partial n_\xi}(\xi, \eta) dS, \quad \xi \in L_d, \quad (3.1.2)$$

где  $L_e, L_d, L_m$  — контуры электродов, диэлектриков и магнетиков в плоскости  $(r, z)$ ;  $S_b$  — сечение пучка этой плоскостью. Ядро интегрального уравнения (3.1.1)

$$G(\xi, \eta) = \int_0^{2\pi} \frac{r d\theta}{\sqrt{r_0^2 - 2r_0 r \cos\theta + r^2 + (z_0 - z)^2}} = \frac{4K(k)r}{\sqrt{(r_0 + r)^2 + (z_0 - z)^2}} \quad (3.1.4)$$

имеет простой физический смысл. Это потенциал, создаваемый в точке наблюдения  $(r_0, z_0)$  бесконечно тонким заряженным кольцом радиуса  $r$  с аксиальной координатой  $z$  и с единичной линейной плотностью заряда. В формуле (3.1.4)  $K(k)$  — полный эллиптический интеграл первого рода от аргумента:

$$k = \sqrt{\frac{4r_0 r}{(r_0 + r)^2 + (z_0 - z)^2}} \quad (3.1.5)$$

Ядро интегральных уравнений (3.1.2) — (3.1.3) с точностью до знака совпадает с нормальной к границе раздела компонентой электрического поля того же кольца и имеет вид

$$\frac{\partial G}{\partial n_\xi}(\xi, \eta) = n_r \frac{\partial G}{\partial r_0}(\xi, \eta) + n_z \frac{\partial G}{\partial z_0}(\xi, \eta), \quad (3.1.6)$$

где  $n_r, n_z$  — проекции нормали к границе раздела в точке наблюде-

ния  $(r_0, z_0)$ ,

$$\frac{\partial G}{\partial r_0}(\xi, \eta) = \frac{2r/r_0}{\sqrt{(r_0 + r)^2 + (z_0 - z)^2}} \left[ \frac{-r^2 - r_0^2 + (z_0 - z)^2}{(r - r_0)^2 + (z_0 - z)^2} E(k) - K(k) \right], \quad (3.1.7)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z_0}(\xi, \eta) = \frac{4r}{\sqrt{(r_0 + r)^2 + (z_0 - z)^2}} \frac{(z - z_0)}{(r - r_0)^2 + (z_0 - z)^2} E(k), \quad (3.1.8)$$

$E(k)$  — полный эллиптический интеграл второго рода.

### 3.2. Метод коллокации со сплайн-интерполяцией решения

При численном решении уравнения (3.1.1) — (3.1.3) записываются в конечном числе точек на контурах электродов, диэлектриков и магнетиков  $\xi_{ei} \in L_e, i = 1, \dots, N_e; \xi_{dj} \in L_d, j = 1, \dots, N_d; \xi_{mk} \in L_m, k = 1, \dots, N_m;$  (рис. 2). В этих же точках — узлах коллокации — ищутся значения плотности поверхностных зарядов  $\sigma_i = \sigma(\xi_i)$ . Для вычисления интегралов в левых частях уравнений (3.1.1) — (3.1.3), как и в работе [3], используется интерполяция плотности зарядов кубическим сплайном:

$$\begin{aligned} \sigma(\eta(l)) = & (M_{i-1} \psi_{1i} + M_i \psi_{2i}) \frac{h_i^2}{6} + \left( \sigma_{i-1} - M_{i-1} \frac{h_i^2}{6} \right) \psi_{3i} + \\ & + \left( \sigma_i - M_i \frac{h_i^2}{6} \right) \psi_{4i}, \quad l_{i-1} \leq l \leq l_i, \quad h_i = l_i - l_{i-1}, \quad i = 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

где  $l$  — параметрическая длина контура;  $M_i = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial l^2}(l_i)$  — вторые моменты сплайна;

$$\begin{aligned} \psi_{1i}(l) = \frac{(l_i - l)^3}{h_i^3}; \quad \psi_{2i}(l) = \frac{(l - l_{i-1})^3}{h_i^3}, \\ \psi_{3i}(l) = \frac{l_i - l}{h_i}; \quad \psi_{4i}(l) = \frac{l - l_{i-1}}{h_i}, \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

весовые функции сплайна. На концах отрезка интерполяции задаются дополнительные условия свободно закрепленных концов:

$$M_1 = M_2, \quad M_{N-1} = M_N \quad (3.2.3)$$

Из условия непрерывности первой производной сплайна (3.2.1) в узлах коллокации совместно с краевыми условиями (3.2.3) получим следующую систему линейных уравнений относительно векто-

ра вторых моментов  $\bar{M} = \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_N \end{pmatrix}$ :

$$\hat{A}\bar{M} = \bar{B} \quad (3.2.4)$$

где матрица  $\hat{A}$  имеет следующий вид:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \mu_{N-1} & 2 & \lambda_{N-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -2 & 2 & \dots \end{pmatrix}$$

$$\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \quad \mu_i = 1 - \lambda_i, \quad (3.2.5)$$

а вектор правых частей определяется формулой

$$B_i = 6 \frac{\frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{h_{i+1}} - \frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{h_i}}{h_i + h_{i+1}} \varepsilon_{1i} \varepsilon_{Ni}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.2.6)$$

где  $\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \neq j \\ 0, & \text{если } i = j \end{cases}$ . Решение системы (3.2.4) находится методом прогонки и может быть записано в виде

$$M_i = 6 \sum_{k=1}^N a_{ik} \varepsilon_{1k} \varepsilon_{Nk} \frac{\frac{\sigma_{k+1} - \sigma_k}{h_{k+1}} - \frac{\sigma_k - \sigma_{k-1}}{h_k}}{h_k + h_{k+1}}, \quad (3.2.7)$$

где  $a_{ik}$  — коэффициенты матрицы  $\hat{A}^{-1}$ . После подстановки (3.2.7) в формулу (3.2.1) получим

$$\sigma(l) = \sigma_{i-1} \psi_{3i} + \sigma_i \psi_{4i} + h_i^2 (\psi_{1i} - \psi_{3i}) \sum_{k=1}^N \bar{a}_{i-1,k} \sigma_k +$$

$$+ h_i^2 (\psi_{2i} - \psi_{4i}) \sum_{k=1}^N \bar{a}_{ik} \sigma_k, \quad i = 2, \dots, N,$$

$$\bar{a}_{ik} = \frac{a_{i,k-1} \varepsilon_{1k} \varepsilon_{2k}}{h_k (h_k + h_{k+1})} - \frac{a_{ik} \varepsilon_{1k} \varepsilon_{Nk}}{h_k h_{k+1}} + \frac{a_{i,k+1} \varepsilon_{N-1,k} \varepsilon_{Nk}}{h_{k+1} (h_{k+1} + h_{k+2})} \quad (3.2.8)$$

Подставляя полученное выражение в уравнения (3.1.1) — (3.1.3) и вводя обозначения

$$I_{ij}^m = \int_{l_{j-1}}^{l_j} \psi_{mj}(l) R(\xi_i, \eta(l)) dl,$$

$$m = 1, \dots, 4, \quad i = 1, \dots, N_l, \quad j = 2, \dots, N_l, \quad t = e, m, d \quad (3.2.9)$$

где  $R(\xi, \eta)$  — ядро интегральных уравнений (3.1.1) — (3.1.3), получим следующую систему линейных уравнений для задачи электростатики:

$$\sum_{j=1}^{N_e + N_d} C_{ij} \sigma_j = U_{ei} - U_{\rho i}, \quad i = 1, \dots, N_e;$$

$$\sum_{j=1}^{N_e + N_d} D_{ij} \sigma_j = E_{ni}, \quad i = N_e + 1, \dots, N_e + N_d; \quad (3.2.10)$$

Здесь введена общая нумерация узлов на металлах и диэлектриках, а

$$C_{ij} = \varepsilon_{Ni} I_{il}^3 + \varepsilon_{1i} I_{il}^4 + \sum_{k=2}^N h_k^2 (I_{ik}^1 - I_{ik}^3) \bar{a}_{k-1,l} + \sum_{k=2}^N h_k^2 (I_{ik}^2 - I_{ik}^4) \bar{a}_{kl}, \quad (3.2.11)$$

где  $l = j$ ,  $N = N_e$  при  $j \leq N_e$  и  $l = j - N_e$ ,  $N = N_d$ , при  $j > N_e$ ;

$$D_{ij} = 2\pi \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \delta_{ij} - C_{ij}^* \quad (3.2.12)$$

где  $C_{ij}^*$  совпадают с  $C_{ij}$  с точностью до замены ядра в интегралах (3.2.9). В системе (3.2.10) введены также следующие обозначения

$$U_{\rho i} = \int_{S_0} \rho(\eta) G(\xi_i, \eta) dS,$$

$$E_{ni} = \int_{S_0} \rho(\eta) \frac{\partial G}{\partial n_\xi}(\xi_i, \eta) dS, \quad (3.2.13)$$

для потенциала и нормальной компоненты электрического поля, наводимых пучком в узлах коллокации.

Для задачи магнитостатики аналогичная система уравнений будет иметь вид

$$\sum_{j=1}^{N_m} F_{ij} \sigma_j = (\bar{n}_i, \bar{H}_d), \quad i = 1, \dots, N_m, \quad (3.2.14)$$



где матрица  $F_{ij}$  совпадает с матрицей  $D_{ij}$  (3.2.12) с точностью до нумерации элементов и замены  $\varepsilon$  на  $\mu$ .

Таким образом, исходные интегральные уравнения (3.1.1) — (3.1.3) могут быть сведены к двум системам линейных алгебраических уравнений (3.2.10) и (3.2.14). При этом точность интерполяции сплайном плотности поверхностных зарядов по ее значениям в узлах достигает  $o(h^4)$ , где  $h = \max_i h_i$ . В свою очередь, точность определения значений плотности зарядов в узлах зависит от точности вычисления интегралов (3.2.9). Аналитического выражения для этих интегралов не существует, поэтому они рассчитываются численно методом гауссовых квадратур. Однако, точность численного интегрирования резко падает из-за наличия особенности ядра интегральных уравнений  $R(\xi_i, \eta)$  в случае, когда точка наблюдения совпадает с началом или концом интервала интегрирования ( $i = j - 1$  или  $i = j$ ).

### 3.3. Выделение особенности ядра интегральных уравнений

В указанном выше случае поступим следующим образом. Пусть точка наблюдения совпадает, например, с концом отрезка интегрирования  $\xi_i = \eta(l_j)$ ,  $i = j$ . Проведем касательную к контуру интегрирования в этой точке и обозначим ее  $\tilde{\eta}(l)$  (рис. 3). Очевидно, что в пределе  $l \rightarrow l_j$  разность  $R(\xi_j, \eta) - R(\xi_j, \tilde{\eta})$  стремится к нулю. Разложим функцию  $R(\xi_j, \tilde{\eta})$  в ряд по малому параметру  $\varepsilon = \frac{\rho}{r_j}$ , где  $\rho$  — расстояние между точкой наблюдения  $\xi_j = (r_j, z_j)$  и точкой на касательной  $\tilde{\eta}(l)$ . Обозначим полученную таким образом асимптотику ядра при  $\tilde{\eta}(l) \rightarrow \xi_j$  в виде  $\tilde{R}(\xi_j, \tilde{\eta})$  (см. Приложение 1). Исходные интегралы (3.2.9) могут быть представлены в следующем виде:

$$I_{ij}^m = \int_{l_{j-1}}^{l_j} \psi_{mj} [R(\xi_j, \eta) - \tilde{R}(\xi_j, \tilde{\eta})] dl + \int_{l_{j-1}}^{l_j} \psi_{mj} \tilde{R}(\xi_j, \tilde{\eta}) dl. \quad (3.3.1)$$

В формуле (3.3.1) первый интеграл особенности уже не имеет и может быть с хорошей точностью рассчитан численно. Оставшийся интеграл берется аналитически (см. Приложение 1).

Аналогично выделяется особенность в случае, когда точка наблюдения совпадает с началом отрезка интегрирования. Следует отметить, что полученная таким образом асимптотика ядра не опре-

делена, если точка наблюдения расположена на оси системы. Однако из формул (3.1.4) и (3.1.7), (3.1.8) легко видеть, что при  $r \rightarrow r_0 = 0$  ядро особенности не имеет и интегралы (3.2.9) могут быть с хорошей точностью рассчитаны численно.

### 3.4. Выделение особенностей решения

Другая сложность при решении граничных интегральных уравнений (3.1.1) — (3.1.3) состоит в том, что искомая плотность поверхностных зарядов может иметь особенность на углах металлов, диэлектриков и магнетиков. Характер этой особенности в общем случае имеет вид [4]:

$$\sigma \sim \rho^{\tau-1} \quad (3.4.1)$$

где  $\rho$  — расстояние от угла;  $\tau > 0$  — показатель особенности, зависящий от геометрии угла и внешних полей. При  $\tau < 1$  интерполяция плотности зарядов кубическим сплайном (3.2.1) дает большую ошибку, причем, в силу свойств сплайна, не только вблизи самого угла. Чтобы избежать этого, разобьем контуры электродов, диэлектриков и магнетиков на части

$$L_t = \sum_{k=1}^{M_t} L_{tk}, \quad t = e, d, m, \quad (3.4.2)$$

так, чтобы углы совпадали с точками стыковки отдельных частей. Тогда плотность зарядов на каждом из интервалов  $0 \leq l \leq L_{tk}$  можно представить в следующем виде:

$$\sigma(l) = \left(\frac{l}{L_{tk}}\right)^{\tau_{1k}-1} \cdot \left(\frac{L_{tk}-l}{L_{tk}}\right)^{\tau_{2k}-1} \cdot \tilde{\sigma}(l), \quad (3.4.3)$$

где  $\tilde{\sigma}(l)$  — гладкая функция, хорошо описываемая сплайном, а множители перед ней описывают особенности плотности зарядов на углах типа (3.4.1) с показателями  $\tau_{1k}$  и  $\tau_{2k}$  в начале и конце данной части контура, соответственно. На каждой части контура  $L_{tk}$  будем строить свой сплайн для описания гладкой функции  $\tilde{\sigma}(l)$ .

Следует особо отметить, что на металлических поверхностях узлы сплайна (точки наблюдения) могут располагаться на углах, где определено уравнение (3.1.1) и его ядро. Поэтому формулы (3.2.1) — (3.2.10) остаются в силе для точек, принадлежащих

электродам, с точностью до замены  $\sigma_i \rightarrow \tilde{\sigma}_i$  и добавления суммирования по отрезкам  $L_{ek}$ , а интегралы (3.2.9) примут вид

$$I_{ij}^m = \int_{l_{j-1}}^{l_j} \left(\frac{l}{L_{ek}}\right)^{\tau_{1k}-1} \left(\frac{L_{ek}-l}{L_{ek}}\right)^{\tau_{2k}-1} \cdot \psi_{mj}(l) \cdot R(\xi_i, \eta(l)) dl, \\ m=1, \dots, 4, \quad i=1, \dots, N_{ek}, \quad j=2, \dots, N_{ek}. \quad (3.4.4)$$

Кроме этого, можно записать условие непрерывности плотности зарядов в точках стыковки отдельных частей  $L_{ek}$ , например,  $k$ -ой и  $k+1$ -ой:

$$\tilde{\sigma}_{N_k} = \left(\frac{L_{ek}}{L_{ek+1}}\right)^{\tau-1} \cdot \tilde{\sigma}_1, \quad (3.4.5)$$

где  $\tau = \tau_{2k} = \tau_{1k+1}$ ;  $N_k$  — число узлов сплава на отрезке  $L_{ek}$ ;  $\tilde{\sigma}_1$  — значение функции  $\tilde{\sigma}(l)$  в первом узле сплава на отрезке  $L_{ek+1}$ .

Интегралы (3.4.4) при  $\tau_{1k}, \tau_{2k} < 1$  имеют особенности как при  $l=0$  и  $l=L_{ek}$  (особенности плотности зарядов на углах), так и при совпадении точки наблюдения с началом или концом интервала интегрирования (особенность ядра интегрального уравнения).

Для выделения этих особенностей поступим следующим образом. Интегралы (3.4.4) могут быть представлены в общем виде

$$I_{ij}^m = \int_0^1 P_j(x) Q_m(x) R_{ij}(x) dx, \quad (3.4.6)$$

где функция  $P_j(x)$  описывает особенности на углах, т. е. при  $j=2$ ,  $x=0$  и  $j=N_k$ ,  $x=1$ , функция  $Q_m(x)$  с точностью до множителя совпадает с весовыми функциями сплава,  $R_{ij}(x)$  — ядро интегральных уравнений (3.1.1) — (3.1.3), имеющее особенности при  $i=j-1$ ,  $x=0$  и  $i=j$ ,  $x=1$ . При выделении особенностей будем различать следующие два основных случая:

1. Точка наблюдения не совпадает с концами интервала интегрирования. В этом случае на всех интервалах, кроме первого и последнего, подынтегральная функция не имеет особенностей и интегралы (3.4.6) рассчитываются численно. Особенность функции  $P_j(x)$  на первом ( $j=2$ ) и последнем ( $j=N_k$ ) интервалах интегрирования выделяется следующим образом:

$$I_{ij}^m = \int_0^1 P_j(x) [Q_m(x) R_{ij}(x) - Q_m(a) R_{ij}(a)] dx + Q_m(a) R_{ij}(a) \int_0^1 P_j(x) dx, \quad (3.4.7)$$

где  $a=0$  при  $j=2$  и  $a=1$  при  $j=N_k$ . В формуле (3.4.7) первый интеграл не имеет особенности и интегрируется численно, а второй — аналитически.

2. Точка наблюдения совпадает с началом или концом интервала интегрирования ( $i=j-1$  или  $i=j$ ). Если это не крайний интервал ( $j \neq 2$  и  $j \neq N_k$ ), то только ядро  $R_{ij}$  имеет особенность и интеграл (3.4.6) можно переписать в виде

$$I_{ij}^m = \int_0^1 Q_m(x) [P_j(x) R_{ij}(x) - P_j(a) \tilde{R}_{ij}(x)] dx + P_j(a) \int_0^1 Q_m(x) \tilde{R}_{ij}(x) dx, \quad (3.4.8)$$

где  $\tilde{R}_{ij}(x)$  — асимптотика ядра при  $x \rightarrow a$ , причем  $a=0$  при  $i=j-1$  и  $a=1$  при  $i=j$ . Первый интеграл уже не имеет особенности, а второй совпадает с добавочным интегралом в формуле (3.3.1) и приведен в Приложении 1.

Если точка наблюдения совпадает с началом первого или концом последнего интервала интегрирования, т. е. расположена на кромке электрода, то в этой точке особенность имеет не только ядро уравнения (3.1.1), но и его решение (функции  $P_j(x)$  и  $R_{ij}(x)$  в формуле (3.4.6)). Для выделения особенностей представим интеграл (3.4.6) в виде

$$I_{ij}^m = \int_0^1 P_j(x) Q_m(x) [R_{ij}(x) - \tilde{R}_{ij}(x)] dx + \int_0^1 P_j(x) Q_m(x) \tilde{R}_{ij}(x) dx. \quad (3.4.9)$$

Здесь либо  $i=1$ ,  $j=2$ , либо  $i=j=N_k$ ;  $\tilde{R}_{ij}(x)$  — асимптотика ядра при  $x \rightarrow 0$  на первом и при  $x \rightarrow 1$  на последнем интервале интегрирования.

