

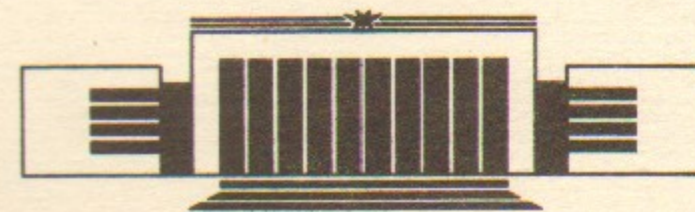


7
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Г.В. Ступаков

О ВОЗМОЖНОСТИ МГД УСТОЙЧИВОГО
УДЕРЖАНИЯ ПЛАЗМЫ
В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ПРОБКОТРОНЕ

ПРЕПРИНТ 87-14



НОВОСИБИРСК

О возможности МГД устойчивого удержания плазмы
в осесимметричном пробкотроне

Г.В. Ступаков

Институт ядерной физики
630090, Новосибирск 90, СССР

АННОТАЦИЯ

Показано, что специальным выбором магнитного поля непараксиального пробкотрона можно обеспечить устойчивое по отношению к желобковым модам (как глобальным, так и мелкомасштабным) удержание плазмы в осесимметричной открытой ловушке. При этом устойчивость имеет место в рамках приближения идеальной магнитной гидродинамики без учета эффектов конечного ларморовского радиуса ионов.

ON THE POSSIBILITY OF MHD STABLE PLASMA CONFINEMENT IN AXISYMMETRIC MIRRORS

G.V. Stupakov

Institute of Nuclear Physics
630090, Novosibirsk, USSR

ABSTRACT

It is shown that using a special choice of a nonparaxial axisymmetric mirror magnetic field one can achieve plasma stability with respect to all flute modes (both global and smallscale). Stability is provided within the frame of the ideal MHD theory without ion FLR effects.

© Институт ядерной физики СО АН СССР

1. ВВЕДЕНИЕ

Аксиально-симметричные открытые ловушки имеют ряд важных преимуществ по сравнению с ловушками, не обладающими такой симметрией [1]. Давно известно, однако, что плазма, удерживаемая в «классическом» осесимметричном пробкотроне, подвержена желобковой неустойчивости. Поэтому в последние годы ведутся интенсивные поиски таких систем, которые обладали бы свойством аксиальной симметрии и вместе с тем были бы устойчивы по отношению к МГД возмущениям. С этой целью рассматриваются конфигурации магнитного поля типа антипробкотрона [2—5] и более сложные геометрии ловушек с неодносвязной плазмой [6—9]. Привлекаются другие механизмы стабилизации^{*)}, связанные со стеночными эффектами [11] или группой быстрых частиц в плазме [12]. Особо отметим подход, основанный на использовании так называемых плещущихся ионов [13, 14]. Не вдаваясь здесь в детальный анализ относительных достоинств и недостатков каждого предложения (по этому поводу см., например, [15]), можно утверждать, что задачу устойчивого удержания в осесимметричной ловушке до сих пор нельзя считать полностью решенной.

Настоящая работа посвящена исследованию возможности МГД устойчивого удержания плазмы в непараксиальном пробко-

^{*)} В настоящей работе речь идет о системах, в которых длина свободного пробега частиц λ велика по сравнению с длиной установки L . В условиях, когда $\lambda \ll L$, эффективный способ стабилизации осесимметричной ловушки предложен в работе [10].

троне. В такой постановке задача уже рассматривалась в работе [16], где было продемонстрировано, что переход к непараксиальному полю позволяет в принципе стабилизировать несколько крупномасштабных мод. В настоящей работе решается более сложная задача — отыскивается такая конфигурация поля пробкотрона, которая для некоторого класса профилей давления допускала бы абсолютно устойчивое (по отношению ко всем желобковым модам) удержание. Как и в [16], мы ограничиваемся рассмотрением плазмы с $\beta \ll 1$, когда неустойчивость можно считать потенциальной.

Дальнейший план изложения следующий. В разделе 2 сформулированы ограничения, налагаемые на распределение давления вдоль силовой линии в зеркальной ловушке. Здесь же разъясняется, чем изучаемый в настоящей работе способ стабилизации отличается от стабилизации с помощью плещущихся ионов. В разделе 3 получен критерий устойчивости резкой границы плазмы в пробкотроне с пробочным отношением, мало отличающимся от единицы. В четвертом разделе приведены примеры магнитных полей, в которых этот критерий выполнен, а в следующем, пятом, разделе показано, что в таких полях можно обеспечить и устойчивость плазмы с плавным профилем давления. Заключительный, шестой, раздел посвящен обсуждению полученных результатов.

2. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ В ПАРАКСИАЛЬНОМ ПРОБКОТРОНЕ

Рассмотрим ситуацию, когда плазма в пробкотроне имеет резкую границу, на которой компоненты давления p_{\parallel} и p_{\perp} скачком обращаются в нуль. Такая граница будет устойчива, если интеграл

$$V = \int \frac{\kappa(p_{\parallel} + p_{\perp})}{rB^2} ds \quad (1)$$

положителен [17]. В формуле (1) κ — кривизна, а r — текущий радиус граничной силовой линии; интегрирование ведется вдоль этой силовой линии от пробки до пробки. Ход силовых линий в обычном параксиальном пробкотроне показан на рис. 1. Из него видно, что область неблагоприятной кривизны ($\kappa < 0$) находится в центральной части ловушки, где поле относительно мало, а области благоприятной кривизны ($\kappa > 0$) расположены вблизи пробок. Если сумма давлений $p_{\parallel} + p_{\perp}$ спадает при движении от центра ло-

вушки в пробку, то легко показать, что $V < 0$, т. е. плазма неустойчива.

