

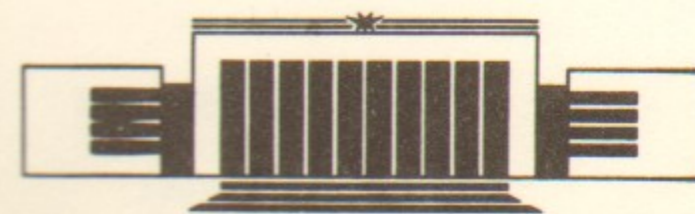


9  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

С.Э. Коренблит

**ЗАДАЧА О СДВИГЕ УРОВНЕЙ  
В МЕТОДЕ ВНЕЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ  
ДЕТЕРМИНАНТОВ ИОСТА**

**ПРЕПРИНТ 87-16**



НОВОСИБИРСК

## АННОТАЦИЯ

Предложена новая система динамических уравнений, основанная на спектральной плотности функции Грина по передаче импульса, объединяющая достоинства уравнения Липпмана-Швингера и метода Мандельстама, свободная от их недостатков, и тесно связанная с методом внеэнергетических функций Иоста. Все физические величины в двухчастичной задаче определяются квадратурами от этой спектральной плотности, которая в случае кулоновского потенциала оказывается элементарной функцией. Показана эффективность метода при вычислении радиационных смещений уровней. При этом удается придать физический смысл разбиению сдвига на высоко и низко частотный вклады и получить приближенное описание его в терминах локального потенциала.

Нетривиальным моментом всего подхода является процедура аналитического продолжения спектральной плотности по импульсам начального и конечного состояний, установленная для локальных взаимодействий.

Обобщение на пространства произвольной размерности обнаруживает простую связь между решениями для одного и того же потенциала  $W(r)$  и разных размерностей  $\Gamma_N$  и  $\Gamma_L$ .

ABSTRACT

The new system of dynamical equation based on the use of the Green Function spectral density in the momentum transfer is proposed. It combines the preferences of both the Lippman-Schwinger equation and the Mandelstam method, and is free of deficiencies of both of them. The method is tightly connected with the off-shell Jost-function method. All physical quantities for a two-particle problem are expressed explicitly through the integrals of this spectral density. This spectral density is an elementary function for the Coulomb potential.

The efficiency of this method for a calculation of the radiative shifts of levels is demonstrated. It is shown how to describe this shift in terms of an effective local potential. The connection between the usual separation of high- and low-frequency parts of the energy shift and the t-channel intermediate states is elucidated.

The nontrivial point of the whole approach is the possibility of analytic continuation of the spectral density in the initial and final momenta which is demonstrated for local interactions.

We describe also the connection between the solutions for the same potential  $W(r)$  in different number of dimensions.

С.Э.Коренблит

Задача о сдвиге уровней в методе внеэнергетических детерминантов Иоста

Введение

В 1962 году Фубини и Строфолини [1] в поисках уравнения на Реджевскую траекторию  $\alpha(\beta^2)$ , исследовали уравнение на спектральную плотность T-матрицы по передаче импульса  $t = -(\vec{U} - \vec{P})^2$ ,

$$D(\nu; -i\rho, \beta^2, -i\nu) : \nu = |\vec{U}|, \rho = |\vec{P}|,$$

$$\langle \vec{U} | \hat{T}(\beta^2) | \vec{P} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2 M} \int_m^\infty d\nu \frac{D(\nu; -i\rho, \beta^2, -i\nu)}{(\nu^2 - t)}, \quad (I)$$

получающееся при взятии скачка по  $t$  от уравнения Липпмана-Швингера (III):

$$\hat{T}(\beta^2) = \hat{V} + \hat{V} \hat{G}_0(\beta^2) \hat{T}(\beta^2) \quad (2)$$

в обкладках  $\langle \vec{U} | \vec{P} \rangle = \delta(\vec{U} - \vec{P})$ , где  $\beta^2 = -2M\varepsilon$ ,  $\varepsilon$  - энергия системы двух частиц в с.ц.м.;  $M$  - их приведенная масса;  $\vec{P}, \vec{U}$  - начальный и конечный относительные импульсы;  $\hat{G}_0(\beta^2) = 2M(\nabla_x^2 - \beta^2)^{-1}$  - свободная функция Грина, а локальный потенциал  $\langle \vec{X} | \hat{V} | \vec{Y} \rangle =$

$$V(|\vec{X}|) \delta(\vec{X} - \vec{Y}) \quad \text{представим в виде}$$

$$V(r) = (2M)^{-1} \int_m^\infty d\nu \sum_l(\nu) e^{-\nu r}; \quad m \geq 0 \quad (3)$$

Они показали, что уравнение на  $D$  ( $\omega_{\pm}$  приведены ниже в (С.4))

$$D(\nu; -i\rho, \beta^2, -i\nu) = \sum_l(\nu) - \int_m^{\nu-m} d\delta \sum_l(\delta) \int_m^{\nu-\delta} d\mu \frac{1}{\pi} \int \frac{d\alpha^2}{(\alpha^2 + \beta^2)} \cdot$$

$$\frac{\omega_+(\nu; \mu, \delta; U, \rho)}{\omega_-(\nu; \mu, \delta; U, \rho)} \quad (4)$$

$$D(\mu; -i\rho, \beta^2, -i\alpha) [(\omega_+ - \alpha^2)(\alpha^2 - \omega_-)]^{-\frac{1}{2}},$$

допускает решения с асимптотикой вида

$$D(\nu; -i\rho, \beta^2, -iU) \rightarrow 2\nu(\nu^2)^{\alpha(\beta^2)} f(\alpha, \beta^2, U^2) \quad \text{при } \nu \rightarrow \infty,$$

и что получающееся из (4) уравнение на "вычет"  $f(\alpha, \beta^2, U^2)$ , тождественно однородному уравнению Шредингера в импульсном представлении с угловым моментом  $\ell = \alpha(\beta^2)$ .

Таким образом, информация о дискретном спектре, отвечающем вычитаниям в (I) при  $\mathcal{E}$ , большем энергии основного состояния, не теряется при взятии скачка по  $t$ , но присутствует в спектральной плотности иначе, чем в T-матрице.

Основная цель этой работы - показать, что существует простой способ извлечь всю информацию как о дискретном, так и о непрерывном спектре гамильтониана  $\hat{H}_V = \frac{\hat{P}^2}{2M} + \hat{V}$  непосредственно из полувнеэнергетической спектральной плотности  $\tilde{D}_{h.s.} = \tilde{D}(\nu; \beta, \beta^2, u)$  аналитически продолженной в область  $\rho = i\rho$ ,  $U = iu$  по импульсам обкладок, не нуждающийся ни в решении каких-либо дополнительных уравнений типа  $N/D$ , ни в процедуре восстановления функций дисперсионным интегралом, ни в аналитическом продолжении по  $\ell$ . Возникающая система динамических уравнений занимает промежуточное положение между техникой ЛШ и подходом Мандельстама /2/и, объединяя их достоинства: линейность с одной стороны и вольтерровый характер уравнений - с другой, освобождает от проблем неоднозначности решений и вычитаний /2,3/. Другой ее привлекательной чертой является отсутствие необходимости обращаться к полной системе волновых функций гамильтониана  $\hat{H}_V$ , в том числе и в задаче о сдвигах энергетических уровней под действием малого возмущения  $\hat{\mathcal{V}}$  вида (3). Все вопросы единственности при этом тривиально решаются и вольтерровостью динамических уравнений.

Наблюдаемые - фазы упругого рассеяния  $h_{\ell e}(k)$  и энергии свя-

занных состояний  $\mathcal{E}_{h\ell} = -\beta_{h\ell}^2/2M$  однозначно определяются соответственно аргументом и нулями детерминанта (функций) Иоста /2-4/:

$$F_e(\beta) = \prod_{s=1}^n \left(1 - \frac{\beta_{se}^2}{\beta^2}\right) \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dk^2 h_e(k)}{k^2 + \beta^2} \right\} \quad (5)$$

являющегося детерминантом Фредгольма парциального уравнения Л.Ш. /4/:

$$F_e(\beta) = \det [I - \hat{G}_{e0}(\beta^2) \hat{V}] = \det [\hat{G}_{e0}(\beta^2) \hat{G}_{eV}^{-1}(\beta^2)], \quad (6)$$

где парциальная функция Грина определяется равенством

$$\hat{G}_{eV}^{-1}(\beta^2) = \frac{1}{2M} \left( \partial_r^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \beta^2 \right) - V(r) \quad (7)$$

Одним из основных результатов является выражение его через квадратуры от  $\tilde{D}_{h.s.}$ :

$$F_e(\beta) = 1 + \int_{\beta+m}^\infty \frac{du (\beta/u)^\ell}{u^2 - \beta^2} \int_m^{u-\beta} d\nu \rho_\ell \left[ \frac{u^2 + \beta^2 - \nu^2}{2u\beta} \right] \tilde{D}(\nu; \beta, \beta^2, u). \quad (8)$$

Аналогичным образом выражаются волновые функции дискретного и непрерывного спектра и сдвиги уровней дискретного спектра. Вывод этого соотношения (частично содержащийся в работах /5/) и выражения для сдвига уровня можно элегантно провести путем увеличения числа переменных у функции  $F_e(\beta)$ , что приводит к понятию внеэнергетической функции Иоста /5,6/.

#### I. Уравнение на внеэнергетический детерминант Иоста

Увеличение числа переменных у детерминанта Иоста /7/ инспирировано прежде всего стремлением получить для него замкнутое динамическое уравнение /8/. Однако сделать это удалось только для локальных потенциалов вида (3), сначала для  $\ell=0$  /9/, а затем, для произвольных  $\ell$  /5,6/. Введение внеэнергетической функ-

ции Иоста на основе операторной теории рассеяния приведено в /7/ а на основе неоднородного радиального уравнения Шредингера (УШ) с потенциалом (3) - в /5/. Здесь же используются интуитивные, но более наглядные соображения, основанные на соотношении

$$\frac{1}{F_e(\mp ik)} = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\alpha^2 (\alpha/k)^{\ell}}{\alpha^2 - k^2 \mp i0} T_e^{(\pm)}(\alpha, k) \quad (9)$$

которое для несингулярных потенциалов ( $\lim_{r \rightarrow 0} r^2 V(r) = 0$ ) немедленно следует из определения левой части как "коэффициента усиления":  $\lim_{r \rightarrow 0} \psi_{ev}^{(\pm)}(k, r) / \psi_{e0}(k, r)$ , где  $\psi_{ev}^{(\pm)}(k, r)$  - физическое решение, отвечающее ф-ции Грина (7) при  $\beta = \mp ik$ . Стоит, однако, отметить, что (9) формально вытекает непосредственно из абстрактного определения (6) без привлечения граничного условия при  $r=0$ . В этом легко убедиться, используя разбиение  $\hat{C}_{e0}^{(\pm)}(-k^2)$  в конфигурационном представлении на вольтерровую  $\hat{B}$  и сепарабельную  $\hat{C}^{(\pm)}$  части /10/, и уравнение ЛШ на  $\psi_{eV}^{(\pm)}$ , и учитывая, что для локального  $\hat{V}$ :

$$\det[\mathbb{1} - \hat{B}\hat{V}] \equiv 1; \det[\mathbb{1} - \hat{C}\hat{V}] \equiv 1 - \text{Tr} \langle \hat{C}\hat{V} \rangle. \quad (10)$$

Этот прием обобщается, например, на релятивистское конфигурационное представление /11/, где нет условия при  $r=0$ , а оператор  $\hat{B}$  - не вольтерровский\*, что аналогично нелокальному потенциалу в (10). В этих случаях  $N_e(\beta^2) \equiv \det[\mathbb{1} - \hat{B}\hat{V}] \neq 1$  и появится в числителе левой части (9).