Если точка наблюдения совпадает с концом первого или началом последнего интервала, то на одном из пределов интегрирования в (3.4.6) особенность имеет ядро уравнения (3.1.1), а на другом — его решение. В этом случае интеграл (3.4.6) можно представить в следующем виде:

$$I_{ij}^m = \int_0^1 P_j(x) [Q_m(x) R_{ij}(x) - Q_m(a) R_{ij}(a)] - P_j(1-a) Q_m(1-a) \tilde{R}_{ij}(x) dx + \\ + Q_m(a) R_{ij}(a) \int_0^1 P_j(x) dx + P_j(1-a) Q_m(1-a) \int_0^1 \tilde{R}_{ij}(x) dx, \quad (3.4.10)$$

где  $a=0$  при  $i=j=2$  и  $a=1$  при  $i=j-1$ ,  $j=N_k$ ;  $\tilde{R}_{ij}(x)$  — асимпто-

тика ядра при  $x \rightarrow 1 - a$ . Выражение в фигурных скобках в формуле (3.4.10) уже не имеет особенностей, а остальные интегралы вычисляются аналитически. Подробнее формулы (3.4.6) — (3.4.10) приведены в Приложении 2.

Отдельного рассмотрения требует вопрос о выделении особенностей на углах диэлектриков и магнетиков, а также в точках стыковки металла с диэлектриком и различных диэлектриков или магнетиков друг с другом. Дело в том, что в этих точках не определено направление нормали, а значит и ядро уравнений (3.1.2) — (3.1.3). Кроме того, плотность заряда в этих точках может обращаться в бесконечность и тогда уравнения (3.1.2) — (3.1.3), в отличие от уравнения (3.1.1), просто теряют смысл.

В данной работе предлагается следующий метод выделения особенностей на углах диэлектриков и магнетиков, а также в точках стыковки различных материалов. Рассмотрим часть границы раздела диэлектриков или магнетиков, примыкающую, например, к углу (см. рис. 4). Отодвинем от угла крайнюю точку наблюдения на данной границе на некоторое малое, но конечное расстояние  $d \ll h$ , где  $h$  — шаг сплайна, описывающего плотность заряда на этой границе. В то же время в интегралах в левых частях уравнений (3.1.1) — (3.1.3) будем учитывать вклад от малого отрезка  $d$ . Он может быть значительным вследствие особенности плотности заряда на углу. Для описания плотности заряда на отрезке  $d$  будем использовать экстраполяцию по сплайну, построенному на данной части границы раздела диэлектриков или магнетиков. Аналогично поступим и на другом краю рассматриваемой части границы раздела, который также может примыкать к углу или к точке стыковки разных материалов.

Будем считать, что сплайн по-прежнему строится в интервале  $0 \leq l \leq L_{jk}$ . С учетом двух малых отрезков  $d$  по краям, полная длина данной части границы раздела будет равна  $L_{jk} + 2d$ , а параметр  $l$  будет меняться в пределах  $-d \leq l \leq L_{jk} + d$ . Тогда на границах раздела диэлектриков или магнетиков интегралы (3.4.4) могут быть представлены в виде

$$I_{ij}^m = \tilde{I}_{ij}^m + \delta_{2j} \Delta \tilde{I}_{i2}^m + \delta_{N_k j} \Delta \tilde{I}_{iN_k}^m, \quad (3.4.11)$$

где  $\tilde{I}_{ij}^m$  совпадают с интегралами (3.4.4) с точностью до замены множителей особенностей плотности заряда:

$$a_1(l) = \left( \frac{l+d}{L_{jk}+2d} \right)^{\tau_{1k}-1}, \quad a_2(l) = \left( \frac{L_{jk}+d-l}{L_{jk}+2d} \right)^{\tau_{2k}-1}, \quad (3.4.12)$$

а  $\Delta \tilde{I}_{i2}^m$  и  $\Delta \tilde{I}_{iN_k}^m$  — добавочные интегралы по малым отрезкам  $d$  и отличаются от  $\tilde{I}_{i2}^m$  и  $\tilde{I}_{iN_k}^m$  только пределами интегрирования.

В интегралах  $\tilde{I}_{ij}^m$  может иметь особенность только ядро интегральных уравнений (3.1.2) — (3.1.3). Метод выделения этой особенности ядра аналогичен методу выделения особенности ядра на металлических поверхностях по формуле (3.4.8).

Интегралы  $\Delta \tilde{I}_{i2}^m$  и  $\Delta \tilde{I}_{iN_k}^m$  могут быть записаны в следующем общем виде:

$$\Delta \tilde{I}_{ij}^m = \int_a^b P_j(x) Q_m(x) R_{ij}(x) dx, \quad (3.4.13)$$

полностью аналогичном формуле (3.4.6), за исключением того, что здесь либо  $j=2$  и тогда  $a=-\delta$ ,  $b=0$ , либо  $j=N_k$  и  $a=1$ ,  $b=1+\delta$ , где  $\delta=d/h \ll 1$ . Отметим также, что функция  $P_j(x)$ , равная произведению множителей (3.4.12), в обоих интегралах имеет особенность либо при  $j=2$  и  $x=-\delta$ , либо при  $j=N_k$  и  $x=1+\delta$  (особенности решения). Если точка наблюдения не принадлежит интервалу интегрирования, то особенность функции  $P_j(x)$  выделяется следующим образом (см. формулу (3.4.7)):

$$\Delta \tilde{I}_{ij}^m = \int_a^b P_j(x) [Q_m(x) R_{ij}(x) - Q_m(c) R_{ij}(c)] dx + Q_m(c) R_{ij}(c) \int_a^b P_j(x) dx \quad (3.4.14)$$

где  $c=a$  при  $j=2$  и  $c=b$  при  $j=N_k$ .

Особого рассмотрения требуют следующие два случая:

1) точка наблюдения совпадает с точкой стыковки металла с границей раздела диэлектриков. Это возможно только в том случае, если точка наблюдения находится на металле. Тогда при расчете интегралов (3.4.13) по малому отрезку  $d$  границы раздела диэлектриков, примыкающей к металлу, особенность в точке стыковки будет иметь уже не только решение (функция  $P_j(x)$ ), но и ядро уравнения (3.1.1). Для выделения этих особенностей перепишем интегралы (3.4.13) в следующем виде:

$$\Delta \tilde{I}_{ij}^m = \int_a^b P_j(x) [Q_m(x) R_{ij}(x) - Q_m(c) \tilde{R}_{ij}(x)] dx + Q_m(c) \int_a^b P_j(x) \tilde{R}_{ij}(x) dx \quad (3.4.15)$$

где  $c=a$  при  $j=2$  и  $c=b$  при  $j=N_k$ ;  $\tilde{R}_{ij}(x)$  — асимптотика ядра при  $x \rightarrow c$ ;

2) точка наблюдения является крайней точкой на границе раздела диэлектриков или магнетиков. Тогда в интегралах (3.4.13) ядро уравнений (3.1.2) — (3.1.3) будет иметь особенность на другом пределе по сравнению с предыдущим случаем. Для выделения особенностей решения и ядра представим интеграл (3.4.13) в виде, аналогичном формуле (3.4.10):

$$\Delta \tilde{I}_{ij}^m = \int_a^b \{P_j(x)[Q_m(x)R_{ij}(x) - Q_m(c)R_{ij}(c)] - P_j(f)Q_m(f)\tilde{R}_{ij}(x)\} dx + \\ + Q_m(c)R_{ij}(c) \int_a^b P_j(x) dx + P_j(f)Q_m(f) \int_a^b \tilde{R}_{ij} dx \quad (3.4.16)$$

где при  $j=2$   $c=a$  и  $f=b$ , а при  $j=N_k$   $c=b$  и  $f=a$ ;  $\tilde{R}_{ij}(x)$  — асимптотика ядра при  $x \rightarrow f$ . Легко видеть, что в этом представлении выражение в фигурных скобках не имеет особенностей, а два оставшихся интеграла вычисляются аналитически.

Более подробно формулы (3.4.13) — (3.4.16) приведены в Приложении 2.

### 3.5. Нахождение показателя особенности поля

Точность, достигаемая за счет выделения особенности плотности зарядов, во многом зависит от точности определения показателя особенности поля на острых кромках электродов, диэлектриков и магнетиков, а также в точках их стыковки. Будем искать характер поведения поля в непосредственной близости от кромки или точки стыковки на расстояниях, малых по сравнению с расстоянием от этой точки до оси системы. Тогда задача определения показателя особенности может рассматриваться в плоском приближении. Исключение составляет случай, когда поле имеет особенность на оси системы (например, коническое острие).

Как известно, существует аналитическое решение о поведении поля вблизи плоского клиновидного края проводника [6] (см. рис. 5):

$$E \sim \rho^{\tau-1}, \quad \tau = \frac{\pi}{2\pi - \theta_0} \quad (3.5.1)$$

где  $\rho$  — расстояние от края,  $\theta_0$  — угол раствора клина. Это же решение можно использовать для описания особенности магнитного поля вблизи острой кромки магнетика при условии  $\mu \gg 1$ . Отдельного рассмотрения требует вопрос о нахождении показателя особенности поля вблизи диэлектрического клина или вблизи точки стыковки нескольких диэлектрических сред друг с другом и с металлами. Для этого воспользуемся известным методом Мейкснера [4], применив его к описанию стационарных полей [7].

Пусть у нас есть точка стыковки  $N$  сред с различными диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_i$ , среди которых  $M < N$  металлов. Введем полярную систему координат  $(\rho, \theta)$ , центр которой совпадает с точкой стыковки (см. рис. 6). Электрическое поле должно удовлетворять уравнениям электростатики

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= 0 \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

и граничным условиям:

а) на границе раздела диэлектриков

$$\begin{aligned} \epsilon_i E_{\theta i} &= \epsilon_{i+1} E_{\theta i+1} \\ E_{\rho i} &= E_{\rho i+1} \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

б) на поверхности проводников

$$E_{\rho i} = E_{\rho i+1} = 0 \quad (3.5.4)$$

Будем искать решение уравнений (3.5.2) в виде асимптотических рядов:

$$\begin{aligned} E_{\rho i} &= \rho^{\tau-1} [a_{0i} + a_{1i} \rho + a_{2i} \rho^2 + \dots], \\ E_{\theta i} &= \rho^{\tau-1} [b_{0i} + b_{1i} \rho + b_{2i} \rho^2 + \dots]. \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

Подставляя (3.5.5) в (3.5.2), получим дифференциальные уравнения относительно первых коэффициентов рядов  $a_{0i}$  и  $b_{0i}$ , общее решение которых имеет вид

$$\begin{aligned} a_{0i} &= p_i \sin \tau \theta - q_i \cos \tau \theta \\ b_{0i} &= p_i \cos \tau \theta + q_i \sin \tau \theta \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

Для определения постоянных  $p_i$  и  $q_i$  воспользуемся граничными условиями (3.5.3) и (3.5.4). Поскольку электрическое поле в металле

равно нулю, то для металлических сред сразу полагаем  $p_i$  и  $q_i$  равными нулю. В результате, после подстановки (3.5.6) в граничные условия (3.5.3) и (3.5.4), получаем однородную систему из  $2 \cdot (N - M)$  уравнений:

$$\hat{A}(\tau) \cdot \vec{P} = 0 \quad (3.5.7)$$

где  $\hat{A}(\tau)$  — матрица системы;  $\vec{P} = \begin{Bmatrix} p_i \\ q_i \end{Bmatrix}$ ,  $i = 1, \dots, N - M$ .

Система (3.5.7) имеет ненулевое решение при условии, что определитель матрицы  $\hat{A}(\tau)$  равен нулю

$$\det \hat{A}(\tau) = 0. \quad (3.5.8)$$

Это условие позволяет определить показатель особенности электрического поля в общем случае.

Особо следует отметить, что в данном методе решения при  $M = 0$  полностью отсутствует информация о конфигурации внешних полей. Поэтому, в случае существования нескольких решений уравнения (3.5.8), встает вопрос о выборе физического решения, соответствующего заданному распределению внешнего электрического поля. Например, для диэлектрического клина с  $\varepsilon = 5$  и углом раствора  $\theta_0 = 90^\circ$  из (3.5.8) получаем два значения показателя особенности  $\tau_1 = 0,78$  и  $\tau_2 = 1,22$ . Те же самые значения получаются и для клина с  $\theta_0 = 270^\circ$ . При этом каждому значению  $\theta_0$  соответствует своя конфигурация электрического поля вблизи ребра клина, схематично изображенная на рис. 7. Отметим, что при  $\tau < 1$  электрическое поле и, следовательно, плотность поверхностных зарядов имеют особенность на ребре для обоих значений угла раствора клина.

Для иллюстрации вышесказанного рассмотрим диэлектрический стакан, помещенный в электрическое поле специальной конфигурации (рис. 8). В этом случае, плотность поверхностных зарядов имеет особенность в точках 3, 4 и 5 и обращается в нуль в точке 2. Внизу на том же рисунке приведено распределение плотности зарядов на диэлектрике вдоль ломаной 123456.

Из этого простого примера видно, что в общем случае трудно выбрать сразу нужное значение показателя особенности. Кроме того, выделение особенности следует производить и при  $1 < \tau < 2$ . Действительно, в этом случае плотность зарядов при приближении к ребру диэлектрического клина или к точке стыковки различных сред стремится к нулю по степенному закону с показателем меньше единицы и также плохо описывается сплайном (рис. 8).

### 3.6. Регуляризация задачи магнитостатики

Особо стоит остановиться на трудностях, возникающих при расчете магнитных фокусирующих систем с большой магнитной проницаемостью  $\mu \gg 1$ . Дело в том, что при выводе интегрального граничного уравнения (3.1.3) использовалось представление магнитного поля в виде суммы поля токов  $\vec{H}_c$  и поля намагничения  $\vec{H}_m$  (2.1.8). При расчете же реальных МФС часто встает задача нахождения малых рассеянных магнитных полей (задача экранировки). Ясно, что в этом случае токовые поля почти компенсируются полями намагничения. Вследствие этого при решении задачи экранировки сильно возрастает требуемая точность расчета каждого из слагаемых в (2.1.8), особенно, когда  $\mu \gg 1$ . Но, как показано в работе [5], в этом случае уравнение (3.1.3) становится некорректным. Действительно, пусть  $\mu_2$  — магнитная проницаемость внутри объема, ограниченного контуром  $L_m$  (см. (3.1.3)) и  $\mu_2 \gg \mu_1$ . Легко показать, что при этом малая средняя ошибка в расчете правой части уравнения (3.1.3)

$$\Delta H_{cp} = \frac{1}{S_m} \oint_{S_m} (\vec{n}, \vec{H}_c - \vec{H}_{c0}) dS \quad (3.6.1)$$

приведет к значительной средней ошибке в решении

$$\Delta \sigma_{cp} = \frac{1}{S_m} \oint_{S_m} (\sigma - \sigma_0) dS = \frac{\mu_2 - \mu_1}{2\mu_1} \frac{\Delta H_{cp}}{2\pi} \quad (3.6.2)$$

где  $\vec{H}_{c0}$  — точное значение поля токов;  $\sigma_0$  — соответствующее ему решение уравнения (3.1.3).

В работе [5] описывается также метод регуляризации исходного интегрального уравнения (3.1.3) путем введения в него дополнительной информации о решении. В нашем случае — это равенство нулю полного магнитного заряда:

$$\oint_{S_m} \sigma dS = 0 \quad (3.6.3)$$

С учетом этого условия, уравнение (3.1.3) преобразуется к следующему виду:

$$2\pi \frac{\mu_2 + \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \sigma(\xi) - \oint_{L_m} \sigma(\eta) \left[ \frac{\partial G}{\partial n_\xi}(\xi, \eta) - \frac{1}{S_m} \oint_{L_m} \frac{\partial G}{\partial n_\xi}(\xi, \zeta) dl' \right] dl = \\ = (\vec{n}_\xi, \vec{H}_c(\xi)), \quad \xi \in L_m \quad (3.6.4)$$

Здесь  $S_m$  — полная поверхность магнетика;  $\zeta = (r', z')$  — текущие координаты, принадлежащие элементу контура магнетика  $dl'$ .

Уравнение (3.6.4) имеет ряд преимуществ перед уравнением (3.1.3). Во-первых, любое его решение удовлетворяет условию (3.6.3). Во-вторых, значительно уменьшается средняя ошибка решения из-за неточности расчета правой части:

$$\Delta\sigma_{\text{ср}} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \frac{\Delta H_{\text{ср}}}{2\pi}. \quad (3.6.5)$$

Однако, следует отметить принципиальную разницу между задачей расчета магнитных фокусирующих систем, обладающих симметрией относительно плоскости  $z = \text{const}$ , и задачей расчета несимметричных МФС. В первом случае достаточно искать решение только на одной из двух симметричных половин магнитной системы. Тогда, в силу антисимметрии магнитных зарядов, условие (3.6.3) автоматически будет выполнено, а уравнение (3.1.3) примет вид

$$2\pi \frac{\mu_2 + \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \sigma(\xi) - \int_{L_m/2} \sigma(\eta) \left[ \frac{\partial G}{\partial n_\xi}(\xi, \eta) - \frac{\partial G}{\partial n_\xi}(\xi, \tilde{\eta}) \right] dl = \\ = (\tilde{n}_\xi, \tilde{H}_c(\xi)), \quad \xi \in L_m/2 \quad (3.6.6)$$

где  $\tilde{\eta}$  — координаты, симметричные координатам  $\eta = (r, z)$ .

Легко показать, что уравнение (3.6.6) обладает теми же свойствами, что и уравнение (3.6.4). Следовательно, при расчете симметричных МФС не требуется регуляризации уравнения (3.6.6). Расчет же несимметричных магнитных систем обязательно должен проводиться с использованием уравнения (3.6.4). Изменения в алгоритме расчета при этом незначительны и подробно описаны в Приложении 3.

В качестве примера на рис. 9 приведены геометрия и результаты расчета несимметричной МФС без регуляризации и с регуляризацией исходного интегрального уравнения (3.1.3). Для сравнения там же приведены результаты измерений. Видно, что преимущества регуляризации проявляются именно при расчете малых рассеянных магнитных полей ( $\mu = 10^3$ ).

#### 4. ДИНАМИКА ИНТЕНСИВНОГО ПУЧКА

Численное моделирование динамики интенсивного стационарного пучка заряженных частиц включает в себя четыре основных этапа:

- а) моделирование условий эмиссии на катоде;
- б) расчет траекторий частиц в заданных полях, нахождение плотностей пространственного заряда и тока пучка;
- в) расчет собственных электрического и магнитного полей пучка;
- г) решение задачи электростатики с учетом наведенных пучком потенциалов и полей.

Как уже указывалось, основной метод расчета электронных пучков с интенсивными потоками заряженных частиц — метод последовательных приближений. Это означает, что указанные выше этапы моделирования повторяются до тех пор, пока не будет достигнуто малое относительное изменение параметров пучка на выходе из пушки. Для увеличения скорости сходимости этого итерационного процесса используется метод верхней релаксации при нахождении плотностей заряда и тока пучка:

$$\rho_{N+1} = \omega \tilde{\rho}_{N+1} + (1 - \omega) \rho_N \\ \vec{J}_{N+1} = \omega \tilde{\vec{J}}_{N+1} + (1 - \omega) \vec{J}_N \quad (4.0.1)$$

где  $\tilde{\rho}_{N+1}$  и  $\tilde{\vec{J}}_{N+1}$  — плотности заряда и тока пучка, рассчитанные на  $N+1$ -ой итерации, а  $\rho_N$ ,  $\rho_{N+1}$  и  $\vec{J}_N$ ,  $\vec{J}_{N+1}$  — принимаемые в действительности значения плотности заряда и тока на  $N$ -ой и  $N+1$ -ой итерациях;  $0 < \omega < 1$  — коэффициент релаксации.