В принципе можно обеспечить устойчивость плазмы, оставаясь в рамках геометрии поля, изображенной на рис. 1. Для этого нужно создать такое распределение суммарного давления $p_{\parallel} + p_{\perp}$ вдоль силовой линии, которое имело бы резкие максимумы в областях благоприятной кривизны (этого можно достичь, например,

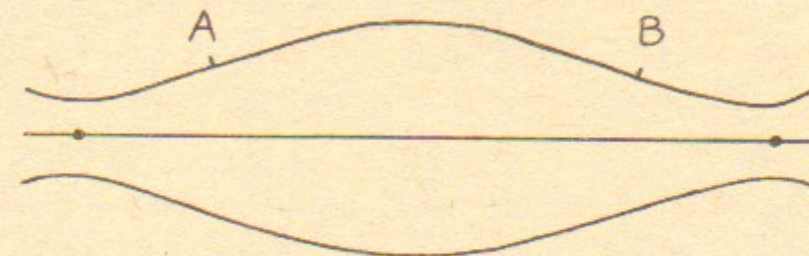


Рис. 1. Силовые линии осесимметричного параксиального пробкотрона. На участке АВ кривизна неблагоприятна, $\kappa < 0$, вне этого участка $\kappa > 0$. На осевой силовой линии отмечены точки максимумов поля.

с помощью наклонной инжекции нейтральных пучков). За счет этих максимумов вклад участков, где $\kappa > 0$, может стать преобладающим, и интеграл (1) изменит знак с отрицательного на положительный. Подробно такой способ стабилизации плазмы, получивший название «стабилизация с помощью плещущихся ионов», был изучен в работах [13, 14]. Необходимым условием достижения устойчивости в этом способе является выполнение в некоторой области неравенства [14]

$$\frac{\partial}{\partial B} \frac{p_{\parallel} + p_{\perp}}{B^{3/2}} > 0, \quad (2)$$

где через $\partial/\partial B$ обозначена производная, взятая вдоль силовой линии. Помимо технических трудностей, связанных с созданием распределения давления, удовлетворяющего условию (2), есть одно возражение принципиального характера против стабилизации плазмы плещущимися ионами. Дело в том, что если потребовать, чтобы функция распределения ионов $f(\epsilon, \mu)$ (ϵ — энергия, μ — магнитный момент) обладала тем свойством, что

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon}\right)_{\mu} < 0, \quad (3)$$

то распределение давления вдоль силовой линии будет подчиняться неравенству [18]

$$\frac{\partial}{\partial B} \frac{p_{\parallel} + p_{\perp}}{B} < 0, \quad (4)$$

несовместимому с (2). Таким образом, создание популяции плещущихся ионов автоматически означает нарушение неравенства (3), которое лежит в основе вывода энергетического принципа Крускала—Обермана [19] и рассматривается многими авторами как необходимое требование корректной постановки задачи об устойчивости. Отказ от (3) приводит, в частности, к появлению новых неустойчивостей, связанных с резонансами между продольными колебаниями ионов и волной. Представляется разумным поэтому при поиске МГД устойчивых конфигураций магнитного поля пробкотрона потребовать выполнения условий (3) и (4). Еще более привлекательными с практической точки зрения являются распределения давления, в которых сумма $p_{\parallel} + p_{\perp}$ не возрастает вдоль силовой линии

$$\frac{\partial}{\partial B} (p_{\parallel} + p_{\perp}) \leq 0. \quad (5)$$

Это требование удовлетворяется, в частности, если считать, что сумма $p_{\parallel} + p_{\perp}$ постоянна вдоль силовой линии вплоть до точек максимума поля, в которых она скачком обращается в нуль. Ниже для анализа устойчивости плазмы с резкой границей мы будем пользоваться этой моделью распределения давления вдоль силовой линии, при этом

$$V = (p_{\parallel} + p_{\perp}) I, \quad (6)$$

где

$$I = \int \frac{\kappa ds}{r B^2}; \quad (7)$$

интегрирование в (7) ведется между точками максимума поля. Функция распределения, отвечающая такому распределению давления, приведена в Приложении 1; она удовлетворяет условию (3).

3. ВОЗМОЖНОСТЬ УСТОЙЧИВОГО УДЕРЖАНИЯ В НЕПАРАКСИАЛЬНОМ ПРОБКОТРОНЕ

Из сказанного выше следует, что в параксиальном пробкотроне плазма с монотонно убывающей по энергии функцией распределения обязательно неустойчива в рамках идеальной магнитной гидродинамики (строго это доказывается в работе [18], стр. 556). Следовательно, поиск «хороших» конфигураций пробкотрона следует вести в классе непараксиальных магнитных полей. К сожалению, отказ от непараксиальности сильно усложняет задачу, и делает практически невозможным применение аналитических методов исследования. Чтобы обойти эту трудность, будем предполагать, что пробочное отношение k ($k = B_{\max}/B_{\min}$) мало отличается от единицы, $k - 1 \ll 1$. Введение искусственного малого параметра $\varepsilon \equiv k - 1$ позволяет далеко продвинуться аналитически, а поскольку никакого физического ограничения на k нет, можно ожидать, что всякое утверждение, доказанное в пределе $\varepsilon \ll 1$, остается справедливым также и при $\varepsilon \sim 1$ (см. также раздел 6).