Определим внеэнергетическую функцию Иоста (ВФИ)  $F_e(u, -ik)$  как аналитическую функцию обеих переменных, регулярную в  $\text{Re} u > 0$

\* Обобщение метода ВФИ на квазипотенциальный подход /11/ будет опубликовано отдельно.

при фиксированном  $|\text{Im} k| < m$  и наоборот, и такую что

$$1) \lim_{u \rightarrow \infty} F_e(u, -ik) = 1; 2) F_e(-ik, -ik) = F_e(-ik). \quad (11)$$

В силу (9) всем перечисленным условиям удовлетворяет функция:

$$F_e(u, -ik) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\alpha^2 (\alpha/k)^{\ell}}{\alpha^2 + u^2} T_e^{(\pm)}(\alpha, k) F_e(\mp ik). \quad (12)$$

Отсюда легко найти выражение для  $T_e^{(\pm)}$  через ВФИ /7/. Подставляя в (12) парциальное уравнение ЛШ:

$$T_e^{(\pm)}(u, k) = T_{e0}(u, k) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\alpha^2 T_{e0}(u, \alpha) T_e^{(\pm)}(\alpha, k)}{\alpha^2 - k^2 \mp i0} \quad (13)$$

с Фредгольмовским ядром

$$T_{e0}(u, k) = -\frac{1}{2k} \int_m^{\infty} d\mu \Sigma_1(\mu) Q_e \left[ \frac{u^2 + k^2 + \mu^2}{2uk} \right] \quad (14)$$

и привлекая интегральное соотношение между ним и Вольтерровым ядром

$$\mathcal{K}_e(u, \rho) = \int_m^{\infty} d\mu \Sigma_1(\mu) P_e \left[ \frac{u^2 + \rho^2 - \mu^2}{2u\rho} \right] \quad (15)$$

справедливое и для любых нецелых  $\ell$ : (в отличие от иного соотношения, использовавшегося в /6/) (см. приложение):

$$\int_{u+m}^{\infty} \frac{d\alpha (u/\alpha)^{\ell}}{\alpha^2 + k^2} \mathcal{K}_e(\alpha, u) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\alpha^2 (\alpha/k)^{\ell}}{\alpha^2 + u^2} T_{e0}(\alpha, k) \quad (16)$$

с учетом (11) можно получить для ВФИ линейное уравнение Вольтерра с ядром  $\mathcal{K}_e$ , которое при  $k = i\beta$  имеет вид /5, 6/

$$F_e(\rho, \beta) = 1 + \int_{\rho+m}^{\infty} \frac{d\alpha (\rho/\alpha)^{\ell}}{u^2 - \beta^2} \mathcal{K}_e(u, \rho) F_e(u, \beta). \quad (17)$$

Центральное утверждение этой работы: уравнение (17) является своеобразной парциальной проекцией аналитического продолжения уравнения (4) для спектральной плотности по передаче импульса.

Действительно, определив вольтеррово ядро преобразования:

$$F_e(p, \beta) = 1 + \int_{p+m}^{\infty} \frac{du (p/u)^e}{u^2 - \beta^2} de(u, p; \beta^2), \quad (18)$$

нетрудно получить из (17), что оно подчиняется уравнению

$$de(u, p; \beta^2) = \mathcal{K}_e(u, p) + \int_{p+m}^{u-m} \frac{\mathcal{K}_e(u, \alpha)}{\alpha^2 - \beta^2} de(\alpha, p; \beta^2) \quad (19)$$

и соотношению

$$de(u, p; \beta^2) = de(-p, -u; \beta^2). \quad (20)$$

Решение (19) можно представить в виде

$$de(u, p; \beta^2) = \int_m^{u-p} d\nu \rho \left[ \frac{u^2 + p^2 - \nu^2}{2u\rho} \right] \tilde{D}(\nu; p, \beta^2, u). \quad (21)$$

Подставляя (21) в (19), с помощью формулы умножения для функций Лежандра из приложения можно увидеть, что (21) есть (единственное) решение (19), если:  $\tilde{D}(\nu; p, \beta^2, u) = \Sigma_1^+(\nu) +$

$$+ \int_m^{\nu-m} d\mu \Sigma_1^+(\mu) \int_m^{\mu} \frac{d\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} \frac{\tilde{D}(\mu; p, \beta^2, \alpha)}{[(\Lambda^+ - \alpha^2)(\alpha^2 - \Lambda^-)]^{1/2}}, \quad (22)$$

$$\text{и } \tilde{D}(\nu; p, \beta^2, u) = \tilde{D}(\nu; e^{\pm i\pi} u, \beta^2, e^{\pm i\pi} p). \quad (23)$$

где  $\Lambda^{\pm}$  приведены в приложении, а функции  $\omega_{\pm}$  связаны с ними соотношением при  $\nu^2 < (u \pm p)^2$

$$u = iu, p = ip, \alpha = i\alpha, \quad (24)$$

$$\omega_{\pm}(\nu; \mu, \gamma; u, p) = e^{i\pi} \Lambda^{\pm}(\nu; \mu, \gamma; u, p).$$

То есть уравнение (22) является аналитическим продолжением (24) уравнения (4) по импульсам обкладок в область  $u = iu, p = ip$ , как указано во Введении, а результат (8) сразу следует из этого

факта и формул (21), (18), (11).

Таким образом, цепочка соотношений:  $disc(I) \rightarrow (24) \rightarrow (21) \rightarrow (18)$

$$\text{связывает } T \rightarrow \mathcal{D} \rightarrow \tilde{D} \rightarrow de \rightarrow F_e, \quad (*)$$

устанавливая прямую связь между динамическими уравнениями (2)  $\rightarrow$

(4)  $\rightarrow$  (22)  $\rightarrow$  (19)  $\rightarrow$  (17). Обнаруженная логическая связь (\*) допускает ряд интересных обобщений. Стартуя с двухпотенциального аналога уравнения III (2), связывающего оператор  $\hat{T}^{(2)}$  для  $\hat{V} + \hat{\mathcal{V}}$  с оператором  $\hat{T}^{(1)}$  - для  $\hat{V}$ , где  $\hat{\mathcal{V}}$  имеет вид (3) с плотностью  $\sigma$ :

$$\hat{T}^{(2)} - \hat{T}^{(1)} = [\mathbb{1} + \hat{T}^{(1)} \hat{G}_0] \hat{\mathcal{V}} [\mathbb{1} + \hat{G}_0 \hat{T}^{(2)}]$$

после несложных, но громоздких выкладок по этой цепочке (\*) можно прийти к уравнению для ВЭИ, обобщающему (17):

$$F_e^{(2)}(p, \beta) - F_e^{(1)}(p, \beta) = \int_m^{\infty} d\nu \sigma(\nu) \int_{p+\nu}^{\infty} du \frac{F_e^{(2)}(u, \beta) (p/u)^e}{u^2 - \beta^2} I_e(\nu; p, \beta^2, u), \quad (25)$$

$$I_e(\nu; p, \beta^2, u) = \int_p^{u-\nu} d\alpha \rho \left[ \frac{u^2 + \alpha^2 - \nu^2}{2u\alpha} \right] \left[ \delta(\alpha - p) + \frac{de(\alpha, p; \beta^2)}{\alpha^2 - \beta^2} \right].$$

Поскольку уровни дискретного спектра определяются уравнением

$$F_e(\beta, \beta) = F_e(\beta) = 0; \quad \beta = \beta_{ne}; \quad (26)$$

сдвиг уровня связан с вариацией функции Иоста

$$\Delta F_e(\beta) = F_e^{(2)}(\beta) - F_e^{(1)}(\beta), \quad (27)$$

определяемой правой частью (25), где в первом порядке по  $\hat{\mathcal{V}}$ ,  $F^{(2)} \Rightarrow F^{(1)}$ :

$$\Delta \epsilon_{ne} = -\Delta F_e(\beta) \left[ \frac{\partial}{\partial \epsilon} F_e(\beta) \right]^{-1}; \quad \beta^2 = -2M\epsilon_{ne}. \quad (28)$$

Уместно отметить, что теория возмущений применима только для нахождения сдвига уровня  $\Delta \epsilon_{ne}$ . Значения  $\epsilon_{ne}$  нельзя получить в конечном порядке по  $\hat{V} \Rightarrow g\hat{V}$ , так как  $\epsilon_{ne}(g)$  не является регулярной функцией  $g$  в точке  $g=0$ . Действительно, несингулярный потенциал вида (3) при  $m > 0$  при любом  $g$  имеет конечное число связан-

ных уровней, которые полностью исчезают при  $g < g_0$ , где критическое значение  $g_0 > 0$  в силу неравенства Баргмана /2-4/.

Удобно ввести функции:

$$\tilde{\mathcal{D}}_{h.s.}(\nu; \nu; u) = \mathcal{D}(\nu; \nu, \nu^2, u), \quad (29)$$

$$\Phi_e(u, \nu) = d_e(u, \nu; \nu^2) = \int_m^{\nu-u} d\mu P_e \left[ \frac{u^2 + \nu^2 - \nu^2}{2u\nu} \right] \tilde{\mathcal{D}}_{h.s.}(\nu; \nu; u) \quad (30)$$

$$\omega_e(u, \nu) = \delta(u - \nu) + \Phi_e(u, \nu)/(u^2 - \nu^2) \quad (31)$$

Функция  $\Phi_e(u, \nu)$  является внеэнергетическим обобщением скачка на левом разрезе  $\Phi_e(u, -u)$ , фигурирующего в  $N/D$ -методе, и подчиняется вытекающему из (19) уравнению, найденному еще Альфаро и Редже /2/

$$\Phi_e(u, \nu) = \mathcal{K}_e(u, \nu) + \int_{\nu+m}^{u-m} d\alpha \frac{\mathcal{K}_e(u, \alpha) \Phi_e(\alpha, \nu)}{\alpha^2 - \nu^2} \quad (32)$$

Она определяет иррегулярное решение (решение Иоста /2/) радиального уравнения Шредингера  $\hat{G}_e^{-1}(\nu^2) f_e(\nu, r) = 0$ ,

$$f_e(\nu, r) = \int_{\nu}^{\infty} d\alpha \omega_e(\alpha, \nu) \mathcal{X}_e(\alpha, r), \quad (33)$$

причем

$$2MV(r) f_e(\nu, r) = \int_{\nu+m}^{\infty} du \Phi_e(u, \nu) \mathcal{X}_e(u, r), \quad (33a)$$

где  $\mathcal{X}_e(u, r)$  совпадает с функцией Уиттекера  $W_{0, l+1/2}(2uM)/12/$ . В импульсном представлении:

$$\begin{aligned} \langle p | f_e(\nu) \rangle &= p \int_{\nu}^{\infty} d\alpha \frac{(p/i\alpha)^l}{\alpha^2 + p^2} \omega_e(\alpha, \nu) = \\ &= p(p^2 + \nu^2)^{-1} \left[ (p/i\nu)^l F_e(\nu) - \tau_e(-ip, \nu) \right], \end{aligned} \quad (34)$$