##### 4.1. Начальное приближение пуассоновых итераций

Скорость сходимости итерационного процесса (4.0.1) существенно зависит от начального приближения, принятого для параметров пучка, которые в начале расчетов неизвестны. Единственная задача, которая может быть решена сразу, — это задача электростатики без учета влияния пространственного заряда. Обычно именно ее решение используется для нахождения тока и траекторий частиц пучка на первой итерации. Но найденные таким образом параметры пучка очень сильно отличаются от истинного решения самосогласованной задачи.

Для иллюстрации вышесказанного сравним решения для плос-

кого диода и плоского конденсатора с одинаковыми зазорами  $D$  и ускоряющими напряжениями  $U_0$ . Однако, будем предполагать, что в конденсаторе также эмитируется и движется пучок заряженных частиц. Для нахождения плотности тока пучка в диоде и в конденсаторе будем считать, что на некотором малом расстоянии  $d \ll D$  от эмитирующей поверхности (потенциал ее примем равным нулю) выполняется закон «3/2»:

$$j = A \cdot \frac{U^{3/2}(d)}{d^2}, \quad (4.1.1)$$

где  $U(d)$  — значение потенциала на расстоянии  $d$  от эмитирующей поверхности. Плотность заряда пучка в диоде и в конденсаторе будет равна

$$\rho(x) = \frac{j}{\sqrt{\frac{2e U(x)}{m}}} \quad (4.1.2)$$

где  $x$  — расстояние от эмитирующей поверхности. Подставляя в формулы (4.1.1) и (4.1.2) известные решения для плоского диода и плоского конденсатора, получим:

а) плоский диод

$$j_1 = A \frac{U_0^{3/2}}{D^2}, \quad (4.1.3)$$

$$\rho_1(x) = \frac{j_1}{\sqrt{\frac{2e U_0}{m}}} \cdot \left(\frac{x}{D}\right)^{-2/3} \quad (4.1.4)$$

б) плоский конденсатор

$$j_2 = A \frac{U_0^{3/2}}{D^2} \left(\frac{d}{D}\right)^{-1/2} \quad (4.1.5)$$

$$\rho_2(x) = \frac{j_2}{\sqrt{\frac{2e U_0}{m}}} \cdot \left(\frac{x}{D}\right)^{-1/2} \quad (4.1.6)$$

Легко видеть, что решения (4.1.5) — (4.1.6) очень сильно отличаются от истинных решений (4.1.3) — (4.1.4). Особенно следует отметить зависимость плотности тока в конденсаторе от малого параметра  $d/D$ , причем она всегда больше плотности тока в диоде в  $(D/d)^{1/2} \gg 1$  раз. Сильно отличаются также и распределения

плотности заряда пучка. На рис. 10, а, б приведены зависимости отношения  $j_2/j_1$  от параметра  $d/D$  и отношения  $\rho_2/\rho_1$  от параметра  $x/D$  при  $d=D$ .

Из этого простого примера видно, что использование решения задачи электростатики без учета пространственного заряда для нахождения параметров пучка на первой итерации может привести не только к большой начальной ошибке и долгой сходимости итераций (4.0.1), но даже к запирающему пучку после первой итерации. Последнего обычно избегают с помощью подбора коэффициента релаксации  $\omega < (d/D)^{1/2} \ll 1$ , что также уменьшает скорость сходимости итераций (4.0.1). Отметим, что в рассматриваемом примере траектории частиц совпадают независимо от того, учитывается или нет влияние пространственного заряда. В реальных же пушках в этих двух случаях они сильно отличаются, что приводит к еще большей ошибке в начальном приближении. Особенно остро эта проблема возникает при расчете пушек с большим первансом

$$P_{\mu} \geq 1 \frac{\text{мкА}}{\text{В}^{3/2}}.$$

В данной работе предлагается другой способ задания начального приближения пуассоновых итераций. Предположим, что нам заранее известны следующие три параметра:

- 1) ток пучка  $I_0$ .
- 2) эффективный зазор анод-катод  $D_0$ , в пределах которого распределение потенциала примерно совпадает с распределением в плоском или сферическом (в зависимости от формы катода) диоде с тем же зазором;
- 3) ускоряющее напряжение  $U_0$ , действующее на пучок на зазоре  $D_0$ .

Будем также предполагать, что плотность тока на катоде может быть либо постоянной, либо пропорциональной  $E_0^{3/2}$ , где  $E_0$  — поле на катоде без учета объемного заряда. Выбор того или иного распределения зависит от конкретной геометрии и режима работы пушки. Независимо от относительного распределения плотности тока на катоде полный ток пучка будем считать заданным и равным  $I_0$ . Далее считаем, что в пределах зазора  $D_0$  пучок движется в поле плоского или сферического диода с тем же зазором анод-катод и ускоряющим напряжением  $U_0$ . После того, как частицы пучка пролетают зазор  $D_0$  и набирают энергию  $W = eU_0$ , считается что они движутся с постоянной энергией по траекториям, параллельным оси пушки (рис. 11).

Такое начальное приближение совместно с методом верхней релаксации позволяет существенно сократить число итераций по

объемному заряду, требуемое для расчета пушки с заданной точностью. Особенно это относится к высокоперевансным пушкам. Кроме того, оно дает возможность произвольно подбирать величину коэффициента релаксации и тем самым повысить скорость сходимости итераций.

#### 4.2. Моделирование эмиссии с катода

Эмиссию с катода на всех итерациях по объемному заряду, кроме первой, можно достаточно точно описать с помощью модели плоского или сферического диода в зависимости от формы катода. Для этого на некотором малом расстоянии  $\delta$  от катода находится значение нормальной к катоду компоненты электрического поля  $E_n$  (с учетом собственного поля пучка). Тогда плотность тока, эмитируемого с катода, может быть найдена по закону Чайлда-Ленгмюра-Блоджетта:

1) плоский катод

$$j_0 = A \frac{E_n^{3/2}}{\delta^{1/2}} \quad (4.2.1)$$

2) сферический катод

$$j_0 = A \frac{\left(\frac{r_a E_n}{\beta(r_a) r_k}\right)^{3/2}}{(\alpha(r_a) r_k)^{1/2}} \quad (4.2.2)$$

где  $r_k$  — радиус кривизны сферического катода:  $r_a = r_k - \delta$ ;  $\alpha(r)$  — функция Ленгмюра [8];  $\beta(r) = -r \frac{\partial \alpha}{\partial r}$ ,  $A = \sqrt{\frac{3e}{2m}} \epsilon_0$ ,  $\epsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость вакуума.

Формулы (4.2.1) и (4.2.2) правильно описывают эмиссию с катода, если на расстоянии  $\delta$  траектории частиц пучка мало отклоняются от нормали к катоду. Это означает, что расстояние  $\delta$  должно быть много меньше радиуса кривизны траекторий вблизи катода. В случае незамагниченного катода радиус кривизны траекторий вблизи катода однозначно связан с неоднородностью плотности эмитируемого тока [9]:

$$\delta \ll R_c = 5 \left| \frac{j_0}{\partial j_0 / \partial l} \right|, \quad (4.2.3)$$

где  $l$  — координата вдоль поверхности катода.

При наличии магнитного поля на катоде, как следует из результатов работы [10], к условию (4.2.3) добавляется еще одно условие:

$$\delta \ll \zeta_0 = \frac{c^2 j_0}{H_0 \omega^2} = 3.65 \cdot 10^6 \frac{j_0 (A/cm^2)}{H_0^3 (Гс)} (см) \quad (4.2.4)$$

где  $j_0$  — плотность тока на катоде;  $H_0$  — магнитное поле на катоде;  $\omega = \mu_0 \frac{e H_0}{m}$  — циклотронная частота.

Формулы (4.2.1) — (4.2.4) верны только в непосредственной близости от катода, поэтому на величину  $\delta$  накладывается дополнительное требование малости по сравнению с эффективным зазором анод-катод, принятом при задании начального распределения:

$$\delta \ll D_0. \quad (4.2.5)$$

Соотношения (4.2.3) — (4.2.5) полностью определяют ограничения, накладываемые сверху на величину расстояния от катода, на котором плотность тока с хорошей точностью можно описать моделью плоского или сферического диода. На этом расстоянии можно также пренебречь кривизной траекторий частиц пучка и считать их направленными по нормали к катоду, а распределение плотности заряда вдоль траекторий совпадающим с распределением в диоде. Таким образом определяются все параметры пучка в пределах расстояния  $\delta$  от катода. Энергия частиц после пролета этого расстояния равна:

$$W_0 = \frac{3}{4} e E_n \delta, \quad (4.2.6)$$

а скорости направлены вдоль вектора электрического поля. Дальнейшее интегрирование уравнений движения частиц пучка проводится численно.

#### 4.3. Квазиламинарная модель трубок тока

Наиболее адекватной для численного описания стационарных бесстолкновительных пучков заряженных частиц является модель трубок тока [11]. Существует несколько разновидностей этой модели, отличающихся как разбиением потока заряженных частиц на отдельные трубки тока, так и распределением заряда и тока внутри одной трубки.



В данной работе для описания реальных потоков заряженных частиц в электронных пушках разработана и используется квазиламинарная модель трубок тока. В этой модели трубки тока формируются следующим образом. Контур катода разбивается на интервалы  $h_i$ ,  $i=1, \dots, N$ , где  $N$  — число трубок тока. Траектории частиц выпускаются из крайних точек интервалов, всего  $N+1$  траектория. Каждые две соседние траектории образуют одну трубку тока. Основной особенностью данной модели является конечный размер трубки тока, который определяется расстоянием между этими двумя траекториями независимо от их дальнейшего взаимного расположения. В случае неламинарного потока граничные траектории различных трубок тока могут взаимно пересекаться.

Для определения тока, переносимого каждой из трубок, используется линейная интерполяция плотности тока на катоде. В результате получаем:

а) плоский катод

$$\Delta I_i = \pi h_i \left[ (j_i + j_{i+1}) R_i + \frac{i+2j_{i+1}}{3} h_i \sin \beta \right] \quad (4.3.1)$$

б) сферический катод

$$\Delta I_i = 2\pi R_c \operatorname{sign}(\Delta\alpha) \left\{ \frac{j_1 + j_2}{2} R_0 \Delta\alpha + \left[ j_i \cos \alpha_i - j_{i+1} \cos \alpha_{i+1} + \frac{j_{i+1} - j_i}{\Delta\alpha} (\sin \alpha_{i+1} - \sin \alpha_i) \right] \cdot R_c \right\}, \quad (4.3.2)$$

где  $j_i$  и  $R_i$  — плотность тока и радиус в точке старта  $i$ -ой траектории;  $\beta$  — угол наклона прямой, образующей контур плоского катода;  $R_0$  и  $R_c$  — радиус центра и радиус кривизны окружности, образующей контур сферического катода;  $\alpha_i$  — угол между осью системы и прямой, соединяющей центр этой окружности с точкой старта  $i$ -ой траектории,  $\Delta\alpha = \alpha_{i+1} - \alpha_i$ ,  $i=1, \dots, N$ .

Траектории частиц находятся численным интегрированием уравнения движения (2.2.2), компоненты которого в аксиально-симметричном случае имеют вид:

$$\frac{dP_r}{dt} = \frac{P_\theta V_\theta}{r} + e \left( E_r + \frac{V_\theta}{c} B_z - \frac{V_z}{c} B_\theta \right),$$

$$\frac{dP_z}{dt} = e \left( E_z + \frac{V_r}{c} B_\theta - \frac{V_\theta}{c} B_r \right),$$

$$\frac{dP_\theta}{dt} = er \left( \frac{V_z}{c} B_r - \frac{V_r}{c} B_z \right), \quad (4.3.3)$$

где  $V_\theta = r\dot{\theta}$ .

Для описания пространственного заряда и тока пучка вводится набор прямоугольных сеток, непрерывно заполняющий предполагаемую область движения пучка в плоскости  $(r, z)$ . Каждая сетка может иметь произвольные размеры и разбиение на прямоугольные ячейки. В пределах одной ячейки сетки плотности заряда и тока считаются постоянными. Набор различных сеток необходим для точного описания сильной неоднородности плотности заряда пучка вблизи катода, а также неоднородностей плотности заряда и тока при сильной компрессии пучка.

Объемный заряд и ток пучка распределяются по ячейкам сетки следующим образом. Расчет траекторий ведется параллельно, так, чтобы они всегда пересекали только один и тот же вертикальный слой ячеек сетки. При этом в каждом слое находятся следующие параметры траекторий:  $R_i^{(1,2)}$  — радиусы влета (1) и вылета (2);  $\sin \alpha_i^{(1,2)}$ ,  $\cos \alpha_i^{(1,2)}$  — синусы и косинусы углов влета и вылета;  $\Delta t_i = t_i^{(2)} - t_i^{(1)}$  — время движения в слое. Границы трубок тока в каждом слое — это цилиндры радиуса

$$R_i = \frac{R_i^{(1)} + R_i^{(2)}}{2}, \quad i=1, \dots, N+1 \quad (4.3.4)$$

Заряд, привнесенный каждой из трубок тока в данный слой, равен

$$Q_i = \Delta I_i \cdot \frac{\Delta t_i + \Delta t_{i+1}}{2}, \quad \text{если } \Delta t_i \cdot \Delta t_{i+1} \neq 0$$

$$Q_i = 0, \quad \text{если } \Delta t_i \cdot \Delta t_{i+1} = 0, \quad i=1, \dots, N \quad (4.3.5)$$

где  $\Delta I_i$  — ток в трубке, определяемый по формулам (4.3.1) или (4.3.2). Компоненты вектора тока в каждой трубке в пределах данного слоя принимаются равными

$$\Delta I_{ri} = \Delta I_i \frac{\sin \alpha_i^{(1)} + \sin \alpha_i^{(2)} + \sin \alpha_{i+1}^{(1)} + \sin \alpha_{i+1}^{(2)}}{4},$$

$$\Delta I_{zi} = \Delta I_i \frac{\cos \alpha_i^{(1)} + \cos \alpha_i^{(2)} + \cos \alpha_{i+1}^{(1)} + \cos \alpha_{i+1}^{(2)}}{4}, \quad (4.3.6)$$

если  $Q_i \neq 0$ , и  $I_{ri} = I_{zi} = 0$ , если  $Q_i = 0$ ,  $i=1, \dots, N$ . Заряды и токи во всех ячейках данного слоя сетки будут равны

$$Q_m = \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{V_i} V_{im}$$

$$m = 1, \dots, M$$

$$\bar{I}_m = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta \bar{I}_i}{V_i} V_{im} \quad (4.3.7)$$

где  $V_i = \pi |R_{i+1}^2 - R_i^2| \cdot \Delta z$  — объем, занимаемый  $i$ -ой трубкой тока в данном слое сетки толщиной  $\Delta z$ ;  $V_{im}$  — объем, занимаемый  $i$ -ой трубкой тока в  $m$ -ой ячейке этого слоя;  $M$  — полное число ячеек в данном слое.

Преимущества описанной квазиламинарной модели, на наш взгляд, состоят в возможности сравнительно малым количеством трубок тока довольно точно описывать как сильно неламинарные пучки, так и пучки с большой компрессией.

#### 4.4. Расчет наведенных пучком потенциалов и полей

При интегрировании уравнений движения (4.3.3) необходимо знать электрические и магнитные поля, в том числе наводимые самим пучком, во всей области движения частиц пучка. Кроме этого, при решении задачи электростатики нужно знать электрические потенциалы и поля, наводимые пучком на поверхностях электродов и диэлектриков, соответственно (см. 3.2.13).

Добавка к электростатическому потенциалу за счет пространственного заряда пучка, согласно уравнению (2.1.4), имеет следующий вид:

$$\varphi_p(\vec{r}_0) = \int_{V_b} \frac{\rho(\vec{r}) dV}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|} \quad (4.4.1)$$

Учитывая аксиальную симметрию задачи и принятое предположение об однородности плотности заряда в пределах одной ячейки сетки, интеграл (4.4.1) может быть записан в виде

$$\varphi_p(\xi) = \sum_{i=1}^M \rho_i \int_{S_i} G(\xi, \eta) dS \quad (4.4.2)$$

где  $\xi = (r_0, z_0)$  — координаты точки наблюдения;  $\eta = (r, z)$  — теку-

щие координаты; функция  $G(\xi, \eta)$  определена формулой (3.1.4);  $\rho_i$  — плотность заряда в  $i$ -ой ячейке,  $S_i$  — ее сечение, а  $M$  — полное количество ячеек во всех сетках.

Электрическое поле пространственного заряда пучка, исходя из формулы (4.4.2), может быть записано в виде

$$\vec{E}_p(\xi) = -\vec{\nabla}_\xi \varphi_p(\xi) = -\sum_{i=1}^M \rho_i \int_{S_i} \vec{\nabla}_\xi G(\xi, \eta) dS \quad (4.4.3)$$

где функция  $\vec{\nabla}_\xi G(\xi, \eta)$  определена формулами (3.1.7) и (3.1.8).

Для магнитного поля пучка, учитывая предположение об однородности плотности тока в пределах одной ячейки сетки, из формул (2.1.7) получим следующее выражение:

$$B_0(\xi) = \sum_{i=1}^M \left[ j_{ri} \int_{S_i} \frac{\partial G}{\partial z_0}(\xi, \eta) dS - j_{zi} \int_{S_i} \frac{\partial G}{\partial r_0}(\xi, \eta) dS \right], \quad (4.4.4)$$

где  $j_{ri}$  и  $j_{zi}$  — компоненты вектора плотности тока в  $i$ -ой ячейке.

Таким образом, наведенные пучком потенциалы и поля выражаются через интегралы вида

$$\varphi_i(\xi) = \int_{S_i} G(\xi, \eta) dS, \quad (4.4.5)$$

$$\vec{E}_i(\xi) = -\int_{S_i} \vec{\nabla}_\xi G(\xi, \eta) dS, \quad (4.4.6)$$

которые представляют собой потенциал и электрическое поле, создаваемые в точке наблюдения зарядом в  $i$ -ой ячейке с единичной плотностью  $\rho_i = 1$ . Аналитического выражения для интегралов (4.4.5) — (4.4.6) в общем случае не существует, поэтому они рассчитываются численно. Отметим, однако, что подынтегральные функции в (4.4.5) — (4.4.6) имеют особенности, если точка наблюдения находится внутри или на границе  $i$ -ой ячейки сетки. Вследствие этого точность численных расчетов резко падает. При расчете интеграла (4.4.5) это происходит, когда электрод пересекает ячейку сетки или касается ее, и требуется найти наводимый на нем зарядом этой ячейки потенциал (например, сферический катод всегда пересекает прямоугольные ячейки сетки). Кроме того, электрические и магнитные поля рассчитываются только в узлах сеток. Поля во всей области движения пучка находятся затем с помощью параболической интерполяции по значениям полей в де-

вяти ближайших узлах сетки. Поэтому набор разных сеток необходим еще и для более точного описания сильно неоднородных полей (например, электрического поля вблизи анодного отверстия). Однако при вычислении электрических и магнитных полей, создаваемых зарядом и током отдельной ячейки сетки в узлах, совпадающих с вершинами этой ячейки, подинтегральная функция в (4.4.6) также имеет особенность.