Магнитное поле пробкотрона с малым пробочным отношением представим в виде

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}(r, z), \quad (8)$$

где \mathbf{B}_0 соответствует однородному магнитному полю, направленному вдоль оси z , а \mathbf{b} задает осесимметричную пробочную конфигурацию. В таком пробкотроне силовые линии — почти прямые, а кривизну можно вычислять по формуле $\kappa = B_0^{-1} \partial b_r / \partial z$. Интеграл (7) легко вычисляется и дает

$$I \simeq \frac{1}{r B_0^3} \int \frac{\partial b_r}{\partial z} dz = \frac{1}{r B_0^3} (b_r^{(1)} - b_r^{(2)}), \quad (9)$$

где $b_r^{(1)}$ и $b_r^{(2)}$ обозначают радиальные компоненты магнитного поля в точках максимума модуля поля на силовой линии, находящихся, соответственно, справа и слева от плоскости $z = 0$ (напомним, что ось z считается направленной по \mathbf{B}). Если считать, что пробкотрон симметричен относительно плоскости $z = 0$, то $b_r^{(2)} = -b_r^{(1)}$ и $I = 2b_r^{(1)} / r B_0^3$.

В параксиальном приближении (на расстоянии от оси системы r , малом по сравнению с масштабом изменения поля l) справедливо соотношение

$$b_r \simeq -\frac{1}{2} r \frac{\partial \mathcal{B}(z)}{\partial z}, \quad (10)$$

где $\mathcal{B}(z)$ — поле на оси ловушки. Из (10) следует, что в пробке, где $\partial \mathcal{B} / \partial z = 0$, b_r обращается в нуль. Однако это утверждение, справедливое в первом порядке по параметру r/l , теряет силу уже в следующих приближениях по этому параметру и, тем более, при переходе к непараксиальному магнитному полю. В следующем разделе мы приведем пример таких конфигураций магнитного поля пробкотронного типа, в которых $b_r^{(1)} > 0$ и, следовательно, вполне условие устойчивости $I > 0$.

4. АНАЛИЗ КОНФИГУРАЦИЙ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Начнем с более подробного рассмотрения хода силовых линий в окрестности максимума поля параксиального пробкотрона. Сначала рассмотрим случай произвольных пробочных отношений, не предполагая малости параметра ε . Разложение в ряд по степеням r составляющих поля B_r и B_z вблизи оси ловушки имеет вид

$$\begin{aligned} B_z &= \mathcal{B}(z) - \frac{1}{4} r^2 \mathcal{B}'' + o(r^3), \\ B_r &= -\frac{1}{2} r \mathcal{B}' + \frac{1}{16} r^3 \mathcal{B}''' + o(r^4), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\mathcal{B}(z)$ — поле на оси ловушки. Пусть в точке $z = z_1$ достигается максимум поля на осевой силовой линии, т. е. $\mathcal{B}'(z_1) = 0$, $\mathcal{B}''(z_1) < 0$. В окрестности точки $z = z_1$ можно провести разложение в формулах (11) по степеням разности $\zeta = z - z_1$ и с нужной в дальнейшем точностью написать

$$\begin{aligned} B_z &= \mathcal{B} - \frac{1}{4} r^2 \mathcal{B}'' + o(r^3) + o(|\zeta|), \\ B_r &= -\frac{1}{2} r^2 \zeta \mathcal{B}'' + \frac{1}{16} r^3 \mathcal{B}''' + o(r^4) + o(|\zeta|), \end{aligned} \quad (12)$$

где функция \mathcal{B} и ее производные теперь вычисляются в точке $z = z_1$. обозначим через z_* координату z точки максимума поля на силовой линии, проходящей на расстоянии r от оси. Записывая условие максимума поля

$$\mathbf{B} \nabla B^2 = 0 \quad (13)$$

и подставляя в него выражения (12), найдем

$$\zeta_* = \frac{1}{4} r^2 \frac{\mathcal{B}'''(z_1)}{\mathcal{B}''(z_1)}, \quad (14)$$

что дает для компоненты B_r в точке максимума поля (обозначаем $B_r^{(1)}$) следующее значение:

$$B_r^{(1)} = -\frac{1}{16} r^3 \mathcal{B}'''(z_1). \quad (15)$$

Следовательно, для того чтобы $B_r^{(1)}$ было положительным, необходимо, чтобы функция $\mathcal{B}(z)$ удовлетворяла условию $\mathcal{B}'''(z_1) < 0$. Ход силовой линии вблизи максимума поля в зависимости от знака $\mathcal{B}'''(z_1)$ изображен на рис. 2.

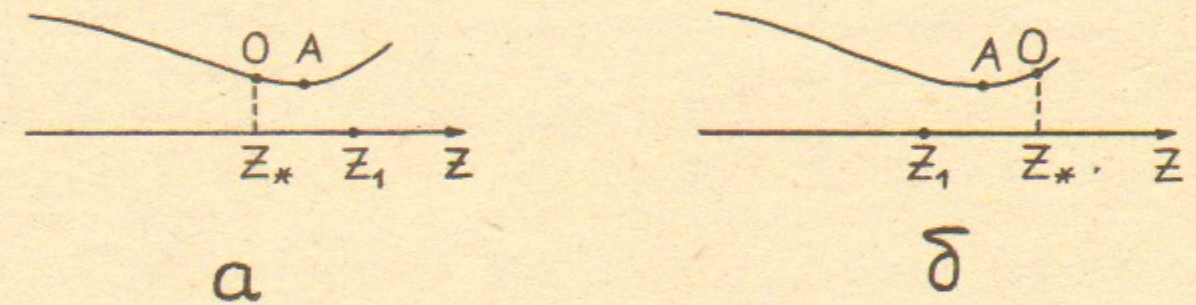


Рис. 2. Расположение точек максимума поля на оси (z_1), максимума поля на внеосевой силовой линии (O) и точки, в которой силовая линия идет параллельно оси z (A). Случай a соответствует $\mathcal{B}'''(z_1) > 0$, а случай $б$ соответствует $\mathcal{B}'''(z_1) < 0$.