где  $\tau_e(-ip, \nu) = (1/p) \langle p | 2MV(r) | f_e(\nu) \rangle =$

$$= \int_{\nu+m}^{\infty} du (-ip/u)^l \Phi_e(u, \nu)/(u^2 + p^2), \quad (35)$$

так что  $F_e(\nu) = 1 + \tau_e(\nu, \nu)$ . (8a)

Для состояний непрерывного спектра это дает нелинейное выражение через  $\mathcal{D}_{h.s.}$  для решения уравнения ЛШ (13):

$$T_e^{(+)}(p, k) = \frac{p}{2ik} \left[ \tau_e(ip, ik) - S_e(k) \tau_e(-ip, -ik) \right], \quad (36)$$

(где при  $m > 0$ ,  $F_e^*(-ik) = F_e(ik)$ ,  $S_e(k) \equiv F_e^*(-ik)/F_e(-ik)$ ) справедливое при любых  $l$ , в отличие от известного представления справедливого лишь при  $l > l_{max}$  - максимальный момент резонансного состояния:  $T_e^{(\pm)}(u, k) = T_e(u, k; -k^2 \mp i0)$

$$T_e(u, p; \nu^2) = -\frac{1}{2p} \int_m^{\infty} d\mu Q_e \left[ \frac{u^2 + p^2 + \mu^2}{2u\nu} \right] \mathcal{D}(\mu; -ip, \nu^2 - i0) \quad (37)$$

Для состояний дискретного спектра из (34) и (26) следует

$$\begin{aligned} \varphi_{ne}(p) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} C_{ne} \tau_e(-ip, \nu_{ne})/(p^2 + \nu_{ne}^2); \quad \int |\varphi_{ne}|^2 p^2 dp = 1; \\ \text{где} \quad C_{ne}^2 &= (-1)^{l+1} F_e(-\nu) \left[ \partial/\partial \nu F_e(\nu) \right]^{-1}; \quad \nu = \nu_{ne} \end{aligned} \quad (38)$$

Представив (25), (27) в виде  $\Delta F_e(\nu) =$

$$= \int_{m_{\sigma}}^{\infty} d\nu \sigma(\nu) \int_{\nu}^{\infty} d\alpha \omega_e^{(1)}(\alpha, \nu) \int_{\nu}^{\infty} du \left( \frac{\nu}{u} \right)^l \frac{p \left[ \frac{u^2 + \alpha^2 - \nu^2}{2u\alpha} \right] F_e^{(2)}(u, \nu)}{(u^2 - \nu^2)}, \quad (25a)$$

можно подставить сюда (12) при  $\nu = -ik$  и, привлекая последовательно (9), (16), (34), и переходя в конфигурационное представление, получить с учетом (33) и (3):

$$\Delta F_e(-ik) = \frac{2M}{i^l k} \int_0^{\infty} dr f_e^{(1)}(-ik, r) \psi(r) \psi_e^{(+)(2)}(k, r) F_e^{(2)}(-ik).$$

Для малых вариаций это дает:  $\mathcal{V}(r) = \delta V(r)$

$$\delta \ln F_e(-ik) = - \int_0^\infty dr C_{eV}^{(+)}(k; r, r) \delta V(r);$$

где  $C_{eV}^{(\pm)}(k; r, z) = \langle r | \hat{C}_{eV}(-k^2 \mp i0) | z \rangle = -(2M i^{\mp 1} e / k)$ .

$$f_e(\mp ik, R) \psi_e^{(\pm)}(k, R) ; R \geq \equiv \max\{r, z\}$$

Последнее выражение совпадает с вариацией (6). Так как

$$\delta \hat{C}_{eV}(b^2) = \hat{C}_{eV}(b^2) \delta \hat{V} \hat{C}_{eV}(b^2) \quad , \text{ то}$$

$$\delta(\ln F_e(b)) = -\text{Tr} \langle \hat{C}_{eV}(b^2) \delta \hat{V} \rangle$$

Так что формула (25a) эквивалентна при малых вариациях абстрактному определению (6), а вытекающее из нее выражение для сдвига уровня (28) совпадает, следовательно, в первом порядке по возмущению  $\hat{\mathcal{V}}$  с обычной формулой  $\Delta \epsilon_{ne} = \langle ne | \hat{\mathcal{V}} | ne \rangle$ . Локальность потенциала существенно эксплуатируется здесь на всех этапах, в частности для вывода соотношения (16).

Интегральные уравнения (17), (19), (32) позволяют провести исчерпывающий анализ аналитических свойств их решений. В частности, возможно прямое вычисление скачков на всех имеющихся разрезах /5/, что дает следующее спектральное представление

$$d_e(u, p; b^2) = \mathcal{H}_e(u, p) + \int_{p+m}^{u-m} d\alpha \Phi_e(u, \alpha) \Phi_e(-p, -\alpha) / (\alpha^2 - b^2).$$

С точки зрения указанной выше логической цепочки (\*) оно является образом спектрального представления Лоу /4/:  $\hat{T}(b^2) = \hat{V} + \hat{V} \hat{G}(b^2) \hat{V}$ , где подразумевается спектральное представление для полной функции Грина  $\hat{G}_V(b^2) = -[\hat{H}_V + b^2/2M]^{-1}$

## 2. Кулоновское взаимодействие

Кулоновский потенциал:  $m=0, \sum(\nu) = g\delta(\nu)$  является дальнедей-

ствующим и формулы предыдущего пункта нуждаются для него в некоторой модификации. Ее проще всего усмотреть, исходя из явного решения. Решение (4) имеет вид:  $a = g/2b; \omega = (v^2 + b^2) \cdot (p^2 + b^2)/b^2; p = -ip; u = -iu$ .

$$D_c(\nu; p, b^2, u) = g\delta(\nu) + g \frac{\partial}{\partial \nu} \left[ \xi \left( \frac{\omega}{\nu^2} \right) \right]^a \quad (39)$$

Решение (22) с  $a = g/2b; \tilde{\omega} = (u^2 - b^2)(p^2 - b^2)/b^2$  имеет вид:

$$\tilde{D}_c(\nu; p, b^2, u) = g\delta(\nu) + g \frac{\partial}{\partial \nu} \left[ \xi \left( \frac{\tilde{\omega}}{\nu^2} \right) \right]^{-a} \quad (40)$$

где

$$\xi(\sigma) = \left[ 1 + \frac{2}{\sigma} \pm \frac{2}{\sigma} \sqrt{1+\sigma} \right]^{\mp 1} = (\sqrt{1+\sigma} - 1) / (\sqrt{1+\sigma} + 1), \quad (41)$$

и фиксирована положительная при  $\sigma > 0$  ветвь корня:  $|\xi| < 1$ . Аналитическое продолжение (24) от (40) к (39) можно проследить явно:  $\tilde{\omega} \Rightarrow e^{-2i\pi} \omega; \sigma \Rightarrow e^{-2i\pi} \sigma; |\sigma| > 1$ .

$$\xi(e^{-2i\pi} \sigma) \Rightarrow [\xi(\sigma)]^{-1} \quad (41a)$$

Для ВФИ из (40), (21) и (18) получается громоздкое выражение, содержащее сингулярность вида:

$$F_{ec}(p, b) \propto \left( \frac{p+b}{p-b} \right)^a \quad (42)$$

Таким образом, в импульсном представлении кулоновское дальнее действие проявляется сингулярностями на энергетической поверхности в (39), (40), (42), и физический смысл имеют лишь коэффициенты при этих сингулярностях /13/. Если, следуя /13/, определить полуэнегетические величины:  $\tilde{D}_c^{h.s.}(\nu; b; u) =$

$$= \lim_{p \rightarrow b} e^{-\frac{i\pi a}{2}} \left( \frac{p-b}{2b} \right)^a \frac{\tilde{D}_c(\nu; p, b^2, u)}{\Gamma(1+a)} = \frac{e^{-\frac{i\pi a}{2}} 2\nu g (\nu^2)^{a-1}}{(u^2 - b^2)^a \Gamma(a)} ; \quad (43)$$

$$D_c^{(+h.s.)}(\nu; -k^2; -iU) = \lim_{\substack{p^2 \rightarrow k^2 \\ \delta \rightarrow 0+}} e^{+\frac{i\pi a}{2}} \left[ \frac{k^2 + i\delta - p^2}{4k^2} \right]^{-a} \frac{D_c(\nu; -ip, -k^2 - i\delta, -iU)}{\Gamma(1-a)} \quad (44)$$



$$= e^{\frac{i\pi a}{2}} \frac{2\gamma g(\gamma^2)^{-a-1}}{\Gamma(-a)(\nu^2 - k^2 - i0)^{-a}} ; \quad a = \frac{g}{2\theta} = \frac{g}{2(i-k)}$$

где формально считается, что при предельном переходе  $g = g_1 + i g_2$ ,  $g_2 > 0$ , то не сложно найти обобщение всех предыдущих результатов. Вместо (II) и (8) из (43) получается выражение

$$F_{ec}(\nu) = \lim_{\rho \rightarrow \nu} e^{-\frac{i\pi a}{2}} \left(\frac{\rho - \nu}{2\rho}\right)^a \frac{F_{ec}(\rho, \nu)}{\Gamma(1+a)} = \tau_{ec}(\nu, \nu), \quad (45)$$

а взамен (33) - представление:  $\tau_{ec}(\rho, \nu) = \int_{\nu}^{\infty} du \left(\frac{\rho}{u}\right)^{\ell} \Phi_{ec}(u, \nu) / (u^2 - \rho^2)$

$$f_{ec}(\nu, \nu) = \int_{\nu}^{\infty} du \frac{\Phi_{ec}(u, \nu)}{u^2 - \nu^2} \chi_{\ell}(u, \nu), \quad (46)$$

проверяемое в приложении для чисто кулоновского потенциала. Следует подчеркнуть, что первые равенства (43), (44) и соотношения (45), (46) справедливы и при наличии короткодействующей добавки вида (3). Для чисто кулоновского потенциала из (31) и (43) можно получить  $\Phi_{ec}(u, \nu) =$

$$= e^{-\frac{i\pi a}{2}} g \rho^{-a} \left(\frac{u^2 + \nu^2}{2u\nu}\right) \quad \text{и далее } F_{ec}^c(\nu) = \frac{e^{-\frac{i\pi a}{2}} \ell!}{\Gamma(\ell+1+a)} \quad (47)$$

т.е. правильное выражение для  $F_{ec}^c/4/$ . Из (37) и (44) вытекает вероятно известное выражение

$$T_{\ell}^{c(+)}(\nu, k) = e^{-\frac{i\pi a}{2}} i a Q_{\ell}^a \left(\frac{\nu^2 + k^2}{2\nu k}\right),$$

которое в (I2) дает простое интегральное представление для кулоновской ВФИ при  $\text{Im}k=0$ :

$$F_{\ell}^c(u, -ik) = 1 + \frac{e^{-i\pi a} a \Gamma(\ell+1)}{i\pi \Gamma(\ell+1+a)} \int_0^{\infty} ds^2 \frac{(s/k)^{\ell}}{s^2 + u^2} Q_{\ell}^a \left(\frac{s^2 + k^2}{2sk}\right). \quad (48)$$

При целых значениях  $\ell$ , подставляя сюда формулы 3.2 (3), 3.3 (4) и 10.8 (I3), 10.8 (I6) из /I2/, переходя к интегралу по всей оси  $S$  и замыкая контур в верхней полуплоскости, можно воспроиз-