Для выделения особенностей подинтегральных функций в (4.4.5) — (4.4.6) поступим так же, как и при выделении особенности ядра интегральных уравнений (см. формулу (3.3.1)). Обозначим через  $\tilde{G}(\xi, \eta)$  и  $\tilde{\nabla}_\xi \tilde{G}(\xi, \eta)$  асимптотики подинтегральных функций при  $\eta \rightarrow \xi$ . В данном случае, с точностью до знака, они совпадают с потенциалом и электрическим полем бесконечно тонкой нити с единичной линейной плотностью заряда. Интегралы (4.4.5) — (4.4.6) могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned} \varphi_i(\xi) &= \int_{S_i} [G(\xi, \eta) - \tilde{G}(\xi, \eta)] dS + \int_{S_i} \tilde{G}(\xi, \eta) dS, \\ -\vec{E}_i(\xi) &= \int_{S_i} [\tilde{\nabla}_\xi G(\xi, \eta) - \tilde{\nabla}_\xi \tilde{G}(\xi, \eta)] dS + \int_{S_i} \tilde{\nabla}_\xi \tilde{G}(\xi, \eta) dS. \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Первые интегралы в (4.4.7) не имеют особенностей и с хорошей точностью считаются численно, а вторые вычисляются аналитически (см. Приложение 4). Описанная методика выделения особенностей дает плохую точность, если точка наблюдения находится на оси пушки. Однако в этом случае интегралы (4.4.5) — (4.4.6) могут быть вычислены аналитически. Результаты этих вычислений также приведены в Приложении 4.

## 5. ТЕСТЫ И ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОННЫХ ПУШЕК

Описанные выше алгоритмы были реализованы в виде комплекса программ SAM на мини-ЭВМ «Электроника-79». В состав комплекса входят следующие программы:

1. AXID — ввод геометрии, данных.
2. AXIM — расчет матриц.
3. AXIS — решение системы линейных уравнений.
4. AXIR — решение задачи Робэна.
5. AXIC — расчет межэлектродных емкостей.
6. AXIF — расчет потенциалов, полей и траекторий частиц без

учета объемного заряда.

7. AXIG — проведение итераций по объемному заряду (расчет пушек).

В результате комплекс программ SAM позволяет решать широкий круг задач электростатики и линейной магнитостатики. Однако для краткости ниже приводятся тесты и примеры расчета только электронных пушек

### 5.1. Тестовые расчеты электронных пушек

Первым тестом послужил расчет аксиально-симметричной пушки Пирса с плоским катодом. Зазор между анодом и катодом пушки был выбран равным диаметру катода (микропервеанс  $P_{\mu 0} = 1.83 \text{ мкА/В}^{3/2}$ ). Геометрия электродов пушки была найдена численно по методу, описанному в работе [8], и приведена на рис. 12. Для описания объемного заряда пучка использовались три сетки при трех вариантах разбиения каждой из сеток на ячейки. На рис. 12 показано расположение узлов сеток в исходном варианте с общим числом ячеек в сетках  $N_{cell} = 32$ . Два других варианта отличались от исходного увеличением числа ячеек в каждой сетке по радиусу и вдоль оси пушки в два и три раза. Расстояние от катода, на котором пучок описывался моделью плоского диода (см. раздел 4.2), во всех трех вариантах было одинаковым и равным двум продольным размерам ячейки прикатодной сетки в исходном варианте. Результаты расчетов всех трех вариантов сведены в табл. 1, где указаны полученный в расчетах микропервеанс пушки и его отличие от теоретического, неоднородность плотности тока на катоде, а также максимальный угол наклона траекторий ( $j_0$  — теоретическое значение плотности тока).

Таблица 1

N вар.	$N_{cell}$	$P_{\mu}$	$\frac{P_{\mu} - P_{\mu 0}}{P_{\mu 0}}, \%$	$\frac{i_{max} - i_{min}}{j_0}, \%$	$\alpha_{max}$ (град)
1	32	1,868	2,1	1,2	3,5
2	128	1,846	0,9	0,5	1,8
3	288	1,840	0,5	0,5	2,2

Как видно из табл. 1, ошибки расчета во всех вариантах достаточно малы и систематически уменьшаются с увеличением числа

ячеек в сетках. Особо отметим хорошую устойчивость решения даже при очень грубой сетке. Это связано с равномерным «размазыванием» заряда по ячейкам сеток, выделением особенностей при расчете поля объемного заряда пучка, а также с использованием параболической интерполяции для описания полного электрического поля. На рис. 12 приведены полученные в исходном варианте эквипотенциали и распределение поля на оси пушки, а также траектории частиц, распределение плотности тока и фазовый портрет пучка на выходе из пушки.

В качестве еще одного теста был проведен расчет пушки Пирса со сферическим катодом. Угол сходимости электронного пучка в пушке составлял  $40^\circ$  при отношении радиусов кривизны катода и анода  $r_k/r_a=2$  (микропервеанс  $P_{\mu 0}=4.575$  мкА/В<sup>3/2</sup>). На рис. 13 приведена принятая в расчетах геометрия электродов пушки, найденная методом Харкера [12].

Объемный заряд пучка описывался двумя сетками и рассматривалось три варианта разбиения сеток на ячейки. В исходном варианте общее число ячеек в двух сетках равнялось  $N_{cell}=30$ . Два других варианта отличались от исходного увеличением числа ячеек в каждой сетке по радиусу и вдоль оси пушки в два и три раза.

Первая серия расчетов была проведена при фиксированном расстоянии  $\delta$  от катода, на котором пучок описывался моделью сферического диода (см. раздел 4.2). Во всех трех вариантах величина  $\delta$  была выбрана равной максимальному размеру ячейки  $h=\max(\Delta r, \Delta z)$  прикатодной сетки в исходном варианте. Результаты расчетов сведены в таблицу 2, где  $\Delta\alpha_{\max}$  максимальное отличие полученного в расчетах угла наклона крайней траектории пучка от угла сходимости.

Таблица 2

$N$ вар.	$N_{cell}$	$\frac{\delta}{h}$	$P_{\mu}$	$\frac{P_{\mu}-P_{\mu 0}}{P_{\mu 0}}, \%$	$\frac{i_{\max}-i_{\min}}{j_0}, \%$	$\Delta\alpha_{\max}$ (мрад)
1	30	1	4.610	0.76	12.6	5.4
2	120	2	4.603	0.61	3.4	3.2
3	270	3	4.579	0.08	1.9	2.2

Результаты расчетов для второго варианта отражены также на рис. 13, где можно видеть расположение узлов сеток, расчетные эквипотенциали, выпущенные из узлов сеток на оси пушки, рас-

пределение электрического поля вдоль оси пушки и траектории частиц. О скорости сходимости расчетных параметров пушки к теоретическим с увеличением числа ячеек в сетках можно судить по приведенным на рис. 14 кривым распределения плотности тока на катоде пушки, нормированным на точное значение плотности тока  $j_0$ .

Для второго варианта разбиения сеток была также исследована зависимость расчетных параметров пушки от отношения  $\delta/h$ , где  $h$  — максимальный размер ячейки прикатодной сетки в этом варианте. Результаты расчетов приведены на рис. 15 и в табл. 3.

Таблица 3

$\frac{\delta}{h}$	$P_{\mu}$	$\frac{P_{\mu}-P_{\mu 0}}{P_{\mu 0}}, \%$	$\frac{i_{\max}-i_{\min}}{j_0}, \%$	$\Delta\alpha_{\max}$ (мрад)
1	4.527	-1.06	13.5	5.5
2	4.603	0.61	3.4	3.2
3	4.593	0.38	1.2	2.2
4	4.591	0.34	0.6	1.7

Из результатов проведенных тестов следует, что для обеспечения высокой точности расчетов необходимо выполнение условия  $\delta/h \geq 2$ , где  $h$  — продольный размер ячейки прикатодной сетки в случае плоского катода и максимальный размер ячейки прикатодной сетки для катода сферической формы. Это единственное ограничение, накладываемое снизу на величину параметра  $\delta$ .

## 5.2 Примеры расчета реальных электронных пушек

В качестве такого примера можно привести расчет электронной пушки нового СВЧ-генератора «Магникон» [13]. Принятая в расчетах геометрия катодного узла, прикатодных электродов и анода пушки приведена на рис. 16. Для описания объемного заряда пучка использовалось 7 сеток с общим числом ячеек  $N_{cell}=312$ .

Одной из задач расчетов было получение зависимости первеанса пушки от зазора между анодом и катодом. Результаты расчетов и измерений при ускоряющем напряжении 280 кВ приведены на рис. 17. Результаты измерений предоставлены Козыревым Е.В. Отличие экспериментальных результатов от расчетной кривой объясняется точностью изготовления и выставки отдельных узлов

пушки, а также их тепловыми уходами. Кроме этого, в результате расчетов были найдены траектории частиц пучка, его фазовый портрет и распределение плотности тока на выходе из пушки (см. рис. 16). На этом же рисунке приведены расчетные эквипотенциали в области движения пучка и распределение электрического поля на оси пушки.

Другим примером может служить расчет пушки со сферическим катодом и микропервеансом  $P_{\mu} = 1.9 \text{ мкА/В}^{3/2}$ . Геометрия электродов пушки и результаты измерений приведены в работе [14]. Особенностью этой пушки является довольно сильный тепловой уход анода за счет прогибания анодной пластины в сторону катода. Поэтому в расчетах подбирался такой зазор между анодом и катодом, который обеспечивал бы измеренный в эксперименте первеанс пушки. При этом сравнивались полученное в расчетах и измеренное экспериментально распределения плотности тока в пучке на выходе из пушки (см. рис. 18). Отличие расчетного и экспериментального распределений плотности тока объясняется влиянием тепловых скоростей электронов, которые в расчетах не учитывались. В то же время расчетный радиус пучка на выходе из пушки довольно хорошо совпадает с измеренным в эксперименте. Коэффициент компрессии пучка по площади в данном примере составляет  $C_s = 16$ .

На рис. 19 показаны принятая в расчетах геометрия электродов пушки и положение коллектора, с помощью которого измерялось распределение плотности тока в пучке. Там же приведены расчетные эквипотенциали, выходящие из осевых узлов сеток (общее число ячеек в пяти сетках  $N_{cell} = 376$ ), распределение электрического поля вдоль оси пушки, траектории частиц пучка, а также его фазовый портрет и распределение плотности тока на коллекторе пушки.

В заключение авторы выражают благодарность В.Я. Иванову и Г.И. Кузнецову за полезные обсуждения, Д.Г. Мякишеву за участие в программной реализации разработанных алгоритмов и проведение тестовых расчетов.

Асимптотика ядра при  $\eta \rightarrow \xi_j$  имеет следующий вид:

а) на металлической поверхности

$$\bar{R}(\xi_j, \bar{\eta}) = (2 + \varepsilon \sin \alpha) \ln \frac{8}{\varepsilon} + \varepsilon \sin \alpha + O(\varepsilon^2); \quad (\text{П1.1})$$

б) на границе раздела диэлектриков и магнетиков

$$\bar{R}(\xi_j, \bar{\eta}) = \frac{\cos \alpha}{r_j} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2} \sin \alpha \right) \ln \frac{8}{\varepsilon} \right] + O(\varepsilon^2), \quad (\text{П1.2})$$

где

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{(r_j - \bar{r})^2 + (z_j - \bar{z})^2}}{r_j}, \quad (\text{П1.3})$$

$$\sin \alpha = \frac{r_j - \bar{r}}{\sqrt{(r_j - \bar{r})^2 + (z_j - \bar{z})^2}}; \quad (\text{П1.4})$$

$\bar{r}$ ,  $\bar{z}$  — координаты на касательной к контуру электрода, диэлектрика или магнетика в точке  $\xi_j = (r_j, z_j)$ . Для вычисления добавочных интегралов в (3.3.1) введем новую переменную  $x = (l - l_{j-1})/h_j$ , тогда

$$J_{jj}^m = \int_{l_{j-1}}^{l_j} \psi_m(l) \bar{R}(\xi_j, \bar{\eta}(l)) dl = h_j \int_0^1 \psi_m(x) \bar{R}(\xi_j, \bar{\eta}(x)) dx, \quad (\text{П1.5})$$

где  $\psi_1 = (1-x)^3$ ,  $\psi_2 = x^3$ ,  $\psi_3 = 1-x$ ,  $\psi_4 = x$ .

Подставляя в (П1.5) асимптотики (П1.1) — (П1.2), и учитывая, что  $\varepsilon = \frac{h_j}{r_j}(1-x)$ , после громоздких, но простых вычислений получим:

а) на металлической поверхности

$$J_{jj}^1 = h_j \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{b}{20} \right) \ln \frac{8}{a} + \frac{137}{1200} b + \frac{25}{24} \right],$$

$$J_{jj}^2 = h_j \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{b}{5} \right) \ln \frac{8}{a} + \frac{6}{25} b + \frac{1}{8} \right],$$

$$J_{jj}^3 = h_j \left[ \left( 1 + \frac{b}{6} \right) \ln \frac{8}{a} + \frac{11}{36} b + \frac{3}{2} \right],$$

$$J_{ii}^4 = h_j \left[ \left(1 + \frac{b}{3}\right) \ln \frac{8}{a} + \frac{4}{9}b + \frac{1}{2} \right]; \quad (\text{П1.6})$$

б) на границе раздела диэлектриков или магнетиков

$$\begin{aligned} J_{ii}^1 &= c \left[ \left(\frac{1}{4} + \frac{b}{40}\right) \ln \frac{8}{a} + \frac{77}{2400}b + \frac{13}{48} \right], \\ J_{ii}^2 &= c \left[ \left(\frac{1}{4} + \frac{b}{10}\right) \ln \frac{8}{a} + \frac{b}{50} - \frac{3}{16} \right], \\ J_{ii}^3 &= c \left[ \left(\frac{1}{2} + \frac{b}{12}\right) \ln \frac{8}{a} + \frac{5}{72}b + \frac{1}{4} \right], \\ J_{ii}^4 &= c \left[ \left(\frac{1}{2} + \frac{b}{6}\right) \ln \frac{8}{a} + \frac{b}{18} - \frac{1}{4} \right], \end{aligned} \quad (\text{П1.7})$$

где  $a = h_j/r_j$ ,  $b = a \sin \alpha$ ;  $c = -a \cos \alpha$ .

Если точка наблюдения совпадает с началом  $\int$  резка интегрирования, т. е.  $i = j - 1$ , то интегралы  $J_{j-1,j}^m$  совпадут с интегралами  $J_{jj}^m$  с точностью до замены  $r_j$  на  $r_{j-1}$  (изменится также угол касательной) и переиндексации  $1 \leftrightarrow 2$  и  $3 \leftrightarrow 4$ .

## Приложение 2

Интегралы (3.3.4) имеют следующий вид:

$$I_{ij}^m = h_j \int_0^1 a_{1j}(x) a_{2j}(x) \psi_m(x) R_{ij}(x) dx, \quad (\text{П2.1})$$

где

$$\begin{aligned} a_{1j}(x) &= \left( \frac{N+2\delta}{j-2+\delta+x} \right)^{1-\tau_1}, \\ a_{2j}(x) &= \left( \frac{N+2\delta}{N-j+1+\delta-x} \right)^{1-\tau_2}, \end{aligned} \quad (\text{П2.2})$$

$\delta = d/h$  (на металле  $\delta \equiv 0$ );  $N$  — число шагов сплайна на отрезке  $0 \leq l \leq L_{ik}$ ;  $h = \text{const}$  — шаг сплайна;  $\psi_m(x)$  — весовые функции сплайна (см. Приложение 1);

$$R_{ij}(x) = \begin{cases} G(\xi_i, \eta(x)) & \text{— на металле} \\ \frac{\partial G}{\partial n_{ij}}(\xi_i, \eta(x)) & \text{— на диэлектрике} \\ & \text{и на магнетике} \end{cases} \quad (\text{П2.3})$$

$l_{j-1} \leq \eta(x) \leq l_j$  при  $0 \leq x \leq 1$ .

В формуле (3.4.7) второй интеграл будет равен ( $\delta \equiv 0$ )

$$\int_0^1 P_j(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{N}{x}\right)^{1-\tau} = \frac{N^{1-\tau}}{\tau}, \quad (\text{П2.4})$$

где  $\tau = \tau_1$  при  $j = 2$  и  $\tau = \tau_2$  при  $j = N$ .

В формуле (3.4.9) второй интеграл будет иметь вид

$$J_{ij}^m = \int_0^1 P_j(x) Q_m(x) \tilde{R}_{ij}(x) dx = h \int_0^1 \left(\frac{N}{x}\right)^{1-\tau} \psi_m(x) \tilde{R}_{ij}(x) dx, \quad (\text{П2.5})$$

где  $\tilde{R}_{ij}(x) = \tilde{R}(\xi_i, \tilde{\eta}(x))$  (см. Приложение 1). Интегралы (П2.5) совпадают при  $j = 2$  и  $j = N$  с точностью до замены  $\tau_1$  на  $\tau_2$  и весовых функций с  $m = 1$  и  $m = 3$  на  $m = 2$  и  $m = 4$  и наоборот. Поэтому выпишем результаты только для  $j = N$ :

$$\begin{aligned} J_{NN}^1 &= N^{1-\tau} h \left[ (2a_1 + a_2 b) \ln \frac{8}{a} + (a_{22} + a_2) b + 2a_{12} \right], \\ J_{NN}^2 &= N^{1-\tau} h \left[ \left( \frac{2}{\tau+3} + \frac{b}{\tau+4} \right) \ln \frac{8}{a} + \frac{\tau+5}{(\tau+4)^2} b + \frac{2}{(\tau+3)^2} \right], \\ J_{NN}^3 &= N^{1-\tau} h \left[ (2b_1 + b_2 b) \ln \frac{8}{a} + (b_{22} + b_2) b + 2b_{12} \right], \\ J_{NN}^4 &= N^{1-\tau} h \left[ \left( \frac{2}{\tau+1} + \frac{b}{\tau+2} \right) \ln \frac{8}{a} + \frac{\tau+3}{(\tau+2)^2} b + \frac{2}{(\tau+1)^2} \right], \end{aligned} \quad (\text{П2.6})$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a &= \frac{h}{r_N}, \quad b = a \sin \alpha, \\ a_1 &= \frac{1}{\tau} - \frac{3}{\tau+1} + \frac{3}{\tau+2} - \frac{1}{\tau+3}, \\ a_{12} &= \frac{1}{\tau^2} - \frac{3}{(\tau+1)^2} + \frac{3}{(\tau+2)^2} - \frac{1}{(\tau+3)^2}, \\ a_2 &= \frac{1}{\tau+1} - \frac{3}{\tau+2} + \frac{3}{\tau+3} - \frac{1}{\tau+4}, \\ a_{22} &= \frac{1}{(\tau+1)^2} - \frac{3}{(\tau+2)^2} + \frac{3}{(\tau+3)^2} - \frac{1}{(\tau+4)^2}, \end{aligned}$$

$$b_1 = \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau+1},$$

$$b_{12} = \frac{1}{\tau^2} - \frac{1}{(\tau+1)^2},$$

$$b_2 = \frac{1}{\tau+1} - \frac{1}{\tau+2},$$

$$b_{22} = \frac{1}{(\tau+1)^2} - \frac{1}{(\tau+2)^2}, \quad (\text{П2.7})$$

Легко видеть, что при  $\tau=1$  интегралы (П2.6) совпадают с интегралами (П1.6) из Приложения 1.