Таким образом, учитывая сказанное в предыдущем разделе, мы приходим к заключению, что даже в параксиальном магнитном поле условие $I > 0$ может быть выполнено (в пределе малого пробочного отношения), если в пробке, из которой магнитное поле покидает ловушку, $\mathcal{B}''' < 0$ (очевидно, что вклад в I противоположной пробки также будет положителен, если в ней $\mathcal{B}''' > 0$). Более аккуратное вычисление, проведенное в Приложении 2, дает в пределе $\varepsilon \ll 1$ следующее выражение для интеграла I , вычисленного вдоль силовой линии, проходящей на расстоянии r от оси в пробке:

$$I = -\frac{3}{4} \int_{z_2}^{z_1} \frac{\mathcal{B}'^2 dz}{\mathcal{B}^4} - \frac{1}{16} \frac{r^2 \mathcal{B}'''}{\mathcal{B}^3} \Big|_{z_2}^{z_1}, \quad (16)$$

где z_2 и z_1 обозначают точки максимума поля на оси ($z_2 < z_1$). По порядку величины отношение второго слагаемого в (16) к первому равно $r^2/l^2 \varepsilon$, поэтому обычно, когда считается, что $\varepsilon \sim 1$, вторым слагаемым пренебрегают и получают, что $I < 0$ независимо от вида функции $\mathcal{B}(z)$. Однако, если $\varepsilon \ll r^2/l^2$ (что при заданном $\varepsilon \ll 1$ может выполняться, только начиная с некоторого радиуса), то главным в (16) является второе слагаемое, и интеграл I может быть сделан положительным.

Рассмотрим теперь другой пример. Пусть магнитное поле создается двумя тонкими круговыми витками радиуса R , расположенными соосно на расстоянии d , немного большем их радиуса R ,

$$d = R + \delta, \quad \delta \ll R.$$

Направим ось z вдоль оси витков и выберем в качестве начала системы координат точку, лежащую в плоскости симметрии системы. Будем интересоваться конфигурацией магнитного поля в малой окрестности этой точки, $r, |z| \ll R$. Для компонент поля B_z, B_r можно выписать разложение в ряд Тейлора, принимая во внимание уравнения $\text{rot } \mathbf{B} = 0, \text{div } \mathbf{B} = 0$:

$$\begin{aligned} B_z &= B_0 + \frac{1}{2} \mathcal{B}'' \left(z^2 - \frac{1}{2} r^2 \right) + \frac{1}{8} \mathcal{B}^{IV} \left(\frac{1}{3} z^4 - z^2 r^2 + \frac{1}{8} r^4 \right), \\ B_r &= -\frac{1}{2} z r \mathcal{B}'' + \frac{1}{4} \mathcal{B}^{IV} \left(-\frac{1}{3} z^3 r + \frac{1}{4} z r^3 \right), \end{aligned} \quad (17)$$

где B_0 — поле в точке $z=r=0$, а \mathcal{B}'' и \mathcal{B}^{IV} обозначают соответствующие производные по z функции \mathcal{B} в этой точке. В разложении (17) учтен тот факт, что в начале координат все нечетные производные \mathcal{B} по z равны нулю в силу симметрии.

Известно, что если бы d в точности равнялось R (катушки Гельмгольца), то \mathcal{B}'' было бы равно нулю, а $\mathcal{B}^{IV} = -\frac{3456}{125} B_0/R^4$; при этом магнитное поле убывало бы при удалении вдоль оси от точки $z=0$. Легко показать, что отличное от нуля δ приводит к тому, что

$$\mathcal{B}'' \simeq \frac{96}{25} \frac{B_0 \delta}{R^3}, \quad (18)$$

а отношение $\mathcal{B}''/\mathcal{B}^{IV}$ равно:

$$\frac{\mathcal{B}''}{\mathcal{B}^{IV}} = -\frac{5}{36} R \delta. \quad (19)$$

В результате на осевой силовой линии в точке $z=0$ появляется локальный минимум поля, а в точках $z = \pm \sqrt{\frac{5}{6}} \delta R$ — максимумы поля; соответствующее пробочное отношение равно $1 + 4\delta^2/R^2$.

Легко построить силовые линии магнитного поля (17), если учесть, что $B_r \ll B_z$ и, следовательно, силовые линии мало отличаются от прямых. Уравнение силовой линии, пересекающей плоскость симметрии в точке r_0 , имеет вид

$$r = r_0 - \frac{1}{4} z^2 r_0 \frac{\mathcal{B}''}{B_0} + \frac{1}{8} \frac{\mathcal{B}^{IV}}{B_0} \left(-\frac{1}{6} z^4 r_0 + \frac{1}{4} z r_0^3 \right). \quad (20)$$

Направление изменения модуля поля при движении вдоль силовой линии определяется производной

$$\frac{\partial B^2}{\partial s} \simeq \frac{\partial B^2}{\partial z} \simeq 2B_0 \frac{\partial B_z}{\partial z} = 2z \mathcal{B}'' B_0 + \mathcal{B}^{IV} B_0 \left(\frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{2} z r_0^2 \right). \quad (21)$$

Из (21) следует, что максимум поля на силовой линии находится в точках $z_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3}{2} r_0^2 + \frac{5}{6}} \delta R$. Пользуясь формулой (9), легко получить выражение для интеграла I :

$$I = \frac{1}{8} \frac{|\mathcal{B}^{IV}|}{B_0^3} r_0^2 \sqrt{\frac{3}{2} r_0^2 + \frac{5}{6}} \delta R, \quad (22)$$

откуда следует, что I везде положительно. Последнее утверждение, однако, требует уточнения. Как видно из более точной формулы (16), на самой оси $I < 0$, поэтому формула (22) теряет силу в приосевой области. Если обозначить через r_* значение r_0 , при котором I обращается в нуль, то выражением (22) можно пользоваться в области $r_0 \geq r_*$; при $r_0 < r_*$ интеграл I становится отрицательным. По порядку величины $r_* \sim \sqrt{\delta^3/R}$.