вести для  $u=0-i\nu$  представление из работы /I3/

$$F_{\ell}^c(-i\nu, -ik) = 1 + c_{ea} \left[ x^{\ell} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^a \rho_{\ell}^{(-a, a)} \left(\frac{x^2+1}{2x}\right) - A_{\ell}(x^2, a^2) \right],$$

где  $x = \frac{u}{k}$ ;  $c_{ea} = F_{\ell}^c(-ik) F_{\ell}^c(ik) \Gamma(1+a) \Gamma(1-a)$ ;  $\rho_{\ell}^{(-a, a)}(z)$  - полином Якоби, а вычитаемый полином теперь однозначно фиксируется соображениями размерности, четностью по  $k$  и асимптотикой по  $U$  (II) функции  $F_{\ell}^c(-i\nu, -ik)$ :

$$A_{\ell}(x^2, a^2) = \sum_{s=0}^{\ell} h_{\ell}^{(s)}(a^2) (x^2)^s, \quad \text{где}$$

$$h_{\ell}^{(\ell-s)}(a^2) = (1/(2s)!) \cdot (D_x)^{2s} \left[ x^{\ell} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^a \rho_{\ell}^{(-a, a)} \left(\frac{1+x^2}{2x}\right) \right] \Big|_{x=0}.$$

В точках дискретного спектра:  $\nu_n = -g/2n$  используя в (47) формулы 3.3 (I4) и 3.2 (44) из /I2/ при  $n = -a \geq \ell+1$ , и определения обобщенных функций из /I4/, можно получить из (43)

$$\tilde{D}_c^{h.s.}(\nu; \nu_n; u) = 2g \frac{n! i^{-n}}{(2n)!} (u^2 - \nu_n^2)^n \delta^{(2n)}(\nu), \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \text{а из (47): } \Phi_{\ell}^c(u, \nu_n) / (u^2 - \nu_n^2) &= \\ &= g i^n \sum_{s=0}^{\ell} \frac{(\ell+s)! (-1)^{s+1} (u + \nu_n)^{n-s-1}}{(2s)! s! (n-s)} \delta^{(n-s)}(u - \nu_n). \end{aligned}$$

Подставив это в (30) и (38) (46) можно получить известные выражения для кулоновских волновых функций дискретного спектра в координатном и импульсном представлениях. Выражение для сдвига уровня в кулоновском случае принимает вид

$$2M\Delta E_{n\ell} = \int_0^{\infty} d\nu \sigma(\nu) O_{n\ell}(\nu) : \quad \text{где } O_{n\ell}(\nu) = \langle n\ell | e^{-\nu r} | n\ell \rangle,$$

$$\begin{aligned} \text{с другой стороны } O_{n\ell}(\nu) &= \\ &= \frac{2\nu_n^2 i^n (-1)^{\ell+1}}{n(n-\ell-1)! \ell!} \int_{\nu_n}^{\infty} d\alpha \frac{\Phi_{\ell}^c(\alpha, \nu_n)}{\alpha^2 - \nu_n^2} \int_{\alpha+\nu}^{\infty} du \left(\frac{\nu_n}{u}\right)^{\ell} \rho_{\ell} \left[\frac{u^2 + \alpha^2 - \nu^2}{2u\alpha}\right] \frac{F_{\ell}^c(u, \nu_n)}{(u^2 - \nu_n^2)} \quad (50) \end{aligned}$$

Стоит отметить здесь, что хотя соотношения (12), (35), (36) и второе равенство (34) сохраняют свой вид в кулоновском случае, но уравнение III (13) для полувнеэнергетической парциальной  $T_{ec}^{(\pm)h.s.}$  матрицы, а также уравнения (32) для  $\Phi_{ec}$  и (4), (22) для полувнеэнергетических спектральных плотностей (44) и (43) заменяются при этом предельном переходе соответствующими однородными уравнениями. Это не противоречит неоднородному уравнению для состояний рассеяния, т.к. в этом случае обычное соотношение между его волновой функцией и  $T_e^{(\pm)}$ :

$$\frac{2}{\pi} \langle p|k|e^{\pm}\rangle = \psi_{ke}^{(\pm)}(p) = \delta(p-k) + \frac{2}{\pi} \frac{k T_e^{(\pm)}(p,k)}{(p^2 - k^2 \mp i0)}$$

не имеет места /13/. Тем не менее рассуждения, приводящие к уравнению (17) для ВЭИ остаются в силе и для однородного уравнения III, если учесть, что при  $\beta = -ik$ , в силу (42), равенство (II) становится тривиальным:  $F_e^c(-ik, -ik) = 0$ , при  $\alpha = ig/2k$  и  $\text{Im}g > 0$ . Исчезновение общего свободного члена  $\Sigma$  в полувнеэнергетических вариантах уравнений (4) и (22) приводит к радикальному отличию аналитической структуры их решений (44) и (43) от случая короткодействующего потенциала, в котором свободный член  $\Sigma$  выживает в этом пределе и гарантирует сохранение возможности аналитического продолжения (24) и для полувнеэнергетических плотностей  $D^{h.s.}$ , тогда как правые части равенств (43) и (44), очевидно, не связаны более этим аналитическим продолжением. Аналогичный факт для кулоновского поля был отмечен в /15/.

### 3. Приближенное вычисление лэмбовского сдвига.

Эффективный локальный потенциал взаимодействия с длинноволновыми флуктуациями.

Представленная выше система динамических уравнений (22), (8) имеет определенные преимущества при вычислении радиационных сме-

щений атомных уровней и допускает физическую интерпретацию в терминах Швингеровской теории источников /16/, если рассматривать взаимодействие с внешним полем как предельный случай некогерентного обмена с источником внешнего поля и считать, что эффективная многочастичная функция распространения кулоновских "квантов" имеет ненулевую спектральную плотность, определяемую скачком  $D_c$  по передаче импульса  $t$  от кулоновской T-матрицы. Иными словами, в нерелятивистском пределе, отвлекаясь от спиновых степеней свободы, вводятся формальные  $t$ -канальные промежуточные состояния для внешнего кулоновского поля, разрезание которых производится не по обычным правилам Кутковского, а путем вычисления скачка по  $t$ . При этом, во-первых, автоматически исчезает нефизический вклад собственно энергетической диаграммы свободного электрона /17/, не имеющей скачка по  $t$ . Во-вторых, обычное искусственное разделение сдвига на низко- и высокочастотную части /17/ приобретает ясный физический смысл разделения вкладов различных промежуточных состояний в  $t$ -канале: двухэлектронное состояние в поляризации вакуума и радиоправке к вершине - рис.1 - отвечает высокочастотной части, а "состояния" внешнего поля - рис.2 - низкочастотной части сдвига.

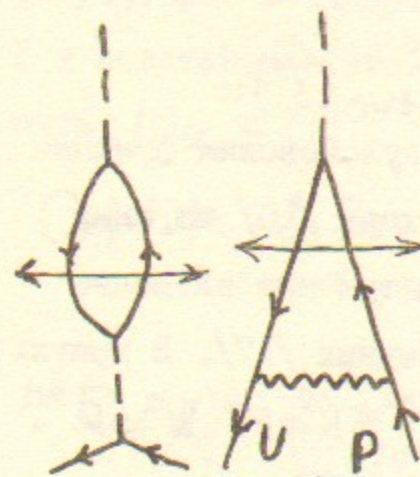


Рис.1

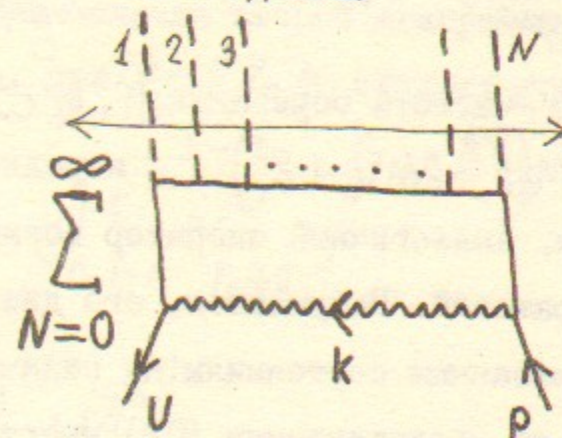


Рис.2

Вклад двухэлектронного промежутка в диаграммах рис.2 с  $N \geq 2$  приводит к более высоким степеням по константе взаимодействия с внешним полем ( $Z\alpha$ ), так как будет содержать жесткие пропагаторы электрона - вдали от массовой поверхности. В-третьих, необходимость в перенормировке возникает только в низкочастотной части сдвига (рис.2) и отвечает перенормировке массы связанного электрона. При этом операторная структура контрчленов однозначно фиксируется условием калибровочной инвариантности, которое запрещает давать вклад в наблюдаемые величины разрезанию в петлевых графиках одного кулоновского "кванта" /18/. Кроме того, попытка разрезать диаграммы рис.1 по внешним фотонным пропагаторам, сопоставляя им по обычным правилам  $\delta(t)$ , также дает нулевой результат из-за порогового поведения соответствующих (перенормированных) величин, диктуемого опять же калибровочной инвариантностью /17/. Следовательно, должен исчезать и скачок слагаемого  $N=1$  на рис.2. Это достигается в нерелятивистском пределе в следующем перенормированном операторе для этой диаграммы:

$$z = 2Mk$$

$$\frac{2M\omega}{4M^2} \int_0^{2M\omega} z dz \hat{p} \cdot \hat{G}_{VC}(b^2+z) \hat{p} \rightarrow \frac{2M\omega}{2} \int_0^{2M\omega} \frac{z dz}{4M^2} \left[ \hat{p}, \left[ \hat{p}, \hat{G}_{VC}(b^2+z) \right] \right] \quad (51)$$

где  $\omega$  - частота обрезания;  $|\epsilon_n| \ll \omega \ll M$ , и  $\hat{G}_{VC}(b^2) = -2M(\hat{p}^2 + 2M\hat{V}_c + b^2)^{-1}$  - нерелятивистская кулоновская функция Грина. Аналогичный оператор возникает в подходе /16/ из тех соображений. Разумеется, его диагональные матричные элементы по связанным состояниям не отличаются от обычных /17/. В импульсном же представлении (51) имеет вид:

$$\frac{(\vec{U}-\vec{p})^2}{2} \int_0^{2M\omega} z dz \left\{ -\frac{\delta(\vec{U}-\vec{p})}{2M(z+\delta_\rho)} + \frac{\langle \vec{U} | \hat{T}_c(b^2+z) | \vec{p} \rangle}{(z+\delta_\nu)(z+\delta_\rho)} \right\} \quad (52)$$

Так что первое слагаемое с  $N=0$  исчезает автоматически. Вклад слагаемого с  $N=1$  не зависит от  $t$  и исчезает при взятии скачка. При обычном способе вычислений он сокращается с аналогичными, не зависящими от  $t$ , вкладами остальных диаграмм /19/. С учетом явных выражений (1), (39) спектральную плотность (52) можно представить в виде:  $disc(52) =$

$$= \sigma_2(\nu; \delta_\nu, \delta_\rho) = \frac{2M\omega}{M} \int_0^{2M\omega} \frac{z dz}{(z+\delta_\nu)(z+\delta_\rho)} \frac{\nu^2 \partial}{\partial \nu} \left[ \xi \left( \frac{\omega_z(\delta)}{\nu^2} \right) \right] - \frac{M Z \alpha}{b_z} \quad (53)$$

где

$$b_z^2 \equiv b^2 + z; \quad \omega_z(\delta) = (z + \delta_\nu)(z + \delta_\rho) / b_z^2.$$