В формуле (3.4.10) второй интеграл совпадает с интегралом (П2.4), а третий имеет следующий вид:

$$\int_0^1 \tilde{R}_j(x) dx = \int_0^1 \left[ \left( 2 + x \frac{h_j}{r_i} \sin \alpha \right) \ln \frac{8r_i}{h_j x} + x \frac{h_j}{r_i} \sin \alpha \right] dx,$$

Обозначая  $a = h_j/r_i$ ,  $b = a \sin \alpha$ , получим

$$\int_0^1 \tilde{R}_j(x) dx = \left( 2 + \frac{b}{2} \right) \ln \frac{8}{a} + \frac{b}{2} + \frac{5}{4}. \quad (\text{П2.8})$$

Добавочные интегралы в формулах (3.4.14) — (3.4.15) совпадают при  $j=2$  и  $j=N$  с точностью до замены  $\tau_1$  на  $\tau_2$ . Поэтому приведем результаты только для  $j=N$ :

$$\int_1^{1+\delta} P_N(x) dx = \int_1^{1+\delta} \left( \frac{N+2\delta}{1+\delta-x} \right)^{1-\tau} dx = \left( \frac{N+2\delta}{\delta} \right)^{1-\tau} \frac{\delta}{\tau}, \quad (\text{П2.9})$$

$$\begin{aligned} & \int_1^{1+\delta} P_N(x) \tilde{R}_N(x) dx = \\ & = \left( \frac{N+2\delta}{\delta} \right)^{1-\tau} d \left[ \left( \frac{2}{\tau} + \frac{a}{\tau+1} \right) \ln \frac{8r_i}{d} + \frac{\tau+2}{(\tau+1)^2} a + \frac{2}{\tau^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{П2.10})$$

Здесь  $d = \delta h$  и  $a = (d/r_i) \sin \alpha$ .

В формуле (3.4.16) второй интеграл совпадает с интегралом (П2.9), а третий с точностью до угла касательной и замены  $\tau_1$  на  $\tau_2$  совпадает при  $j=2$  и  $j=N$ . Выпишем результат при  $j=N$ :

$$\int_1^{1+\delta} \tilde{R}_{NN}(x) dx = -\delta \frac{\cos \alpha}{r_N} \left[ \left( 1 + \frac{a}{4} \right) \ln \frac{8r_N}{d} + \frac{a}{4} \right], \quad (\text{П2.11})$$

где также  $d = \delta h$  и  $a = (d/r_N) \sin \alpha$ .

### Приложение 3

Уравнение (3.6.4) отличается от уравнения (3.1.3) слагаемым вида

$$\Phi(\xi) = \oint_{L_m} \sigma(\eta) \left[ \frac{1}{S_m} \oint_{L_m} \frac{\partial G}{\partial n_\xi}(\xi, \zeta) dl' \right] dl. \quad (\text{П3.1})$$

которое зависит только от координаты точки наблюдения и, следовательно, может быть представлено в виде, аналогичном (3.2.14):

$$\Phi_i = \Phi(\xi_i) = \sum_{j=1}^{N_m} H_{ij} \tilde{\sigma}_j, \quad i=1, \dots, N_m, \quad (\text{П3.2})$$

где  $\tilde{\sigma}_j$  с точностью до множителей особенностей совпадает с плотностью магнитных зарядов в узлах, а  $H_{ij}$  — регуляризирующая поправка к матрице  $F_{ij}$  (3.2.14).

Вычислим сначала интеграл, стоящий в квадратных скобках в (П3.1):

$$A_i = \frac{1}{S_m} \oint_{L_m} \frac{\partial G}{\partial n_{\xi_i}}(\xi_i, \zeta) dl', \quad i=1, \dots, N_m. \quad (\text{П3.3})$$

При переходе от уравнения (3.1.3) к (3.2.14) считался интеграл вида:

$$\oint_{L_m} \sigma(\eta) \frac{\partial G}{\partial n_{\xi_i}}(\xi_i, \eta) dl = \sum_{j=1}^{N_m} C_{ij}^* \tilde{\sigma}_j, \quad i=1, \dots, N_m. \quad (\text{П3.4})$$

Он совпадает с интегралом (П3.3), если положить  $\sigma(\eta) \equiv 1$  или:

$$\sigma_j = a_1(l_j) a_2(l_j) \tilde{\sigma}_j = 1, \quad (\text{П3.5})$$

где  $a_1, a_2$  — множители особенностей (3.4.12).

С учетом (П3.5) и (П3.4) из (П3.3) получим

$$A_i = \frac{1}{S_m} \sum_{j=1}^{N_m} C_{ij}^* \frac{1}{a_1(l_j) a_2(l_j)}, \quad i=1, \dots, N_m. \quad (\text{П3.6})$$

Остается еще вычислить интеграл вида

$$\oint_{L_m} \sigma(\eta) dl = \sum_{j=1}^{N_m} B_j \tilde{\sigma}_j, \quad (\text{П3.7})$$

где  $B_j$  — строка матрицы  $C_{ij}^*$  (П3.4) с  $\frac{\partial G}{\partial n_{\xi_j}}(\xi_i, \eta) \equiv 1$ . Тогда из (П3.1) и (П3.2) с учетом (П3.6) и (П3.7) получим окончательное выражение для коэффициентов регуляризирующей матрицы:

$$H_{ij} = A_i B_j, \quad (i, j=1, \dots, N_m). \quad (\text{П3.8})$$

#### Приложение 4

Асимптотика подынтегральных функций в (4.4.7) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\xi, \eta) &= -\ln |(r_0 - r)^2 + (z_0 - z)^2|, \\ \frac{\partial \tilde{G}}{\partial r_0}(\xi, \eta) &= -\frac{2(r_0 - r)}{(r_0 - r)^2 + (z_0 - z)^2}, \\ \frac{\partial \tilde{G}}{\partial z_0}(\xi, \eta) &= -\frac{2(z_0 - z)}{(r_0 - r)^2 + (z_0 - z)^2}. \end{aligned} \quad (\text{П4.1})$$

Обозначим  $x = z_0 - z$ ,  $y = r_0 - r$ . Тогда добавочные интегралы в (4.4.7) будут равны

$$\begin{aligned} \int_{S_i} \tilde{G}(\xi, \eta) dS &= xy \ln(x^2 + y^2) - 3xy + 2x^2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + (x^2 + y^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \Big|_{S_i}, \\ \int_{S_i} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial r_0}(\xi, \eta) dS &= -x \ln(x^2 + y^2) - 2y \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \Big|_{S_i}, \\ \int_{S_i} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial z_0}(\xi, \eta) dS &= -y \ln(x^2 + y^2) - 2x \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \Big|_{S_i}. \end{aligned} \quad (\text{П4.2})$$

В случае  $r_0 = 0$  интегралы (4.4.5) — (4.4.6) равны:

$$\int_{S_i} G(\xi, \eta) dS = \frac{1}{2} (x \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 \ln |x \sqrt{x^2 + y^2}|) \Big|_{S_i},$$

$$\int_{S_i} \frac{\partial G}{\partial r_0}(\xi, \eta) dS = 0,$$

$$\int_{S_i} \frac{\partial G}{\partial z_0}(\xi, \eta) dS = \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{sign}(z_c - z_0) \Big|_{S_i}, \quad (\text{П4.3})$$

где  $z_c$  — координата центра ячейки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Астрелин В.Г., Иванов В.Я. Пакет программ для расчета характеристик интенсивных пучков релятивистских заряженных частиц. — Автометрия, 1980, № 3.
2. Блейвас В.И., Ильин В.П., Свешников В.М., Голубцов В.И., Самошина В.П., Попова Г.А. Комплекс программ для решения на ЭЦВМ «БЭСМ-6» широкого класса задач статической электроники (компилирующая система КСИ-БЭСМ-6). — В сб.: Методы расчета электронно-оптических систем, ч.2. Труды IV Всесоюзного семинара, Новосибирск, 1973.
3. Иванов В.Я. Автоматизация машинного проектирования приборов электроники. — Препринт ВЦ СОАН СССР, 1977, № 40.
4. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974.
5. Тозони О.В. Метод вторичных источников в электротехнике. М.: Энергия, 1975.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
7. Кирьяков А.М., Попова В.А., Шнеерсон Г.А. Расчет напряженности поля вблизи кромки электрода в неоднородной среде. — Известия Академии Наук СССР, Энергетика и транспорт, 1978, № 5.
8. Radley D.E. The Theory of the Pierce Type Electron Gun. J. Electron and Control, 1958, N 2.
9. Кирштейн П.Т., Кайно Г.С., Уотерс У.Е. Формирование электронных пучков. М.: Мир, 1970.
10. Рютов Д.Д. Об угловых характеристиках электронного пучка, получаемого в бесфольговом диоде. — Препринт ИЯФ 83-146, 1983.
11. Рошаль А.С. Моделирование заряженных пучков. М.: Атомиздат, 1979.
12. Harker K.J. Solution of the Cauchy Problem for Laplace's Equation in Axially Symmetric Systems. J. of Math. Physics, 1963, N 7.
13. Белов А.Н., Карлинер М.М. и др. Магникон — новый СВЧ-генератор для ускорителей. Аннотации докладов на XIII Международной конференции по ускорителям высоких энергий. Новосибирск, 1986.
14. Алямовский И.В. Электронные пучки и электронные пушки. М.: Советское радио, 1966.



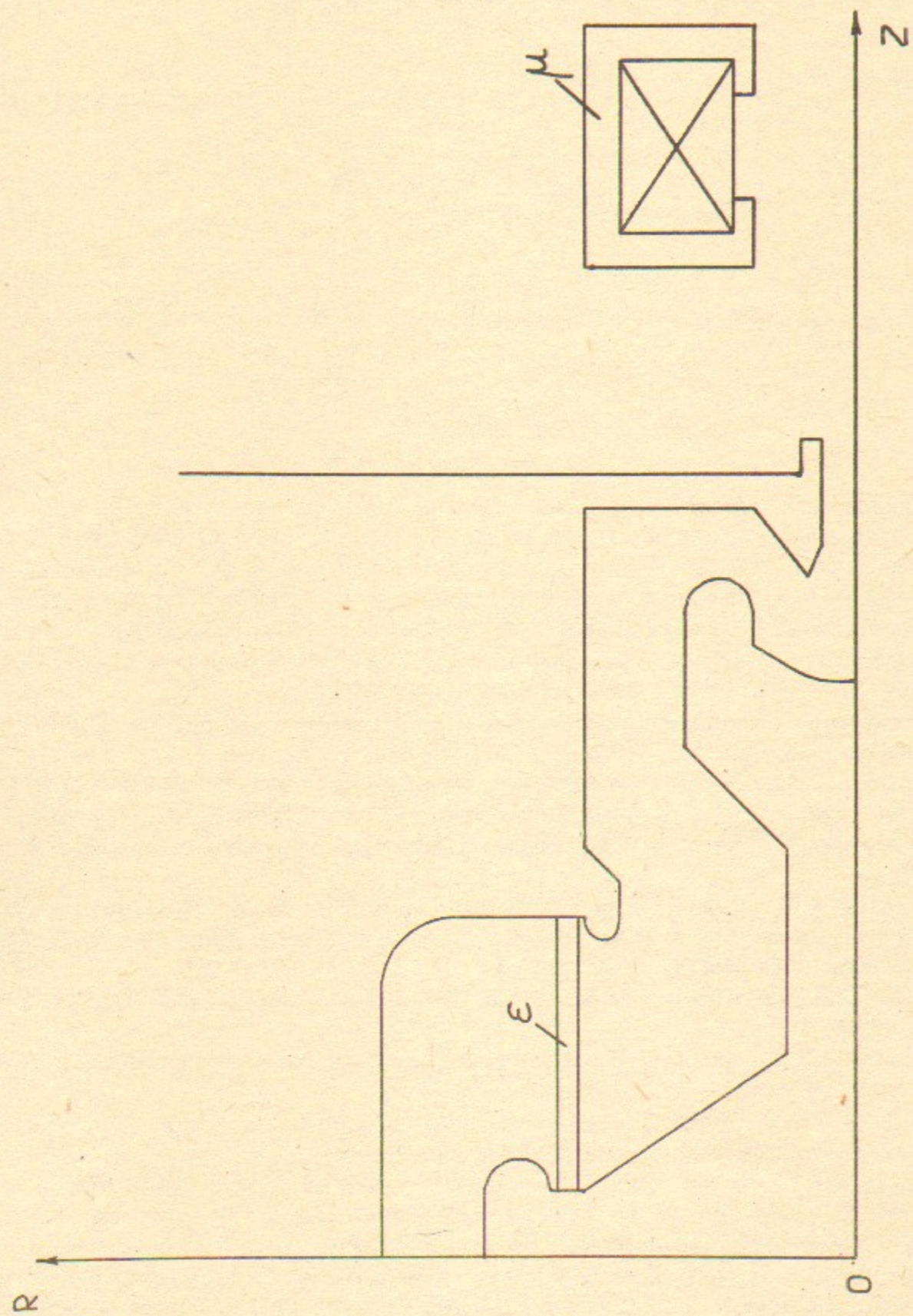


Рис. 1. Общий вид электронно-оптической системы.

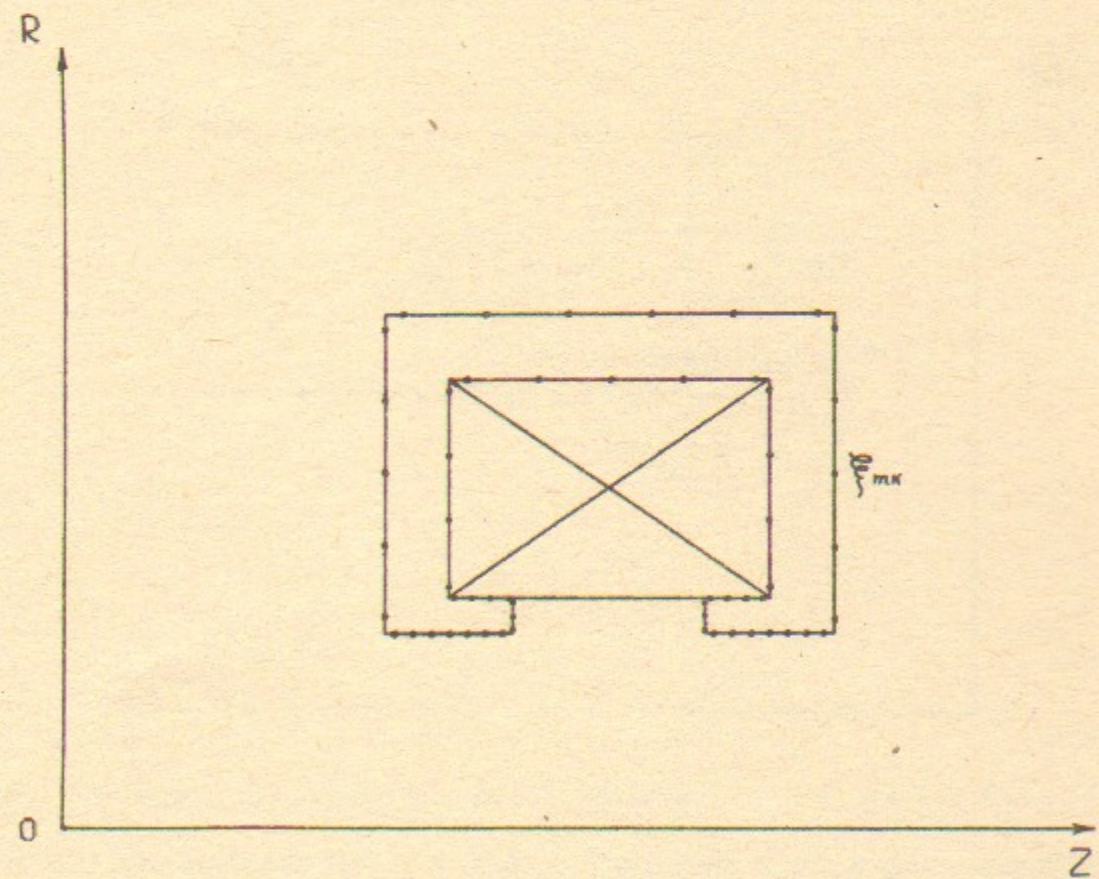
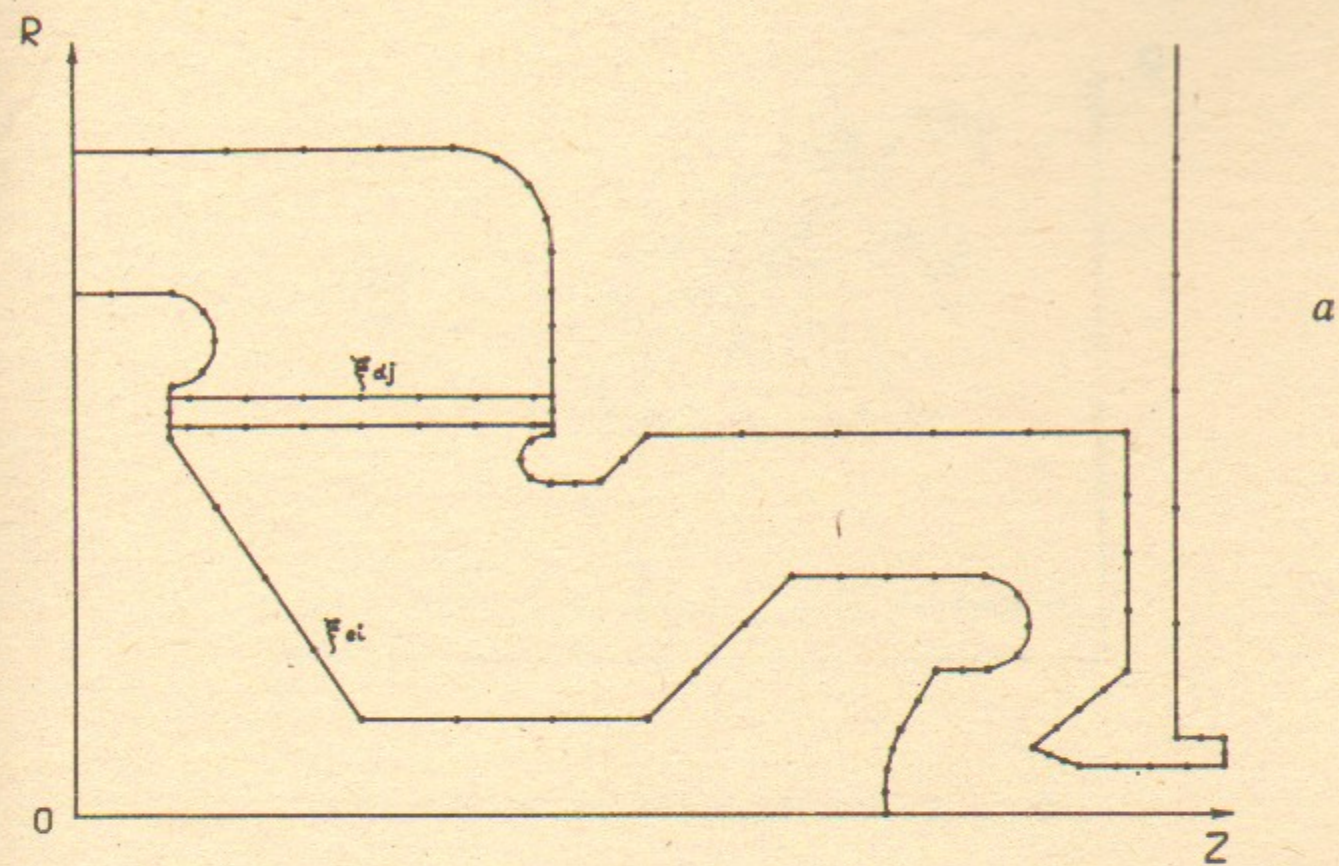


Рис. 2. Расположение точек коллокации на поверхностях:  
а — электродов и изоляторов; б — магнетиков.