5. УСТОЙЧИВОСТЬ ГЛАДКИХ ПРОФИЛЕЙ ДАВЛЕНИЯ

Рассмотренные выше примеры доказывают, что существуют такие осесимметричные конфигурации, в которых резкая граница

плазмы будет устойчива. Следующий вопрос, который при этом естественно возникает, — можно ли добиться устойчивости для гладкого профиля давления? Для анализа устойчивости относительно желобковых возмущений плазмы малого β в этом случае удобно исходить из общего выражения для энергии потенциальных колебаний [20]

$$W = \frac{1}{2} \int d\psi \varphi^2 \left\{ \int \frac{d\chi}{r^2 B^4} \left[-\kappa r B \frac{\partial(p_{\parallel} + p_{\perp})}{\partial\psi} + \kappa^2 (p_{\parallel} + p_{\perp}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \kappa^2 B^3 \int \frac{\mu^2}{v_{\parallel}} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} d\varepsilon d\mu \right] - \int d\varepsilon d\mu \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \left(\int \frac{v_{\parallel}^2 + \mu B}{r B^2 v_{\parallel}} \kappa d\chi \right)^2 \left(\int \frac{d\chi}{B v_{\parallel}} \right)^{-1} \right\}, \quad (23)$$

где через φ обозначено возмущение электростатического потенциала, ψ — магнитный поток внутри данной магнитной поверхности, играющий роль радиальной координаты, $f = f(\varepsilon, \mu, \psi)$ функция распределения частиц, нормированная условием

$$n = \frac{1}{m} \int d\varepsilon d\mu \frac{B}{v_{\parallel}} f,$$

а $\varepsilon = v^2/2$, $\mu = v_{\perp}^2/2B$. В формуле (23) роль продольной координаты играет магнитный потенциал χ , $\mathbf{B} = \nabla\chi$, а интегрирование по χ ведется от пробки до пробки.

В общем случае непараксиального магнитного поля в (23) одинаково важны все слагаемые. Однако для пробкотрона размера l с малым пробочным отношением $k = 1 + \varepsilon$ справедлива оценка кривизны $\kappa \sim \varepsilon/l$, из которой следует, что три последних члена в (23) пропорциональны ε^2 , тогда как первый член пропорционален ε . Следовательно, в линейном приближении по ε

$$W = -\frac{1}{2} \int d\psi \varphi^2 \int \frac{\kappa d\chi}{r B^3} \frac{\partial(p_{\parallel} + p_{\perp})}{\partial\psi}, \quad (24)$$

что формально совпадает с результатом параксиального приближения [18]. В этом выражении $\varphi(\psi)$ является пробной функцией, а условие устойчивости по отношению ко всем желобковым модам состоит в требовании положительности интеграла

$$V_1 = - \int \frac{\kappa d\chi}{r B^3} \frac{\partial(p_{\parallel} + p_{\perp})}{\partial\psi}. \quad (25)$$

Так же, как и в разделе 3, рассмотрим сначала такое распределение давления, при котором сумма $p_{\parallel} + p_{\perp}$ постоянна между

точками максимума поля. Если обозначить через $\chi_2(\psi)$ и $\chi_1(\psi)$ величину магнитного потенциала в точках, где B достигает максимумов на данной силовой линии ($\chi_1 > \chi_2$), то выражение для $p_{\parallel} + p_{\perp}$ можно записать в следующем виде:

$$p_{\parallel} + p_{\perp} = p_0(\psi) [\theta(\chi - \chi_2) + \theta(\chi_1 - \chi) - 1], \quad (26)$$

где $\theta(\chi)$ — функция, определенная соотношением

$$\theta(\chi) = \begin{cases} 0, & \chi < 0, \\ 1, & \chi > 0. \end{cases}$$

Подставляя (26) в (25) и учитывая, что

$$\frac{d\theta}{d\chi} = \delta(\chi),$$

можно выполнить интегрирование по χ и получить

$$V_1 = - \frac{dp_0}{d\psi} \int_{\chi_2}^{\chi_1} \frac{\kappa d\chi}{r B^3} - \frac{d\chi_1}{d\psi} \frac{p_0 \kappa}{r B^3} \Big|_{\chi=\chi_1} + \frac{d\chi_2}{d\psi} \frac{p_0 \kappa}{r B^3} \Big|_{\chi=\chi_2}. \quad (27)$$

Знак первого слагаемого в этом выражении в случае давления, убывающего по радиусу ($dp_0/d\psi < 0$), совпадает со знаком интеграла I , определяемого формулой (7). Следовательно, в области, где $I > 0$, радиальный спад давления вносит стабилизирующий вклад в функционал энергии. Остальные два слагаемых в (27) отвечают вкладу в интеграл устойчивости концевых точек силовой линии. Этот вклад возникает вследствие наличия на концах силовой линии градиента функции $p_{\parallel} + p_{\perp}$, обусловленного резким спадом давления до нуля в точках максимума поля. Для определенности рассмотрим вклад правого конца силовой линии (второе слагаемое в (27)). Воспользуемся тем, что

$$\frac{d\chi_1}{d\psi} = \frac{1}{rB} \mathbf{n} \nabla \psi = \frac{1}{r} \cos \gamma,$$

где \mathbf{n} — вектор нормали к силовой линии, направленный в сторону возрастания ψ , а γ — угол между силовой линией и линией, проходящей через точки максимумов поля в плоскости r, z (линия пробок). Учитывая, что в концевых точках обычно кривизна благоприятна ($\kappa > 0$), мы приходим к заключению, что вклад правой

пробки положителен, если $\gamma > \pi/2$, и отрицателен в противном случае.