В отличие от спектральной плотности потенциала Юинга и вершинной диаграммы рис.1, выражение (53) нельзя непосредственно подставить в формулу для сдвига (50), так как зависимость от виртуальностей  $\delta_\nu = b^2 + \vec{U}^2 = M^2 - W^2 + \vec{U}^2 = M^2 - U_4^2$ ;  $\delta_\rho = -b^2 + \vec{p}^2 = M^2 - W^2 + \vec{p}^2 = M^2 - p_4^2$ ;  $p_4^\mu = (W, \vec{p})$ ;  $U_4^\mu = (W, \vec{U})$  означает нелокальность потенциала. Как известно, /17/ зависимость от виртуальностей не существенна в высокочастотной части сдвига, если только они не используются в качестве инфракрасного регулятора. Стандартные вычисления скачка второй диаграммы рис.1 и подстановка его в (50), где, при  $\nu = 2b_n \eta$  следует положить:  $m_{\sigma_1} = 2M$ ;

$$O_{ne}(\nu) = 2b_n \tilde{O}_{ne}(\eta); \quad B_{ne}^{(j)} \equiv C_{n-e-1}^{j-1} C_{n+e}^{j-1};$$

$$\eta^2 \tilde{O}_{ne}(\eta) = \frac{1}{2n(\eta+1)^{2n}} \sum_{j=1}^{n-e} B_{ne}^{(j)} (\eta^2)^j, \quad (54)$$

при различных инфракрасных регуляризациях, (без учета вклада аномального магнитного момента), дают привычные выражения /17/ :

$$(\ell=0) \quad \Delta \varepsilon_{n0}^> = \frac{8}{3} \frac{\alpha (Z\alpha)^2}{\pi n} |\varepsilon_n| \mathcal{L}_{n0}^>(\omega, \mu_0, \chi), \quad \text{где } \varepsilon_n = -\frac{M(Z\alpha)^2}{2n^2} \text{ и (55)}$$

$$\mathcal{L}_{n0}^> = \begin{cases} \ln \frac{M}{2\omega} + \frac{11}{24} = \ln \frac{M}{\lambda} - \frac{3}{8}, & \text{где } \lambda - \text{масса фотона и } \ln \frac{2\omega}{\lambda} = \frac{5}{6}; \\ \ln \frac{M}{2\mu_0} - \frac{1}{8}, & \text{где } 2M\mu_0 = \delta_\nu = \delta_\rho; \\ \ln \frac{M}{2\chi} + \frac{1}{2} + \frac{11}{24}, & \text{где } 2M\chi = \delta_\nu, \text{ при } \delta_\rho \equiv 0, \end{cases}$$

или наоборот. Последняя формула очень похожа на соответствующий точный ответ /17/, /21/ :  $\mathcal{L}_{n0}^> + \mathcal{L}_{n0}^< =$

$$= \ln \frac{M}{\langle \varepsilon_{n0} \rangle} + \frac{11}{24}, \quad \text{так что характерным виртуальностями отвечает } \chi \lesssim \langle \varepsilon_{n0} \rangle \sqrt{e}$$

. Пренебрегая ими, можно, в первом приближении положить в (53)  $\delta_\nu = \delta_\rho = 0$ , что означает переход к отрицательным  $\vec{v}^2$  и  $\vec{p}^2$  (равным  $-\beta_n^2$ ), который осуществляется аналитическим продолжением (24), (41a) и дает:  $\omega \Rightarrow e^{2i\pi} \omega$ ,

$$\sigma_2 \Rightarrow \tilde{\sigma}_2: \quad \tilde{\sigma}_2(\nu; \delta_\nu, \delta_\rho) = \frac{Z\alpha}{M} \int_0^{\nu} \frac{z dz}{(z+\delta_\nu)(z+\delta_\rho)} \nu^2 \frac{\partial}{\partial \nu} \left[ \zeta \left( \frac{\omega_z(\delta)}{\nu^2} \right) \right] + \frac{MZ\alpha}{\beta_z} \quad (56)$$

и при  $\delta_\nu = \delta_\rho = 0$ :

$$\tilde{\sigma}_2(\nu) = \frac{Z\alpha}{M} \int_0^{\nu} \frac{dz}{z} \nu^2 \frac{\partial}{\partial \nu} \left[ \zeta \left( \frac{z^2}{\nu^2 \beta_z^2} \right) \right] \frac{MZ\alpha}{\beta_z} \quad (56a)$$

Поведение при  $\nu \rightarrow \infty$  этой спектральной плотности, в отличие от (53), не зависит от  $n$  и при любом конечном  $\omega$  имеет вид

$$\tilde{\sigma}_2(\nu) \lesssim \nu^{1-c(\omega)}, \quad \text{где } c(\omega) \rightarrow 0 \text{ при } \omega \rightarrow \infty$$

Для величины

$$-\mathcal{L}_{ne}^< = \delta_{e,0} \ln \frac{Z^2 R_Y}{\omega} + \ln \frac{\langle \varepsilon_{ne} \rangle}{Z^2 R_Y}; \quad Z^2 R_Y = |\varepsilon|; \quad (57)$$

получается выражение,

$$-\mathcal{L}_{ne}^< = 2 \int_0^\infty dt \nu^2 \tilde{\sigma}_{ne}(\nu) \int_0^{\nu} \frac{dz}{z} \frac{\partial}{\partial \nu} \left[ \zeta \left( \frac{z^2}{4\beta_n^2 \nu^2 \beta_z^2} \right) \right] \frac{MZ\alpha}{\beta_z}$$

которое после замены  $\nu = 2\beta_n \rho$ ;  $z = 4\beta_n^2 \rho / (1-\rho)^2$ ;  $(1-\rho)^2 = (2\beta_n)^2 / (2M\omega)$ ;  $\nu(t, \rho) = (\frac{1}{t} - t) / (\frac{1}{\rho} - \rho)$ ; принимает вид:

$$-\mathcal{L}_{ne}^< = -4n \int_0^{\rho_\omega \rightarrow 1} \frac{d\rho}{\rho} \int_0^{\frac{1}{t}} \frac{dt}{t} t^{2n \frac{(1-\rho)}{(1+\rho)}} \nu^2(t, \rho) \tilde{\sigma}_{ne}(\nu(t, \rho)). \quad (58)$$

Как и должно быть, расходящееся слагаемое здесь имеется только при  $\ell=0$  и дает правильный знак и коэффициент при  $\ln \omega$ . После его выделения численное интегрирование дает логарифмы средних энергий возбуждения для  $\ell=0$  с точностью 1%, что видно из таблицы I, где приведено сравнение с расчетами /20/ для  $-\mathcal{L}_{ne}^< =$

$$= \ln \frac{\langle \varepsilon_{ne} \rangle}{Z^2 R_Y}$$

Таблица I

$\ell=0$

| n | $-\mathcal{L}_{n0}^<$ | результат/20/ |
|---|-----------------------|---------------|
| 1 | 2.956                 | 2.984         |
| 2 | 2.842                 | 2.812         |
| 3 | 2.789                 | 2.768         |
| 4 | 2.759                 | 2.750         |

Так что для  $S$ -волновых сдвигов зависимость от виртуальностей, как и следовало ожидать, оказывается вообще не принципиальной. Для высших  $\ell$  это приближение является слишком грубым, определяя лишь знак и порядок соответствующих значений и системати-

чески завышая в 1.5 + 3 раза их абсолютную величину. Однако, его можно улучшить следующим образом. Матричные элементы произвольного скалярного возмущения в импульсном представлении зависят от трех независимых инвариантов:  $\vec{q}^2 = (\vec{v} - \vec{p})^2$ ;  $\delta_p = \beta^2 + \vec{p}^2$ ;

$$\langle \vec{v} | \hat{\psi}_\beta | \vec{p} \rangle = \psi(\vec{q}^2; \delta_v, \delta_p).$$

При вычислении его среднего значения по состояниям  $|ne\rangle$ , удовлетворяющим уравнению  $\hat{\delta}_p |ne\rangle = (\beta_{ne}^2 + \vec{p}^2) |ne\rangle = -2M\hat{V} |ne\rangle$ , разложив эти матричные элементы в ряд Тейлора по  $\delta_v, \delta_p$ , можно в полуклассическом приближении пренебречь некоммутативностью  $\hat{\delta}_p$  и  $\hat{V}$ . Тогда в этих обкладках можно заменить:  $\psi(\vec{q}^2; \delta_v, \delta_p) \Rightarrow \psi(\vec{q}^2; -2M\hat{V}, -2M\hat{V})$ . Если  $V$  - локальный потенциал, то получившийся оператор в координатном представлении также будет локальным оператором:

$$\langle \vec{x} | \hat{\psi}_{\beta_n} | \vec{y} \rangle \Rightarrow \delta(\vec{x} - \vec{y}) \Omega(\vec{x}) \quad \text{где} \quad \Omega(\vec{x}) = \int d^3q e^{i(\vec{q} \cdot \vec{x})} \psi(\vec{q}^2; -2MV(\vec{x}), -2MV(\vec{x})).$$

В рассматриваемом случае зависимость от  $\vec{q}^2$  определяется плотностью (56) и вычисление интеграла дает:  $r = |\vec{x}|$ ;  $g = -2Mz\alpha$ ;

$$\Omega(\vec{x}) = 2\pi^2 \int \frac{d\nu}{\nu^2} \tilde{\sigma}_2(\nu; \frac{|g|}{r}, \frac{|g|}{r}) \left[ \nu^2 e^{-\nu r} - 4\pi \delta_3(\vec{x}) \right] =$$

$$= 2\pi^2 \int_0^\infty d\nu \sigma^<(\nu) \frac{e^{-\nu r}}{\nu} \quad \text{Где учтено, что дельта-функция дает нулевой вклад. Новая спектральная плотность } \sigma^<(\nu) \text{ легко находится заменой переменных } \nu = \gamma \left[ 1 + |g|/(rz) \right]:$$

$$\sigma^<(\gamma) = \frac{2\alpha}{M} \int_0^\infty \frac{dz}{z} e^{-\gamma \frac{|g|}{z}} \gamma^2 \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[ \zeta \left( \frac{z^2}{\gamma^2 \beta_z^2} \right) \right] \frac{Mz\alpha}{\beta_z} \quad (59)$$

и отличается от (56) при  $\delta_v = \delta_p = 0$  наличием затухающей экспоненты, которая, не меняя зависимости при  $z \rightarrow \infty$ , резко меняет поведение при  $\nu \rightarrow \infty$ , обращая в нуль коэффициент при  $\ln \omega$  в выражении для  $S$  - волнового сдвига. Ясно, однако, что любое изменение зависимости спектральной плотности от  $\nu$  является нефизическим артефактом сделанного приближения и должно быть устранено. Подтверждением этому служит приводимая ниже таблица 2, в которой приведены приближенные значения  $\bar{I}_{ne}^<$ , полученные по спектральной плотности (59), где в экспоненте величина  $\gamma$  зафиксирована на некотором характерном значении  $\gamma \rightarrow \gamma_n = 2\beta_n \theta$ ,  $\beta_n = \frac{Mz\alpha}{n}$ , зависящем от энергии данного состояния:

$$-\bar{I}_{ne}^< = \delta_{e,0} \left[ C + \ln \frac{4\theta}{n} + \ln \frac{z^2 R \gamma}{\omega} \right] - 2n \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho} e^{-n \frac{(1-\rho)^2 \theta}{\rho}}.$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{t} t^{2n \frac{(1-\rho)}{1+\rho}} \left[ 2b^2(t, \rho) \tilde{O}_{ne}(b(t, \rho)) - \delta_{e,0} \right], \quad (60)$$