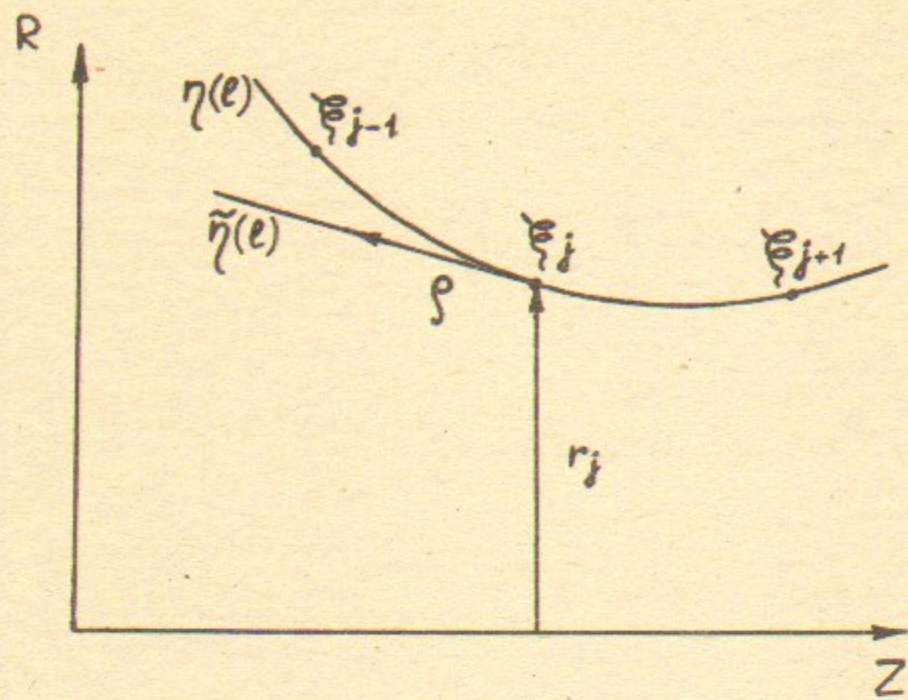


Рис. 3. Касательная к контуру интегрирования.

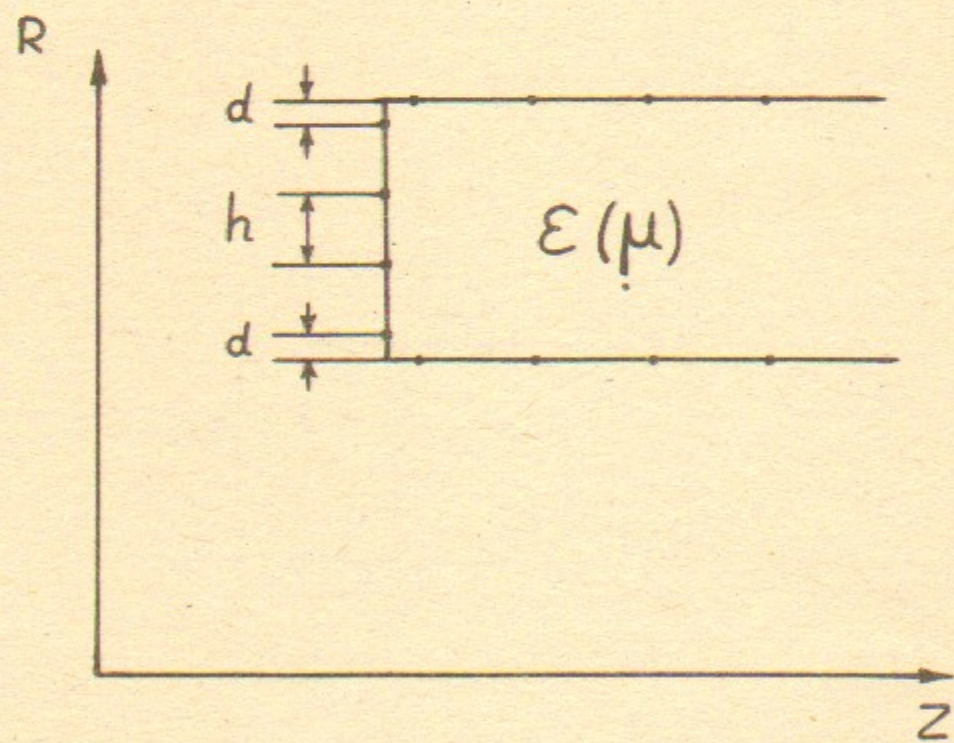


Рис. 4. Расположение точек коллокации вблизи углов диэлектрика (магнетика).

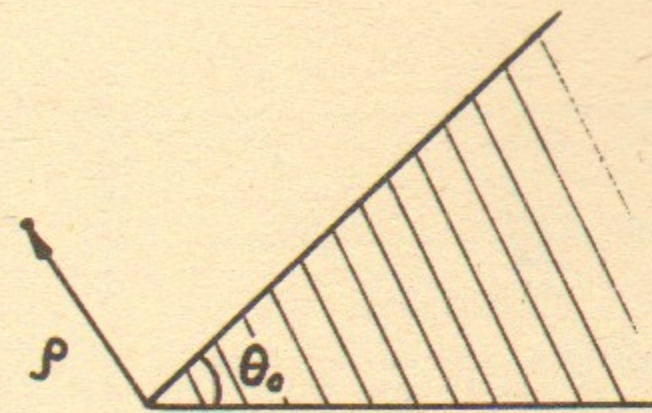


Рис. 5. Металлический клин с углом раствора  $\theta_0$ .

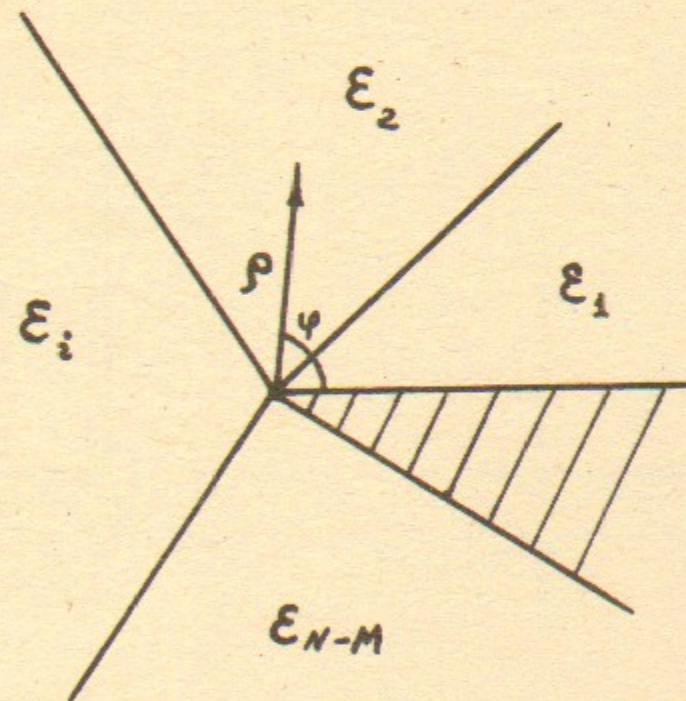


Рис. 6. Точка стыковки нескольких диэлектрических сред и металлов.

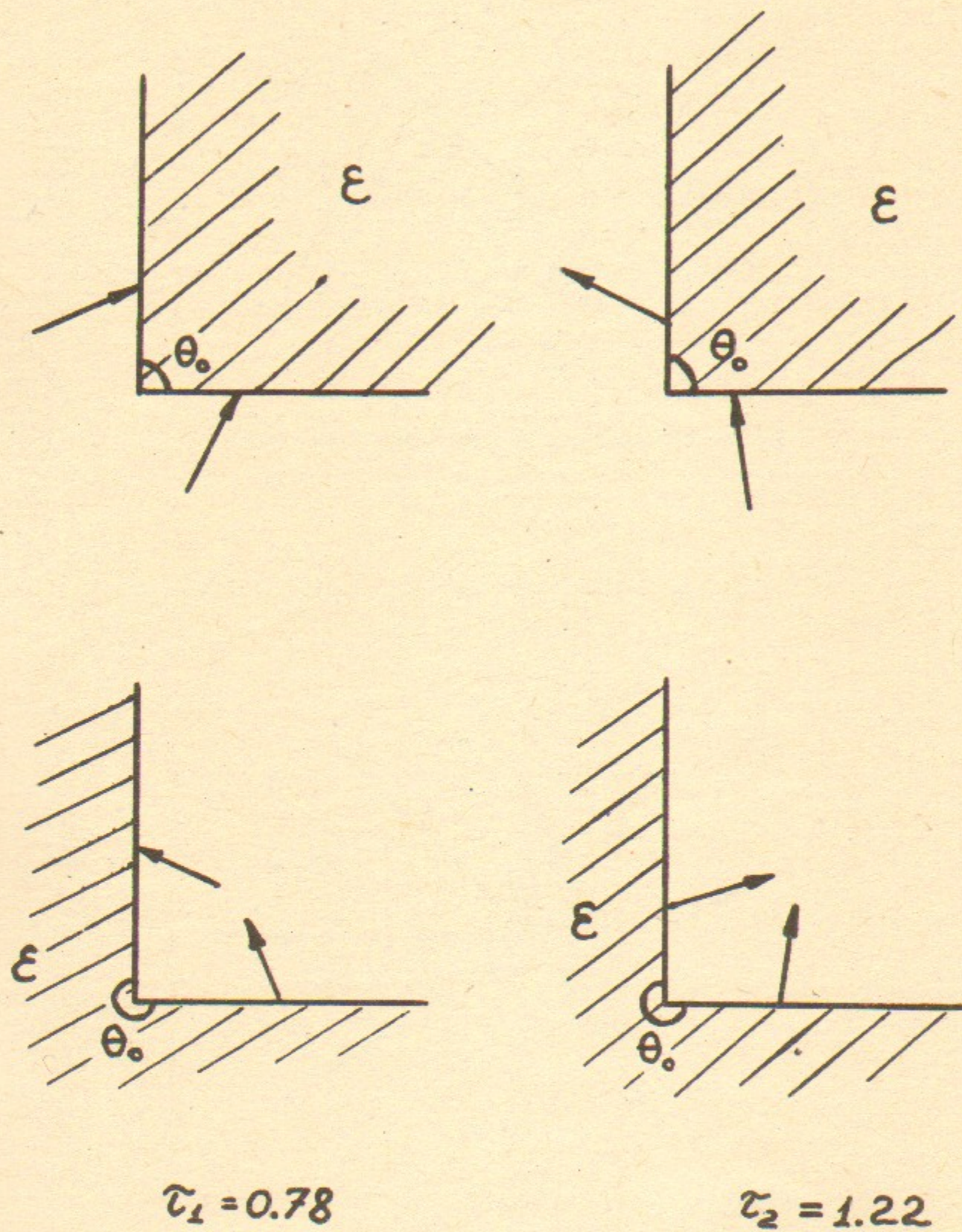


Рис. 7. Характер поведения электрического поля и соответствующие значения показателя особенности  $\tau$  для двух диэлектрических клиньев с  $\epsilon=5$  и углами раствора  $90^\circ$  и  $270^\circ$ .

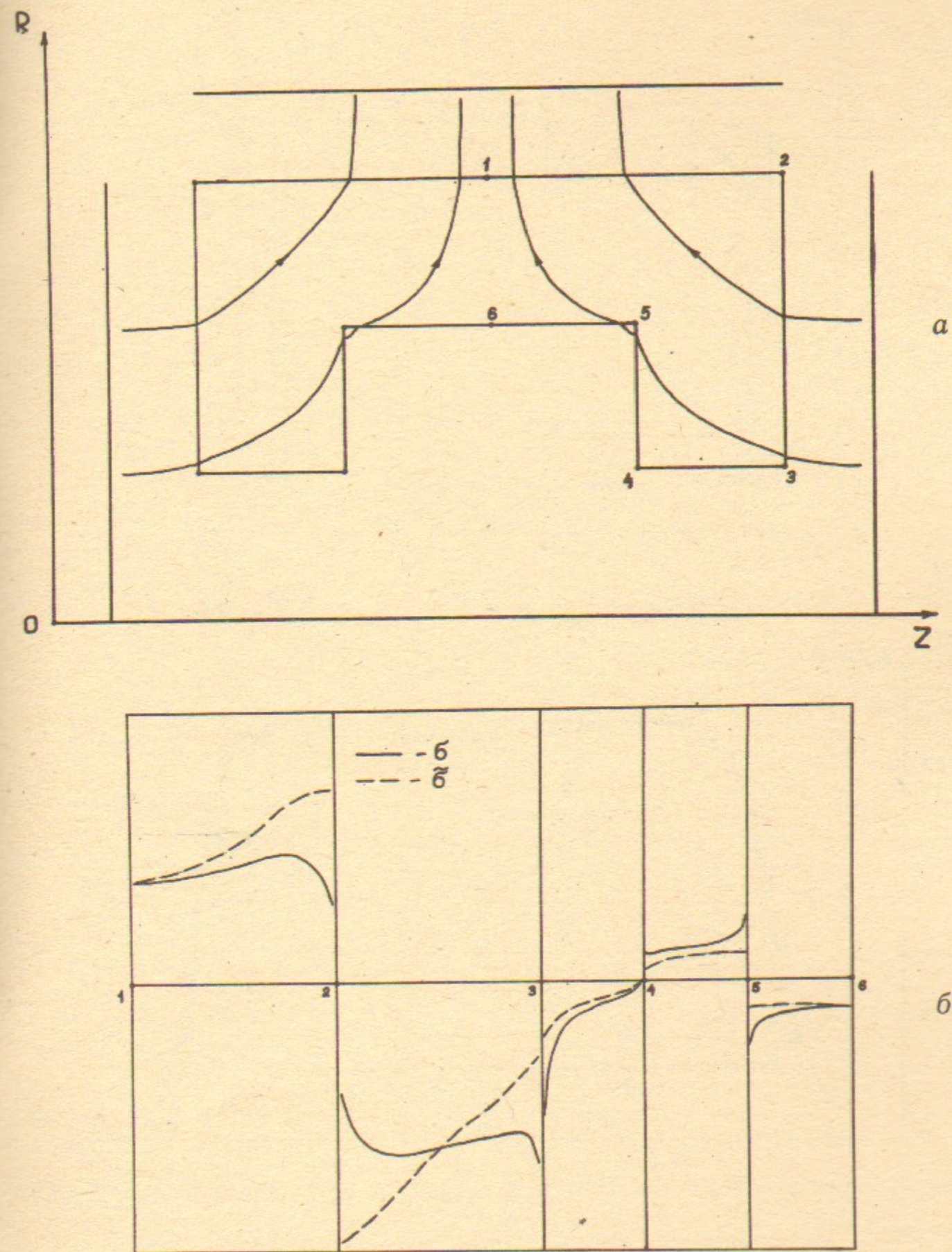
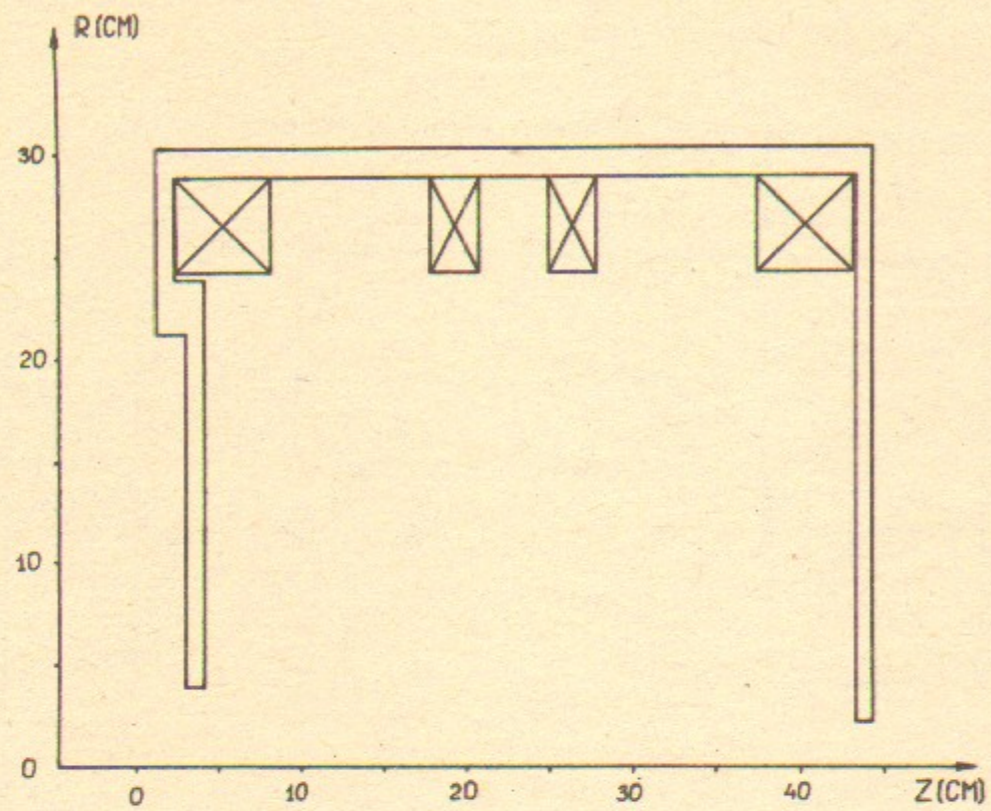
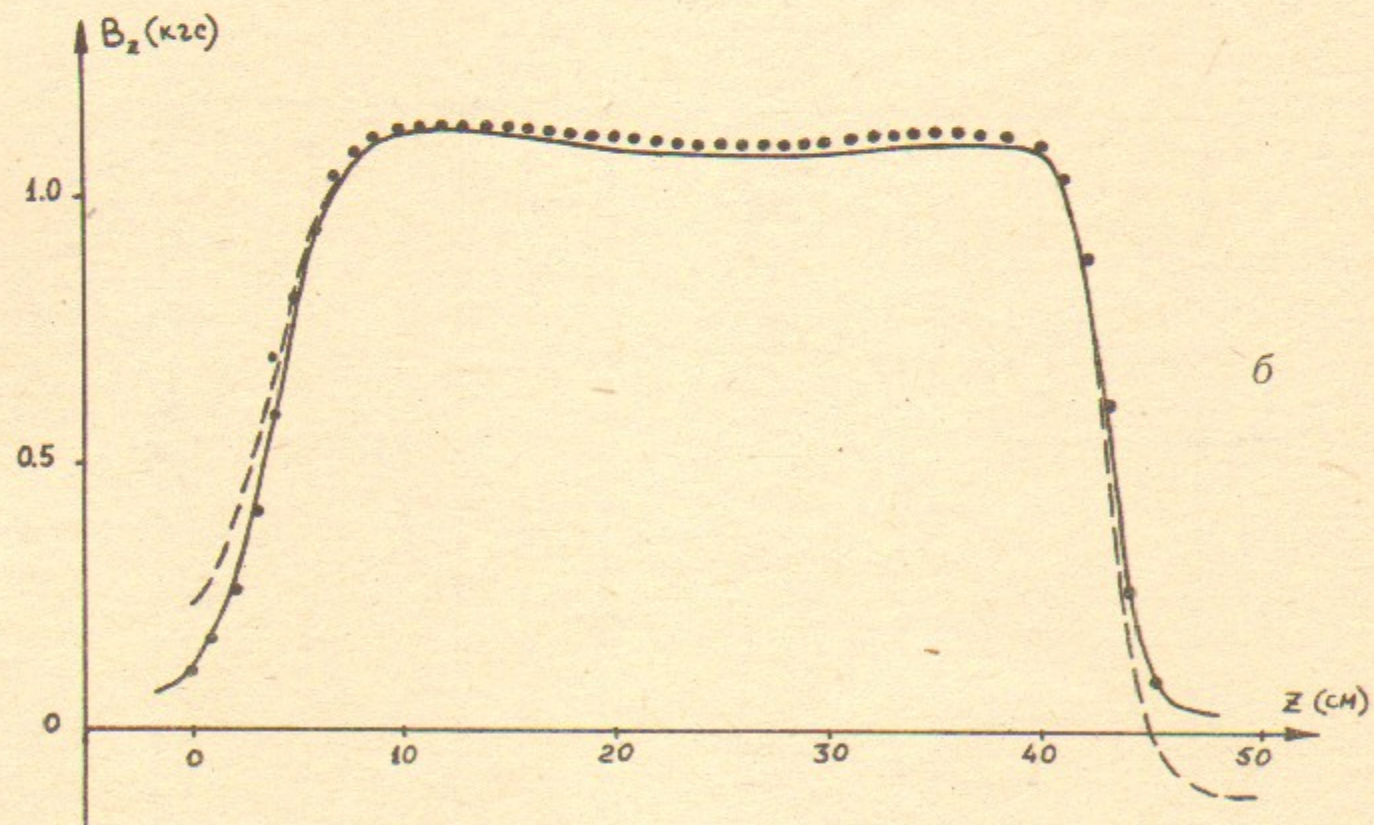


Рис. 8. Диэлектрический стакан в электрическом поле: *a* — геометрия электродов и диэлектрика, силовые линии электрического поля; *b* — распределение плотности зарядов на границе диэлектрика вдоль ломаной 123456.



a



b

Рис. 9. Магнитная система резонатора развертки «Магника»: а — геометрия магнитного экрана и токовых шин; б — распределение магнитного поля на оси системы: · — результаты измерений, — — — — расчет без регуляризации, — — — — расчет с регуляризацией по Тозони.