Легко найти угол γ для примеров магнитного поля, рассмотренных в разделе 3. Так, например, для поля (11) вычисления дают

$$\frac{\pi}{2} - \gamma = \frac{1}{2} r \frac{\mathcal{B}'''(z_1)}{\mathcal{B}''(z_1)}$$

и в «благоприятном» случае $\mathcal{B}'''(z_1) < 0$ оказывается, что $\gamma < \pi/2$ (напомним, что $\mathcal{B}''(z_1) < 0$). Для поля (17) также $\gamma < \pi/2$. Таким образом, мы видим, что в типичных случаях вклад последних двух слагаемых в (27) оказывается отрицательным. Для того, чтобы добиться положительности V_1 во всей области, занятой плазмой, и тем самым обеспечить полную устойчивость плазмы относительно желобковых мод, необходимо, чтобы первое слагаемое в (27) было всюду положительным и по величине превышало вклад последних двух дестабилизирующих членов. Этого можно достичь, полагая $dp_0/d\psi > 0$ в области, где интеграл I отрицателен (как отмечено в конце предыдущего раздела, это имеет место в приосевой области, при $r < r_*$), и выбирая $dp_0/d\psi < 0$ в области положительных значений этого интеграла (при $r > r_*$). Однако в самой точке $r = r_*$ интеграл I равен нулю и, следовательно, V_1 , определяемое формулой (27), отрицательно в этой точке. Ситуацию можно поправить,

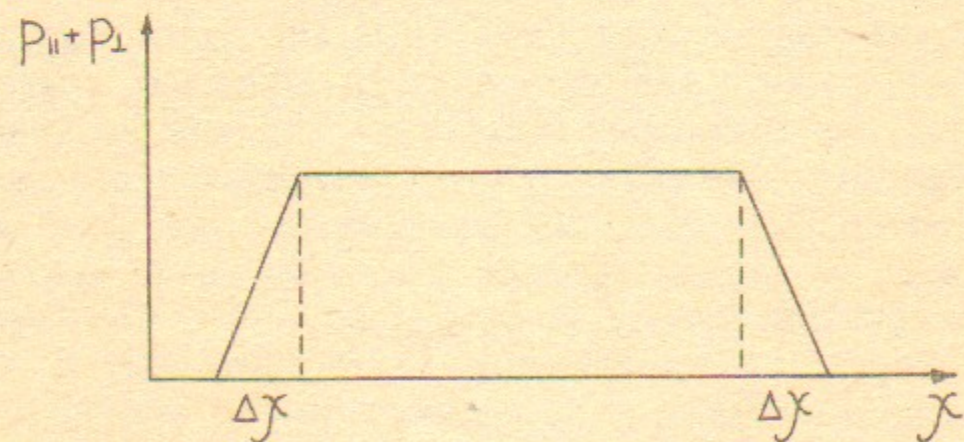


Рис. 3. Распределение давления $p_{||} + p_{\perp}$ вдоль силовой линии.

если варьировать распределение давления вдоль силовой линии. Например, откажемся от скачкообразного спада суммарного давления $p_{||} + p_{\perp}$ в пробках и введем интервал Δx , на котором оно

линейно уменьшается от p_0 до нуля (см. рис. 3). Вычисляя V_1 в предположении, что Δx много меньше всех характерных масштабов задачи, получим выражение (27), в которое добавятся слагаемые

$$\frac{1}{2} p_0 \frac{x}{r B^2} \frac{d\Delta x}{d\psi} \Big|_{x_2}^{x_1}$$

Выбирая такую зависимость $\Delta x(\psi)$, чтобы это выражение было положительным в точках, где $I = 0$, очевидно, можно достичь того, что V_1 будет всюду больше нуля.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным результатом настоящей работы является доказательство того факта, что существуют такие конфигурации магнитного поля осесимметричного пробкотрона, в которых возможно МГД устойчивое удержание плазмы малого давления. Существенно, что эти конфигурации имеют традиционную геометрию открытых ловушек, а плазма, удерживаемая в них, занимает односвязную область.

Наш вывод базируется на рассмотрении, выполненном в пределе малого пробочного отношения, $k - 1 \ll 1$, однако легко построить пример, который показывает, что этот вывод сохраняет силу и для больших пробочных отношений. Представим, что в осесимметричный пробкотрон с $k - 1 \ll 1$, в котором осуществляется устойчивое удержание плазмы (т. е. интеграл (7) в нем положителен) между пробками вставлена область неоднородного магнитного поля длины L . В этой области напряженность магнитного поля увеличивается при движении от центра ловушки к краю на величину порядка единицы, так что в результате пробочное отношение становится не малым, $k - 1 \sim 1$. Такая операция, конечно, изменяет величину интеграла, определяемого формулой (7), поскольку теперь в него вносит отрицательный вклад I_L центральная область, но этот вклад может быть сделан сколь угодно малым при больших L , поскольку в центральной области $x \propto L^{-2}$, соответственно, $I_L \propto L^{-1}$. Следовательно, делая центральный участок достаточно длинным, можно добиться того, что интеграл I останется положительным, а пробочное отношение станет большим. Заметим, что в принципе такая процедура позволяет получить даже $k \gg 1$.