где  $C$  - постоянная Эйлера,  $b(t, \rho) = \left( \frac{1}{t} - t \right) / \left( \frac{1}{\rho} - \rho \right)$ . Величина  $\theta$  с хорошей точностью не зависит от  $n$  и имеет оптимальное значение  $\approx 1.25 \pm 0.05$

Таблица 2.

| $\theta = 1.27$ |     |                   |         |     |     |                   |                                  |
|-----------------|-----|-------------------|---------|-----|-----|-------------------|----------------------------------|
| $n$             | $l$ | $-\bar{I}_{ne}^<$ | $/20/$  | $n$ | $l$ | $-\bar{I}_{ne}^<$ | $/20/$                           |
| 1               | 0   | 3.286             | 2.984   | 3   | 2   | -0.0046           | -0.0052                          |
| 2               | 0   | 3.063             | 2.811   | 4   | 0   | 2.902             | 2.750                            |
| 2               | 1   | -0.0330           | -0.0300 | 4   | 1   | -0.0451           | -0.0420                          |
| 3               | 0   | 2.961             | 2.767   | 4   | 2   | -0.0057           |                                  |
| 3               | 1   | -0.0404           | -0.0382 | 4   | 3   | -0.0013           |                                  |
|                 |     |                   |         | 7   | 0   | 2.814             | 2.721 ( $n \rightarrow \infty$ ) |

Таким образом, простой полуклассический учет зависимости от виртуальностей позволяет <sup>ПОСТРОИТЬ</sup> локальный потенциал, правильно передающий общий характер изменения дискретного спектра и дающий с 10% точностью его численные значения.

### Заключение

Выше было доказано существование прямой связи (8) между парциальным детерминантом (6) трехмерного сферически симметричного эллиптического оператора и спектральной плотностью (I) по передаче импульса его полной функции Грина  $\hat{G}_V(\beta^2)$ . Возникающая система динамических уравнений проиллюстрирована на примере потенциала Кулона, где она дает ряд новых интегральных представлений для решений этой задачи. Затем показана ее эффективность при вычислении радиационных смещений. Помимо уменьшения числа диаграмм и отсутствия явно расходящихся выражений, нуждающихся в промежуточной перенормировке, в предлагаемом подходе удается придать физический смысл разбиению сдвига на высоко и низко-частотный вклады и получить приближенное описание последнего в терминах локального потенциала типа Юкавы.

Нетривиальным моментом этого описания, как и всего подхода в целом является процедура аналитического продолжения (24) спектральной плотности по импульсам начального и конечного состояний. Необходимость в ней при вычислении низкочастотной части сдвига станет строго обоснованной, если удастся обобщить изложенную выше схему на случай нелокальных взаимодействий. Однако, приведенные численные результаты не оставляют сомнений в необходимости этой процедуры. Ее роль видна непосредственно из представления (I), записанного для растущей  $\mathcal{D}(\nu, \dots)$  с вычитаниями. Последние отвечают сумме по состояниям дискретного спектра, которая дает основной вклад в сдвиг при обычном спо-

собе вычислений /20/. Указанное аналитическое продолжение (24), (4Ia) превращает спектральную плотность (39), (53) (деленную на  $\nu^2$ ) из растущей функции  $\nu$  в падающую функцию (40), (56), эффективно "загоняя" связанные состояния обратно в спектральный интеграл (I).

Можно показать, что развитая динамическая схема дословно переносится в пространство произвольного числа измерений  $N \geq 2$ , а спектральные плотности для одного и того же потенциала  $V(r)$  и разных размерностей  $\Gamma_N$  и  $\Gamma_L$  оказываются связаны между собой простым соотношением (см. приложения С и О). Соответствующая связь между полными T-матрицами:  $\langle \vec{U} | \hat{T}^{(N)}(\beta^2) | \vec{P} \rangle \equiv T^{(N)}(t, U^2, P^2, \beta^2)$  получается восстановлением по скачку  $\mathcal{D}^{(N)}$  только в отсутствие вычитаний:  $t = -(\vec{U} - \vec{P})^2$ ,  $a_N = (3-N)/2$ ,

$$T^{(L)}(t, \dots) = \prod^{a_L - a_N} \left[ \frac{d}{dt} \right]^n \int_{-\infty}^t \frac{d\tau (t - \tau)^{a_L - a_N + n - 1}}{\Gamma(a_L - a_N + n)} T^{(N)}(\tau, \dots) \quad (61)$$

и проверяется на точно решаемом кулоновском примере /15/.

Автор благодарен Ю.В.Парфенову за постоянное внимание к работе, В.Л.Черняку за обсуждение пункта 3, В.В.Серебрякову за чтение рукописи, и В.В.Соколову за ценные замечания.

Приложение А

Соотношение (9) следует из равенства

$$\int_{u+v}^{\infty} \frac{d\alpha (u/\alpha)^{\ell} \rho \left[ \frac{u^2 + \alpha^2 - v^2}{2u\alpha} \right]}{\alpha^2 + k^2} = \frac{1}{2\pi k} \int_0^{\infty} \frac{d\alpha^2 (\alpha/k)^{\ell} Q \left[ \frac{\alpha^2 + k^2 + v^2}{2\alpha k} \right]}{\alpha^2 + u^2} \quad (\text{П.1})$$

где  $\text{Re } \ell > -1, \text{Re } u > 0, |\text{Im } k| < v$ . Для  $|\text{Re } \ell| < 1$  его можно проверить, используя в правой части интеграла от функций Бесселя: 6.612(3), 6.565(4), 6.521(2) из /22/ и формулу (П.9) при  $\alpha = 0$ . Приведем независимое доказательство для целых  $\ell$ . С помощью производящих функций 3.7(33), (34) из /12/ находим, что достаточно для любого  $|h| < 1$  установить равенство:

$$\int_{u+v}^{\infty} \frac{\alpha d\alpha \left[ \alpha^2(1-h) + v^2 h - u^2 h(1-h) \right]^{-\frac{1}{2}}}{\alpha^2 + k^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{s ds}{s^2 + u^2} \cdot \frac{1}{2N} \ln \left( \frac{R+N}{R-N} \right), \quad (\text{П.2})$$

где  $2SR = s^2 + k^2 + v^2 - 2s^2 h; N = [k^2(1-h) - v^2 h - s^2 h(1-h)]^{\frac{1}{2}}$ .

Подставляя в правую часть (П.2) представление (везде берутся главные ветви)

$$\frac{1}{2N} \ln \left( \frac{R+N}{R-N} \right) = \int_{-s}^s dt \frac{[2ivt(1-h) + v^2 - s^2(1-h)]^{\frac{1}{2}}}{v^2 + k^2 - s^2 + 2ivt}$$

и меняя порядок интегралов, приведем ее к виду

$$\frac{iv}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{u^2 + k^2 + v^2 + 2ivt} [C(m_1) - C(m_2)], \quad (\text{П.3})$$

где  $m_1 = [k^2(1-h)^2 - v^2 h(2-h) - 2ivth(1-h)]^{\frac{1}{2}}$ ;

$m_2 = i[v^2 + u^2(1-h)^2 + 2ivt(1-h)]^{\frac{1}{2}}$ ;  $C(m) = \frac{1}{m} \ln \left( \frac{r+m}{r-m} \right)$ ;

$r = t(1-h) - iv$ ;

Функции  $C(m_{1,2})$  имеют только логарифмические особенности в точках  $t_1^{\pm} = iv \pm k$  и  $t_2^{\pm} = \pm iu$ , соответственно. При условии

$\text{Re}(u^2 + k^2 + v^2) > 0, \text{Re } u > 0$  у подынтегральной функции в (П.3) в  $\text{Im } t < 0$  имеется только одна особенность:  $t_2^- = -iu$ .

Деформируя контур интегрирования вокруг разреза по отрицательной мнимой оси от этой точки до бесконечности, и полагая  $\alpha^2 = u^2 + v^2 + 2ivt$ , придем к левой части (П.2). Используя (П.1), 3.7(29), (31) из /12/, либо комбинируя (П.9) с 6.578(6) и указанными выше формулами из /22/, можно получить:

$$\int_{u+v}^{\infty} \frac{d\alpha}{\alpha^2 + k^2} \left( \frac{u}{\alpha} \right)^j \rho_j^a \left[ \frac{u^2 + \alpha^2 - v^2}{2u\alpha} \right] [\Delta(\alpha^2, u^2, v^2)]^{-\frac{\alpha}{2}} = \quad (\text{П.1a})$$

$$= \frac{1}{2\pi k} \int_0^{\infty} \frac{d\alpha^2 e^{-i\pi\alpha}}{\alpha^2 + u^2} \left( \frac{\alpha}{k} \right)^j Q_j^a \left[ \frac{\alpha^2 + k^2 + v^2}{2\alpha k} \right] [\Delta(\alpha^2, k^2, v^2)]^{-\frac{\alpha}{2}}$$

Приложение В

Обобщенная теорема сложения для функций Лежандра и формула 3.15(9) из /12/ приводят к теореме умножения для этих функций /23/

$$C_a \left[ (X^2 - 1)(Y^2 - 1) \right]^{\frac{a}{2}} P_{\ell}^a(X) P_{\ell}^a(Y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\varphi [T_{\frac{1}{2}}^2 - 1]^{\frac{a}{2}} (\sin \varphi)^{-2a} P_{\ell}^a(T_{\frac{1}{2}}), \quad (\text{П.4})$$

где  $C_a = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\frac{1}{2} - a)$ ;  $b = -\cos \varphi$ ;

$T_{\frac{1}{2}}(X, Y) = XY + b[(X^2 - 1)(Y^2 - 1)]^{\frac{1}{2}}$ ;

$|\arg(x-1)| \leq \pi; \text{Re } X > 0$ , и тоже для  $Y$ . Пусть  $X(\alpha)$  и  $Y(\alpha)$  - непрерывные однозначные функции, удовлетворяющие этим условиям при  $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ , причем  $X(\alpha_2) = Y(\alpha_1) = 1$ . Тогда для любой интегрируемой функции  $G_{\ell}(\alpha)$  из (П.4) можно получить, что

$$W(X, Y, T) = T^2 + X^2 + Y^2 - 2XYT - 1;$$

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\rho_e^a(x) \rho_e^a(y) G(\alpha)}{[(x^2-1)(y^2-1)]^{a/2}} = \frac{T_{(2)}^a}{1 C_a \pi (T^2-1)^{-a/2}} \int_{\Lambda^-(T)}^{\Lambda^+(T)} \frac{d\alpha G(\alpha)}{[E-W(x,y,T)]^{a+1/2}} \quad (\text{П.5})$$