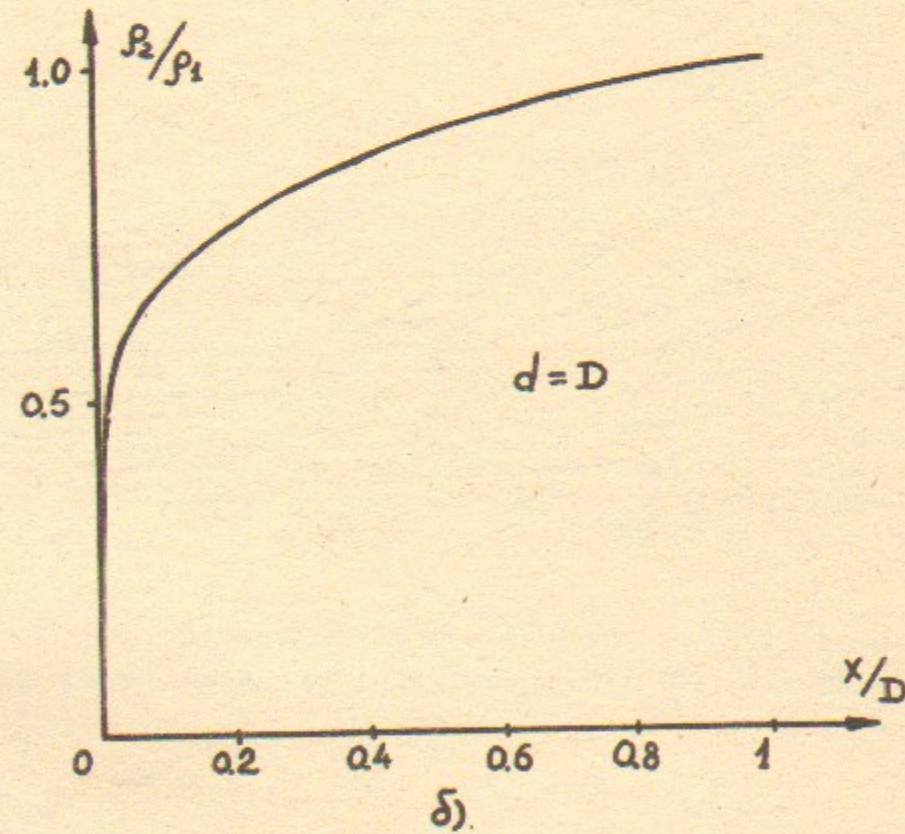
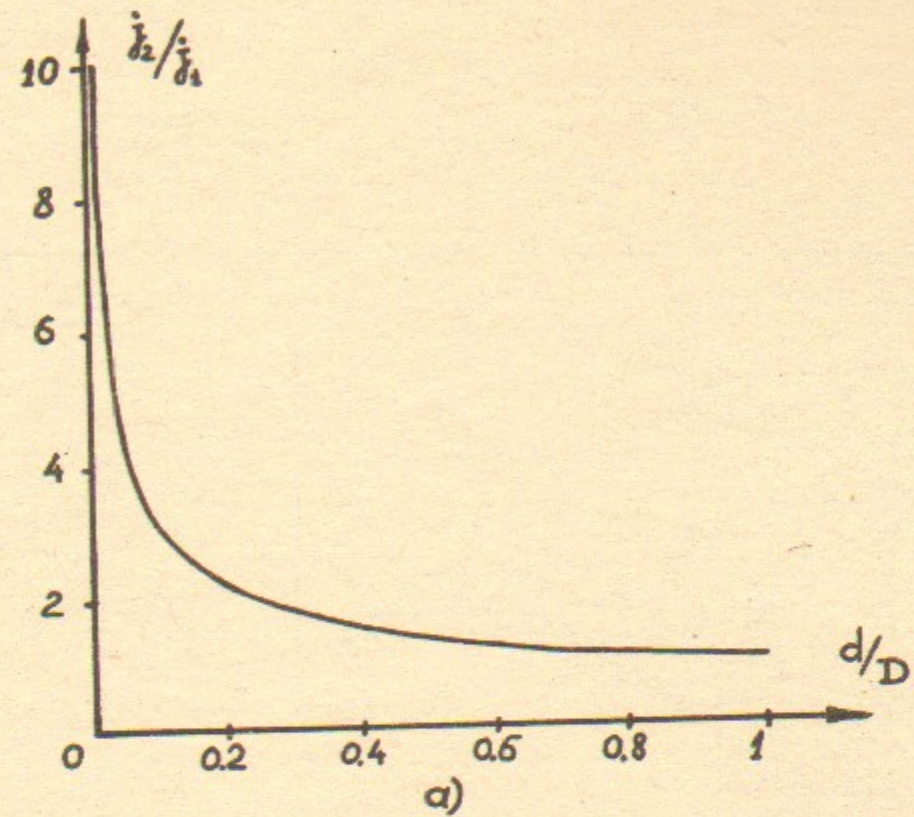


Рис. 10. Сравнительные характеристики плоского диода и плоского конденсатора.

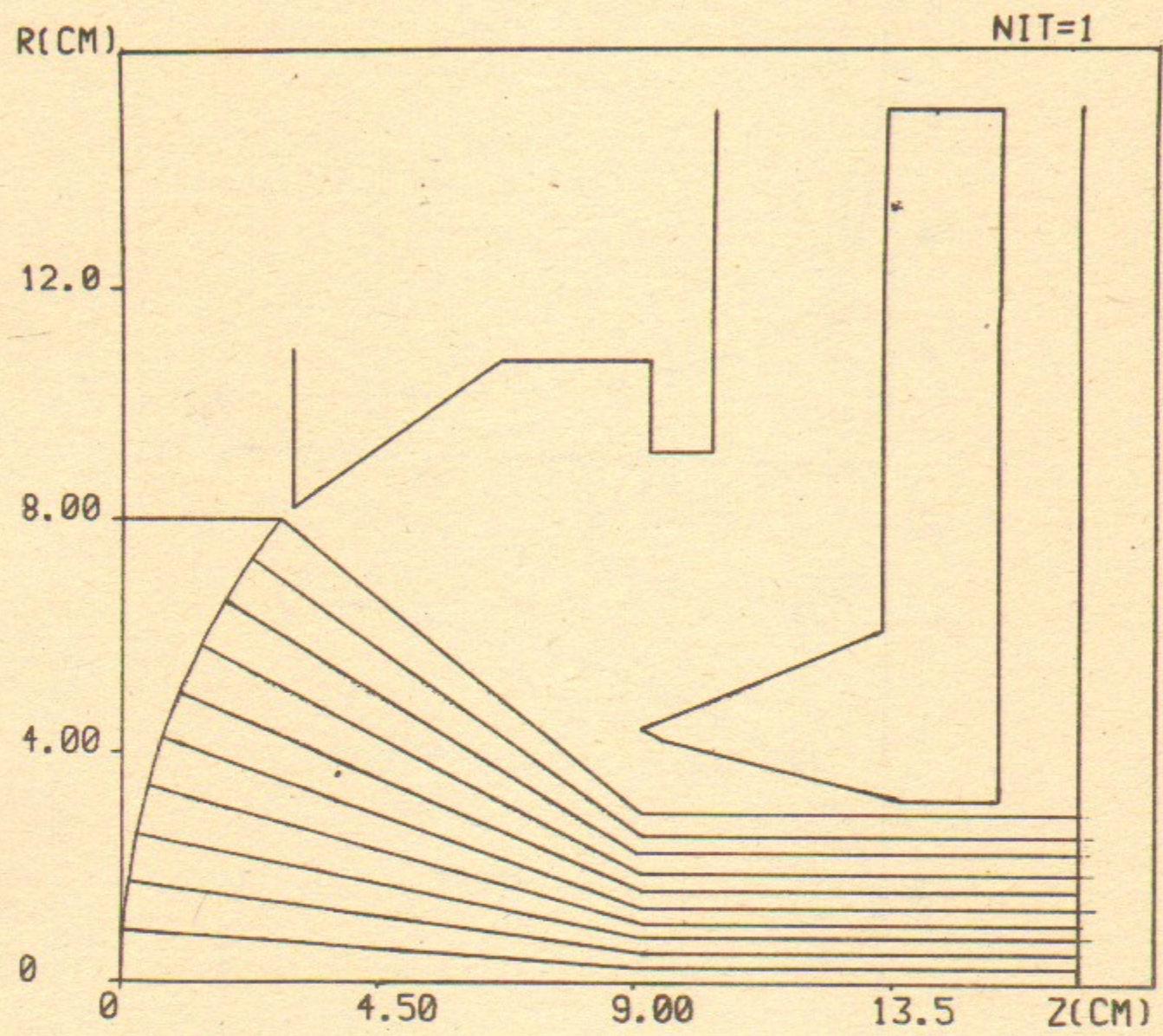


Рис. 11. Траектории электронов на первой итерации.

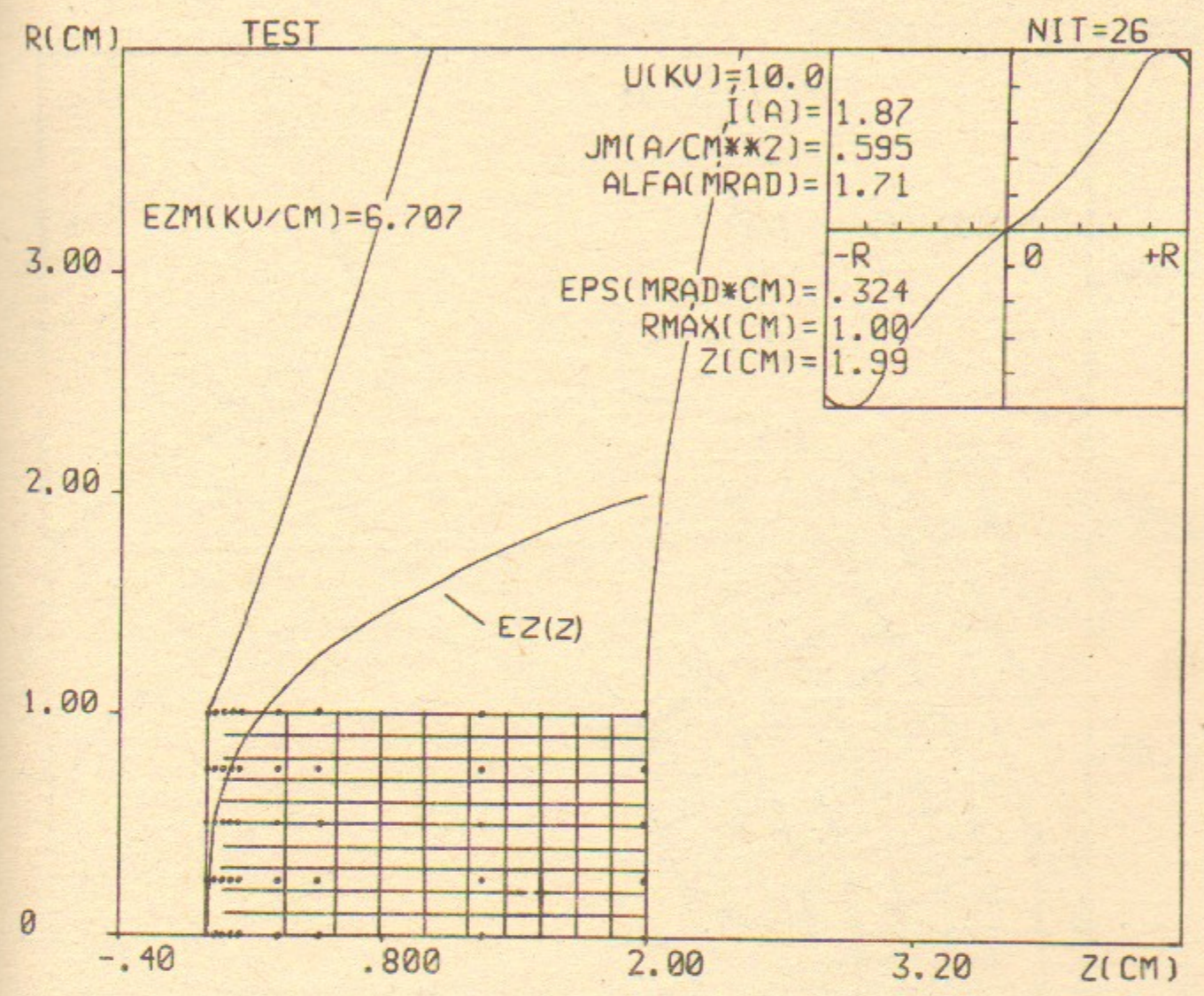


Рис. 12. Пушка Пирса с плоским катодом и микропервееансом  $P_{\mu 0} = 1.83 \text{ мкА/В}^{3/2}$ .

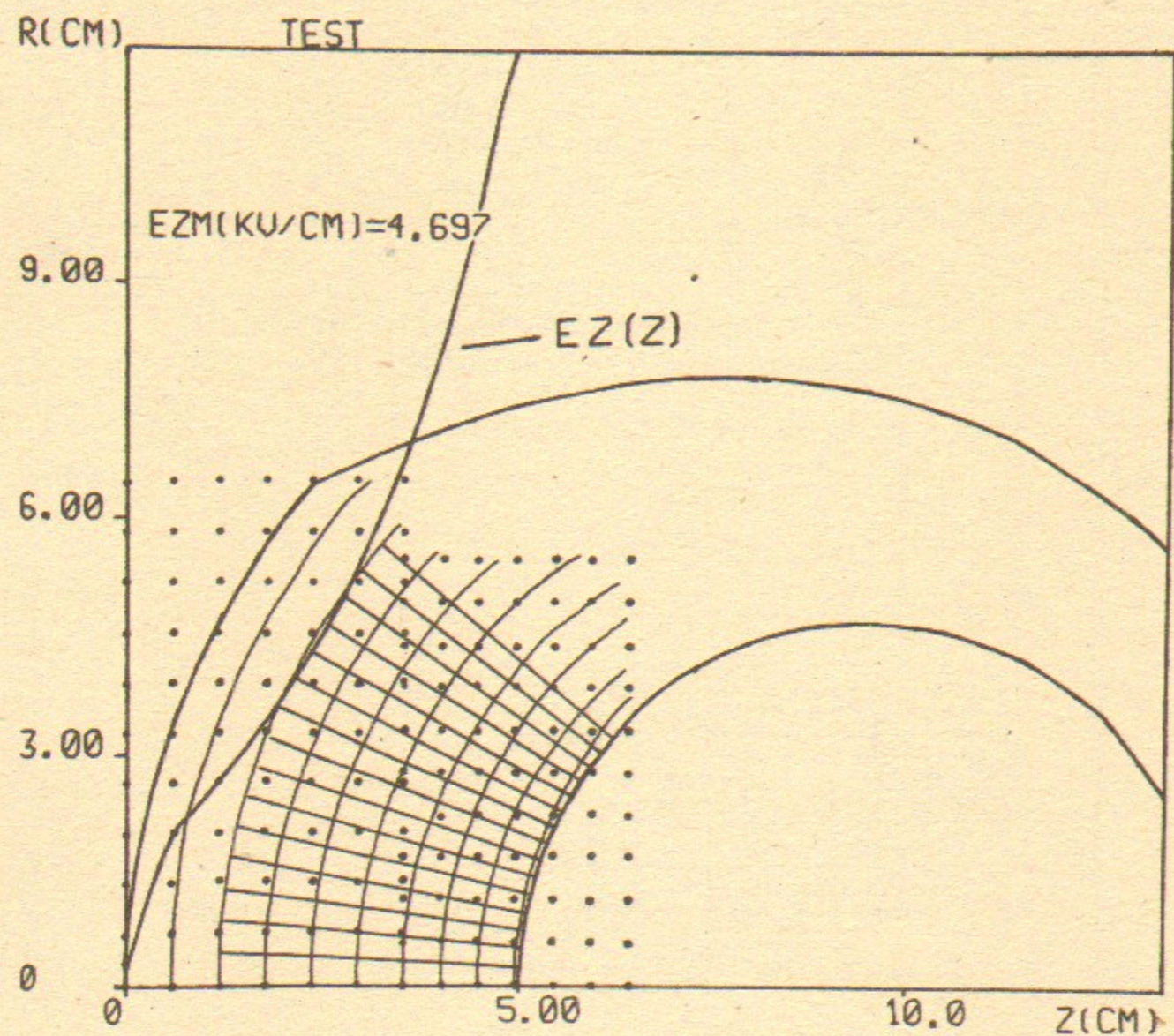


Рис. 13. Пушка Пирса со сферическим катодом. Угол сходимости пучка  $40^\circ$ , отношение радиусов кривизны катода и анода  $r_k/r_a=2$  (микропервеанс  $P_{\mu 0}=4.575$  мкА/В $^{3/2}$ ).