Приложение 1

Рассмотрим распределение давления вдоль силовой линии, обладающее тем свойством, что сумма $p_{\parallel} + p_{\perp}$ постоянна вплоть до точки максимума поля, $p_{\parallel} + p_{\perp} = p_0 = \text{const}$, в которой эта сумма скачком обращается в нуль. Зависимости p_{\parallel} и p_{\perp} от модуля магнитного поля найдутся из уравнения равновесия вдоль силовой линии:

$$\frac{\partial p_{\parallel}}{\partial B} = \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{B}. \quad (\text{П1.1})$$

Это уравнение надо дополнить граничным условием в точке $B = B_{\text{max}}$, которое формулируется, исходя из того, что если бы $p_{\parallel}(B_{\text{max}})$ было отлично от нуля, то при переходе через скачок давления в точке $B = B_{\text{max}}$ левая часть уравнения (П1.1) имела бы там особенность типа δ -функции, тогда как правая часть в этой точке конечна. Следовательно,

$$p_{\parallel}(B_{\text{max}}) = 0. \quad (\text{П1.2})$$

Интегрируя (П1.1) с условием (П1.2), находим

$$\begin{aligned} p_{\parallel} &= \frac{1}{2} p_0 \left(1 - \frac{B^2}{B_{\text{max}}^2} \right), \\ p_{\perp} &= \frac{1}{2} p_0 \left(1 + \frac{B^2}{B_{\text{max}}^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{П1.3})$$

Найдем теперь функцию распределения ионов f по скорости v и питч-углу θ , осуществляющую распределение (П1.3). Будем пренебрегать электрическим полем в ловушке (что соответствует реальной ситуации, когда температура электронов мала по сравнению с энергией ионов) и искать f в виде

$$f = F(v^2) G(\xi), \quad (\text{П1.4})$$

где $\xi = B/B_{\text{max}} \sin^2 \theta$. Поскольку величины v и ξ постоянны вдоль траектории частицы, то представление (П1.4) не меняется при смещении вдоль силовой линии. Знание распределения давлений (П1.3) позволяет восстановить функцию $G(\xi)$, оставляя произвольной функцию $F(v^2)$. Если воспользоваться результатом работы [18], стр. 574:

$$G(\xi) = - \text{const} \cdot \xi^{5/2} \int_{\xi}^1 \left(\frac{B}{B_{\text{max}}} - \xi \right)^{-1/2} \frac{d}{dB} \left(\frac{p_{\perp}}{B^2} \right) dB \quad (\text{П1.5})$$

и выполнить интегрирование, то получим

$$G(\xi) = \text{const} \left[(1 + 2\xi) \sqrt{\xi(1-\xi)} + \text{arc tg} \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} \right]. \quad (\text{П1.6})$$

График этой функции изображен на рис. 4. Отметим, что на силовой линии с пробочным отношением k изменение ξ ограничено интервалом $k^{-1} \leq \xi \leq 1$, соответственно, реализуется только часть кривой, изображенной на рис. 4. В частности, для $k < 2$, G монотонно убывает с ростом ξ , что соответствует уменьшению функции f при увеличении угла θ (при фиксированном v).

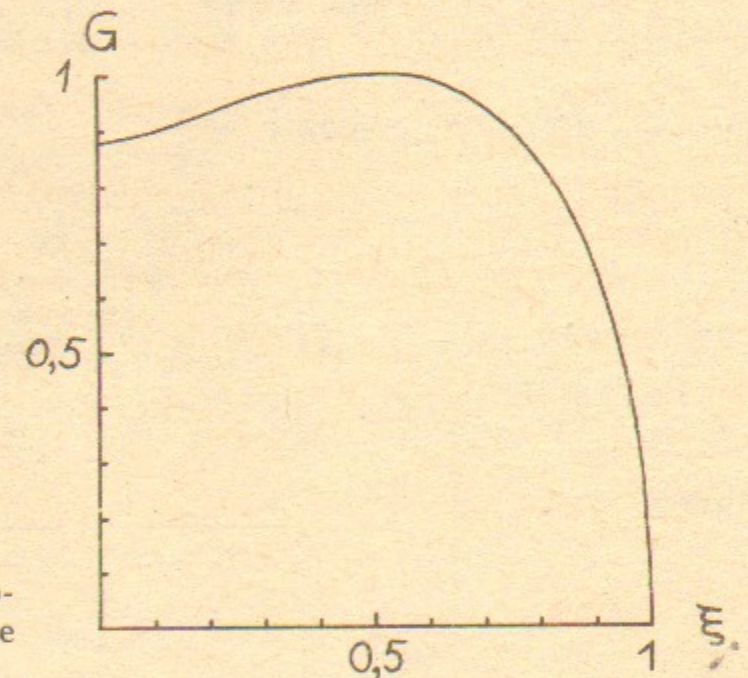


Рис. 4. График функции $G(\xi)$, нормированной на свое максимальное значение.

Как показано Ньюкомбом [18], для того чтобы условию монотонности (3) можно было удовлетворить выбором функции $F(v^2)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{d \ln G}{d \ln \xi} \leq \frac{1}{2}. \quad (\text{П1.7})$$

Легко видеть даже из рис. 4, что в нашем случае это неравенство выполняется и, следовательно, распределение давления (П1.3) может быть создано с помощью монотонно убывающей по энергии (при фиксированном μ) функцией.