где  $W(x,y,T) = (T-T_+)(T-T_-)$ ;  $\Lambda^\pm(T)$  - соседние нули функции  $W(x,y,T)$  по  $\alpha$ , между которыми она отрицательна;  $T_{(1)} = 1$  и  $T_{(2)}$  - корни уравнения  $\Lambda^+(T) = \Lambda^-(T)$ . В работе использованы следующие варианты (П.5):

$$\int_{\rho+\mu}^{u-\gamma} \rho_e \left[ \frac{u^2 + \alpha^2 - \gamma^2}{2u\alpha} \right] \rho_e \left[ \frac{\rho^2 + \alpha^2 - \mu^2}{2\alpha\rho} \right] G(\alpha) = \int_{\gamma+\mu}^{u-\rho} \rho_e \left[ \frac{u^2 + \rho^2 - \nu^2}{2u\rho} \right] G(\alpha) \quad (\text{П.6})$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{\Lambda^-(\nu; \mu, \gamma; u, \rho)}^{\Lambda^+(\nu; \mu, \gamma; u, \rho)} d\alpha^2 G(\alpha) [(\Lambda^+ - \alpha^2)(\alpha^2 - \Lambda^-)]^{-1/2};$$

$$\Lambda^\pm(\nu; \mu, \gamma; u, \rho) = \frac{1}{2\nu^2} [\nu^2(u^2 + \rho^2 + \mu^2 + \gamma^2 - \nu^2) + (u^2 - \rho^2)(\mu^2 - \gamma^2) \pm \Delta^{1/2}(\nu^2, \mu^2, \gamma^2) \Delta^{1/2}(u^2, \rho^2, \nu^2)]; \Delta(x, y, z) = (x - y - z)^2 - 4yz.$$

$$\int_{\rho+\mu}^u \frac{\rho_e^a(u/\alpha) \rho_e^a[\frac{\alpha^2 + \rho^2 - \mu^2}{2\alpha\rho}]}{[(u^2 - \alpha^2) \Delta(\rho^2, \alpha^2, \mu^2)]^{a/2}} = \frac{\int_{\rho}^{u-\mu} d\gamma (\gamma^2 - \rho^2)^{-a/2} \rho_e^a(\frac{\gamma}{\rho})}{\rho \Gamma(1-a) [(u-\gamma)^2 - \mu^2]^a} \quad (\text{П.7})$$

$$\int_{\beta}^{\nu} \frac{d\mu (\nu^2 - \mu^2)^{a/2} \rho_e^{-a}(\frac{\nu}{\mu}) \rho_e^{-a}(\frac{\mu^2 + \beta^2}{2\mu\beta})}{u^2 - \beta^2} = \int_{\beta}^{\nu} d\gamma \frac{(\gamma - \beta)^a (\nu - \gamma)^{a-1} \rho_e^{-a}(\frac{\gamma}{\beta})}{(\gamma + \beta) 2\beta \Gamma(1+a)} \quad (\text{П.8})$$

Комбинируя (П.7) и (П.8) с интегральными представлениями для функций Уиттекера 7.143 из [22], придем к соотношению

$$\frac{\chi_e(\beta, \nu)}{\Gamma(1-a)} \int_{\mu}^{\infty} d\gamma e^{-\gamma\nu} \frac{1}{\mu(\gamma^2 - \mu^2)^a} = \int_{\beta+\mu}^{\infty} \frac{d\mu \chi_e(\mu, \nu)}{[\Delta(u^2, \beta^2, \mu^2)]^{a/2}} \rho_e^a \left[ \frac{u^2 + \beta^2 - \mu^2}{2u\beta} \right] \quad (\text{П.9})$$

и представлению (46):  $f_e^c(\beta, \nu) \equiv e^{-\frac{i\pi a}{2}} W_{-\alpha, \ell+1/2}(2\beta\nu) =$

$$= \int_{\beta}^{\infty} d\mu \frac{e^{-\frac{i\pi a}{2}} 2a\beta}{u^2 - \beta^2} \rho_e^{-a} \left( \frac{u^2 + \beta^2}{2u\beta} \right) \chi_e(\mu, \nu). \quad (\text{П.10})$$

### Приложение С

Обобщение (3) на произвольное число измерений  $N$ , для  $W(r)$   $= 2M V(r)$ , имеет вид [14]:  $r_N = |\vec{X}_N|$

$$W(|\vec{X}_N|) = \int d^N q e^{i(\vec{q} \cdot \vec{X})} \frac{1}{\pi \Omega_N} \int_m^{\infty} d\gamma \frac{\Sigma^{(N)}(\gamma)}{\gamma^2 + \vec{q}^2}; m \geq 0 \quad (\text{С.1})$$

Спектральная плотность по передаче импульса полной функции Грина  $\hat{G}_W^{(N)}(\beta^2) =$

$$= [\nabla_N^2 - \beta^2 - W(r_N)]^{-1} \hat{G}_0^{(N)}(\beta^2) + \hat{G}_0^{(N)}(\beta^2) \hat{T}^{(N)}(\beta^2) \hat{G}_0^{(N)}(\beta^2) \quad (\text{С.2})$$

в соответствии с (1), равна:  $t = -(\vec{v} - \vec{p})^2$ .

$$\mathcal{D}^{(N)}(\nu; -i\rho, \beta^2, -i\nu) = \nu \Omega_N \frac{1}{2i} \text{disc} \langle \vec{v} | \hat{T}^{(N)}(\beta^2) | \vec{p} \rangle \Big|_{t=\nu^2} \quad (\text{С.3})$$

и подчиняется, (см. (0.3)) вытекающему из  $N$ -мерного аналога (2), уравнению  $\mathcal{D}^{(N)}(\nu; -i\rho, \beta^2, -i\nu) = \Sigma^{(N)}(\nu) - 4^a (N-2) \frac{1}{\pi}$ .

$$\int_m^{\nu-m} d\gamma \Sigma^{(N)}(\gamma) \int_m^{\nu-\gamma} d\mu \nu^{2a} \frac{1}{[\Delta(\nu^2, \mu^2, \gamma^2)]^a} \int_{-1}^1 \frac{dh \mathcal{D}^{(N)}(\mu; -i\rho, \beta^2, -i\nu(h))}{(1-h^2)^{a+1/2} [\nu^2(h) + \beta^2]}; \quad (\text{С.4})$$



$$2\nu^2 \mathcal{W}^2(h) = 2\nu^2 \mathcal{W}^2(0) + h \Delta^{1/2}(\nu^2, \mu^2, \delta^2) \Delta^{1/2}(U^2, \rho^2, -\nu^2);$$

$$2\nu^2 \mathcal{W}^2(0) = \nu^2(\nu^2 + U^2 + \rho^2 - \mu^2 - \delta^2) + (U^2 - \rho^2)(\mu^2 - \delta^2);$$

$$\mathcal{W}^2(h = \pm 1) = \omega_{\pm}(\nu; \mu, \delta; U, \rho); \quad a = a_N = \frac{3-N}{2};$$

$$\Delta(x, y, z) = (x+y-z)^2 - 4xy;$$

обладающему двумя замечательными свойствами. Во первых, для одной и той же  $W(r)$  и разных размерностей  $\Gamma_N$  и  $\Gamma_L$  его решения связаны преобразованием Вейля:

$$\mathcal{D}^{(L)}(\nu; \dots) = \frac{\pi^{a_L - a_N}}{\Omega_N} 2\nu \left[ \frac{d}{d\nu^2} \right]^n \int_m^{\nu} d\gamma (\nu^2 - \gamma^2)^{a_L - a_N + n - 1} \Gamma(a_L - a_N + n) \mathcal{D}^{(N)}(\gamma; \dots) \quad (6.5)$$

где  $\Omega_N$  - поверхность единичной сферы, а целое число  $n$  определяется условием сходимости интеграла. Для борновского члена  $\mathcal{D}^{(N)} \rightarrow \mathcal{D}^{(N)}$  это преобразование генерируется представлением (6.1), а воспроизведение его ядром уравнения (6.4) проверяется непосредственно с помощью (0.7), /24/. Во вторых, как и при  $N=3$ , уравнение (6.4) допускает аналитическое продолжение (24):  $\Delta(U^2, \rho^2, -\nu^2) = e^{2i\pi}$ .

$\Delta(U^2, \rho^2, \nu^2); U = iu; \rho = ip$ , не нарушающее, очевидно, соотношение (6.5) и позволяющее глубже понять его происхождение. Действительно, детерминант  $N$ - мерного сферически симметричного эллиптического оператора (6.2) можно представить в виде произведения ( $N \geq 2$ ):  $D^{(N)}(\beta^2) =$

$$= \det \left[ \hat{G}_0^{(N)}(\beta^2) \hat{G}_W^{(N)-1}(\beta^2) \right] \equiv \prod_{\ell=0}^{\infty} \left[ F_{\ell}^{(N)}(\beta) \right]^{h(N, \ell)} \quad (6.6)$$

где  $F_{\ell}^{(N)}(\beta)$  - детерминант аналогичного частичного оператора, отвечающего  $N$ - мерным сферическим гармоникам степени  $\ell/23/$  в разложении функций Грина, в котором  $\nabla_N^2$  заменен радиальным оператором  $(\partial_r^2 - j(j+1)/r^2)$ , вырожденным с кратностью  $h(N, \ell) = (2\ell + N - 2)(\ell + N - 3)[\ell!(N-2)!]^{-1}$  (см. (6), (7)). Поскольку размер-

ность пространства присутствует в этом операторе только в комбинации  $j = \ell - a_N$ ,  $a_N = \frac{3-N}{2}$ , его детерминанты (как и собственные функции) для одной, и той же  $W(r)$  и разных размерностей  $\Gamma_N$  и  $\Gamma_L$  связаны между собой очевидным соотношением:  $N, L \geq 2$

$$F_{\ell_N}^{(N)}(\beta) = F_{\ell_N + a_L - a_N}^{(L)}(\beta) = F_{\ell_L}^{(L)}(\beta); \quad (6.7)$$

$\ell_L - a_L = j = \ell_N - a_N$ ; Такое же равенство имеет место и для  $N$ - мерной ВФМ  $F_{\ell}^{(N)}(\rho, \beta)$ , и для м.э. частичной  $T$ - матрицы  $T_{\ell}^{(N)}(U, \rho; \beta^2)$ . Соотношение (6.5) для спектральной плотности  $\mathcal{D}^{(N)}$  и ее продолжения  $\tilde{\mathcal{D}}^{(N)}$  явно реализует это свойство (6.7) в интегральных представлениях:

$$F_{\ell_N}^{(N)}(\rho, \beta) = 1 + \int_{\rho+m}^{\infty} d\alpha (\rho/\alpha)^j \frac{\Omega_3}{\pi^a \Omega_N} \int_m^{\rho} d\gamma \rho_j^a \left[ \frac{\alpha^2 + \rho^2 - \gamma^2}{2\alpha\rho} \right] \cdot [\Delta(\alpha^2, \rho^2, \gamma^2)]^{-\frac{a}{2}} \mathcal{D}^{(N)}(\gamma; \rho, \beta^2, \alpha); \quad (6.8)$$

$$T_{\ell_N}^{(N)}(U, \rho; \beta^2) = -\frac{\Omega_3 e^{-i\pi a}}{\pi^a \Omega_N 2\rho} \int_m^{\infty} d\gamma Q_j^a \left[ \frac{U^2 + \rho^2 + \gamma^2}{2U\rho} \right] \cdot [\Delta(U^2, \rho^2, -\gamma^2)]^{-\frac{a}{2}} \mathcal{D}^{(N)}(\gamma; -i\rho, \beta^2, -iU); \quad (6.9)$$

с привлечением свойств функций Лежандра 3.7(29), (31) из /12/.