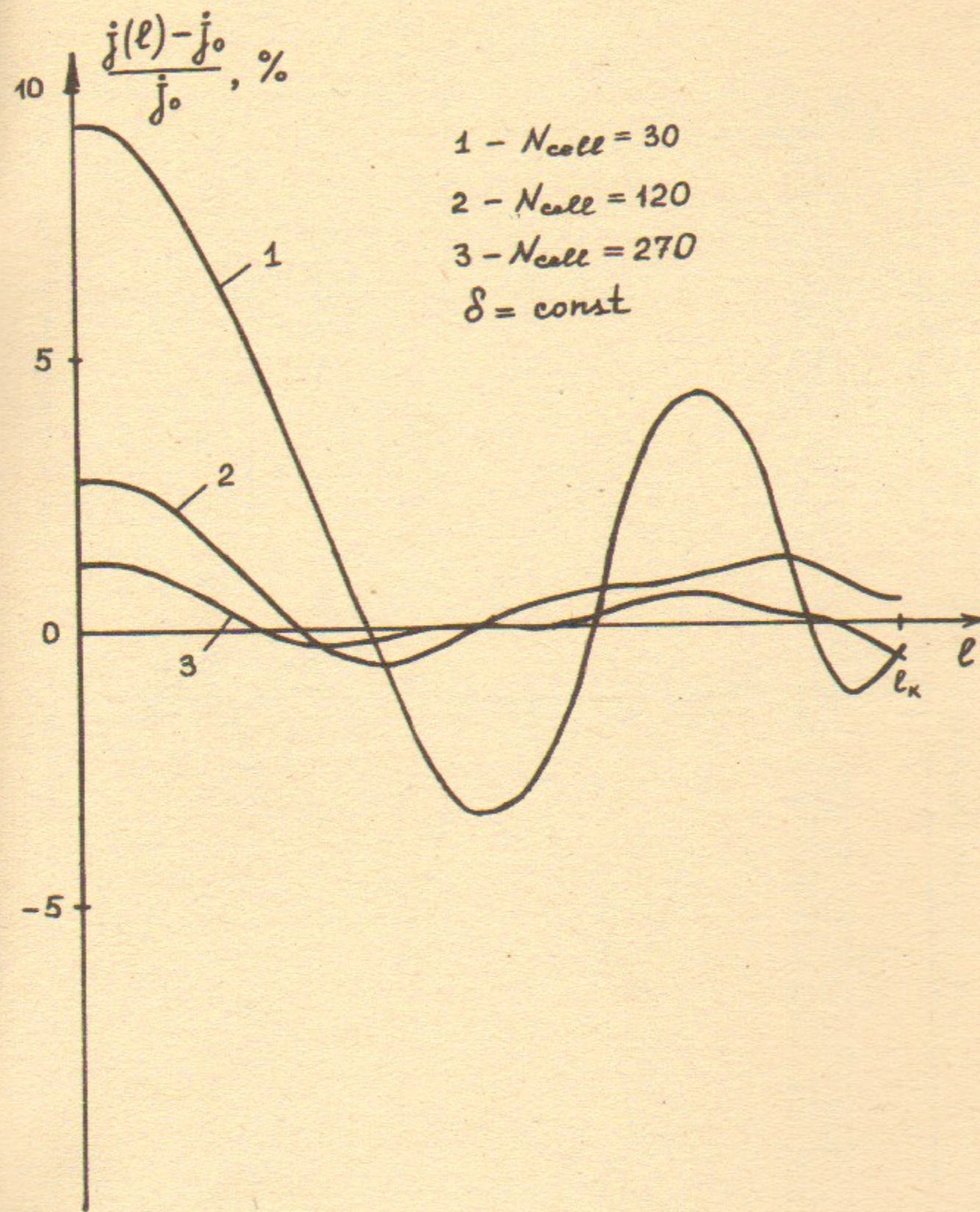


Рис. 14. Расчетные распределения плотности эмитируемого тока в пушке Пирса со сферическим катодом при разном числе узлов в сетках.

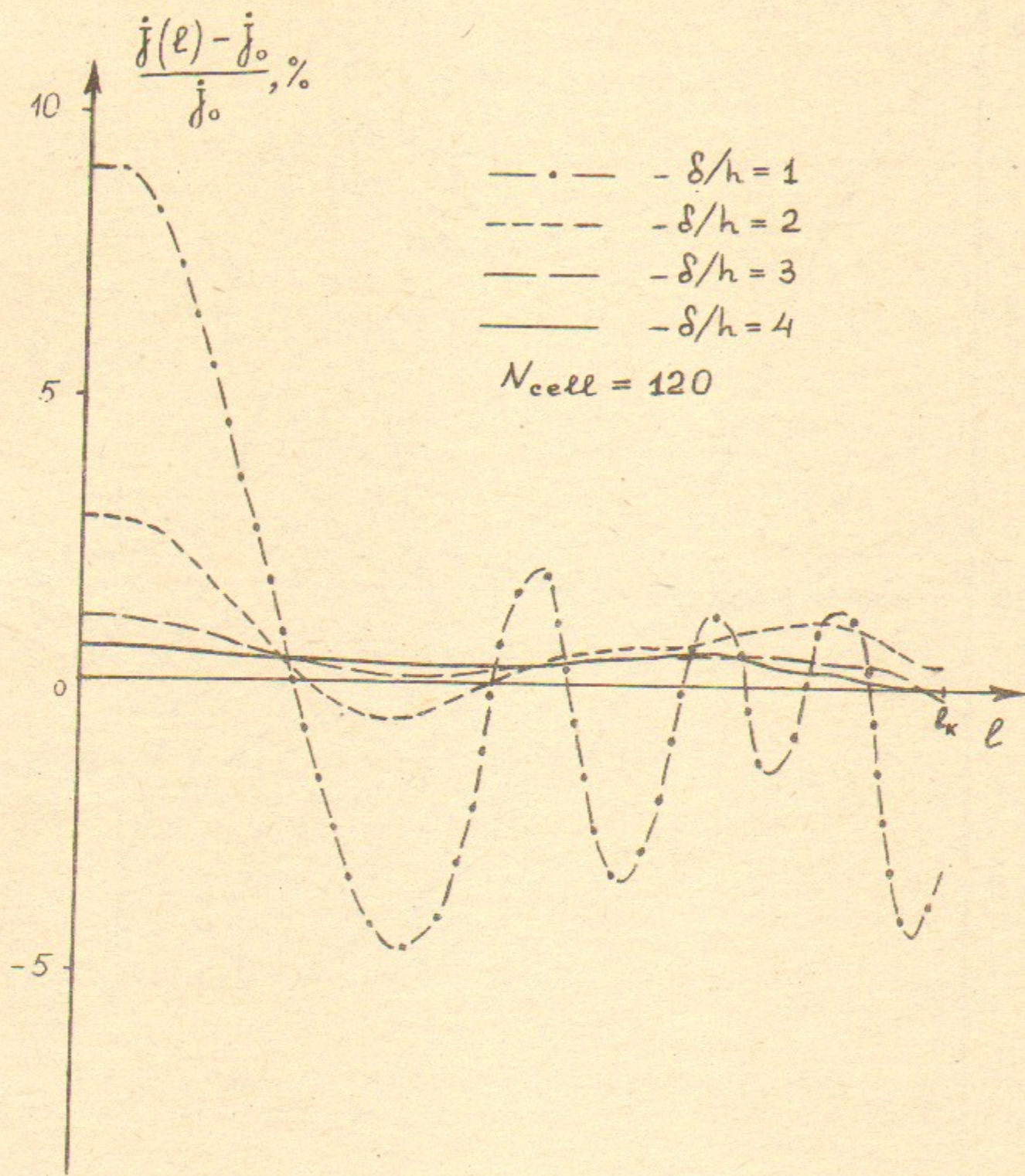


Рис. 15. Расчетные распределения плотности эмитируемого тока в пушке Пирса со сферическим катодом при разном расстоянии  $\delta$  от катода, на котором пучок описывался моделью сферического дна ( $h$  — максимальный размер ячейки прикатодной сетки).

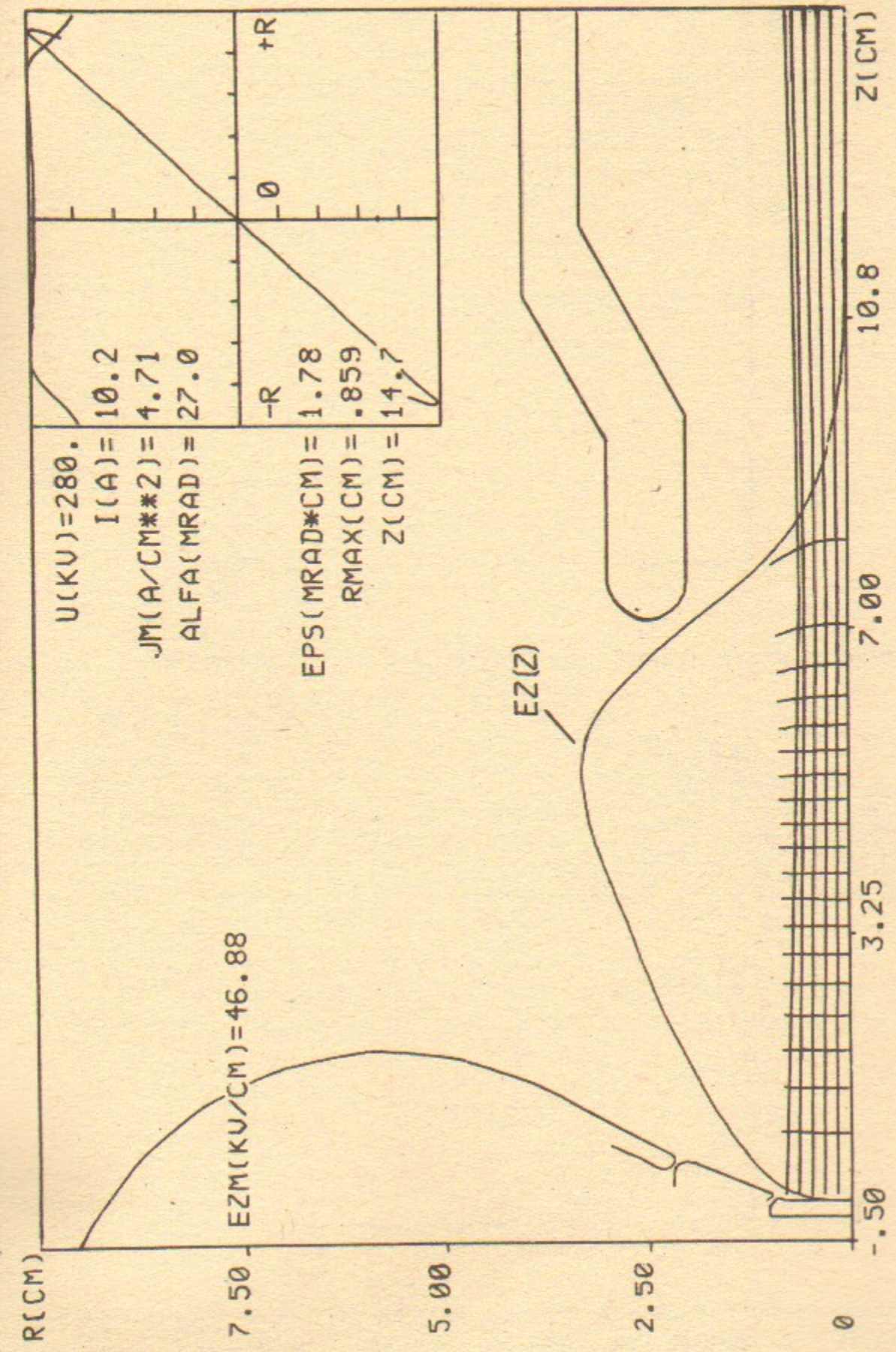


Рис. 16. Пушка СВЧ-генератора «Магникон».

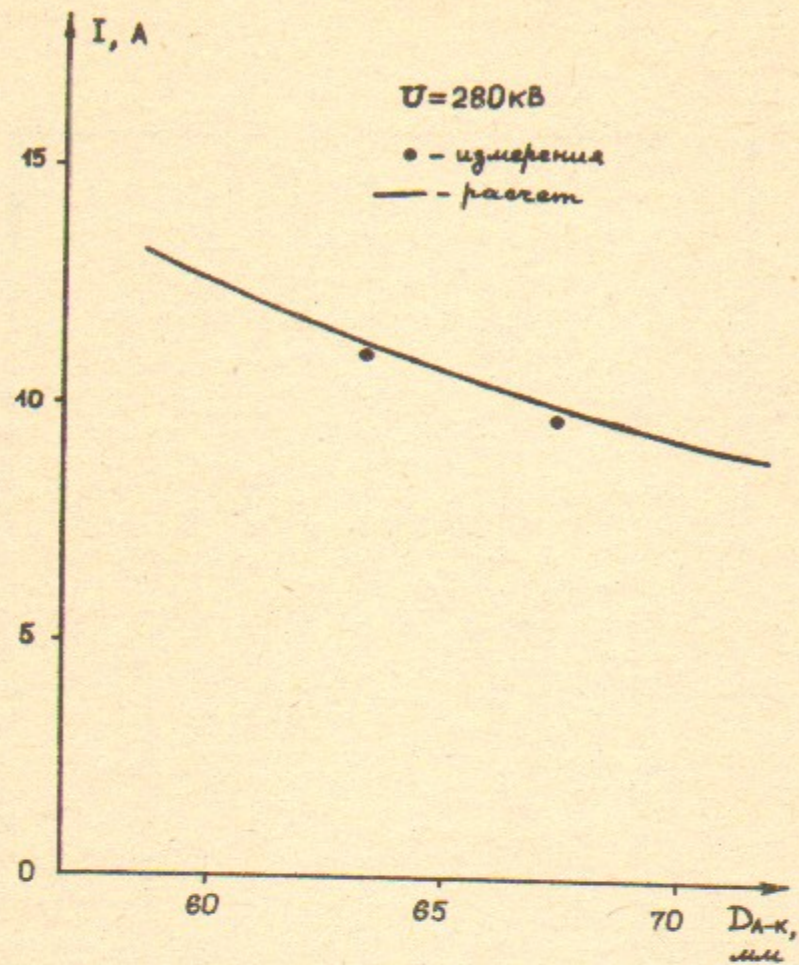


Рис. 17. Зависимость первеанса пушки «Магникона» от зазора между анодом и катодом.

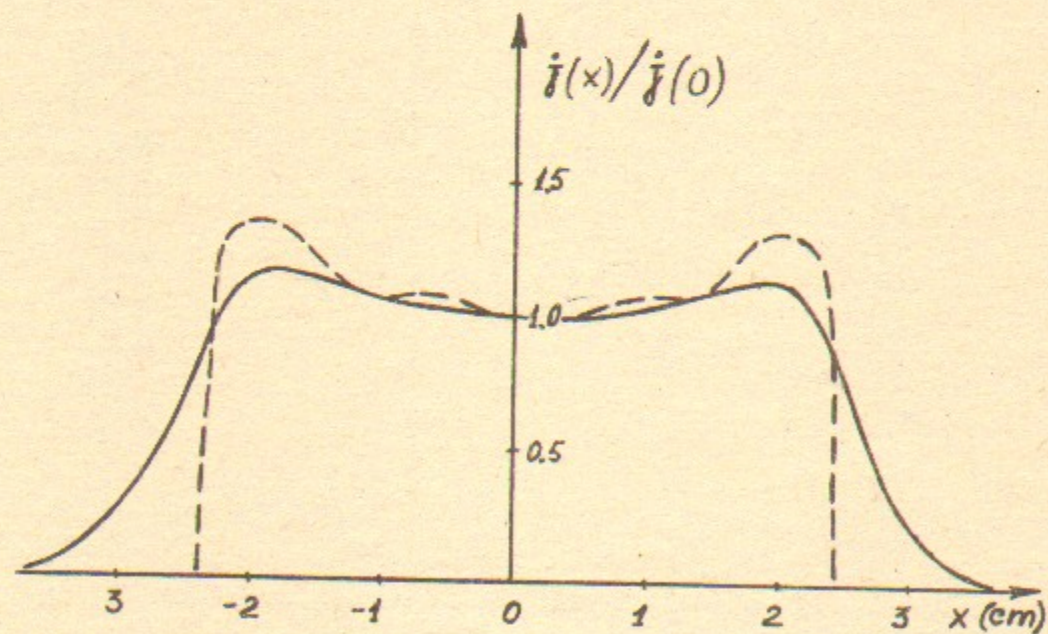


Рис. 18. Распределение плотности тока на коллекторе пушки с микропервеансом  $P_{\mu}=1.9\text{ мкА/В}^{3/2}$  и компрессией пучка по площади  $C_s=16$ : — — — — расчет, — — — — измерения.

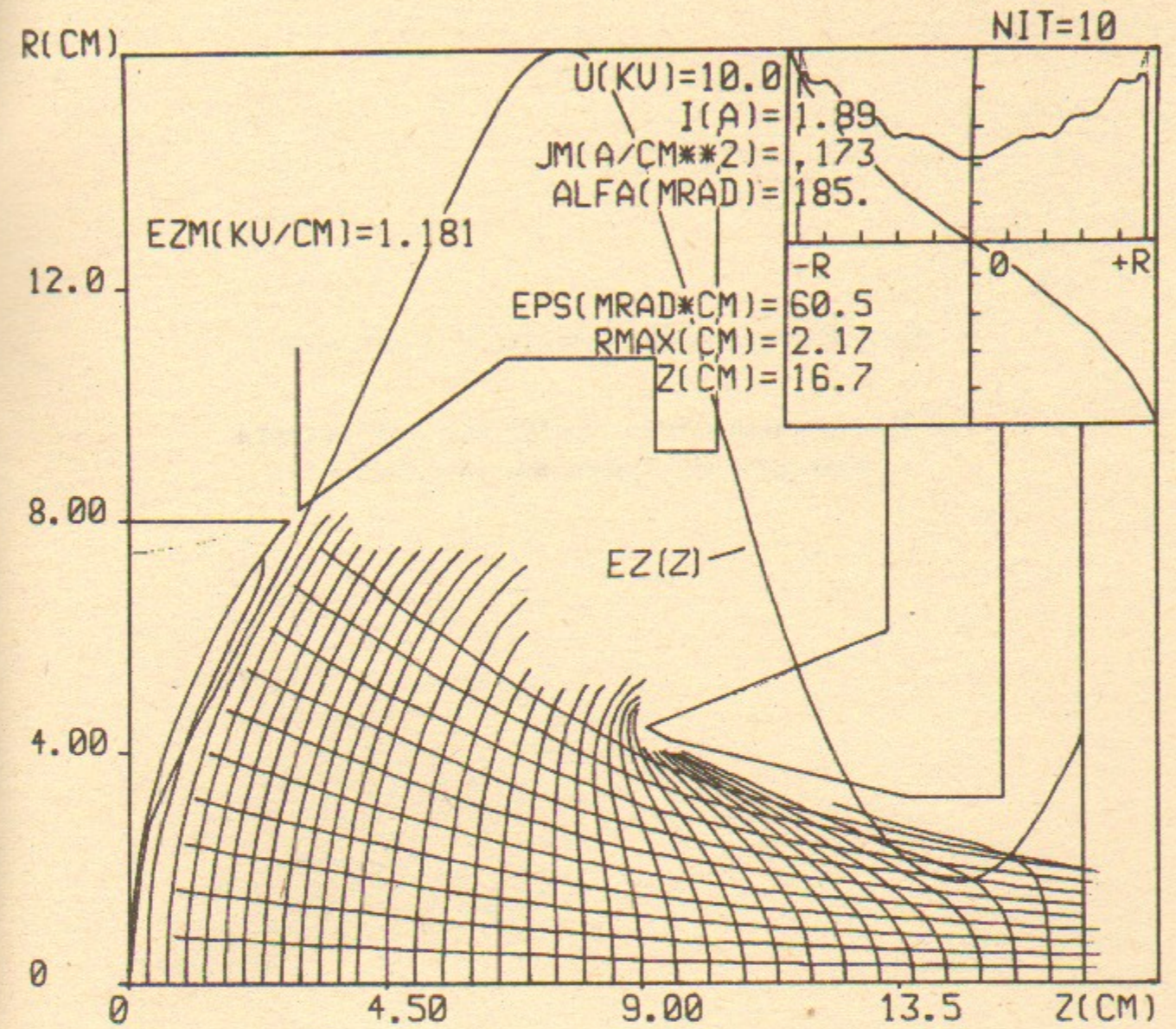


Рис 19. Геометрия электродов и расчетные характеристики пушки с микропервеансом  $P_{\mu}=1.9\text{ мкА/В}^{3/2}$  и компрессией пучка по площади  $C_s=16$ .



*М.А. Тиунов, Б.М. Фомель, В.П. Яковлев*

**SAM — интерактивная программа для расчета  
электронных пушек на мини-ЭВМ**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

---

Работа поступила 26 февраля 1987 г.  
Подписано в печать 1.04.1987 г. МН 08672  
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 4,6 печ.л., 3,0 уч.-изд.л.  
Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ № 35

---

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-  
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и  
отпечатано на ротапинтере Института ядерной физики  
СО АН СССР,  
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*