Приложение 2

Вычислим интеграл (7) в приосевой области пробкотрона с малым пробочным отношением. Формально будем считать, что отношение r^2/l^2 порядка величины $\varepsilon \equiv k-1$ и удержим главные члены разложения I в ряд по этим параметрам.

Определим поток ψ , заключенный внутри магнитной трубки, ограниченной силовой линией, проходящей через точку r, z :

$$\psi(r, z) = \int_0^r 2B_z(z, r') r' dr'. \quad (\text{П2.1})$$

Подставляя в (П2.1) выражение (11) для B_z и проводя интегрирование, из условия сохранения потока найдем форму силовой линии с нужной для нас точностью

$$r(z) = \sqrt{\frac{\psi}{\mathcal{B}}} \left(1 + \frac{1}{16} \frac{\mathcal{B}''}{\mathcal{B}^2} \psi \right). \quad (\text{П2.2})$$

Находя кривизну по формуле

$$\kappa \simeq \frac{d^2 r}{dz^2} \quad (\text{П2.3})$$

и подставляя (П2.2), (П2.3) в (7) вместе с

$$ds \simeq dz, \quad B \simeq \mathcal{B},$$

получим

$$\begin{aligned} I &= \int_{z_2^*}^{z_1^*} \frac{dz}{\mathcal{B}^{3/2}} \frac{d^2}{dz^2} \mathcal{B}^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{16} \mathcal{B}'' \mathcal{B}^{-2} \psi \right) \simeq \\ &\simeq \left(\frac{1}{16} \frac{\mathcal{B}'' \psi}{\mathcal{B}^4} - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{B}'}{\mathcal{B}^3} \right) \Big|_{z_2^*}^{z_1^*} - \frac{3}{4} \int_{z_2^*}^{z_1^*} \frac{dz}{\mathcal{B}^4} (\mathcal{B}')^2, \end{aligned} \quad (\text{П2.4})$$

где z_2^* и z_1^* обозначают z -координаты максимумов поля на рассматриваемой силовой линии ($z_2^* < z_1^*$). В интеграле (П2.4) удержаны только главные члены, имеющие порядок ε^2 .

Учтем теперь, что z_1^* отличается от координаты z_1 максимума поля на оси на величину ζ^* , задаваемую выражением (14),

поэтому

$$\mathcal{B}'|_{z_1^*} = \zeta^* \mathcal{B}''(z_1) = \frac{1}{4} r^2 \mathcal{B}'''(z_1), \quad (\text{П2.5})$$

где r обозначает радиальную координату силовой линии в пробке; аналогичное соотношение имеет место и в точке z_2^* . Подставляя (П2.5) в (П2.4), заменяя пределы интегрирования в последнем интеграле в (П2.4) на z_2 и z_1 и полагая $\psi = r^2 \mathcal{B}$, получим выражение (16).

ЛИТЕРАТУРА

1. Рютов Д.Д., Ступаков Г.В. В сб.: Вопросы теории плазмы/ Под ред. Кадомцева Б.Б. М.: Энергоатомиздат, 1984, вып.13, с.74.
2. Logan V.G. Comments on Plasma Phys. and Contr. Fusion, 1981, v.6, p.199.
3. Logan V.G. Comments on Plasma Phys. and Contr. Fusion, 1980, v.5, p.271.
4. Димов Г.И. Препринт ИЯФ СО АН СССР 82-150; Новосибирск, 1982.
5. Димов Г.И., Лысянский П.Б. Препринт ИЯФ СО АН СССР 86-102; Новосибирск, 1986.
6. Арсенин В.В. Физика плазмы, 1979, т.5, с.1293.
7. Арсенин В.В. Физика плазмы, 1982, т.8, с.484.
8. Арсенин В.В. Письма в ЖЭТФ, 1983, т.37, с.534.
9. Арсенин В.В. Письма в ЖЭТФ, 1986, т.43, с.270.
10. Мирнов В.В., Рютов Д.Д. Письма в ЖТФ, 1979, т.5, с.678.
11. Kesner J. Nucl. Fusion, 1985, v.25, p.275.
12. Тимофеев А.В. Письма в ЖЭТФ, 1979, т.29, с.227.
13. Hinton F.L., Rosenbluth M.N., Longmire C. Nuclear Fusion, 1982, v.22, p.1547.
14. Котельников И.А., Росляков Г.В., Рютов Д.Д. Препринт ИЯФ СО АН СССР 86-31; Новосибирск, 1986.
15. Ryutov D.D. Plasma Phys. and Contr. Fusion, 1986, v.28, p.191.
16. Рютов Д.Д., Ступаков Г.В. Физика плазмы, 1986, т.12, с.1411.
17. Rosenbluth M.N., Longmire C. App. Phys., 1957, v.1, p.120.
18. Newcomb W.A. J. Plasma Phys., 1981, v.26, p.529.
19. Kruskal M.D., Oberman C.R. Phys. Fluids, 1958, v.1, p.275.
20. Михайловский А.Б. Неустойчивость плазмы в магнитных ловушках. М.: Атомиздат, 1971, с.62.

Г.В. Ступаков

**О возможности МГД устойчивого удержания плазмы
в осесимметричном пробкотроне**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 2 октября 1986 г.
Подписано в печать 12.02. 1987 г. МН 09041
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1,7 печ.л., 1,4 уч.-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ № 14

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и
отпечатано на ротапринтере Института ядерной физики
СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*