Определив функцию

$$d_{\ell_N}^{(N)}(u, \rho; \beta^2) = \frac{\Omega_3}{\pi^a \Omega_N} \int_m^u d\nu \rho_j^a \left[ \frac{u^2 + \rho^2 - \nu^2}{2u\rho} \right] \mathcal{D}^{(N)}(\nu; \rho, \beta^2, u) \cdot [\Delta(u^2, \rho^2, \nu^2)]^{-\frac{a}{2}} =$$

$$= d_j(u, \rho; \beta^2) = \int_m^u d\nu \rho_j \left[ \frac{u^2 + \rho^2 - \nu^2}{2u\rho} \right] \mathcal{D}^{(3)}(\nu; \rho, \beta^2, u),$$

где, по прежнему:  $j = l - a_N$ ,  $a_N = (3 - N)/2$ ; нетрудно убедиться что уравнение (I7) - (20), и вытекающие из них (32)-(36) имеют такой же вид при любой размерности  $N$ , если, заменив всюду  $l \rightarrow j$ , переобозначить все функции:  $F_j \rightarrow F_{l_N}^{(N)}$  и т.д. Ядро  $\mathcal{H}_e^{(N)}$  определяется при этом (С.10) с заменой  $\mathcal{D}^{(N)} \rightarrow \Sigma^{(N)}$ . Прежний вид остается, конечно, и у равенства (I2) и уравнения III (I3), ядро которого определяется такой же подстановкой в (С.9). Соответствующее обобщение (I6) следует теперь из (П.1а).

Таким образом, за очевидным свойством парциальных величин (С.7) в классе потенциалов (С.1) скрывается нетривиальная связь (С.5), (6I) для полных  $N$ -мерных функций Грина, а решение уравнения (С.4) при одном значении размерности  $N$  определяет спектральные плотности и детерминанты (С.6) для данной  $W(r_N)$  при любых других  $N \geq 2$ . При  $N = 2$  ядро (С.4) содержит дельта-функцию  $\delta_{14}$  и уравнение принимает наиболее простой вид.

#### Приложение 0

Получение (С.4) основано на представлении для интеграла по единичной сфере  $\Omega_N$  в  $R_N: n, \vartheta, \omega$ , - единичные  $N$ -мерные векторы,  $c = (\omega, \vartheta)$ ,

$$I^{(N)}(X, Y, c) = \int d\Omega_N(n) [X - (\vartheta \cdot n)]^{-1} [Y - (n \cdot \omega)]^{-1} \quad (0.1)$$

в спектральном виде относительно  $c$ . Его легко найти, выразив  $I^{(N)}$  через  $I^{(3)}$  при  $N > 3$ :  $a = a_N = (3 - N)/2$ ,

$$I^{(N)}(X, Y, c) = \frac{(N-3)\Omega_{N-1}}{2\pi} \int_0^1 dz (1-z^2)^{-1-a} I^{(3)}\left(\frac{X}{z}, \frac{Y}{z}, c\right) \quad (0.2)$$

Откуда, в обозначениях (П.5)  $T_{\pm 1} = T^{\pm}$ , нетрудно получить:  $\alpha = \frac{N}{2} - 1$

$$I^{(N)}(X, Y, c) =$$

$$= \frac{4\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\alpha)} \int_{T^+(X, Y)}^{\infty} dT \frac{(T^2 - 1)^{\alpha} [W(X, Y, T)]^{-\alpha - \frac{1}{2}}}{(T - c)} \quad (0.3)$$

Неопределенность при  $N = 2$  раскрывается дельта-функцией  $\delta_{14}$  и дает правильный ответ. Привлекая теоремы сложения и умножения для полиномов Гегенбауэра  $C_{\ell}^{\alpha}(z)$  из /23/,  $\alpha = \frac{1}{2} - a = \frac{N}{2} - 1$ ,

$$\frac{1}{T - z} = \frac{\Gamma(\alpha) e^{-i\pi\alpha}}{(T^2 - 1)^{\frac{\alpha}{2}} 2^{\alpha} \sqrt{\pi}} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 2\alpha) C_{\ell}^{\alpha}(z) Q_{\ell - \alpha}^{\alpha}(T), \quad (0.4)$$

$$\int d\Omega_N(n) C_{\ell}^{\alpha}((\omega \cdot n)) C_{\lambda}^{\alpha}((n \cdot \vartheta)) = \frac{\alpha}{\ell + \alpha} \Omega_N \delta_{\ell, \lambda} C_{\ell}^{\alpha}((\omega \cdot \vartheta)),$$

из (0.3) можно получить одно обобщение формулы умножения для функций  $Q_j^{\alpha}(T)$  ранее автору не встречавшееся:  $\alpha = \frac{1}{2} - a$

$$\frac{e^{-i\pi\alpha} Q_j^{\alpha}(X) e^{-i\pi\alpha} Q_j^{\alpha}(Y)}{(X^2 - 1)^{\alpha/2} (Y^2 - 1)^{\alpha/2}} = \frac{2^{\alpha} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha)} \int_{T^+(X, Y)}^{\infty} dT (T^2 - 1)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-i\pi\alpha} Q_j^{\alpha}(T) \quad (0.5)$$

Доказанное здесь для дискретных значений  $j = l + \frac{N-3}{2}$ ;  $l = 0, 1, 2, \dots$  оно продолжается по теореме Карлсона на всю область  $\text{Re}(j + \alpha) > -1$ . Подставляя в (0.5) представление 3.7(3I) из /12/ для  $Q_j^{\alpha}$  через  $Q_j$  и используя известную формулу умножения для последних т.е. (0.5) при  $\alpha = 0$ , можно, при  $-\frac{1}{2} < \text{Re} \alpha < 0$  положить  $j = \lambda - \frac{1}{2}$  и, проинтегрировав по  $\lambda$  с учетом условия полноты /23/

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} d\lambda \lambda Q_{\lambda - \frac{1}{2}}(T) P_{\lambda - \frac{1}{2}}(T') = i\pi \delta(T - T'), \quad (0.6)$$

получить соотношение, необходимое для проверки (С.5):

$$\frac{2^a \sqrt{\pi}}{\Gamma(x)} \int_{T^+(x, y)}^{\tau} \frac{(\tau-T)^{-1-a} (T^2-1)^a}{\Gamma(-a) [W(x, y, T)]^{\alpha+\frac{1}{2}}} dT =$$

$$\int_X^{\xi^-(\tau, y)} \frac{d\xi (\xi-x)^{-1-a}}{\Gamma(-a)} \int_Y^{\eta^-(\tau, \xi)} \frac{d\eta (\eta-y)^{-1-a}}{\Gamma(-a) [W(\xi, \eta, \tau)]^{\frac{1}{2}}} \quad (0.7)$$

$$= \int_X^{\xi^-(\tau, y)} \frac{d\xi (\xi-x)^{-1-a}}{\Gamma(-a)} \int_Y^{\eta^-(\tau, \xi)} \frac{d\eta (\eta-y)^{-1-a}}{\Gamma(-a) [W(\xi, \eta, \tau)]^{\frac{1}{2}}}$$

Операция  $\left[ \frac{d}{dz} \right]^n \int_{\tau^+(x, y)}^z \frac{d\tau (z-\tau)^{n+a-1}}{\Gamma(n+a)}$

приводит к равенству в более широкой области  $-n < a < 0$  /24/.

Переход от продолженного уравнения (С.4) к (I7), (I9) осуществляется теперь использованием в (С.10) общей формулы (П.5) в виде:

$$\int_{\rho+\mu}^{u-\gamma} d\alpha \rho_j^a \left[ \frac{u^2 + \alpha^2 - \gamma^2}{2u\alpha} \right] \rho_j^a \left[ \frac{\alpha^2 + \rho^2 - \mu^2}{2\alpha\rho} \right] \left[ \Delta(u^2, \alpha^2, \gamma^2) \Delta(\alpha^2, \rho^2, \mu^2) \right]^{-\frac{a}{2}}$$

$$G(\alpha) = \int_{\gamma+\mu}^{u-\rho} d\nu \rho_j^a \left[ \frac{u^2 + \rho^2 - \nu^2}{2u\rho} \right] \frac{[\Delta(u^2, \rho^2, \nu^2)]^{\frac{a}{2}}}{\sqrt{\pi} \Gamma(x) (\nu^2)^a} \quad (0.8)$$

$$\Lambda^+(\nu; \mu, \gamma; u, \rho)$$

$$\int \frac{d\alpha^2 G(\alpha)}{[(\Lambda^+ - \alpha^2)(\alpha^2 - \Lambda^-)]^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

$$\Lambda^-(\nu; \mu, \gamma; u, \rho)$$

Литература

/1/ Fubini, Strofolini. In Theoretical Physics. Int.Atom Ener. Agency, Vienna 1963, 365, 379.

/2/ Нуссенцвейг Х.М. "Причинность и дисперсионные соотношения". М.Мир 1976.  
де Альфаро В., Редже Т. "Потенциальное рассеяние". М.Мир 1966.

/3/ Ситенко А.Г. Лекция по теории рассеяния, Киев, Высшая школа, 1971.

/4/ Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. М.Мир 1969.

/5/ Коренблит С.Э., Парфенов Ю.В. Исследования по геомагнетизму, астрономии и физике Солнца. М.Наука, 1981, вып.57. Теоретическая физика, стр.83-94; II7-122.

/6/ Pasquier J., Pasquier R. Nucl.Phys., 1977, 6A277, 202-220.

/7/ Fuda M.G., Whiting J.S. Phys.Rev., 1973, C 8, 1225.

/8/ Fuda M.G. Phys.Rev. 1976, C 14, 37.

/9/ Орлов И.И., Парфенов Ю.В. ТМФ, 1970, т.4, 18.

/10/ Brown, Fidel, Lee, Sawyer. Ann.Phys., 1963, 23, 187.

/11/ Кадышевский В.Г., Мир-Касимов Р.М., Скачков Н.Б. ЭЧАЯ, 1972. т.2, вып.3, 635-690.

/12/ Бейтмен Г., Эрдейн А., ВТФ т.1,2 М.Наука 1973.

/13/ van Haeringen H., van Wageningen R., J.Math.Phys., 1975, 16, 1441; van Haeringen H., J.Math.Phys. 1978, 19, 1379; 1976, 17, 997. Dusek J. Czech.J.Phys.1981, B31, 941-968.

/14/ Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции, вып.1, Физматгиз., М. 1969.

/15/ Переломов А.М., Попов В.С. ЖЭТФ, 1966, 50, 179.

/16/ Швингер Ю. Частицы, источники, поля. М.Мир 1976, т.1, т.2.

- /17/ Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика, М., Наука, 1981.
- /18/ Хриплович И.Б. ЯФ. 1969, т.10, 409.
- /19/ Remiddi E., Semeria M. Preprint CERN TH 3433, 1982.
- /20/ Harriman J.M., Phys.Rev. 1956, 101, 594. Liber M., Phys.Rev. 1968, 174, 2037.
- /21/ Fried, Yennie. Phys.Rev., 1958, 112, 1391.
- /22/ Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. М.:Наука, 1971.
- /23/ Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. М. :Наука, 1965.  
Durand L., Fishbane P.M., Simmons L.M. J.Math.Phys. 1976, 17, 1933.
- /24/ Mandelstam S. Ann.Phys., 1963, 21, 302-343.

С.Э.Коренблит

ЗАДАЧА О СДВИГЕ УРОВНЕЙ В МЕТОДЕ ВНЕЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ДЕТЕРМИНАНТОВ ИОСТА

Препринт  
№ 87-16

Работа поступила - 28 января 1987 г.

---

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов  
Подписано к печати 16.02.1987г. МН 08626  
Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.2,5 печ.л., 2,0 учетно-изд.л.  
Тираж 230 экз. Бесплатно. Заказ №16.

---

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90